JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. ZAREMBA

Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 5ᵉ série, tome 8 (1902), p. 59-117.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__59_0>

Sur l'intégration de l'équation $\Delta u + \xi u = 0$;

Par M. S. ZAREMBA.

I. — Introduction.

1. On sait le rôle considérable que jouent, à divers points de vue, les problèmes qui consistent à déterminer, pour un domaine donné, l'intégrale de l'équation

$$(1) \qquad \Delta u + \xi u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \xi u = 0,$$

où ξ est une constante, définie par les valeurs périphériques de l'intégrale elle-même ou par celles de la dérivée suivant la normale à la surface limitant le domaine proposé. Ces problèmes sont des cas particuliers de problèmes que nous allons énoncer dans un instant, après avoir rappelé certains faits bien connus et défini des notations que nous conserverons dans toute l'étendue de ce Travail.

Nous aurons à considérer constamment une surface fermée (S) au sujet de laquelle nous ferons les hypothèses suivantes : elle admettra en chacun de ses points un plan tangent déterminé; l'angle aigu formé par deux normales sera inférieur au produit d'une constante par la distance des pieds de ces normales; si l'on désigne par (S′) la portion de la surface située à l'intérieur d'une sphère de rayon fixe, mais assez petit, dont le centre soit un point quelconque O de la surface, la portion (S′) de la surface (S) aura au plus un seul point d'intersection avec chaque parallèle à la normale en O.

Nous désignerons par (D) le domaine intérieur à la surface (S) et par (D′) le domaine extérieur.

On remarquera que nos hypothèses ne limitent pas le nombre de nappes faisant partie de la surface (S) et qu'elles n'impliquent nullement que les domaines (D) et (D′) soient forcément connexes, ni même que l'un d'eux offre cette particularité.

Considérons maintenant une fonction quelconque $F(x, y, z)$ des coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point variable M. Cette fonction pourra tendre vers une limite déterminée lorsque le point M tend vers un point situé sur la surface (S) sans sortir de l'un des domaines (D) ou (D′). Nous désignerons cette limite par $(F)_i$ dans le premier cas et par $(F)_e$ dans le second. Les fonctions $(F)_i$ et $(F)_e$, calculées pour un même point (x_0, y_0, z_0) de la surface (S), pourront non seulement différer entre elles, mais, en outre, chacune d'elles pourra avoir une valeur différente de l'expression $F(x_0, y_0, z_0)$, expression que nous désignerons par $(F)_s$.

Supposons maintenant que le point (x, y, z) soit situé sur la normale élevée en un point A à la surface (S) et envisageons l'expression

$$\alpha \frac{\partial F}{\partial x} + \beta \frac{\partial F}{\partial y} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z},$$

où α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale regardée comme un axe dirigé vers l'intérieur de la surface (S). Il pourra arriver que l'expression précédente tende vers une limite déterminée lorsque le point (x, y, z) tend vers le point A, sans sortir de l'un des domaines (D) ou (D′). Nous représenterons cette limite par $\left(\frac{dF}{dN}\right)_i$ dans le premier cas et par $\left(\frac{dF}{dN}\right)_e$ dans le second; dans le cas où l'on aurait, sur toute la surface (S),

$$\left(\frac{dF}{dN}\right)_e = \left(\frac{dF}{dN}\right)_i,$$

nous représenterons la valeur commune de ces expressions par $\frac{dF}{dN}$.

Soit μ celle des déterminations de l'expression $\sqrt{-\xi}$ dont la partie réelle est positive, et soit r la distance de deux points quelconques

(x, y, z) et (x', y', z'). On sait que l'expression

$$\frac{e^{-\mu r}}{r},$$

où e est la base des logarithmes népériens, est une intégrale particulière de l'équation (1). Cette intégrale présente les plus grandes analogies avec l'intégrale particulière $\frac{1}{r}$ de l'équation de Laplace. Désignons par σ et ϖ des fonctions continues définies sur la surface (S), regardons les variables x', y', z' comme les coordonnées d'un élément ds de la surface (S) et considérons les fonctions

$$u = \int_s \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds \tag{2}$$

et

$$v = \int_s \varpi \frac{d}{dr} \frac{e^{-\mu r}}{r} \cos\psi ds, \tag{3}$$

où ψ représente l'angle formé par la normale intérieure à l'élément ds avec le rayon allant du point (x, y, z) à l'élément ds. A cause de l'analogie évidente des fonctions u et v avec les potentiels newtoniens de simple couche et de double couche, nous appellerons les fonctions u et v, dont évidemment chacune est une intégrale de l'équation (1), *potentiel généralisé d'une simple couche de densité* σ et *potentiel généralisé* (¹) *d'une double couche de densité* ϖ, ayant pour nombre caractéristique le nombre μ.

Cela posé, soient φ une fonction continue définie sur la surface (S) et λ un paramètre donné.

Les problèmes auxquels il a été fait allusion plus haut consistent en ceci : déterminer un potentiel généralisé de simple couche u et un po-

---

(¹) Dès 1896, M. C. Neumann a fait usage de ces potentiels généralisés pour étendre, dans le cas de surfaces *convexes*, sa méthode de la moyenne arithmétique aux équations de la forme $\Delta\psi - \alpha^2\psi = 0$ (*Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip de Fernwirkungen*, p. 252). On trouvera aussi de nombreuses applications des potentiels généralisés dans mon Mémoire *Sur l'équation* $\Delta u + \xi u + f = 0$ *et sur les fonctions harmoniques* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1899).

tentiel généralisé de double couche v vérifiant les équations

$$(4)\qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e-\left(\frac{du}{dN}\right)_i=\lambda\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_e+\left(\frac{du}{dN}\right)_i\right\}+2\varphi.$$

$$(5)\qquad (v)_i-(v)_e=\lambda\{(v)_i+(v)_e\}+2\varphi.$$

En attribuant au paramètre λ une des valeurs $+1$ ou -1, on réduit les problèmes précédents aux problèmes classiques énoncés au début.

Nous nous proposons d'étudier les fonctions u et v comme fonctions du paramètre λ, en nous restreignant au cas où le nombre ξ est réel et non positif. Les principaux résultats que nous obtenons peuvent être résumés ainsi :

1° On peut satisfaire aux équations (4) et (5) par des valeurs de u et v, fonctions analytiques du paramètre λ, et chacune de ces fonctions analytiques est parfaitement déterminée. En dehors de ces solutions, les équations (4) et (5) peuvent admettre des solutions qui ne sont pas des fonctions analytiques de λ. Ces solutions non analytiques ne se distinguent des solutions analytiques que pour certaines valeurs isolées du paramètre λ. Dans l'énoncé des autres résultats, nous supposerons que l'on a pris pour u et v les valeurs qui sont des fonctions analytiques de λ.

2° Les fonctions u et v de λ sont des fonctions uniformes admettant au plus un seul point singulier essentiel. Ce point singulier, quand il existe, est toujours à l'infini. Les points singuliers non essentiels des fonctions u et v sont des pôles simples faisant tous partie d'une même suite de nombres réels et distincts

$$(6)\qquad \lambda_1,\quad \lambda_2,\quad \lambda_3,\quad \ldots,$$

vérifiant les inégalités

$$(7)\qquad |\lambda_k|<|\lambda_{k-1}|;$$

la suite (6) est indépendante de la fonction φ; elle est parfaitement déterminée par le paramètre ξ et par la surface (S). J'ajoute que l'on a

$$|\lambda_1|>1,$$

lorsque $\xi < 0$; mais lorsque $\xi = 0$, on a, à la fois,

$$\lambda_1 = +1 \qquad \text{et} \qquad |\lambda_2| > 1.$$

3° A chaque nombre λ_k de la suite (6) correspond un nombre fini de potentiels généralisés de simple couche, linéairement indépendants,

$$(8) \qquad U_k^{(1)}, \quad U_k^{(2)}, \quad \ldots, \quad U_k^{(j_k)},$$

vérifiant les équations

$$(9) \quad \left(\frac{dU_k^{(l)}}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_k^{(l)}}{dN}\right)_i = \lambda_k \left\{ \left(\frac{dU_k^{(l)}}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU_k^{(l)}}{dN}\right)_i \right\} \qquad (l = 1, 2, \ldots, j_k.)$$

4° Le résidu U_k, relatif au pôle λ_k de la fonction u, est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (8). La fonction U_k sera donc un potentiel généralisé de simple couche, vérifiant l'équation

$$\left(\frac{dU_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i = \lambda_k \left\{ \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU_k}{dN}\right)_i \right\}.$$

5° Le résidu V_k, relatif au pôle λ_k de la fonction v, sera un potentiel généralisé de double couche vérifiant l'équation :

$$(V_k)_i - (V_k)_e = \lambda_k \{ (V_k)_i + (V_k)_e \},$$

et il existera une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants des fonctions (8), soit Φ_k, telle que l'on ait, à l'intérieur de la surface (S),

$$V_k = \Phi_k,$$

et à l'extérieur

$$V_k = \frac{1 - \lambda_k}{1 + \lambda_k} \Phi_k.$$

Les résultats précédents sont une généralisation de ceux que j'ai brièvement indiqués ailleurs ([1]) et conduisent, comme on le verra, à une démonstration générale de la légitimité des méthodes de Neumann et de Robin, méthodes si importantes dans la théorie de l'équation de Laplace.

Pour éviter tout malentendu, je précise le sens de certaines expressions dont nous aurons constamment à nous servir.

Lorsque nous dirons qu'une fonction w vérifie l'équation

$$\Delta w + \xi w = 0$$

dans un certain domaine (Ω), nous entendrons par là qu'en chaque point appartenant au domaine (Ω), mais non situé sur la frontière de ce domaine, les dérivées secondes $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ ont des valeurs finies vérifiant l'équation $\Delta w + \xi w = 0$.

Il s'ensuit que la fonction w et ses dérivées premières seront continues en chaque point du domaine (T) non situé sur la frontière.

Nous aurons à considérer des séries de la forme

$$F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \ldots,$$

où les F_k seront des fonctions de deux ou de trois variables, définies dans un certain domaine (T). J'appellerai *rayon de convergence* d'une telle série le plus grand nombre positif R tel que, pour toute valeur de λ vérifiant l'inégalité $|\lambda| < R$, la série soit uniformément convergente dans toute l'étendue du domaine (T), y compris la frontière de ce domaine, s'il est limité.

II. — Problème fondamental relatif aux potentiels généralisés de simple couche. Méthode de Robin.

2. Nous nous proposons d'étudier le problème suivant : Étant donnée une fonction continue réelle ([2]) φ, définie sur la surface

---

([1]) *Sur la théorie de l'équation de Laplace et les méthodes de Neumann et de Robin.* Note présentée à l'Académie de Cracovie le 4 mars 1901.

([2]) Le cas où la fonction φ serait une fonction complexe se ramène immédiatement à celui où elle est réelle.

fermée (S) et un paramètre λ, déterminer un potentiel généralisé de simple couche u, ayant pour nombre caractéristique un nombre donné μ, réel et non négatif, de façon que ce potentiel généralisé vérifie l'équation :

$$(1)\qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left\{\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right\} + 2\varphi.$$

La fonction u vérifiera, en tout point de l'espace non situé sur la surface (s), l'équation

$$(2)\qquad \Delta u - \mu^2 u = 0.$$

Cela posé, voyons si le problème précédent n'admet qu'une seule solution. Supposons, à cet effet, qu'il en admette deux. La différence Φ des valeurs correspondantes de la fonction u serait un potentiel généralisé de simple couche vérifiant l'équation

$$(3)\qquad \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e + \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i\right]$$

à la surface (S) et l'équation

$$\Delta\Phi - \mu^2\Phi = 0$$

en chaque point de l'espace non situé sur la surface.

Posons, pour mettre en évidence les parties réelle et imaginaire du paramètre λ et celles de la fonction Φ,

$$\lambda = \alpha + \beta i, \qquad \Phi = P + Qi,$$

nous aurons

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta P - \mu^2 P = 0, \qquad \Delta Q - \mu^2 Q = 0, \\ \left(\frac{dP}{dN}\right)_e - \left(\frac{dP}{dN}\right)_i = \alpha\left[\left(\frac{dP}{dN}\right)_e + \left(\frac{dP}{dN}\right)_i\right] - \beta\left[\left(\frac{dQ}{dN}\right)_e + \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i\right], \\ \left(\frac{dQ}{dN}\right)_e - \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i = \alpha\left[\left(\frac{dQ}{dN}\right)_e + \left(\frac{dQ}{dN}\right)_i\right] + \beta\left[\left(\frac{dP}{dN}\right)_e + \left(\frac{dP}{dN}\right)_i\right]. \end{cases}$$

Envisageons maintenant les intégrales

$$A = \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 P^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

$$B = \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 Q^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

$$C = \iiint_{(D)} \left(\sum \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial x} + \mu^2 PQ \right) dx\, dy\, dz$$

étendues à tout le domaine (D) limité par la surface (S) et les intégrales analogues A′, B′, C′ relatives au domaine extérieur (D′). En s'appuyant sur le théorème de Green, on déduira aisément des équations (4) les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A' + A &= \alpha(A' - A) - \beta(C' - C), \\ B' + B &= \alpha(B' - B) + \beta(C' - C), \\ C' + C &= \alpha(C' - C) - \beta(B' - B), \\ C' + C &= \alpha(C' - C) + \beta(A' - A), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} A' + B' + A + B &= \alpha(A' + B' - A - B), \\ 0 &= \beta(A' + B' - A - B). \end{aligned}$$

La première de ces équations nous donne

$$|\alpha| \geqq 1,$$

$$A' + B' - A - B \neq 0;$$

on aura donc, à cause de la seconde,

$$\beta = 0.$$

Il est donc prouvé que l'équation (1) ne peut admettre plus d'une seule solution que pour des valeurs de λ réelles et non inférieures en valeur absolue à l'unité. On s'assurera d'ailleurs aisément que, pour $\lambda = -1$, l'équation (1) ne peut admettre qu'une seule solution, et enfin que, pour $\lambda = +1$, elle peut en admettre plus d'une, mais seulement dans le cas où l'on aurait $\mu = 0$.

3. Cherchons à développer la fonction u suivant les puissances de λ et posons à cet effet

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \lambda^k. \tag{5}$$

Chacune des fonctions u_k sera un potentiel généralisé de simple couche et l'on aura

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = 2\varphi, \\ &\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i \qquad (k = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right. \tag{6}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} &u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \varphi \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \\ &u_k = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \left[\left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i\right] \frac{e^{-\mu r}}{r} ds. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Désignons par r' la distance de deux points A et B situés sur la surface (S); soit γ l'angle formé par l'axe BA avec la normale intérieure élevée en A à la surface (S), et soit enfin ds l'élément de la surface relatif au point B. On trouvera, en posant

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_0 = \varphi, \\ &2\sigma_k = \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_{k-1}}{dN}\right)_i, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

l'expression suivante pour la valeur en A de la fonction σ_k

$$\sigma_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma_{k-1} \frac{d}{dr'} \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \cos\gamma \, ds \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Supposons pour un moment que la série

$$(10) \qquad 2\pi\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k$$

soit uniformément convergente sur la surface (S) pourvu que λ ait une valeur vérifiant l'inégalité

$$(11) \qquad |\lambda| < R,$$

où R est une certaine constante positive.

On reconnaîtra aisément que, lorsque cette condition est vérifiée, les circonstances suivantes auront lieu à la fois :

1° La série (5) sera uniformément convergente dans tout l'espace.

2° La somme u de cette série pourra être représentée par la formule

$$(12) \qquad u = \int_{(S)} \sigma \frac{e^{-\mu r}}{r} ds.$$

3° La somme u de la série (5) satisfera à l'équation (1). Pour s'assurer de ce dernier point, il n'y a qu'à remarquer que les formules (6) et (8) nous donnent

$$(13) \qquad \begin{cases} \left(\dfrac{du_k}{dN}\right)_e = \sigma_{k+1} + \sigma_k, \\ \left(\dfrac{du_k}{dN}\right)_i = \sigma_{k+1} - \sigma_k, \end{cases}$$

d'où il résulte que les séries

$$(14) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e \lambda^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i \lambda^k$$

seront l'une et l'autre uniformément convergentes. Or, de là, on déduit de suite que l'équation (1) sera bien vérifiée.

4. Un des résultats obtenus au numéro précédent peut être énoncé brièvement ainsi : le rayon de convergence de la série (5) est au moins égal au rayon de convergence de la série (10). Démontrons que les rayons de convergence de ces séries sont égaux. Pour cela, il suffira de prouver que le rayon de convergence de la série (10) ne peut être inférieur à celui de la série (5). Considérons, à cet effet, un nombre positif m, plus grand que μ, dont nous disposerons dans un instant, et posons

$$(15)\qquad w_k = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma_k \frac{e^{-mr}}{r}\, ds.$$

Nous aurons, sur la surface (S),

$$(16)\qquad \left(\frac{dw_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{dw_k}{dN}\right)_i = 2\sigma_k,$$

et, en tout point de l'espace non situé sur la surface,

$$\Delta w_k - m^2 w_k = 0.$$

Posons

$$(17)\qquad f_k = w_k - u_k.$$

La fonction f_k jouira des propriétés suivantes :

1° Elle satisfera à l'équation

$$(18)\qquad \Delta f_k - m^2 f_k - (m^2 - \mu^2) u_k = 0,$$

en tout point de l'espace non situé sur la surface (S).

2° On aura

$$(19)\qquad \left(\frac{df_k}{dN}\right)_e = \left(\frac{df_k}{dN}\right)_i = \frac{df_k}{dN};$$

cela résulte de l'équation (16) et de l'équation

$$\left(\frac{du_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = 2\sigma_k.$$

3° La fonction f_k sera continue, même à la traversée de la surface (S). En effet, il en est ainsi de chacune des fonctions u_k et w_k.

4° Désignons par d la distance d'un point M de l'espace à l'origine des coordonnées et faisons croître la longueur d indéfiniment.

Il est évident que les produits

$$f_k d, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial x} d^2, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial y} d^2, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial z} d^2,$$

resteront finis (en général, ils tendront vers zéro).

Voici ce que l'on peut en conclure, au moyen d'une application convenable du théorème de Green. Si l'on désigne par r la distance du point x, y, z au point x', y', z', on aura

$$(20) \qquad f_k = \frac{\mu^2 - m^2}{4\pi} \int\int\int u_k \frac{e^{-mr}}{r} dx' dy' dz',$$

où l'intégration doit être étendue à tout l'espace.

D'ailleurs, en vertu des formules (15), (17) et (19)

$$(21) \quad 2\rho_{k+1} = \left(\frac{du_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_k}{dN}\right)_i = -2\frac{df_k}{dN} + \frac{1}{\pi}\int_{(S)} \sigma_k \frac{d}{dr'} \frac{e^{-mr'}}{r'} \cos\gamma \, ds,$$

où γ et r' ont la même signification que dans les formules (9).

Désignons par δ_k et δ'_k les maxima des modules des fonctions u_k et σ_k. Nous trouverons, en nous appuyant sur la formule (20),

$$(22) \qquad \left|\frac{df_k}{dN}\right| < 2\,\frac{m^2 - \mu^2}{m}\,\delta_k < 2m\delta_k.$$

Observons maintenant qu'il est possible de trouver un nombre positif A, dépendant uniquement de la surface (S), tel que l'on ait

$$(23) \qquad \left|\frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \sigma_k \frac{d}{dr'} \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \cos\gamma \, ds\right| < \frac{A}{m}\,\delta'_k.$$

L'équation (21) et les inégalités (22) et (23) nous donnent

$$(24) \qquad \delta'_{k+1} < 2m\delta_k + \frac{A}{m}\,\delta'_k.$$

Soit l le rayon de convergence de la série (5) ou, ce qui est la même chose, celui de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \lambda^k. \tag{25}$$

Nous choisirons le nombre m de façon que l'on ait

$$\frac{A}{m} \leqq \frac{1}{2l};$$

l'inégalité (24) nous donnera alors

$$\delta'_{k+1} < \frac{1}{2l}\delta'_k + 2m\,\delta_k. \tag{26}$$

Désignons par t un nombre positif tel que

$$t < l, \tag{27}$$

mais d'ailleurs quelconque; l'inégalité (26) nous donnera

$$\sum_{k=0}^{i} \delta'_{k+1} t^{k+1} < \frac{t}{2l} \sum_{k=0}^{i} \delta'_k t^k + 2mt \sum_{k=0}^{i} \delta_k t^k;$$

on en déduira aisément, en tenant compte de l'inégalité (27), que l'inégalité suivante aura lieu quel que soit i :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{i} \delta'_k t^k < \delta'_0 + 2mt \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k t^k;$$

donc la série à termes positifs

$$\sum_{k=0}^{\infty} \delta'_k t^k$$

est convergente, et par conséquent la série (10) sera convergente pourvu que l'on ait

$$|\lambda| \leqq l.$$

Or le nombre positif l est uniquement assujetti à satisfaire à l'inégalité (27); il en résulte que la série (10) sera uniformément convergente sur la surface (S) pourvu que λ ait une valeur vérifiant la condition

$$|\lambda| < l.$$

Cela prouve que le rayon de convergence de la série (10) ne peut être plus petit que celui de la série (5). C'est ce qu'il s'agissait d'établir.

On peut en conclure, conformément à ce qui a été dit au début de ce numéro, que les rayons de convergence des séries (5) et (10) sont égaux.

5. D'après les conventions faites dans l'*Introduction*, le symbole $(u_k)_s$ représente la fonction à laquelle se réduit la fonction u_k sur la surface (S).

Cela étant, posons

$$\mathrm{I}_{2k} = \int_{(\mathrm{S})} (u_k)_s^2 \, ds \tag{28}$$

et démontrons que le rayon de convergence de la série (5) coïncide avec celui de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\mathrm{I}_{2k}}\,\lambda^k. \tag{29}$$

Reportons-nous, pour cela, aux formules (7); désignons par r' la distance d'un élément ds de la surface (S) à un point quelconque A situé sur la surface, et soit ψ' l'angle formé par la normale à ds dirigée vers l'intérieur de la surface avec l'axe dirigé du point A à l'élément ds. Une application facile du théorème de Green nous donnera

$$(u_k)_s = \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathrm{S})} (u_{k-1})_s \frac{d}{dr'} \frac{e^{-\mu r'}}{r'} \cos\psi' \, ds \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{30}$$

Cela posé, observons que, d'après un théorème bien connu, une fonction F qui vérifie dans un certain domaine l'équation

$$\Delta F + \xi F = 0,$$

où ξ est un nombre réel vérifiant l'inégalité

$$\xi \leqq 0,$$

ne peut avoir, à l'intérieur de ce domaine, ni un maximum positif, ni un minimum négatif. Il est aisé d'en conclure que la valeur absolue d'un potentiel généralisé de simple couche ayant pour nombre caractéristique un nombre réel non négatif ne peut atteindre son maximum que sur la surface qui porte la simple couche; d'ailleurs, ce maximum existe toujours. Donc, le maximum δ_k de la valeur absolue de la fonction u_k coïncide avec le maximum de la valeur absolue de la fonction $(u_k)_s$.

Désignons par ρ un nombre positif au plus égal à 1 et soient B_1 et B_2 deux constantes positives dépendant uniquement de la surface (S). Il est aisé de voir que ces constantes peuvent être déterminées de façon que l'équation (30) entraîne l'inégalité

$$\delta_k < B_1 \rho\, \delta_{k-1} + B_2 \left(\log \frac{1}{\rho}\right) \sqrt{I_{2k-2}}$$

pour toutes les valeurs de ρ comprises entre zéro et l'unité. Une application de cette inégalité, tout à fait analogue à l'application de l'inégalité (24), faite au numéro précédent, permettra d'établir que le rayon de convergence de la série

$$(31) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k \lambda^k$$

ne peut être inférieur à celui de la série (29). Il est évident d'ailleurs que

$$I_{2k} < \delta_k^2 S$$

où S représente l'aire totale de la surface (S). Donc, le rayon de convergence de la série (31) ne peut pas non plus être supérieur à celui de la série (29).

Par conséquent, les rayons de convergence des deux séries sont égaux. Or, le rayon de convergence de la série (31) coïncide avec celui de la série (5). Dès lors, le rayon de convergence de la série (5) est égal à celui de la série (29). C'est ce que nous voulions établir.

6. Pour aller plus loin, introduisons des intégrales tout à fait analogues à celles que M. Poincaré a considérées dans son Mémoire sur le problème de Dirichlet et la méthode de Neumann [1]. En d'autres termes, considérons les intégrales

$$(32)\qquad W_{i.k}=\int\!\!\int\!\!\int_{(D)}\left(\sum\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial x}+\mu^2 u_i u_k\right)dx\,dy\,dz$$

et

$$(33)\qquad W'_{i.k}=\int\!\!\int\!\!\int_{(D')}\left(\sum\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial u_k}{\partial x}+\mu^2 u_i u_k\right)dx\,dy\,dz$$

étendues au domaine (D) limité par la surface (S) et au domaine extérieur (D'). On établira, au moyen du théorème de Green, en s'appuyant sur les équations (6), que les intégrales $W_{i.k}$ et $W'_{i.k}$ ne dépendent que de la somme $i+k$ des indices i et k; on profitera de cette circonstance pour effectuer le changement de notations défini par les équations

$$W_{i.k}=W_{i+k}$$
$$W'_{i.k}=W'_{i+k}$$

et l'on écrira les relations qui existent entre les intégrales considérées, ainsi

$$(34)\qquad W'_0+W_0=2\int_{(S)}\varphi u_0\,ds,$$

$$(35)\qquad W'_k+W_k=W'_{k-1}-W_{k-1}\qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

---

[1] *Acta mathematica*, 1896.

Désignons par α et β deux indéterminées réelles et considérons, en nous inspirant d'un artifice dû à M. Schwarz, l'expression

$$\int\int\int_{(D)}\left[\sum\left(\alpha\frac{\partial u_n}{\partial x}+\beta\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right)^2+\mu^2(\alpha u_n+\beta u_{n-1})^2\right]dx\,dy\,dz$$
$$+\int\int\int_{(D')}\left[\sum\left(\alpha\frac{\partial u_n}{\partial x}-\beta\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right)^2+\mu^2(\alpha u_n-\beta u_{n-1})^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Cette expression, considérée comme fonction des variables α et β, sera une forme quadratique définie. On peut en conclure, en se reportant à la définition des intégrales W_k et W'_k, que l'on aura

$$(W'_{2n-1}-W_{2n-1})^2 \leqq (W'_{2n}+W_{2n})(W'_{2n-2}+W_{2n-2}).$$

D'ailleurs, l'équation (35) nous donne

$$W'_{2n}+W_{2n}=W'_{2n-1}-W_{2n-1},$$

nous aurons donc

$$W'_{2n}+W_{2n}\leqq W'_{2n-2}+W_{2n-2}. \tag{36}$$

Observons maintenant que

$$W'_{2n}+W_{2n}=\int\int\int_{(D')}\left(\sum\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+\mu^2u_{n+1}u_{n-1}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+\int\int\int_{(D)}\left(\sum\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+\mu^2u_{n+1}u_{n-1}\right)dx\,dy\,dz.$$

Nous en déduirons, par le procédé employé il y a un instant, que

$$(W'_{2n}+W_{2n})^2\leqq(W'_{2n+2}+W_{2n+2})(W'_{2n-2}+W_{2n-2}). \tag{37}$$

Faisons encore une troisième application de l'artifice de M. Schwarz et posons à cet effet, dans l'équation (35), $k=2n+1$; elle nous donnera

$$W'_{2n}-W_{2n}=W'_{2n+1}+W_{2n+1}$$
$$=\int\int\int_{(D+D')}\left(\sum\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}+\mu^2u_nu_{n+1}\right)dx\,dy\,dz,$$

où l'indice $(D + D')$ dénote que l'intégration doit être étendue à tout l'espace. On trouve

$$(38)\quad \begin{cases} (W'_{2n} - W_{2n})^2 \\ \quad \leq (W'_{2n+1} + W_{2n+1})^2 \leq (W'_{2n} + W_{2n})(W'_{2n+2} + W_{2n+2}), \end{cases}$$

ou bien

$$(39)\qquad \left(\frac{W'_{2n} - W_{2n}}{W'_{2n} + W_{2n}}\right)^2 \leq \frac{W'_{2n+2} + W_{2n+2}}{W'_{2n} + W_{2n}}.$$

Les inégalités (36) et (37) nous apprennent que la suite à termes positifs

$$(40)\qquad \frac{W'_0 + W_0}{W'_2 + W_2},\quad \frac{W'_2 + W_2}{W'_4 + W_4},\quad \frac{W'_4 + W_4}{W'_6 + W_6},\quad \dots$$

sera convergente et décroissante (ou du moins non croissante) et que sa limite sera au moins égale à l'unité.

7. Il importe, pour ce qui va suivre, de démontrer que la limite de la suite (40) est précisément égale au carré du rayon de convergence R de la série (29). Soit R′ le nombre positif dont le carré est égal à la limite de la suite (40). Nous aurons à prouver que

$$(41)\qquad R = R'.$$

Je dis d'abord que

$$(42)\qquad R \leq R'.$$

En effet, il résulte du rapprochement des propositions établies dans les numéros précédents qu'aucune des séries (14) ne peut avoir un rayon de convergence inférieur au rayon de convergence R de la série (29). Multiplions chacune des séries (14) par $u_0\,ds$ et intégrons en étendant l'intégration à toute la surface (S). Nous obtiendrons, de cette façon, les séries suivantes :

$$\sum_{k=0}^{\infty} W'_k \lambda^k \quad \text{et} \quad -\sum_{k=0}^{\infty} W_k \lambda^k,$$

dont aucune ne pourra avoir un rayon de convergence inférieur à R. Par conséquent, le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty}(W'_k + W_k)\lambda^k$$

ne pourra pas non plus être inférieur à R. Or le carré du rayon de convergence de cette série est égal à la limite R'^2 de la suite (40); cela résulte immédiatement des propriétés de la suite (40) et de l'une des relations (38). Par conséquent l'inégalité (42) aura bien lieu.

Prouvons maintenant que l'on a

$$R \geqq R'. \tag{43}$$

A cet effet, nous allons faire usage du théorème suivant dû à M. Stekloff (¹). Désignons par $\Phi(x, y, z)$ une fonction continue dans tout l'espace et même à la traversée de la surface (S); supposons qu'en chaque point de l'espace non situé sur la surface (S) cette fonction admette des dérivées premières continues; qu'en outre, pour des valeurs très grandes des variables x, y, z, le produit

$$\Phi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

reste fini et qu'enfin l'intégrale

$$\iiint_{(D+D')}\left[\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy\,dz,$$

étendue à tout l'espace, ait un sens. On aura

$$\int_{(S)}(\Phi)_i^2\,ds < L\iiint_{(D+D')}\left[\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right]dx\,dy\,dz, \tag{44}$$

(¹) *Les méthodes générales pour résoudre les problèmes de la Physique mathématique* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 2ᵉ série, t. II).

où L est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S).

M. Stekloff trouve pour le nombre L une valeur qui ne convient pas à tous les cas. Aussi, quoiqu'une modification tout à fait insignifiante de sa démonstration permette d'arriver à un résultat parfaitement général, ne croyons-nous pas pouvoir nous dispenser d'établir ici cette importante proposition. Nous suivrons d'ailleurs la méthode de M. Stekloff, à la susdite modification près.

Posons

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} (\Phi)_s \frac{ds}{r}, \tag{45}$$

où r est la distance du point courant (x, y, z) à l'élément ds.

Nous avons

$$\begin{aligned}\iiint_{(D+D')} \left[\sum \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) dx\,dy\,dz \\ = \int_{(S)} (\Phi)_s \left[\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right] ds = \int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds;\end{aligned}$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned}\left[\int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds\right]^2 < \iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz \\ \times \iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz.\end{aligned}\right. \tag{46}$$

D'ailleurs,

$$\begin{aligned}\iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = \int_{(S)} (\psi)_s \left[\left(\frac{d\psi}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\psi}{dN}\right)_i\right] ds \\ = \int_{(S)} (\psi)_s (\Phi)_s\, ds;\end{aligned}$$

d'où

$$\left\{\iiint_{(D+D')} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz\right\}^2 < \int_{(S)} (\psi)_s^2\, ds \int_{(S)} (\Phi)_s^2\, ds. \tag{47}$$

Observons maintenant que la formule (45) peut s'écrire ainsi :

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{(\Phi)_s}{\sqrt{r}} \frac{ds}{\sqrt{r}};$$

d'où

$$(48) \qquad \psi^2 < \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{(\Phi)_s^2}{r}\,ds\,\frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{ds}{r} < L\,\frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{(\Phi)_s^2}{r}\,ds,$$

où l'on a désigné (¹) par L une limite supérieure de la fonction

$$\frac{1}{4\pi}\int_{(S)}\frac{ds}{r}.$$

Il sera aisé de déduire de l'inégalité précédente l'inégalité que voici

$$(49) \qquad \int_{(S)}(\psi)_s^2\,ds < L^2\int_{(S)}(\Phi)_s^2\,ds.$$

On déduira très aisément des inégalités (46), (47) et (49) l'inégalité (44) que nous voulions établir.

Il résulte immédiatement de l'inégalité de M. Stekloff que l'on aura

$$I_{2k} < L(W'_{2k} + W_{2k})$$

et cela permet de conclure immédiatement que l'inégalité (43), que nous voulions démontrer, sera satisfaite.

En résumé, les relations (42) et (43) subsistent l'une et l'autre. Il faut donc que la relation (41) soit exacte. C'est ce qu'il s'agissait de prouver.

8. Voici les principaux résultats qui naissent du rapprochement des propositions établies dans les numéros précédents :

1° Si l'on désigne par R le rayon de convergence de la série (10), la valeur (12) de la fonction u vérifiera l'équation (1) pourvu que l'on ait

$$(50) \qquad |\lambda| < R$$

(¹) M. Stekloff prend comme valeur de L le maximum de la distance de deux points situés sur la surface (S); c'est précisément cela qui n'est pas toujours exact.

et cette fonction u sera une fonction holomorphe du paramètre complexe λ pour toutes les valeurs de ce paramètre satisfaisant à l'inégalité précédente.

2° Le nombre R^2 est la limite de la suite (40). Or cette limite, nous l'avons vu, n'est jamais inférieure à l'unité. On aura donc

$$R \geqq 1.$$

3° Il existe, par conséquent, un potentiel généralisé u de simple couche qui vérifie l'équation (1) et qui est une fonction analytique du paramètre λ, laquelle fonction sera holomorphe par rapport à λ à l'intérieur d'un cercle de rayon 1 au moins, tracé dans le plan de la variable complexe λ en prenant pour centre l'origine.

4° Nous avons vu au n° **2** que, sous la condition

$$(51) \qquad |\lambda| < 1,$$

l'équation (1) ne peut admettre qu'une seule solution. Donc, eu égard à ce qui précède, nous pouvons dire que l'équation (1) définit sans ambiguïté une fonction u qui, considérée comme fonction du paramètre λ, est une fonction analytique holomorphe dans le voisinage du point $\lambda = 0$.

Complétons ce qui précède en faisant voir que, lorsque le paramètre μ dépasse une certaine limite, le rayon de convergence de la série (5) est supérieur à l'unité. Considérons à cet effet la formule (30) et désignons, comme plus haut, par δ_k le maximum de la valeur absolue de u_k ou, ce qui est la même chose, le maximum de la valeur absolue de $(u_k)_s$.

Il est très aisé de voir qu'il est possible de trouver un nombre positif A dépendant uniquement de la surface (S), tel que l'on ait

$$\delta_k < \frac{A}{\mu}\delta_{k-1}.$$

Il en résulte que le rayon de convergence R de la série (5) vérifie l'inégalité

$$(52) \qquad R \geqq \frac{\mu}{A}.$$

Il suffit donc de prendre

$$\mu > \text{A} \tag{53}$$

pour que l'on ait

$$\text{R} > 1.$$

Indiquons dès maintenant une conséquence importante résultant de la remarque précédente. Lorsque l'inégalité (53) est vérifiée, nous saurons déterminer un potentiel généralisé u de simple couche, tel que celle des quantités $\left(\frac{du}{d\text{N}}\right)_i$ et $\left(\frac{du}{d\text{N}}\right)_e$ que l'on voudra coïncide avec une fonction continue donnée.

9. Soit F un potentiel généralisé de simple couche ayant pour nombre caractéristique un nombre positif m vérifiant l'inégalité

$$m > \text{A}, \tag{54''}$$

où A a la même signification que dans l'inégalité (53). Considérons les intégrales

$$\left\{\begin{aligned} \text{K} &= \int\!\!\int\!\!\int_{(\text{D})}\left[\sum\left(\frac{\partial \text{F}}{\partial x}\right)^2 + m^2\text{F}^2\right] dx\,dy\,dz,\\ \text{K}' &= \int\!\!\int\!\!\int_{(\text{D}')}\left[\sum\left(\frac{\partial \text{F}}{\partial x}\right)^2 + m^2\text{F}^2\right] dx\,dy\,dz \end{aligned}\right. \tag{54}$$

étendues : la première à tout le domaine (D) limité par la surface (S) ; la seconde à tout le domaine extérieur (D'). Je me propose de prouver que l'on a

$$\frac{1 - \frac{\text{A}}{m}}{1 + \frac{\text{A}}{m}} \leqq \frac{\text{K}}{\text{K}'} \leqq \frac{1 + \frac{\text{A}}{m}}{1 - \frac{\text{A}}{m}}. \tag{55}$$

Soit toujours R le rayon de convergence de la série (5). On sait que la suite (40) est décroissante (ou du moins qu'un terme de cette suite ne surpasse jamais le terme précédent), et que la limite de cette suite est R^2. On aura donc

$$\frac{W'_0 + W_0}{W'_2 + W_2} \geqq R^2.$$

D'ailleurs, l'inégalité (39) nous donne, en y faisant $n = 0$,

$$\left(\frac{W'_0 - W_0}{W'_0 + W_0}\right)^2 \leqq \frac{W'_2 + W_2}{W'_0 + W_0};$$

par conséquent,

$$\left(\frac{W'_0 - W_0}{W'_0 + W_0}\right)^2 \leqq \frac{1}{R^2}.$$

On en déduit, au moyen de l'inégalité (52),

$$\left(\frac{W'_0 - W_0}{W'_0 + W_0}\right)^2 \leqq \frac{A^2}{\mu^2}. \tag{56}$$

Soit

$$\mu > A;$$

l'inégalité (56) nous donnera

$$\frac{1 - \frac{A}{\mu}}{1 + \frac{A}{\mu}} \leqq \frac{W_0}{W'_0} \leqq \frac{1 + \frac{A}{\mu}}{1 - \frac{A}{\mu}}.$$

Or, cette inégalité ne diffère que par un changement de notations de l'inégalité (55) que nous voulions établir.

10. Considérons p fonctions réelles et continues $h_1, h_2, \ldots, h_p$ définies sur la surface (S) et p indéterminées réelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. Posons

$$h = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k h_k, \tag{57}$$

et envisageons le potentiel généralisé de simple couche

$$\Phi = \int_{(S)} h \frac{e^{-\mu r}}{r} ds, \tag{58}$$

ainsi que les intégrales

$$\left\{ \begin{aligned} T' &= \int\int\int_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right] dx\, dy\, dz, \\ H' &= \int\int\int_{(D')} \Phi^2\, dx\, dy\, dz, \end{aligned} \right. \tag{59}$$

étendues à tout le domaine (D′) extérieur à la surface (S). Je dis qu'il suffira d'assujettir les α à vérifier un certain système de n équations linéaires et homogènes, le nombre n ne devant pas être inférieur à une certaine limite ne dépendant que de la surface (S), pour que l'on ait

$$T' \geq M' H' n^{\frac{2}{3}}, \tag{60}$$

où M′ est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S).

Soit (S_1) une sphère fixe ayant l'origine des coordonnées pour centre, telle que toute la surface (S) se trouve à l'intérieur de cette sphère. Elle partagera le domaine (D′) en deux autres dont l'un, D'_2, lui sera extérieur, et dont l'autre, D'_1, sera limité par elle et par la surface (S). Décomposons chacune des intégrales T′ et H′ en deux autres se rapportant respectivement au domaine (D'_1) et au domaine (D'_2). Posons ensuite, pour mettre cette décomposition en évidence,

$$H' = H'_1 + H'_2, \qquad T' = T'_1 + T'_2. \tag{61}$$

Un théorème bien connu, dû à M. Poincaré, nous apprend que l'on aura

$$T'_1 \geq M'_1 n_1^{\frac{2}{3}} H'_1, \tag{62}$$

pourvu que les α vérifient un certain système de n_1 équations linéaires et homogènes et que le nombre n_1 soit lui-même supérieur à une certaine limite dépendant uniquement de la surface (S) et du choix de la sphère (S_1).

Pour aller plus loin, désignons par ψ la fonction vérifiant l'équation de Laplace dans le domaine (D'_2), se réduisant à zéro à l'infini et prenant sur la sphère (S_1) les mêmes valeurs que la fonction Φ. Posons pour un moment

$$\rho = +\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

On aura, dans tout le domaine (D'_2) et sur la sphère (S_1) elle-même,

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{H}_k}{\rho^{2k+1}}.$$

où les H_k sont des polynomes sphériques ayant pour coefficients des fonctions linéaires et homogènes des α_i. Si nous assujettissons les α_i à vérifier un certain système de l^2 équations linéaires et homogènes, nous ferons disparaître les l premiers termes de la série précédente. On verra aisément que, dans ces conditions, l'intégrale

$$\iiint_{(D'_2)} \psi^2\, dx\, dy\, dz$$

étendue au domaine (D'_2) extérieur à la sphère (S_1) aura un sens et qu'elle satisfera à l'inégalité

$$(63)\qquad \iiint_{(D'_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] dx\, dy\, dz \geqq \frac{(l+1)(2l-1)}{\rho_0^2} \iiint_{(D'_2)} \psi^2\, dx\, dy\, dz,$$

où ρ_0 représente le rayon de la sphère (S_1).

Posons

$$(64)\qquad f = \Phi - \psi.$$

La fonction f s'annulera sur la sphère (S_1) et vérifiera, à l'extérieur de cette sphère, l'équation

$$\Delta f - \mu^2 f - \mu^2 \psi = 0;$$

enfin, à l'infini, la valeur absolue de la fonction f et les valeurs absolues de ses dérivées premières seront comparables à $\frac{1}{\rho}$ et à $\frac{1}{\rho^2}$. On conclura aisément de tout cela que

$$\iiint_{(D'_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz = -\mu^2 \iiint_{(D'_2)} \psi f\,dx\,dy\,dz;$$

d'où

$$\left\{\iiint_{(D'_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz\right\}^2$$
$$\leqq \mu^4 \iiint_{(D'_2)} \psi^2\,dx\,dy\,dz \iiint_{(D'_2)} f^2\,dx\,dy\,dz,$$

mais

$$\mu^2 \iiint_{(D'_2)} f^2\,dx\,dy\,dz \leqq \iiint_{(D'_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz;$$

par conséquent,

$$\iiint_{(D'_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \mu^2 f^2\right] dx\,dy\,dz \leqq \mu^2 \iiint_{(D'_2)} \psi^2\,dx\,dy\,dz,$$

ce qui donne

$$\iiint_{(D'_2)} f^2\,dx\,dy\,dz \leqq \iiint_{(D'_2)} \psi^2\,dx\,dy\,dz.$$

On conclura aisément de cette inégalité, en se reportant à l'équation (64), que

$$\text{(65)} \qquad H'_2 = \iiint_{(D'_2)} \Phi^2\,dx\,dy\,dz \leqq 4 \iiint_{(D'_2)} \psi^2\,dx\,dy\,dz.$$

D'ailleurs, d'après un théorème connu,

$$\text{(66)} \quad \iiint_{(D'_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2\right] d\tau \leqq \iiint_{(D'_2)} \left[\sum\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = T'_2.$$

Les inégalités (63), (65) et (66) nous donnent

$$(67)\qquad T'_{2,z} \geq \frac{(l+1)(2l-1)}{4\rho_0^2} H'_2.$$

Si l'on pose $n = n_1 + l^2$ et si l'on établit une relation convenable entre n_1 et l, on trouve, en s'appuyant sur les inégalités (62) et (67), que l'inégalité (60) sera bien vérifiée dans les conditions dites plus haut.

11. Reprenons le potentiel généralisé F considéré au n° **9** et le potentiel généralisé Φ que nous avons envisagé au numéro précédent. Je vais faire voir que, étant donné le potentiel Φ, il est possible de déterminer le potentiel F de façon que la différence $F - \Phi$ prenne la valeur zéro sur la surface (S). Supposons provisoirement que le problème soit possible et désignons par ω une fonction définie à l'intérieur de la surface (S) par l'équation

$$(66)\qquad \omega = F - \Phi.$$

La fonction ω sera nulle sur la surface (S) et vérifiera, à l'intérieur de cette surface, l'équation suivante :

$$(69)\qquad \Delta\omega - m^2\omega + (\mu^2 - m^2)\Phi = 0.$$

Que la fonction F existe ou non, il est aisé de déterminer la fonction ω de façon qu'elle s'annule sur la surface (S) et qu'elle vérifie l'équation (69) à l'intérieur de cette surface. En effet, posons

$$P = \frac{\mu^2 - m^2}{4\pi} \int\int\int_{(D)} \Phi(x', y', z') \frac{e^{-mr}}{r} dx'\,dy'\,dz',$$

où r représente la distance du point (x, y, z) au point (x', y', z'). La fonction P vérifiera à l'intérieur de la surface (S) l'équation

$$\Delta P - m^2 P + (\mu^2 - m^2)\Phi = 0,$$

mais, à l'extérieur de la surface (S), elle satisfera à l'équation

$$\Delta P - m^2 P = 0.$$

Le nombre m vérifiant l'inégalité (54^a), nous saurons déterminer un potentiel généralisé Q ayant le nombre m pour nombre caractéristique, de façon que l'on ait

$$(70) \qquad \left(\frac{dQ}{dN}\right)_e = \left(\frac{dP}{dN}\right)_e.$$

C'est ce qui résulte des remarques qui se trouvent à la fin du n° **8**, La relation (70) nous donne

$$(Q)_s = (P)_s.$$

Par conséquent, la fonction demandée ω sera donnée par la formule

$$(71) \qquad \omega = P - Q.$$

Envisageons maintenant le domaine (D′) extérieur à la surface (S). Nous serons amenés à considérer une fonction ω' s'annulant sur la surface (S) et à l'infini et vérifiant dans toute l'étendue du domaine (D′) l'équation

$$(72) \qquad \Delta\omega' - m^2\omega' + (\mu^2 - m^2)\Phi = 0.$$

Cette fonction pourra être déterminée par une méthode absolument analogue à celle qui nous a servi à calculer la fonction ω.

Cela posé, considérons une fonction F_1 égale à $\omega + \Phi$ à l'intérieur de la surface (S) et coïncidant avec la fonction $\omega' + \Phi$ à l'extérieur de cette surface. La fonction F_1 vérifiera l'équation

$$\Delta F_1 - m^2 F_1 = 0,$$

tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la surface (S); elle sera continue à la traversée de la surface; les quantités $\left(\frac{dF_1}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{dF_1}{dN}\right)_e$ existeront et seront continues; enfin, à l'infini les expressions

$$\rho F_1, \qquad \rho^2 \frac{\partial F_1}{\partial x}, \qquad \rho^2 \frac{\partial F_1}{\partial y}, \qquad \rho^2 \frac{\partial F_1}{\partial z},$$

où

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

resteront finies. On aura donc

$$F_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{(S)} \left[\left(\frac{dF_1}{dN} \right)_e - \left(\frac{dF_1}{dN} \right)_i \right] \frac{e^{-mr}}{r} ds,$$

D'ailleurs, sur la surface (S), la fonction F_1 prend les mêmes valeurs que la fonction Φ.

Il résulte de tout cela que le potentiel généralisé de simple couche, désigné plus haut par F, existera et que l'on aura

$$F = F_1.$$

La proposition que nous voulions établir est donc démontrée.

12. Revenons encore une fois au potentiel Φ défini par l'équation (58) et considérons les quantités T′ et H′ définies par les équations (59) ainsi que les quantités T et H qui s'en déduisent, en étendant l'intégration au domaine (D) limité par la surface (S) au lieu de l'étendre au domaine extérieur (D′).

Posons

$$(73) \quad \begin{cases} \mathfrak{W} = \displaystyle\iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 \Phi^2 \right] dx\,dy\,dz = T + \mu^2 H, \\ \mathfrak{W}' = \displaystyle\iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \mu^2 \Phi^2 \right] dx\,dy\,dz = T' + \mu^2 H', \end{cases}$$

et admettons que le nombre de termes p de la somme qui se trouve au second membre de l'équation (57) vérifie l'inégalité $p > 2n$, où n est un entier supérieur à une certaine limite ne dépendant que de la surface (S) et du nombre μ. Je me propose de prouver qu'en assujettissant les α_i à vérifier un certain système de $2n$ équations linéaires et homogènes, on pourra toujours satisfaire à la fois aux deux inégalités

$$(74)\qquad \begin{cases} \mathfrak{W} \geqq \Theta_n \mathfrak{W}', \\ \mathfrak{W}' \geqq \Theta_n \mathfrak{W}, \end{cases}$$

où Θ_n est un nombre positif supérieur à l'unité ne dépendant que de la surface (S) et du nombre n, ayant l'unité pour limite lorsque le nombre n croît indéfiniment.

Nous avons vu, au numéro précédent, que l'on peut trouver un potentiel généralisé de simple couche F ayant le nombre m pour nombre caractéristique, prenant sur la surface (S) les mêmes valeurs que le potentiel Φ.

Désignons, comme au numéro précédent, par ω la différence $F - \Phi$ dans le domaine (D) et par ω' la valeur de la même expression dans le domaine (D'). Posons, pour abréger l'écriture,

$$(75)\qquad \begin{aligned} E &= \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + m^2\omega^2\right] dx\,dy\,dz, \\ L &= \iiint_{(D)} \left[\sum \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + m^2\omega\Phi\right] dx\,dy\,dz, \\ N &= \iiint_{(D)} \omega\Phi\,dx\,dy\,dz, \end{aligned}$$

et désignons par E', L' et N' les expressions analogues relatives au domaine extérieur (D').

Cela posé, on trouvera pour les intégrales K et K' définies par les équations (54) les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} K &= \mathfrak{W} + (m^2 - \mu^2)H + 2L + E, \\ K' &= \mathfrak{W}' + (m^2 - \mu^2)H' + 2L' + E'. \end{aligned}$$

Or le théorème de Green nous donne

$$(76)\qquad \begin{cases} L = (m^2 - \mu^2)N, \\ E = (\mu^2 - m^2)N, \\ L' = (m^2 - \mu^2)N', \\ E' = (\mu^2 - m^2)N'; \end{cases}$$

il viendra donc

$$(77)\qquad \begin{cases} K = \mathfrak{W} + (m^2 - \mu^2)(H + N), \\ K' = \mathfrak{W}' + (m^2 - \mu^2)(H' + N'). \end{cases}$$

Les relations (75) et (76) nous donnent, en s'appuyant sur l'inégalité de Schwarz,

$$(78)\qquad E^2 \leqq (m^2 - \mu^2)^2 H \int\int\int_{(D)} \omega^2\, dx\, dy\, dz.$$

Soit

$$(79)\qquad m \geqq \mu;$$

nous aurons

$$(m^2 - \mu^2)\int\int\int_{(D)} \omega^2\, dx\, dy\, dz \leqq E,$$

et nous conclurons de l'inégalité (78) que l'on aura

$$E \leqq (m^2 - \mu^2) H,$$

d'où, en tenant compte de (76),

$$(80)\qquad -N \leqq H.$$

On trouvera d'une façon analogue

$$(81)\qquad -N' \leqq H'.$$

Posons

$$(82)\qquad \begin{cases} t = (m^2 - \mu^2)\dfrac{H + N}{\mathfrak{W}}, \\ t' = (m^2 - \mu^2)\dfrac{H' + N'}{\mathfrak{W}'}. \end{cases}$$

Les nombres t et t' seront positifs en vertu des inégalités (79), (80) et (81). Par conséquent, à cause des équations (77),

$$\frac{K}{K'} \leqq \frac{\mathfrak{w}}{\mathfrak{w}'}(1+t),$$

$$\frac{K'}{K} \leqq \frac{\mathfrak{w}'}{\mathfrak{w}}(1+t').$$

On trouve, en rapprochant ces inégalités des inégalités (55),

$$(83) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{W}' &\leqq \frac{1+\dfrac{A}{m}}{1-\dfrac{A}{m}}(1+t)\mathfrak{W}, \\ \mathfrak{W} &\leqq \frac{1+\dfrac{A}{m}}{1-\dfrac{A}{m}}(1+t')\mathfrak{W}'. \end{aligned} \right.$$

Si les α_k vérifient un certain système de n équations linéaires et homogènes, l'inégalité (60) aura lieu; si, en outre, les α_i satisfont à un certain autre système de n équations linéaires et homogènes et si n est supérieur à une certaine limite ne dépendant que de la surface (S), nous aurons, comme nous l'apprend un théorème bien connu dû à M. Poincaré,

$$(84) \qquad T \geqq MHn^{\frac{2}{3}},$$

où M est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S).

Désignons par b le plus grand des nombres $\frac{1}{M}$ et $\frac{1}{M'}$ et observons qu'à raison des relations (73) on a

$$\mathfrak{W} \geqq T; \qquad \mathfrak{W}' \geqq T';$$

les inégalités (60) et (84) nous donneront

$$\frac{H}{\mathfrak{W}} \leqq bn^{-\frac{2}{3}},$$

$$\frac{H'}{\mathfrak{W}'} \leqq bn^{-\frac{2}{3}}.$$

On en conclut, au moyen des relations (79), (80), (81), (82) et en remarquant, en outre, que les nombres N et N' sont négatifs,

$$(85)\qquad \begin{cases} l \leqq b\dfrac{m^2}{n^{\frac{2}{3}}}, \\ l' \leqq b\dfrac{m^2}{n^{\frac{2}{3}}}. \end{cases}$$

Si le nombre n est assez grand, la relation

$$\frac{m^2}{n^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{m}$$

sera compatible avec les inégalités (79) et (54^a). Cette remarque faite, les inégalités (83) et (85) nous permettent d'énoncer la proposition suivante : si le nombre n est supérieur à une certaine limite ne dépendant que du nombre μ et de la surface (S), il suffit que les α_i vérifient un certain système de $2n$ équations linéaires et homogènes pour que l'on ait à la fois

$$\begin{cases} \mathfrak{W} \leqq \left(1 + \dfrac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right)\mathfrak{W}', \\ \mathfrak{W}' \leqq \left(1 + \dfrac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right)\mathfrak{W}, \end{cases}$$

où B est un nombre positif dépendant uniquement de la surface (S). Cela prouve que, dans les inégalités (74), nous pouvons poser

$$(86)\qquad \Theta_n = 1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}}.$$

Donc, comme nous l'avions annoncé, Θ_n tend vers l'unité lorsque n croît indéfiniment.

13. Revenons à la suite (40). Cette suite est déterminée par la fonction φ qui figure dans l'équation (1).

Supposons que la fonction φ soit donnée par la formule

$$\varphi = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varphi_k, \tag{87}$$

où les α_k sont des indéterminées réelles, les φ_k étant des fonctions continues réelles définies sur la surface (S). Admettons, en outre, que

$$p > 4n, \tag{88}$$

n étant un entier positif assez grand pour que les résultats du numéro précédent soient valables. Je vais faire voir qu'il sera possible de disposer des indéterminées α_k de telle sorte que l'on ait

$$R > 2\frac{n^{\frac{2}{9}}}{B}, \tag{89}$$

où R est le nombre positif dont le carré est égal à la limite de la suite (40).

A cet effet, désignons par t et t' deux nouvelles indéterminées et par Φ_k, $\mathfrak{W}_k$ et $\mathfrak{W}'_k$ ce que deviennent les expressions u_k, W_k et W'_k quand on change φ en

$$t\varphi + \frac{1}{2}t'\left[\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i\right].$$

Appliquons à la fonction Φ_k le théorème démontré au numéro précédent. Nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{W}_{2k} \leqq \Theta_n \mathfrak{W}'_{2k}, \\ &\mathfrak{W}'_{2k} \leqq \Theta_n \mathfrak{W}_{2k}, \end{aligned}\right. \tag{90}$$

pourvu que les α_k vérifient un certain système de $2n$ équations linéaires et homogènes.

Ces équations pourront s'écrire ainsi

$$t\mathfrak{F}_k + t'\mathfrak{F}'_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n), \tag{91}$$

où $\mathfrak{F}_k$ et $\mathfrak{F}'_k$ représentent des expressions ne contenant ni t ni t'. Nous disposons d'un nombre $p > 4n$, d'indéterminées α_k. Nous pourrons donc disposer des rapports entre ces indéterminées de telle sorte que le système (91) soit vérifié, quelles que soient les valeurs attribuées aux facteurs t et t'.

Pour cela, nous n'avons qu'à déterminer ces rapports au moyen des $4n$ équations

$$\mathfrak{F}_k = \mathfrak{F}'_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n). \tag{92}$$

Ces équations étant satisfaites, les inégalités (90) subsisteront pour *toutes* les valeurs réelles des facteurs t et t'. Pour aller plus loin, nous nous inspirerons d'un passage du Mémoire de M. Poincaré sur le Problème de Dirichlet et la Méthode de Neumann.

Nous avons

$$\begin{aligned}\mathfrak{W}_{2k} &= W_{2k}t^2 + 2W_{2k+1}tt' + W_{2k+2}t'^2,\\ \mathfrak{W}'_{2k} &= W'_{2k}t^2 + 2W'_{2k+1}tt' + W'_{2k+2}t'^2;\end{aligned}$$

les inégalités (90) ayant lieu pour toutes les valeurs réelles de t et t', nous aurons, quels que soient t et t',

$$\tag{93}\left\{\begin{aligned}&(\Theta_n W_{2k} - W'_{2k})t^2 + 2(\Theta_n W_{2k+1} - W'_{2k+1})tt'\\ &\qquad + (\Theta_n W_{2k+2} - W'_{2k+2})t'^2 > 0,\\ &(\Theta_n W'_{2k} - W_{2k})t^2 + 2(\Theta_n W'_{2k+1} - W_{2k+1})tt'\\ &\qquad + (\Theta_n W'_{2k+2} - W_{2k+2})t'^2 > 0.\end{aligned}\right.$$

Changeons dans la dernière inégalité t' en $-t'$. Il viendra

$$\tag{94}\left\{\begin{aligned}&(\Theta_n W'_{2k} - W_{2k})t^2 - 2(\Theta_n W'_{2k+1} - W_{2k+1})tt'\\ &\qquad + (\Theta_n W'_{2k+2} - W_{2k+2})t'^2 > 0.\end{aligned}\right.$$

Puisque les inégalités (93) et (94) ont lieu pour toutes les valeurs réelles de t et t', il en sera de même de celles que l'on obtient en les ajoutant membre à membre. Nous aurons donc, quels que soient t et t',

$$\begin{aligned}&(\Theta_n - 1)(W'_{2k} + W_{2k})t^2 - 2(\Theta_n + 1)(W'_{2k+1} - W_{2k+1})tt'\\ &\qquad + (\Theta_n - 1)(W'_{2k+2} + W_{2k+2})t'^2 > 0;\end{aligned}$$

d'où

$$(95) \qquad (W'_{2k+1} - W_{2k+1})^2 \leqq \left(\frac{\theta_n - 1}{\theta_n + 1}\right)^2 (W'_{2k} + W_{2k})(W'_{2k+2} + W_{2k+2}).$$

Changeons, dans l'équation (35), k en $2k+2$, il viendra

$$(96) \qquad W'_{2k+2} + W_{2k+2} = W'_{2k+1} - W_{2k+1}.$$

Les relations (95) et (96) donnent

$$(97) \qquad W'_{2k+2} + W_{2k+2} \leqq \left(\frac{\theta_n - 1}{\theta_n + 1}\right)^2 (W'_{2k} + W_{2k}).$$

Raisonnons comme l'a fait M. Poincaré dans un cas analogue et regardons à cet effet $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ comme les coordonnées homogènes d'un point situé dans un espace à $p-1$ dimensions. D'après ce que nous venons de voir, il existera dans cet espace à $p-1$ dimensions un point au moins où l'inégalité (97) sera vérifiée. Désignons par (D_k) le domaine formé par l'ensemble des points jouissant de cette propriété. La suite (40) étant décroissante, ou du moins non croissante, chaque domaine (D_k) sera contenu dans le domaine (D_{k-1}) ou coïncidera avec ce domaine. Par conséquent, il existera au moins un point

$$(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)})$$

intérieur à tous les domaines

$$(D_1), \quad (D_2), \quad (D_3), \quad \ldots,$$

et il est évident que, en un tel point, l'inégalité (97) aura lieu quel que soit k. Donc, en ce point-là, la limite R^2 de la suite (40) sera au moins égale à

$$\left(\frac{\theta_n - 1}{\theta_n + 1}\right)^2.$$

On en conclut, au moyen de la formule (86), que, au point

$$(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_p^{(0)}),$$

on aura

$$R > \frac{2n^{\frac{2}{3}}}{B}.$$

Donc, le théorème que nous voulions établir est démontré.

14. Le théorème précédent et les résultats énoncés au n° **8** permettront d'appliquer aisément à l'étude de la fonction u, définie par la série (5), la méthode si féconde de M. Poincaré ([1]). On trouvera que la fonction u considérée comme fonction du paramètre λ n'a, à distance finie, d'autres points singuliers que des pôles. On s'assurera aisément que ces pôles sont simples et l'on verra que le résidu U relatif à un pôle λ' sera un potentiel généralisé de simple couche vérifiant l'équation

$$\left(\frac{dU}{dN}\right)_e - \left(\frac{dU}{dN}\right)_i = \lambda'\left[\left(\frac{dU}{dN}\right)_e + \left(\frac{dU}{dN}\right)_i\right].$$

On reconnaîtra, en rapprochant ceci de ce qui a été établi au n° **2**, que les pôles de la fonction u, définie par la série (5), ne peuvent être que des nombres réels, supérieurs en valeur absolue à 1, sauf dans le cas où le nombre caractéristique μ du potentiel généralisé u, serait nul; dans ce cas, la fonction u peut avoir, en dehors des pôles supérieurs en valeur absolue à 1, un pôle égal à $+1$.

Montrons qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de potentiels généralisés de simple couche

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_p$$

ayant pour nombre caractéristique le nombre positif μ et vérifiant les équations

$$(98) \qquad \left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_e - \left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_i = \lambda_k\left[\left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_e + \left(\frac{d\psi_k}{dN}\right)_i\right],$$

où les λ_k sont des nombres réels non supérieurs en valeur absolue à un nombre positif déterminé l.

([1]) *Sur les équations de la Physique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894).

On trouve immédiatement, en s'appuyant sur le théorème de Green, que l'inégalité

$$\lambda_k \neq \lambda_{k'} \tag{99}$$

entraîne la relation

$$\int_{(S)} \psi_k \left(\frac{d\psi_{k'}}{dN}\right)_i ds = \int_{(S)} \psi'_k \left(\frac{d\psi'_{k'}}{dN}\right)_e ds = 0. \tag{100}$$

Dans les conditions où nous nous sommes placés, l'inégalité

$$k \neq k' \tag{101}$$

peut ne pas entraîner l'inégalité (99). Par conséquent, l'inégalité (101) n'a pas pour conséquence nécessaire la relation (100). Cependant, on peut, sans nuire à la généralité, admettre que l'inégalité (101) entraîne l'inégalité (100).

En effet, si cette circonstance ne se présentait pas tout d'abord, on pourrait la réaliser en remplaçant les fonctions ψ_i par certaines combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants de ces fonctions.

Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} A_k &= \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2 + \mu^2\psi_k^2\right] dx\,dy\,dz, \\ A'_k &= \iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\right)^2 + \mu^2\psi_k^2\right] dx\,dy\,dz. \end{aligned}\right. \tag{102}$$

Les équations (98) nous donnent

$$A_k(\lambda_k + 1) = A'_k(\lambda_k - 1) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{103}$$

Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ des indéterminées et posons

$$\psi = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \psi_k,$$

$$A = \iiint_{(D)} \left[\sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \mu^2\psi^2\right] dx\,dy\,dz,$$

$$A' = \iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \mu^2\psi^2\right] dx\,dy\,dz.$$

Nous aurons, en considérant que l'inégalité (101) entraîne les relations (100),

$$(104)\qquad \begin{cases} A = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 A_k, \\ A' = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k^2 A'_k. \end{cases}$$

Supposons d'abord que les λ_k soient tous positifs et qu'ils soient rangés par ordre de grandeur croissante. Nous aurons, en vertu des équations (103),

$$A' \geqq \frac{\lambda_p + 1}{\lambda_p - 1} A,$$

et cela quels que soient les α_k. Or, en vertu du théorème démontré au n° **12**, il est possible, si le nombre p est assez grand, de disposer des rapports entre les α_k de façon que l'on ait

$$A' \leqq \left(1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right) A,$$

où n est le plus grand entier positif inférieur à $\frac{p}{2}$. On aura donc, en disposant convenablement des rapports entre les α_k,

$$A \frac{\lambda_p + 1}{\lambda_p - 1} \leqq A \left(1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}}\right),$$

d'où, puisque $A \neq 0$,

$$\frac{\lambda_p + 1}{\lambda_p - 1} \leqq 1 + \frac{B}{n^{\frac{2}{9}}},$$

ce qui donne, en tenant compte de ce que $\lambda_p \geqq 1$, l'inégalité

$$(105)\qquad \lambda_p > \frac{n^{\frac{2}{9}}}{B}.$$

Supposons maintenant que les λ_p soient tous *négatifs* et disposons les notations de façon que l'on ait

$$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \ldots \geqq \lambda_p.$$

Nous trouverons, d'une façon analogue,

$$-\lambda_p > \frac{n^{\frac{2}{9}}}{B}, \tag{106}$$

où n représente, comme plus haut, le plus grand entier positif inférieur à $\frac{p}{2}$.

Passons au cas général et disposons les notations de façon que l'on ait

$$|\lambda_1| \leqq |\lambda_2| \leqq |\lambda_3| \leqq \ldots \leqq |\lambda_p|.$$

Désignons par n le plus grand entier vérifiant l'inégalité

$$4n < p.$$

Il est évident que l'on pourra toujours trouver, dans la suite finie

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_p,$$

$2n+1$ termes au moins ayant le même signe.

Suivant que ces $2n+1$ termes seront positifs ou négatifs, on pourra leur appliquer le théorème exprimé par l'inégalité (105) ou le théorème exprimé par l'inégalité (106).

On constatera, dans les deux cas, que l'on aura

$$|\lambda_p| > \frac{n^{\frac{2}{9}}}{B}.$$

Désignons par C une constante positive convenablement choisie. Nous pourrons exprimer les résultats obtenus sous la forme suivante : le nombre p étant supérieur à une certaine limite dépendant seulement de la surface (S) et du nombre μ, on aura

$$|\lambda_p| > Cp^{\frac{2}{9}}. \tag{107}$$

Donc, si l'on impose aux λ_k la condition

$$|\lambda_k| < l \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

et si l'on veut que les ψ_k soient linéairement indépendants, le nombre de termes de la suite

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$$

sera fini. C'est ce que nous voulions démontrer.

Mais peut-on affirmer que des fonctions telles que les ψ_k existeront? Pour cela, il n'y a qu'à s'assurer que le rayon de convergence de la série (5) n'est pas, en général, infini. Or, le carré de ce rayon de convergence est égal à la limite de la suite (40); il ne pourrait donc être infini que dans le cas où l'on aurait

$$W'_2 + W_2 = 0,$$

ce qui donne $u_1 = 0$. On en conclurait, au moyen des équations (6),

$$\left(\frac{du_0}{dN}\right)_e + \left(\frac{du_0}{dN}\right)_i = 0.$$

Or, en supposant même que cette circonstance puisse se présenter, elle ne le pourrait que pour un choix très particulier de la fonction φ.

On tire de tout ce qui précède la conclusion suivante : l'équation

$$(108) \qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right] + 2\varphi$$

admet une solution u, fonction analytique du paramètre λ, jouissant des propriétés énoncées dans l'Introduction; en dehors de cette solution-là, l'équation précédente peut admettre une autre solution u' qui ne sera pas une fonction analytique de λ, mais la fonction u' ne pourra différer de la fonction u que pour des valeurs isolées de λ, valeurs qui feront nécessairement partie de la suite (6) de l'Introduction.

15. Il résulte de ce que nous venons de voir que la série (5) aura un rayon de convergence supérieur à 1 pourvu que l'on ait $\mu > 0$. On pourra donc, dans ce cas, résoudre, au moyen de la série précédente, le problème qui consiste à déterminer une fonction U vérifiant dans le domaine (D) ou dans le domaine (D′) l'équation $\Delta u - \mu^2 u = 0$, s'annulant dans le second cas à l'infini et telle que la dérivée suivant la normale coïncide avec une fonction continue, donnée *a priori*.

Voyons dans quelle mesure tout cela est applicable au cas où $\mu = 0$, c'est-à-dire à l'équation de Laplace. Nous avons vu qu'en dehors du pôle $+1$ que le potentiel u peut avoir dans ce cas, les valeurs absolues de tous les autres pôles de cette fonction sont supérieures à l'unité. Supposons que le pôle $+1$ existe effectivement et soit $-$ P le résidu correspondant. La fonction P sera un potentiel de simple couche et nous pourrons poser

$$u = \frac{P}{1-\lambda} + u' \tag{109}$$

où u' sera un potentiel de simple couche. La fonction u' et les dérivées $\left(\frac{du'}{dN}\right)_i$ et $\left(\frac{du'}{dN}\right)_e$, en tant que fonctions du paramètre complexe λ, seront holomorphes dans un cercle de rayon supérieur à l'unité ayant pour centre l'origine des coordonnées dans le plan de cette variable. D'autre part, les théorèmes généraux établis plus haut nous apprennent que

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_i = 0. \tag{110}$$

Donc, la fonction P se réduira sur la surface (S) à une constante; autrement dit

$$(P)_s = \text{const.} \tag{111}$$

Remarquons, en passant, que P est le potentiel d'une couche électrique sans action sur un point intérieur. Portons la valeur (109) de u dans l'équation (1). La relation (110) nous apprend qu'il viendra

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_e + \left(\frac{du'}{dN}\right)_e - \left(\frac{du'}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du'}{dN}\right)_e + \left(\frac{du'}{dN}\right)_i\right] + 2\varphi;$$

posons $\lambda = +1$, multiplions ensuite l'équation précédente par ds et intégrons en étendant l'intégration à toute la surface (S). Il viendra

$$2\int_{(S)} \varphi\, ds = \int_{(S)} \left(\frac{dP}{dN}\right)_e ds = (P)_s \int_{(S)} ds = (P)_s S,$$

où S représente l'aire totale de la surface (S). Il résulte de cette relation que la condition nécessaire et suffisante pour que le nombre $+1$ soit un pôle du potentiel u est la suivante :

$$\int_{(S)} \varphi\, ds \neq 0. \tag{112}$$

Si donc on a

$$\int_{(S)} \varphi\, ds = 0,$$

tout ce qui a été dit au début au sujet du cas où $\mu > 0$ reste encore applicable quand on a $\mu = 0$.

Examinons de plus près ce qui arrive lorsque l'inégalité (112) est satisfaite.

Il résulte immédiatement de la comparaison de la série (5) avec celle que l'on obtient en développant le second membre de l'équation (109) suivant les puissances de λ, que l'on aura

$$P = \lim(u_n)_{n=\infty}.$$

Considérons maintenant la fonction σ définie par la série (10) et observons que l'on a, pour $|\lambda| < 1$,

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = 4\pi\sigma = 2\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \lambda^k.$$

Développons le premier membre de cette équation suivant la puissance de λ, après y avoir porté la valeur (109) de u. L'identification des coefficients nous donnera

$$\left(\frac{dP}{dN}\right)_e = 2\lim(\sigma_n)_{n=\infty},$$

relation qui démontre la légitimité de la méthode donnée par Robin pour déterminer la densité d'une couche sans action sur un point intérieur.

Les propositions que nous venons de démontrer et un théorème classique relatif à l'équation de Laplace conduisent immédiatement aux théorèmes suivants :

1° Pour qu'il soit possible de trouver une fonction u vérifiant l'équation de Laplace à l'intérieur de la surface (S) et satisfaisant à la condition

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_i = f,$$

où f est une fonction continue donnée, il est nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\int_{(S)} f\, ds = 0;$$

2° Il est toujours possible de déterminer une fonction u vérifiant l'équation de Laplace dans tout l'espace extérieur à la surface (S), s'annulant à l'infini et telle que l'on ait

$$\left(\frac{du}{dN}\right)_e = f$$

où f a la même signification que tout à l'heure.

III. — Problème fondamental relatif aux potentiels généralisés de double couche. Méthode de Neumann.

16. Proposons-nous de déterminer un potentiel généralisé de double couche v vérifiant l'équation

$$(v)_i - (v)_e = \lambda[(v)_i + (v)_e] + 2\varphi, \tag{1}$$

où les lettres λ et φ ont la même signification que dans les numéros précédents. Supposons d'abord que la fonction φ soit telle que le potentiel

$$(2)\qquad v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \varphi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds$$

possède la dérivée $\frac{dv_0}{dN}$ et que cette dérivée soit continue. Cela posé, envisageons le potentiel de simple couche u défini par l'équation

$$(3)\qquad \left(\frac{du}{dN}\right)_e - \left(\frac{du}{dN}\right)_i = \lambda\left[\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \left(\frac{du}{dN}\right)_i\right] + 2\frac{dv_0}{dN},$$

et définissons une fonction v' de la façon suivante : on a, à l'*intérieur* de la surface (S),

$$(4)\qquad v' = \frac{\lambda u + v_0}{1-\lambda};$$

mais à l'*extérieur* de cette surface, soit

$$(5)\qquad v' = \frac{\lambda u + v_0}{1+\lambda}.$$

Les formules (4) et (5) donnent

$$\left(\frac{dv'}{dN}\right)_i = \frac{\lambda\left(\frac{du}{dN}\right)_i + \frac{dv_0}{dN}}{1-\lambda},$$

$$\left(\frac{dv'}{dN}\right)_e = \frac{\lambda\left(\frac{du}{dN}\right)_e + \frac{dv_0}{dN}}{1+\lambda};$$

d'où, en s'appuyant sur l'équation (3),

$$(6)\qquad \left(\frac{dv'}{dN}\right)_i = \left(\frac{dv'}{dN}\right)_e.$$

Posons

$$(7)\qquad v'' = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} [(v')_i - (v')_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds$$

et

$$(8) \qquad \Phi = v' - v'';$$

nous aurons

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e,$$
$$(\Phi)_i = (\Phi)_e.$$

On déduit immédiatement de là, en tenant compte de la façon dont Φ se comporte à l'infini

$$\Phi = 0.$$

Par conséquent, à cause de la relation (8),

$$v'' = v';$$

cela prouve que la fonction v' est un potentiel de double couche. D'ailleurs, les relations (4) et (5) nous donnent

$$(9) \qquad \begin{cases} (v')_i(1 - \lambda) = \lambda(u)_s + (v_0)_i, \\ (v')_e(1 + \lambda) = \lambda(u)_s + (v_0)_e, \end{cases}$$

d'où

$$(v')_i(1 - \lambda) - (v')_e(1 + \lambda) = (v_0)_i - (v_0)_e,$$

or

$$(v_0)_i - (v_0)_e = 2\varphi;$$

il viendra donc, après une transformation immédiate,

$$(10) \qquad (v')_i - (v')_e = \lambda[(v')_i + (v')_e] + 2\varphi.$$

Il résulte de la comparaison de cette équation à l'équation (1) que v' est une solution de cette équation.

Les formules (9) nous donnent

$$(11) \qquad (v')_i + (v')_e = \frac{\lambda(u)_s + (v_0)_i}{1 - \lambda} + \frac{\lambda(u)_s + (v_0)_e}{1 + \lambda}.$$

Supposons que u soit celle des solutions de l'équation (3) qui est analytique par rapport à λ.

La formule (11) nous apprend que, dans ce cas, la fonction $(v')_i + (v')_e$ sera aussi une fonction analytique du paramètre λ. On pourrait croire que cette fonction admet forcément les pôles $+1$ et -1. En réalité, il n'en est pas ainsi. Pour le voir, assurons-nous que la fonction u, en tant que fonction de λ, sera holomorphe à l'intérieur d'un cercle de rayon plus grand que l'unité, ayant l'origine des coordonnées dans le plan de la variable complexe λ pour centre. En effet, si $\mu > 0$, la proposition résulte immédiatement de ce qui a été établi au Chapitre précédent. Soit donc $\mu = 0$. On aura dans ce cas

$$\int_{(S)} \frac{dv_0}{dN}\, ds = 0;$$

par conséquent (13) la fonction u ne peut avoir que des pôles supérieurs en valeur absolue à l'unité. Cela posé, désignons par u' la valeur de la fonction u pour $\lambda = +1$ et soit u'' la valeur de la même fonction pour $\lambda = -1$. L'équation (3) nous donne

$$(12) \qquad \left(\frac{du'}{dN}\right)_i = -\frac{dv_0}{dN},$$

$$(13) \qquad \left(\frac{du''}{dN}\right)_e = \frac{dv_0}{dN}.$$

Soit d'abord $\mu > 0$. Les équations précédentes entraîneront alors les relations

$$(14) \qquad (u')_s = -(v_0)_i,$$

$$(15) \qquad (u'')_s = (v_0)_e.$$

On déduit, à l'aide de ces relations, de l'équation (11), la conséquence suivante : aucun des nombres $+1$ et -1 n'est un pôle de la fonction $(v')_i + (v')_e$.

Soit maintenant $\mu = 0$. L'équation (13) entraînera bien l'équation (15), mais l'équation (14) ne sera plus une conséquence nécessaire de l'équation (12); on pourra seulement affirmer que

$$(u')_i = -(v_0)_i + C,$$

où C est une constante. Donc, si l'on a $\mu = 0$, l'équation (11) nous apprend que la fonction $(v')_i + (v')_e$ ne pourra pas, il est vrai, avoir le nombre -1 pour pôle, mais qu'elle peut bien avoir pour pôle le nombre $+1$.

Il est aisé de déduire de tout ce qui précède que l'équation (1) admet une solution analytique par rapport au paramètre λ et que cette solution jouit de toutes les propriétés énoncées dans l'Introduction. Pour reconnaître qu'il en est bien ainsi, il suffit de se reporter à l'équation (11) et à l'équation (10), équations qui donnent

$$v' = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \{\lambda[(v')_i + (v')_e] + 2\varphi\} \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds.$$

Bien entendu, tout cela ne concerne que le cas où la fonction v_0, définie par la formule (2), possède la dérivée $\frac{dv_0}{dN}$ et où cette dérivée est continue.

17. Abordons maintenant le cas où la fonction φ est une fonction continue quelconque définie sur la surface (S). Posons, comme tout à l'heure,

$$v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(S)} \varphi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds,$$

et considérons, en outre, les fonctions v_1 et v_2 définies par les équations

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} [(v_0)_i + (v_0)_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds, \\ v_2 &= \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} [(v_1)_i + (v_1)_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds. \end{aligned}\right.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\varpi_0 = (v_0)_i + (v_0)_e,$$
$$\varpi_1 = (v_1)_i + (v_1)_e.$$

M. Liapounoff (¹) a prouvé, en supposant que $\mu = 0$, qu'il existera un certain nombre positif A tel que la différence des valeurs ϖ'_0, ϖ''_0 de la fonction ϖ_0 en deux points M et M′ de la surface (S) vérifie l'inégalité

$$|\varpi'_0 - \varpi''_0| < A\sqrt{\mathrm{MM'}}. \tag{17}$$

M. Korn (²), toujours dans l'hypothèse $\mu = 0$, en a tiré les conséquences suivantes :

1° La fonction ϖ_1 admettra sur la surface (S) des dérivées premières et ces dérivées premières jouiront d'une propriété exprimable par une inégalité analogue à l'inégalité (17).

2° La fonction v_2 possédera la dérivée $\frac{dv_2}{d\mathrm{N}}$ et cette dérivée sera continue.

Je dois faire remarquer que M. Korn a considéré une surface un peu moins générale que la surface (S) que nous envisageons ici; cependant son théorème reste exact, même dans ces conditions plus générales et, au surplus, on peut l'étendre au cas où le nombre μ a une valeur positive quelconque. La démonstration de ces propositions ne présente aucune difficulté.

Cela étant, posons

$$v = v_0 + \lambda v_1 + \lambda^2 w \tag{18}$$

et observons que l'on a

$$(v_0)_i - (v_0)_e = 2\varphi,$$
$$(v_1)_i - (v_1)_e = (v_0)_i + (v_0)_e;$$

l'équation (1) nous donnera

$$(w)_i - (w)_e = \lambda[(w)_i + (w)_e] + (v_1)_i + (v_1)_e.$$

(¹) *Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1898).

(²) KORN, *Ein allgemeiner Beweis des Methoden der alternirenden Verfahrens und der Existenz des Lösungen der Dirichletschen Problemes im Raume.*

Peut-on satisfaire à cette équation en prenant pour w un certain potentiel généralisé de double couche? Dans ce problème, la fonction v_2, définie par la formule (16), jouera le rôle qu'a joué la fonction v_0 au numéro précédent. Nous savons, par le théorème de M. Korn, que la dérivée $\frac{dv_2}{dN}$ est une fonction continue, donc la théorie du numéro précédent est applicable à la fonction w.

Cela posé, on tire de l'équation (18) la conséquence suivante : Il suffit que la fonction φ soit continue ([1]) pour que l'équation (1) admette une solution analytique par rapport à λ, jouissant de toutes les propriétés énoncées dans l'Introduction.

18. L'équation (1) admet-elle, outre la solution analytique considérée dans les numéros précédents, une autre solution v' ? Posons, pour répondre à cette question,

$$\Phi = v - v'.$$

La fonction Φ sera un potentiel de double couche vérifiant la relation

$$(\Phi)_i - (\Phi)_e = \lambda[(\Phi)_i + (\Phi)_e] \tag{19}$$

et l'on aura

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \varpi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds, \tag{20}$$

où ϖ est une certaine fonction continue définie sur la surface (S).

Nous avons

$$(\Phi)_i - (\Phi)_e = \varpi,$$

([1]) En généralisant un peu une remarque due à M. Korn (*Lehrbuch der Potentialtheorie*), il serait aisé d'étendre les résultats de ce Chapitre et ceux du Chapitre précédent à des cas où la fonction φ aurait des points de discontinuité ou même des lignes de discontinuité.

d'où, en tenant compte des équations (19) et (20),

$$\Phi = \frac{\lambda}{4\pi}\int_{(S)}[(\Phi)_i + (\Phi)_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds. \tag{21}$$

Cela prouve que, pour $\lambda = 0$, la fonction Φ est identiquement nulle. Supposons que $\lambda \neq 0$ et reprenons les fonctions v_0, v_1, v_2 considérées au début du numéro précédent en ayant soin de substituer dans l'expression de la fonction v_0 à la fonction φ la fonction $\frac{1}{2}[(\Phi)_i + (\Phi)_e]$. Il résulte de l'équation (21) que la fonction v_2 coïncidera alors avec la fonction

$$\frac{1}{\lambda^2}\Phi.$$

Or, nous savons que l'expression $\frac{dv_2}{dN}$ a un sens et qu'elle est une fonction continue.

Il faut donc que la dérivée $\frac{d\Phi}{dN}$ existe et qu'elle soit une fonction continue.

Cela posé, j'observe que la relation (19) ne peut subsister pour

$$\lambda = -1,$$

sans que l'on ait identiquement $(\Phi) = 0$. En effet on aura, pour $\lambda = -1$,

$$(\Phi)_i = 0;$$

la fonction Φ serait donc nulle dans toute l'étendue du domaine (D) et l'on aurait $\frac{d\Phi}{dN} = 0$. On conclura aisément de là, en tenant compte des propriétés de la fonction Φ et de ses dérivées premières à l'infini, que la relation $\Phi = 0$ sera aussi vérifiée dans tout le domaine extérieur à la surface (S). Donc, pour $\lambda = -1$, on aura bien dans tout l'espace $\Phi = 0$.

Envisageons maintenant le cas où $\lambda = 1$. On s'assurera aisément qu'ici encore l'on aura dans tout l'espace $\Phi = 0$, à moins cependant que l'on n'ait $\mu = 0$. Dans ce dernier cas, la fonction Φ serait nulle à l'extérieur de la surface (S) et conserverait une valeur constante à l'intérieur.

Supposons enfin que λ ne soit égal ni à $+1$ ni à -1, ni à zéro, et posons

$$F = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} \frac{d\Phi}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds.$$

On trouve, au moyen du théorème de Green, en s'appuyant sur l'équation (19),

$$(F)_s = \frac{1-\lambda}{2\lambda}(\Phi)_i = \frac{1+\lambda}{2\lambda}(\Phi)_e.$$

On aura donc, à l'intérieur de la surface (S),

$$\Phi = \frac{2\lambda}{1-\lambda}F,$$

et à l'extérieur,

$$\Phi = \frac{2\lambda}{1+\lambda}F.$$

D'ailleurs

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_i = \left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = \frac{d\Phi}{dN};$$

par conséquent,

$$\left(\frac{dF}{dN}\right)_i(1+\lambda) = \left(\frac{dF}{dN}\right)_e(1-\lambda).$$

Voici ce qui résulte de tout ce qui a été dit dans ce numéro : si la fonction Φ n'est pas nulle identiquement, elle rentre dans la classe de celles parmi lesquelles se trouvent les résidus relatifs aux pôles de la solution analytique déduite plus haut de l'équation (1). Cela étant, tout ce qui a été dit dans l'Introduction au sujet de l'équation

$$(v)_i - (v)_e = \lambda\left[(v)_i + (v)_e\right] + 2\varphi$$

se trouve être démontré.

19. Les résultats établis dans les numéros précédents conduisent à une généralisation de la méthode de Neumann et à une démonstration générale de la légitimité de cette méthode elle-même, et cela sans supposer que le principe de Dirichlet ait été préalablement démontré.

Il résulte immédiatement, de ce que nous avons vu plus haut, que le potentiel généralisé v, fonction analytique du paramètre λ, définie par l'équation (1), est développable en une série procédant suivant les puissances entières et positives de λ, série qui sera uniformément convergente dans tout l'espace, pourvu que

$$(22) \qquad |\lambda| < \mathrm{R},$$

où la longueur R, rayon de convergence de la série, est supérieure à l'unité si l'on a

$$(23) \qquad \mu > 0,$$

et au moins égale à l'unité si

$$(24) \qquad \mu = 0.$$

Par conséquent, l'inégalité (22) étant vérifiée, nous pouvons poser

$$(25) \qquad v = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \lambda^k.$$

Il vient, en portant cette valeur de v dans l'équation (1),

$$(26) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} (v_0)_i - (v_0)_e = 2\varphi, & \\ (v_k)_i - (v_k)_e = (v_{k-1})_e + (v_{k-1})_i & (k = 1, 2, 3, \ldots); \end{array} \right.$$

d'où

$$v_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{(\mathrm{S})} \varphi \frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds,$$

$$v_k = \frac{1}{4\pi}\int_{(\mathrm{S})} [(v_{k-1})_i + (v_{k-1})_e]\frac{d}{dr}\frac{e^{-\mu r}}{r}\cos\psi\, ds.$$

Ces formules feront connaître de proche en proche tous les termes de la série (25). D'ailleurs, cette série ne se distingue de la série de

Neumann que par la substitution de potentiels généralisés aux potentiels newtoniens ordinaires.

Supposons d'abord que l'inégalité (23) soit vérifiée. Le rayon de convergence de la série (25) sera supérieur à l'unité, donc elle convergera uniformément dans tout l'espace tant pour $\lambda = +1$ que pour $\lambda = -1$. Dans le premier cas, elle fournira la solution du problème de Dirichlet généralisé extérieur et dans le second, elle donnera celle du problème intérieur.

Examinons maintenant le cas où $\mu = 0$.

Si le nombre $+1$ n'est pas un pôle de la fonction v, la série (25) aura un rayon de convergence supérieur à l'unité et tout ce que nous avons dit au sujet du cas où μ est un nombre positif différent de zéro est applicable au cas actuel. Il faut donc examiner l'hypothèse où le nombre $+1$ serait un pôle de la fonction v.

Le résidu relatif à ce pôle sera un potentiel de double couche; c'est là, nous l'avons vu, une propriété commune à tous les pôles de la fonction v. La densité de cette double couche sera une constante $\frac{c}{4\pi}$; la manière la plus simple de le reconnaître consiste à se reporter à ce que nous avons dit au sujet de l'équation (19) lorsque $\lambda = +1$.

Il résulte de tout cela que nous pouvons poser

$$(27) \qquad v = \frac{-c}{4\pi(1-\lambda)}\int_{(S)} \frac{\cos\psi}{r^2}\,ds + \sum_{k=0}^{\infty} v'_k \lambda^k,$$

où la série

$$(28) \qquad v' = \sum_{k=0} v'_k \lambda^k$$

aura un rayon de convergence supérieur à l'unité. L'équation (27) nous donne

$$(v)_i - (v)_e = -\frac{c}{1-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} [(v'_k)_i - (v'_k)_e]\lambda^k.$$

La comparaison de cette valeur de la différence

$$(v)_i - (v)_e$$

avec celle que donne la formule (25) conduit aux relations

$$(v'_k)_i - (v'_k)_e = (v_k)_i - (v_k)_e + c \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

d'où, en s'appuyant sur les équations (26),

$$(29) \qquad (v'_k)_i - (v'_k)_e = (v_{k-1})_i + (v_{k-1})_e + c:$$

Le rayon de convergence de la série (28) étant supérieur à l'unité, le premier membre de l'équation précédente tend vers zéro lorsque le nombre k croît indéfiniment. Il doit donc en être de même du second membre. Par conséquent

$$(30) \qquad c = -\lim[(v_k)_i + (v_k)_e]_{k=\infty}.$$

Il résulte de là que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction v admette le nombre $+1$ pour pôle peut s'écrire ainsi :

$$(31) \qquad \lim[(v_k)_i + (v_k)_e]_{k=\infty} \neq 0.$$

Si la fonction v a le nombre $+1$ pour pôle, la relation (30) nous fera connaître la constante c. Cette constante étant déterminée, il sera aisé de calculer successivement tous les termes de la série (28). En effet, l'équation (29) nous donne

$$v'_k = \frac{1}{4\pi}\int_{(S)} [(v_{k-1})_i + (v_{k-1})_e + c]\frac{\cos\psi}{r^2}\,ds;$$

d'où

$$v'_k = v_k + \frac{c}{4\pi}\int_{(S)} \frac{\cos\psi}{r^2}\,ds;$$

on a donc, à l'intérieur de la surface (S),

$$v'_k = v_k + c,$$

et, à l'extérieur,

$$v'_k = v_k.$$

En résumé, tous les éléments entrant dans la formule (27) peuvent être aisément calculés. Si l'on pose, dans cette formule, $\lambda = -1$, on obtient la solution générale du problème de Dirichlet intérieur, sous forme d'un potentiel de double couche.

La formule (27) n'a pas de sens pour $\lambda = +1$; il est aisé, cependant, de déduire, des résultats que nous avons obtenus, la solution du problème de Dirichlet extérieur. En effet, le Chapitre précédent nous apprend qu'il existe un potentiel de simple couche P, prenant la valeur $+1$ sur la surface (S). D'autre part, on vérifiera sans peine que, pour $\lambda = +1$, la fonction υ', définie par la série (28), vérifie l'équation

$$(\upsilon')_e = -\frac{c}{2} - \varphi.$$

Par conséquent, la fonction

$$-\frac{c}{2}\mathrm{P} - \upsilon'$$

résoudra le problème de Dirichlet extérieur, sous forme de la somme d'un potentiel de simple couche et d'un potentiel de double couche. J'ajoute que, dans le cas actuel, c'est-à-dire où l'inégalité (31) est vérifiée, il est impossible de résoudre le problème extérieur par un potentiel de double couche. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait trouver un potentiel de double couche F, coïncidant avec la fonction P à l'extérieur de la surface (S), et l'on aurait

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{N}} = \left(\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{N}}\right)_e.$$

Or, cela est impossible parce que l'on a, d'une part,

$$\int_{(\mathrm{S})}\left(\frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{N}}\right)_e ds \neq 0,$$

et, d'autre part,

$$\int_{(\mathrm{S})}\left(\frac{d\mathrm{F}}{d\mathrm{N}}\right) ds = 0.$$

20. En terminant ce Chapitre, nous nous proposons de montrer comment la théorie générale de l'équation

$$(32) \qquad \Delta w - \mu^2 w = 0$$

peut être complétée en s'appuyant sur les résultats que nous avons établis. Supposons qu'une intégrale w de l'équation (32) vérifie cette équation dans toute l'étendue du domaine (D') extérieur à une surface fermée quelconque (Σ) et qu'elle s'annule à l'infini.

Posons

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et considérons les rapports

$$w : \frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} : \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} : \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho} \quad \text{et} \quad \frac{\partial w}{\partial z} : \frac{d}{d\rho}\frac{e^{-\mu\rho}}{\rho};$$

je me propose de montrer que les rapports précédents restent finis lorsque le nombre ρ croît indéfiniment. J'envisage, à cet effet, une surface fermée ayant les propriétés voulues pour que les considérations des numéros précédents lui soient applicables et telle que la surface (Σ) soit tout entière située à l'intérieur de la surface en question; cette surface pourra être, par exemple, une sphère (S), de rayon assez grand, ayant l'origine des coordonnées pour centre. A l'extérieur de la sphère (S), la fonction w sera déterminée sans ambiguïté par les valeurs qu'elle prend sur cette sphère elle-même; cela résulte de ce qu'une intégrale de l'équation (32) ne peut avoir ni un maximum positif ni un minimum négatif à l'intérieur du domaine où elle vérifie cette équation. Il résulte de là et de ce que nous avons vu dans les numéros précédents que, à l'extérieur de la surface (S), la fonction w pourra être mise sous forme d'un potentiel généralisé de double couche répandue sur cette surface, ou, si $\mu = 0$, sous forme de somme d'un potentiel de double couche et d'un potentiel de simple couche.

Or, le théorème qui nous occupe est une conséquence immédiate de cette remarque.

Le théorème précédent permet de démontrer rigoureusement le théorème suivant, qui n'est pas sans intérêt :

Soit, comme dans les numéros précédents, (S) une surface fermée jouissant des propriétés énoncées dans l'Introduction et (D′) le domaine extérieur à cette surface. La fonction w sera déterminée sans ambiguïté dans toute l'étendue du domaine (D′) par les propriétés suivantes :

1° *Elle doit vérifier l'équation* (32) *dans tout ce domaine ;*

2° *Elle s'annule à l'infini ;*

3° *Elle satisfait à l'équation*

$$\left(\frac{dw}{dN}\right)_e = \varphi,$$

où φ est une fonction continue définie sur la surface (S).

En effet, supposons que deux fonctions différentes puissent remplir chacune les conditions précédentes, et soit Φ leur différence. La fonction Φ jouirait des deux premières propriétés de la fonction w et satisferait en outre à l'équation

$$\left(\frac{d\Phi}{dN}\right)_e = 0.$$

On déduit de là, en s'appuyant sur le théorème démontré au début de ce numéro, que

$$\iiint_{(D')} \left[\sum \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \mu^2\Phi^2\right] dx\,dy\,dz = 0,$$

égalité qui ne peut subsister que sous la condition

$$\Phi = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D′). Cela prouve bien que la fonction w est déterminée sans ambiguïté par les conditions qui lui sont imposées.

Cracovie, le 19 juin 1901.