JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 5-18.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la stabilité, pour des perturbations quelconques, d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme;

PAR M. P. DUHEM.

1. Introduction.

Dans un précédent Travail ([1]), nous avons établi, par une méthode imitée de Lejeune-Dirichlet, un criterium qui assure la stabilité de l'équilibre relatif d'un système animé d'un mouvement de rotation uniforme. Toutefois, le criterium que nous avons donné est soumis à une restriction; il suppose que la perturbation apportée au système ne modifie pas le moment par rapport à l'axe de rotation de la quantité

([1]) *Sur la stabilité de l'équilibre relatif d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* (*Journal de Mathématiques*, 5e série, t. VII, 1901, p. 331).

de mouvement de ce système. Cette restriction est évidemment regrettable, car les actions perturbatrices étant, en général, inconnues, il est difficile de savoir si la condition précédente est ou n'est pas vérifiée. Il est donc désirable d'affranchir le criterium précédemment trouvé de cette restriction embarrassante. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le présent écrit.

Au cours de la présente démonstration, comme au cours de la précédente, il est fait usage d'un sens quelque peu particulier des mots : *état voisin d'un état donné*. De là pourraient peut-être naître quelques confusions que nous allons chercher à prévenir.

Prenons un système, dépendant d'un nombre illimité de paramètres, mais défini lorsque l'on connaît, pour chacune des masses élémentaires dm qui le composent, les valeurs d'un certain nombre de variables; soient, par exemple, pour nous rapprocher du problème qui nous occupe, les variables r, z, ψ. Soit e_0 un état du système où, pour la masse dm, ces variables ont des valeurs r_0, z_0, ψ_0; soit e un autre état où, pour la même masse dm, ces variables ont des valeurs r, z, ψ. *Ordinairement*, on dit que l'état e est infiniment voisin de l'état e_0 si, pour toutes les masses dm du système, les quantités

$$r - r_0, \quad z - z_0, \quad \psi - \psi_0$$

sont infiniment petites.

Nous écartant de cet usage, *nous dirons que l'état e est infiniment voisin de l'état e_0 si les quantités*

$$\int |r - r_0|\, dm, \quad \int |z - z_0|\, dm, \quad \int |\psi - \psi_0|\, dm$$

sont infiniment petites.

Il est clair que les secondes conditions sont vérifiées lorsque les premières le sont, en sorte que *parmi les états e, qui sont voisins de l'état e_0 selon notre définition, se trouvent, en particulier, tous ceux qui sont voisins de l'état e_0 selon la définition habituelle.*

Mais la réciproque de cette proposition n'est point exacte; parmi les états e qui, selon notre définition, sont voisins de l'état e_0, il en est qui ne sont pas voisins de cet état e_0 aux termes de la définition habituelle. Ce sont tous ceux pour lesquels l'une au moins des quantités

$$r - r_0, \quad z - z_0, \quad \psi - \psi_0$$

demeure finie pour certaines masses dm, mais où la somme des masses dm, pour lesquelles il en est ainsi, demeure infiniment petite.

En d'autres termes, selon la définition habituellement reçue, l'état e est infiniment voisin de l'état e_0 si, dans le passage de l'état e_0 à l'état e, chaque masse élémentaire a subi une perturbation infiniment petite; selon la définition que nous acceptons, certaines masses pourront avoir subi une perturbation finie, mais la somme de ces masses devra être infiniment petite.

Ce changement dans le sens des mots : *état voisin d'un état donné*, entraîne forcément un changement dans le sens des mots : *minimum d'une grandeur qui dépend de l'état du système*.

On dit, en effet, qu'une grandeur F qui dépend de l'état du système atteint une valeur minimum F_0 dans l'état e_0 si, en tout état e, *voisin* de l'état e_0, cette grandeur F prend une valeur supérieure à F_0.

Traduisons cette définition en acceptant le sens habituel des mots : *état voisin*; nous arriverons à la proposition suivante :

On peut trouver des quantités positives σ, ζ, χ telles que l'on ait

$$F - F_0 > 0,$$

toutes les fois que l'on a, pour toute masse dm,

$$0 < |r - r_0| < \sigma,$$
$$0 < |z - z_0| < \zeta,$$
$$0 < |\psi - \psi_0| < \chi.$$

Traduisons, au contraire, la même définition en acceptant le sens nouveau du mot : *état voisin*; nous arriverons à la proposition suivante :

On peut trouver des quantités positives σ, ζ, χ telles que l'on ait

$$F - F_0 > 0,$$

toutes les fois que l'on a

$$o < \int |r - r_0| \, dm < \sigma,$$

$$o < \int |z - z_0| \, dm < \zeta,$$

$$o < \int |\psi - \psi_0| \, dm < \gamma.$$

Il est clair que, *si la quantité* F *est minimum dans l'état* e_0 *du système selon le nouveau sens des mots :* ÉTAT VOISIN, *elle est également minimum selon l'ancien sens; mais la réciproque de cette proposition peut n'être pas exacte.*

Cette proposition entraîne immédiatement cette autre : Si, par les méthodes habituelles du calcul des variations, on détermine les conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit minimum, *au sens ordinaire du mot,* dans un certain état e_0 du système, ces conditions seront encore nécessaires, mais peut-être plus suffisantes, pour que F y soit minimum *au sens nouveau du mot.*

Cette remarque a une certaine importance dans la question qui nous occupe.

Nous avons trouvé, dans notre précédent écrit, qu'une masse animée d'un mouvement uniforme de rotation était assurément en équilibre stable (au moins pour certaines perturbations) dans un état où, sous certaines conditions, une certaine grandeur Φ était minimum *au sens nouveau du mot.*

Si, par les méthodes habituelles du calcul des variations, nous cherchons des conditions suffisantes pour que Φ soit minimum *au sens ancien du mot,* il pourra se faire que les conditions trouvées ne suffisent pas à assurer la stabilité de l'équilibre relatif. Lors donc que, par une telle méthode, nous trouvons des conditions de stabilité dites *suffisantes,* nous ne devrons pas oublier que cette suffisance fait l'objet d'un doute, tant qu'on n'a pas démontré qu'elle entraîne le minimum de Φ *au sens nouveau du mot.*

Mais il est d'autres recherches qui ne donnent pas prise à cette objection.

Ayant démontré qu'un certain minimum de Φ, *entendu au sens nouveau du mot*, suffit à assurer la stabilité de l'équilibre relatif, *nous postulons* ([1]) que cette même condition est nécessaire pour cette stabilité. Ce postulat une fois admis, si nous trouvons quelque condition nécessaire pour que Φ soit minimum *au sens ancien du mot*, cette condition sera nécessaire pour que l'équilibre relatif soit stable.

Le lecteur appliquera sans peine ces remarques aux propositions que renferme le § 5 de notre précédent Travail.

On peut maintenant se demander pourquoi nous avons changé le sens commun des mots : *état voisin d'un état donné*, et si le but que nous poursuivons n'aurait pas pu être atteint en conservant à ce mot le sens que l'on a accoutumé de lui attribuer. Il ne nous paraît pas que cela soit possible, et voici pourquoi.

Si l'on adoptait le sens ordinaire des mots : *état voisin d'un état donné*, on pourrait commencer la démonstration donnée en notre précédent Travail exactement de la même manière, sauf à supprimer les signes $\int$ qui figurent dans les inégalités (21) et dans les diverses conditions écrites à la page suivante. *Mais il ne serait plus possible de dire que l'ensemble des valeurs prises par la quantité*

$$\left(\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm\right) \quad (^2)$$

dans les divers états E *admet une limite inférieure* P *nécessairement supérieure à zéro, car il ne serait plus vrai de dire qu'un état* E *ne peut être infiniment voisin de l'état d'équilibre primitif* $(\omega_0, r_0, \psi_0, z_0, \varphi = 0)$.

Un état E, en effet, serait forcément défini par les conditions suivantes :

1° Le moment de la quantité de mouvement a pour valeur M;

([1]) Depuis la rédaction du présent Travail, nous avons reconnu que cette condition n'était pas toujours *nécessaire* pour que l'équilibre du système soit stable.

([2]) Aux pages 337 et 338 du précédent Travail, nous avons, par erreur, dit Φ au lieu de $\left(\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm\right)$.

2° Il existe des parties du système où l'une au moins des inégalités

$$-r_0\,|<\sigma, \qquad |\psi-\psi_0|<\chi, \qquad |z-z_0|<\zeta,$$
$$|\omega-\omega_0|<\varepsilon, \qquad \varphi<f$$

se transforme en égalité. Il est clair que, pour de tels états E, la somme $\left(\Phi+\frac{1}{2}\int\varphi^2\,dm\right)$ n'a d'autre limite inférieure que zéro.

Toute la démonstration tomberait donc si, au sens nouveau des mots: *état voisin d'un état donné,* on essayait de substituer le sens ancien.

Après la perturbation, l'état e_1 du système troublé doit être un *état voisin* de l'état e_0 que le système présentait avant la perturbation. Dans notre précédent Travail, nous avions admis [comme on le voit à l'inspection des conditions (20) de l'écrit auquel nous faisons allusion] que l'état troublé e_1 était voisin de l'état d'équilibre e_0 *au sens ancien du mot.* Il est plus logique, et en même temps plus général, d'admettre que ces deux états sont voisins *au sens nouveau du mot.* C'est ce que nous avons admis dans nos *Recherches sur l'Hydrodynamique* (¹), en traitant de la stabilité de l'équilibre absolu; c'est aussi ce que nous admettons dans ce qui va suivre, comme on le voit à l'inspection des conditions (1) du présent écrit.

2. Stabilité de l'équilibre relatif pour des perturbations qui altèrent le moment de la quantité de mouvement.

Soit M_0 *une valeur du moment de la quantité de mouvement. Supposons que, pour toute valeur* M, *suffisamment voisine de* M_0, *de la même quantité, on puisse énoncer les propositions suivantes :*

1° *A chaque valeur de* M *correspond un état d'équilibre* $\mathcal{E}$ *dans lequel la somme* $\Phi=\mathfrak{F}+\Omega+W$ *prend une valeur minimum parmi celles qu'elle peut prendre sans changement dans la valeur de* M.

2° *L'état* $\mathcal{E}$ *varie d'une manière continue lorsque la valeur de* M *varie d'une manière continue.*

(¹) *Recherches sur l'Hydrodynamique,* première Partie, Chap. II, § 3 (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2ᵉ série, t. III; 1901).

Dans ces conditions, l'état $\mathcal{E}_0$ qui correspond à la valeur M_0 de M est stable même pour les perturbations qui altèrent le moment de la quantité de mouvement du système.

Conservons aux quantités r, z, ψ, ω, φ le sens qu'elles ont dans notre précédent Travail. Soient r_0, z_0, ψ_0, ω_0, $\varphi_0 = 0$ les valeurs qu'elles prennent dans l'état $\mathcal{E}_0$.

Nous donnons au système une perturbation à la suite de laquelle ces quantités prennent les valeurs nouvelles r'_1, z'_1, ψ'_1, ω'_1, φ'_1; le moment de la quantité de mouvement a alors une valeur M_1; le système se trouve dans un état e'_1, qui n'est pas, en général, l'état d'équilibre $\mathcal{E}_1$ relatif à la valeur M_1 du moment de la quantité de mouvement; en cet état d'équilibre $\mathcal{E}_1$, les variables r, z, ψ, ω, φ prennent des valeurs r_1, z_1, ψ_1, ω_1, $\varphi_1 = 0$.

Après la perturbation, le système prend un certain mouvement; et comme les forces extérieures ont un moment nul par rapport à l'axe de rotation, le moment de la quantité de mouvement garde la valeur M_1. Au temps t après la perturbation, le système est, dans un état e, caractérisé par des valeurs r, z, ψ, ω, φ des variables.

La proposition que nous voulons démontrer peut, d'une manière précise, s'énoncer ainsi :

Quelque petites que soient les quantités positives

$$\varepsilon, \quad \sigma, \quad \chi, \quad \zeta, \quad f,$$

on peut choisir pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 des valeurs positives si petites que les inégalités

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int |\omega'_1 - \omega_0|\, dm &< \varepsilon_1, \\ \int |r'_1 - r_0|\, dm &< \sigma_1, \\ \int |\psi'_1 - \psi_0|\, dm &< \chi_1, \\ \int |z'_1 - z_0|\, dm &< \zeta_1, \\ \int |\varphi'_1|\, dm &< f_1 \end{aligned} \right.$$

entraînent, quel que soit t, les inégalités

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int|\omega-\omega_0|\,dm<\varepsilon,\\ &\int|r-r_0|\,dm<\sigma,\\ &\int|\psi-\psi_0|\,dm<\chi,\\ &\int|z-z_0|\,dm<\zeta,\\ &\qquad\int|\varphi|\,dm<f. \end{aligned}\right.$$

Nous remarquerons, en premier lieu, que l'on peut toujours, pour démontrer le théorème indiqué, remplacer les quantités ε, σ, χ, ζ, f par des quantités plus petites; le théorème, démontré avec ces nouvelles valeurs, sera vrai *a fortiori* avec les anciennes.

A chaque valeur M_1 du moment de la quantité de mouvement correspond un état d'équilibre $\mathcal{E}_1$ et, à cet état $\mathcal{E}_1$, une valeur Φ_1 qui est un minimum parmi celles que Φ peut prendre sans changement dans la valeur du moment M_1. Dès lors, pourvu que $|M_1-M_0|$ n'excède pas une certaine limite, il est clair que l'on peut toujours choisir pour ε, σ, χ et ζ des valeurs indépendantes de M_1 et assez petites pour que l'on ait assurément

$$(3)\qquad \Phi_1''-\Phi_1>0$$

toutes les fois que l'on a

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int|\omega_1''-\omega_1|\,dm\leqq\frac{\varepsilon}{2},\\ &\int|r_1''-r_1|\,dm\leqq\frac{\sigma}{2},\\ &\int|\psi_1''-\psi_1|\,dm\leqq\frac{\chi}{2},\\ &\int|z_1''-z_1|\,dm\leqq\frac{\zeta}{2}, \end{aligned}\right.$$

l'état e''_1 que définissent les valeurs ω''_1, r''_1, ψ''_1, z''_1 des variables correspondant à la même valeur M_1 du moment de la quantité de mouvement que les états $\mathcal{E}_1$ et e'_1.

Dans cet énoncé, on sous-entend, cela va sans dire, que l'on n'a pas en tout point

$$\omega''_1 = \omega_1, \qquad r''_1 = r_1, \qquad \psi''_1 = \psi_1, \qquad z''_1 = z_1,$$

cas auquel l'état e''_1 serait identique à l'état $\mathcal{E}_1$ et le premier membre de l'inégalité (3) serait égal à o.

Dans ces conditions, nous voyons que nous aurons à coup sûr, pour toutes les valeurs de M_1 comprises dans les limites données,

$$\Phi''_1 + \frac{1}{2}\int \varphi''_1\, dm - \Phi_1 > 0 \tag{5}$$

toutes les fois que nous aurons

$$\left\{ \begin{aligned} &\int |\, \omega''_1 - \omega_1 \,|\, dm \leqq \frac{\varepsilon}{2}, \\ &\int |\, r''_1 - r_1 \,|\, dm \leqq \frac{\sigma}{2}, \\ &\int |\, \psi''_1 - \psi_1 \,|\, dm \leqq \frac{\chi}{2}, \\ &\int |\, z''_1 - z_1 \,|\, dm \leqq \frac{\zeta}{2}, \\ &\qquad\qquad \int \varphi''_1\, dm \leqq f, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

sauf dans le cas où nous aurions

$$\omega''_1 = \omega_1, \qquad r''_1 = r_1, \qquad \psi''_1 = \psi_1, \qquad z''_1 = z_1, \qquad \varphi''_1 = 0, \tag{7}$$

cas auquel l'inégalité (5) se changerait en égalité.

Nous pourrons toujours supposer, et nous supposerons désormais, que l'on ait pris pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 des valeurs assez petites pour que $|\, M_1 - M_0 \,|$ reste compris dans les limites où la proposition précédente est exacte.

Nous dirons qu'un état du système est un état E_1 lorsqu'il satisfera aux conditions suivantes :

1° Le moment de la quantité de mouvement est M_1 ;

2° L'une au moins des conditions (6) a pris la forme d'une égalité ;

3° Toutes les conditions (6) sont vérifiées.

En un état E_1, les égalités (7) ne sont ni vérifiées, ni infiniment près d'être vérifiées; donc, en un tel état, le premier membre de l'inégalité (5) n'est ni égal à o, ni infiniment près d'être égal à o.

Considérons donc toutes les valeurs de M_1 comprises dans les limites où cette quantité peut varier, puis tous les états E_1 qui correspondent à chacune de ces valeurs de M_1. Pour chacun de ces états E_1, formons la somme

$$\Phi''_1 + \frac{1}{2}\int \varphi''_1\, dm - \Phi_1.$$

L'ensemble de ces quantités sera limité inférieurement par une certaine valeur positive P, indépendante de M_1; en sorte que, quelle que soit la valeur M_1 du moment de la quantité de mouvement, et quel que soit l'état E_1 qu'on lui fasse correspondre, on aura

$$(8) \qquad \Phi''_1 + \frac{1}{2}\int \varphi''_1\, dm - \Phi_1 \geqq P.$$

Cela posé, considérons les inégalités (2); elles seront sûrement vérifiées si l'on a en l'état e, quel que soit t,

$$(9) \qquad \left\{\begin{aligned} &\int |\omega - \omega_1|\, dm + \int |\omega_1 - \omega_0|\, dm < \varepsilon,\\ &\int |r - r_1|\, dm + \int |r_1 - r_0|\, dm < \sigma,\\ &\int |\psi - \psi_1|\, dm + \int |\psi_1 - \psi_0|\, dm < \chi,\\ &\int |z - z_1|\, dm + \int |z_1 - z_0|\, dm < \zeta,\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \int |\varphi|\, dm < f. \end{aligned}\right.$$

Mais on peut évidemment choisir pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1 des valeurs si petites que M_1 diffère de M_0 aussi peu que l'on veut; et comme l'état d'équilibre $\mathcal{E}_1$ varie d'une manière continue avec M_1, on peut évidemment choisir pour ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1 des valeurs si petites que l'état $\mathcal{E}_1$ diffère aussi peu que l'on veut de l'état $\mathcal{E}_0$ et que l'on ait

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int |\omega_1 - \omega_0|\,dm < \frac{\varepsilon}{4},\\ &\int |r_1 - r_0|\,dm < \frac{\sigma}{4},\\ &\int |\psi_1 - \psi_0|\,dm < \frac{\chi}{4},\\ &\int |z_1 - z_0|\,dm < \frac{\zeta}{4}. \end{aligned}\right.$$

Alors, pour que les inégalités (9) soient vérifiées quel que soit t, il suffira que les inégalités

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int |\omega - \omega_1|\,dm < \frac{\varepsilon}{2},\\ &\int |r - r_1|\,dm < \frac{\sigma}{2},\\ &\int |\psi - \psi_1|\,dm < \frac{\chi}{2},\\ &\int |z - z_1|\,dm < \frac{\zeta}{2},\\ &\qquad \int |\varphi|\,dm < f \end{aligned}\right.$$

soient vérifiées, quel que soit t.

Or, en premier lieu, on peut prendre ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 assez petits pour qu'elles soient sûrement vérifiées à l'instant $t = 0$, où l'on a

$$\omega = \omega'_1, \qquad r = r'_1, \qquad \psi = \psi'_1, \qquad z = z'_1, \qquad \varphi = \varphi'_1.$$

En effet, pour qu'elles se trouvent vérifiées à cet instant, il suffit évidemment que l'on ait

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int|\omega_1' - \omega_0|\,dm + \int|\omega_0 - \omega_1|\,dm < \frac{\varepsilon}{2},\\ &\int|r_1' - r_0|\,dm + \int|r_0 - r_1|\,dm < \frac{\sigma}{2},\\ &\int|\psi_1' - \psi_0|\,dm + \int|\psi_0 - \psi_1|\,dm < \frac{\chi}{2},\\ &\int|z_1' - z_0|\,dm + \int|z_0 - z_1|\,dm < \frac{\zeta}{2},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \int|\varphi_1'|\,dm < f \end{aligned}\right.$$

ou bien, en vertu des inégalités (10), que l'on suppose déjà vérifiées, il suffit que l'on ait

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int|\omega_1' - \omega_0|\,dm < \frac{\varepsilon}{4},\\ &\int|r_1' - r_0|\,dm < \frac{\sigma}{4},\\ &\int|\psi_1' - \psi_0|\,dm < \frac{\chi}{4},\\ &\int|z_1' - z_0|\,dm < \frac{\zeta}{4},\\ &\qquad \int|\varphi_1'|\,dm < f. \end{aligned}\right.$$

Il est évident que l'on peut prendre ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 assez petits pour que ces inégalités soient vérifiées.

Les inégalités (11) sont donc vérifiées à l'instant $t = 0$; dès lors, pour qu'elles cessassent d'être vérifiées à partir d'un certain instant t, il faudrait qu'à cet instant t l'état e du système fût un état E_1; nous prouverons donc que les inégalités (11) demeurent vraies quel que soit t, si nous prouvons que l'on peut choisir ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1, f_1 si petits que l'état e ne puisse jamais devenir un état E_1; pour cela, il suffit, en vertu de l'inégalité (8), de prouver que l'on peut choisir ε_1, σ_1, χ_1,

ζ_1, f_1 assez petits pour que l'on ait, quel que soit t,

$$(14) \qquad \Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm - \Phi_1 < \mathrm{P}.$$

Le premier membre de l'égalité (14) peut s'écrire

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm - \Phi'_1 + (\Phi'_1 - \Phi_0) + (\Phi_0 - \Phi_1).$$

Il est clair, tout d'abord, que l'on peut choisir ε_1, σ_1, χ_1, ζ_1 assez petits pour que l'on ait

$$(15) \qquad \begin{cases} \Phi'_1 - \Phi_0 < \dfrac{\mathrm{P}}{3}, \\ \Phi_0 - \Phi_1 < \dfrac{\mathrm{P}}{3}. \end{cases}$$

D'autre part, le principe des forces vives nous donne la condition

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm \leqq \Phi'_1 + \frac{1}{2}\int \varphi'^2_1\, dm,$$

le signe $<$ convenant au cas où il y a eu travail des actions de viscosité et de frottement dans le passage de l'état e'_1 à l'état e, et le signe $=$ convenant au cas où ces actions n'ont effectué aucun travail. Nous avons donc

$$\Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm - \Phi'_1 \leqq \frac{1}{2}\int \varphi'^2_1\, dm.$$

Si nous prenons f_1 assez petit pour que nous ayons

$$\frac{1}{2}\int \varphi'^2_1\, dm < \frac{\mathrm{P}}{3},$$

nous aurons aussi, quel que soit t,

$$(16) \qquad \Phi + \frac{1}{2}\int \varphi^2\, dm - \Phi'_1 < \frac{\mathrm{P}}{3}.$$

Les inégalités (15) et (16) ayant lieu quel que soit t, il en sera de même de l'inégalité (14) et le théorème sera démontré.

Une dernière remarque est nécessaire.

Le potentiel interne $\mathcal{F}$ ne varie pas lorsqu'on donne au système un déplacement d'ensemble dans l'espace; la quantité W ne varie pas lorsqu'on lui donne une translation quelconque parallèle à l'axe Oz de rotation, et il en est de même de la somme $(\mathcal{F} + W)$. Il peut arriver que la quantité Ω demeure, elle aussi, invariable lorsque le système se meut parallèlement à Oz; c'est ce qui aura lieu, en particulier, si les actions extérieures sont nulles, comme il arrive dans plusieurs problèmes de grande importance.

Dans ce cas, nous déterminerons chaque point par sa distance z à un plan mené perpendiculairement à l'axe de rotation et non pas fixe dans l'espace, mais passant toujours par un même point matériel choisi une fois pour toutes; de la sorte, deux états qui se déduiront l'un de l'autre par une simple translation parallèle à l'axe de rotation ne seront pas considérés comme distincts. De même, au lieu de considérer la vitesse que nous nommons φ, il faudra considérer la vitesse analogue en supposant le mouvement de chaque point rapporté non à un plan fixe normal à l'axe de rotation, mais au plan variable que nous venons de définir. Enfin, dans la définition de la stabilité, on devra regarder un système comme immobile lorsqu'il est simplement animé d'un mouvement de translation uniforme parallèle à l'axe de rotation.

Il suffit d'indiquer cette remarque, qui a son analogue dans l'étude de la stabilité d'un système défini par un nombre limité de paramètres variables ([1]).

([1]) P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 353.