JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. DESAINT

Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 433-451.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__433_0>

Théorèmes généraux sur les points singuliers des fonctions données par une série de Taylor;

PAR M. L. DESAINT.

Ce Mémoire est une contribution à l'un des problèmes essentiels que l'on peut se poser sur les fonctions données par une série de Taylor, et qui s'énonce ainsi :

Étant données p fonctions, développables en séries de Taylor au voisinage de l'origine

$$F_1(z) = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2(z) = \Sigma a_2(n) z^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_p(z) = \Sigma a_p(n) z^n,$$

reconnaître les points singuliers d'une fonction

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n,$$

le coefficient $A(n)$ *résultant d'une opération* f *connue exécutée sur* $a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)$, *de telle sorte que l'on ait*

$$A(n) = f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)].$$

Le problème, ainsi posé, a reçu sa solution dans le cas où

$$p = 2,$$
$$A(n) = a_1(n) \times a_2(n),$$

solution qui donna lieu à l'étude fondamentale de M. Hadamard sur ce sujet (*Acta mathematica*, t. XXII). Cette étude fut suivie des travaux de MM. Borel et Leau (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVI); M. Borel précisait la nature des singularités, en étendant la proposition de M. Hadamard au cas d'un polynome f à p variables. M. Leau s'occupa de plus du cas où $f = f[a_1(n)]$ avec $a_1(n) = \frac{1}{n}$ dans le *Journal de Mathématiques pures*, 1899. Les nombreux résultats obtenus par M. Le Roy, dans une voie différente, se rattachent, au fond, au problème considéré (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1901).

Enfin, en élargissant encore l'énoncé et en faisant entrer dans f à la fois les divers coefficients des séries de Taylor

$$F_1 = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2 = \Sigma a_2(n) z^n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F_p = \Sigma a_p(n) z^n,$$

on arrive aux résultats particuliers obtenus, dans ce cas, par MM. Hurwitz, dell' Agnola et Pincherle (*Acta mathematica*, t. VII; *Math. Annalen*, t. LXIX, *Annali di Matematica*, t. IV).

Je m'en tiendrai, dans cette étude, à l'énoncé général posé au début, et je me propose ici de traiter, dans toute sa généralité, ce problème, en opérant sur p fonctions $F_1, F_2, \dots, F_p$, la fonction des coefficients

$$f(x, y, \dots, u),$$

à p variables, étant peu conditionnée, c'est-à-dire soumise uniquement à une condition d'holomorphisme au voisinage du point $(x = 0, y = 0, \dots, u = 0)$.

J'espère revenir bientôt sur les applications des propositions de ce Mémoire aux équations différentielles.

Le premier des théorèmes auxquels je suis arrivé peut s'énoncer ainsi :

Soit $F(z)$ *une fonction donnée par une série de Taylor*

$$F(z) = \Sigma a(n) z^n$$

valable à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un et soit

$$\Phi(z) = \Sigma f[a(n)] . z^n$$

une fonction donnée de même par une série de Taylor, la fonction

$$f(x)$$

étant développable en série de Taylor à l'intérieur d'un cercle de rayon non nul et de centre $x = 0$.

Dans ces conditions, la fonction

$$\Phi(z)$$

n'a d'autres points singuliers (sauf $x = 1$ *et* $x = \infty$*) que les points obtenus en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les points singuliers de la fonction*

$$F(z),$$

chacun d'eux y figurant un nombre quelconque de fois.

Remarquons, à cet effet, le développement

$$f(x) = \Sigma \alpha(k) . n^k, \qquad |x| < \rho.$$

Les coefficients $a(n)$ tendant vers zéro, lorsque n augmente indéfiniment, à partir de $n = N$, nous aurons les inégalités

$$|a(n)| < \rho, \qquad n = N, \qquad N + 1, \qquad \ldots, \qquad \infty$$

et nous pourrons écrire

$$f[a(n)] = \Sigma \alpha(k) a_n^k.$$

Or

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{F(t)}{t} t^{-n} dt.$$

Le contour C′ est ainsi choisi : il entourera les diverses singularités de $F(z)$ et pourra s'en approcher, d'ailleurs, autant que l'on voudra sans être infiniment près d'elles ; tout ensemble de singularités de $F(z)$ sera traité de la manière suivante : ses éléments voisins des éléments limites, ainsi que les éléments limites eux-mêmes et les éléments formant continuum aréolaire, seront entourés de lignes qui, avec les lignes analogues en nombre fini, définiront une aire multiplement connexe, limitée par un contour non continu c'.

A cause des expressions

$$a(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{F(t)}{t} t^{-n}\,dt,$$

on déduit

$$f[a(n)] = \Sigma\,\alpha(k) \times \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{c'} \frac{F(t)}{t} t^{-n}\,dt\right)^k.$$

Ce développement est valable à partir de n suffisamment grand, par exemple à partir de $n = N$, puisque, $a(n)$ tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, $|a(n)|$ devient plus petit que le rayon de convergence ρ de la série de Taylor définissant $f(x)$ au voisinage de l'origine.

Écrivons

$$f[a(n)] = \Sigma\,\alpha(k) \times \int_{c'} \cdots \int_{c'} \frac{F(t_1)}{2\pi i t_1}\frac{F(t_2)}{2\pi i t_2}\cdots$$
$$\times \frac{F(t_k)}{2\pi i t_k}(t_1 t_2 \ldots t_k)^{-N}(t_1 t_2 \ldots t_k)^{n-N}\,dt_1 \ldots dt_k.$$

La fonction $\Phi(z)$ donnée par le développement taylorien

$$\Phi(z) = \Sigma f[a(n)]\,z^n$$

se met sous la forme

$$\Phi(z) = \sum_0^{N-1} f[a(n)]\,z^n$$
$$+ z^N.\sum \alpha(k).\int_{c'} \cdots \int_{c'} \frac{\dfrac{F(t_1).F(t_2)\ldots F(t_k)}{(2\pi i)^k (t_1 t_2 \ldots t_k)^{N+1}}\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_k}{1 - \dfrac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}}.$$

Pour justifier l'introduction de cette dernière somme, il suffit de montrer que l'intégrale figurant comme coefficient de $\alpha(k)$ est une fonction holomorphe de z en dehors des points définis par

$$1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k} = 0,$$

la valeur de cette intégrale ayant un module inférieur à

$$\frac{1}{\theta}\rho^k,$$

où θ est une quantité finie non nulle.

A cet effet, considérons l'intégrale

$$\int_{c'} \cdots \int_{c'} \left|\frac{F(t_1)}{2\pi i t_1}\right| \cdots \left|\frac{F(t_k)}{2\pi i t_k}\right| |t_1 t_2 \ldots t_k|^{-N} |dt_1| \ldots |dt_k|$$

formée avec les modules des éléments figurant en numérateur.

Cette intégrale s'écrit encore

$$\left(\int_{c'} \left|\frac{F(t)}{2\pi i t}\right| |t|^{-N} |dt|\right)^k.$$

Puisque N peut être pris aussi grand que l'on veut, comme t possède sur c' un module supérieur à *un*, on peut poser

$$\int_{c'} \left|\frac{F(t)}{2\pi i t}\right| |t|^{-N} |dt| < \rho.$$

En désignant par $\theta \gtrless 0$ la plus petite des valeurs de

$$1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k},$$

en dehors de l'ensemble

$$t_1 t_2 \ldots t_k,$$

le module de l'intégrale, apparaissant comme coefficient de $\alpha(k)$, est inférieur à

$$\frac{1}{\theta}\rho^k.$$

Considérons alors l'aire A′ limitée par c' et formons une aire A obtenue en multipliant les points de A′ entre eux. Désignons par c le contour limitant A. Ce contour c divise le plan de la variable en deux régions; nous désignerons par R celle des deux régions qui contient le cercle de rayon un ayant l'origine pour centre. Pour démontrer l'holomorphisme, dans R, de l'intégrale

$$\int_{c'} \cdots \int_{c'} \frac{\frac{\mathrm{F}(t_1).\mathrm{F}(t_2)\ldots\mathrm{F}(t_k)}{(2\pi i)^k t_1 t_2 \ldots t_k}\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_k}{1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}},$$

il suffit de se reporter au théorème sur les fonctions d'une variable définies par des séries absolument convergentes d'ordre de multiplicité fini et infini.

Remarque. — Les points $t_1, t_2, \ldots, t_k$ ont été pris aussi voisins que possible des points singuliers de $\mathrm{F}(z)$, mais non pas infiniment près de ceux-ci; aussi, lorsque k augmente indéfiniment, on ne peut dire que

$$t_1 t_2 \ldots t_k$$

représente le produit de k points singuliers de $\mathrm{F}(z)$; mais k augmentant indéfiniment, ce produit devient infini. Dans l'énoncé, on réservera donc les points à l'infini.

La méthode que nous venons d'employer conduit à ce deuxième théorème :

Soit $\mathrm{F}(z)$ *une fonction donnée par une série de Taylor*

$$\mathrm{F}(z) = \Sigma\, a(n) z^n,$$

valable au voisinage de l'origine, et soit

$$\Phi(z) = \Sigma f(a_n) z^n$$

une fonction donnée de même par une série de Taylor, la fonction

$$f(x)$$

étant entière.

Dans ces conditions, la fonction

$$\Phi(z)$$

n'a d'autres points singuliers que ceux qu'on obtient en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les points singuliers de la fonction

$$F(z),$$

chacun d'eux y figurant un nombre quelconque de fois.

Il convient de faire la même réserve que tout à l'heure au sujet des singularités $x = 1, x = \infty$. Voici, cette restriction faite, la démonstration de ce deuxième théorème. Il suffira de faire $N = 0$ dans la formule précédente et de remarquer que, en dehors des points définis par

$$z = t_1 t_2 \ldots t_k,$$

la série

$$(1) \qquad \Sigma \alpha(k) \int_{c'} \ldots \int_{c'} \frac{\frac{F(t_1)}{2\pi i . t_1} \cdots \frac{(F t_k)}{2\pi i . t_k} dt_1 \ldots dt_k}{1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}}$$

est convergente.

En effet, dans une région ne contenant pas les points

$$z = t_1 t_2 \ldots t_k,$$

la quantité

$$1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}$$

prend un module minimum

$$r_k,$$

et, par suite, le module de l'intégrale multiple

$$\int_{c'} \ldots \int_{c'} \frac{\frac{F(t_1)}{2\pi i . t_1} \frac{F(t_2)}{2\pi i . t_2} \cdots \frac{F(t_k)}{2\pi i . t_k} d_1 dt_2 \ldots dt_k}{1 - \frac{z}{t_1 t_2 \ldots t_k}}$$

est inférieur

$$\frac{1}{r_k} \times \left(\int_{c'} \left| \frac{F(t)}{2\pi i t} \right| |dt| \right)^k.$$

Or désignons par ρ le module *fini* de l'intégrale

$$\int \left| \frac{F(t)}{2\pi i t} \right| |dt|.$$

La série (1) a ses termes de module respectivement inférieur à

$$\frac{\alpha(k).\rho^k}{r_k}$$

ou bien encore à

$$\frac{1}{r} \alpha(k) \rho^k,$$

en désignant par r la plus petite des quantités r_k, r étant d'ailleurs différent de zéro.

Comme la série

$$f(x) = \Sigma \alpha(k) x^k$$

est entière, la série

$$\frac{1}{r} \Sigma \alpha(k) \rho^k$$

est absolument convergente et, par suite, la série (1) l'est aussi. Les points singuliers de $\Phi(z)$ se trouvent parmi les points représentés par les produits

$$t_1 t_2 \ldots t_k.$$

Remarque. — Les deux théorèmes dont nous venons de donner la démonstration peuvent s'exposer rigoureusement ainsi sans restriction. Soit A′ l'aire limitée par un contour tel que c'. Les points singuliers de $\Phi(z)$ sont à l'intérieur de l'aire A″ obtenue en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les points de A′.

Par une extension facile de la méthode que nous venons d'employer, nous sommes conduits à ce second théorème, qui synthétise tous les résultats exposés dans ce Mémoire et la plupart des propositions générales connues jusqu'à ce jour dans l'ordre des recherches qui nous occupent :

Étant donné un nombre quelconque de fonctions

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Sigma a_1(n) z^n, \\ F_2(z) &= \Sigma a_2(n) z^n, \\ F_3(z) &= \Sigma a_3(n) z^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(z) &= \Sigma a_p(n) z^n \end{aligned}$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un, soit $\Phi(z)$ *une fonction donnée aussi par une série de Taylor*

$$\Phi(z) = \Sigma f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)] z^n.$$

Si la fonction de p variables

$$f(x, y, u, \ldots, w)$$

est holomorphe au voisinage de l'origine

$$(x = 0, y = 0, u = 0, \ldots, w = 0),$$

la fonction $\Phi(z)$ *n'a pas d'autres points singuliers (sauf* $x = 1$ *et* $x = \infty$*) que les points obtenus en multipliant entre eux, de toutes les manières possibles, les singularités des p fonctions*

$$F_1(x), \quad \ldots, \quad F_p(z),$$

chacune de ces singularités figurant un nombre quelconque de fois dans les produits ainsi formés.

La démonstration de ce théorème est aisée. Il suffit de remarquer le développement

$$f(x, y, \ldots, w) = \Sigma \alpha(m, q, \ldots, r) x^m y^q \ldots w^r \qquad \left\{ \begin{array}{l} |x| \leqq R_1 \gtrless 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ |w| \leqq R_p \gtrless 0, \end{array} \right.$$

et d'y faire successivement

$$\begin{aligned} x &= a_1(n), \\ y &= a_2(n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ w &= a_p(n), \end{aligned}$$

de telle sorte que l'on ait

$$f[a_1(n), \ldots, a_p(n)] = \Sigma a(m, q, \ldots, r) a_1^m(n) \ldots a_p^r(n),$$

où

$$\Sigma a(m, q, \ldots, r)$$

est absolument convergente.

De plus,

$$\begin{aligned} a_1(n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c'_1} \frac{F_1(t)}{t} t^{-n}\,dt, \\ a_2(n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c'_2} \frac{F_2(t)}{t} t^{-n}\,dt, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_p(n) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c'_p} \frac{F_p(t)}{t} t^{-n}\,dt. \end{aligned}$$

Les contours $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ sont choisis comme il a été dit à propos de c'. Le développement de

$$f[a_1(n), \ldots, a_p(n)]$$

devient

$$\begin{aligned} &f[a_1(n), \ldots, a_p(n)] \\ &\quad = \sum \alpha(m, q, \ldots, r) \times \left[\int_{c'_1} \frac{F_1(t)}{2\pi i t} t^{-n}\,dt\right]^m \times \ldots \times \left[\int_{c'_p} \frac{F_p(t)}{2\pi i t} t^{-n}\,dt\right]^r. \end{aligned}$$

Ce développement est valable pour les valeurs de n suffisamment grandes, par exemple à partir de $n = N$, les quantités $a_1(n), \ldots, a_p(n)$ tendant vers o lorsque n augmente indéfiniment, par le fait que le module de t sur $c'_1, c'_2, \ldots, c'_p$ est supérieur à un, ou plus simplement encore à cause de la convergence des séries de Taylor $F_1(z), \ldots, F_p(z)$.

Écrivons

$$
\begin{aligned}
f = & \sum \alpha(m, q, \ldots, r) \\
& \times \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_1} \frac{F_1(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1} \cdots \frac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{(m)}} \cdots \\
& \times \int_{c'_p} \cdots \int_{c'_p} \frac{F_p(t_p^1)}{2\pi i t_p^{(1)}} \cdots \frac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}} (t_1^1 \ldots t_1^{(m)} \ldots t_p^{(r)})^{-n} dt_1^{(1)} \ldots dt_p^{(r)} \\
= & \sum \alpha(m, q, \ldots, r) \\
& \times \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_1} \frac{F_1(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1} \cdots \frac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{m}} \cdots \\
& \times \int_{c'_p} \cdots \int_{c'_p} \frac{F_p(t_p^{(1)})}{2\pi i t_p^{(1)}} \cdots \frac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}} (t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)})^{-N} (t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)})^{-(n-N)} dt_1^1 \ldots dt_p^{(r)}.
\end{aligned}
$$

La fonction $\Phi(z)$ s'écrit donc

$$
\begin{aligned}
\Phi(z) = & \sum_0^{N-1} f[a_1(n), \ldots, a_p(n)] z^n + z^N \sum \alpha(m, q, \ldots, r) \\
& \times \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_1} \cdots \int_{c'_p} \cdots \int_{c'_p} \frac{\dfrac{F_1(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1} \cdots \dfrac{F(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{m}} \cdots \dfrac{F_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{r}} (t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)})^{-N} dt_1^{(1)} \ldots dt_p^{(r)}}{1 - \dfrac{z}{t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)}}}.
\end{aligned}
$$

On justifierait l'introduction de cette dernière somme en faisant voir qu'on peut toujours prendre N suffisamment grand pour que la série du second membre soit convergente, lorsque z est en dehors des points définis par

$$z = t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)}.$$

En effet, dans une région ne contenant pas ces points, la quantité

$$1 - \frac{z}{t_1^{(1)} \ldots t_p^{(r)}}$$

prend un module minimum

$$\theta_{m, \ldots, r}$$

différent de zéro. Par suite, le module de l'intégrale

$$\mathrm{I}_{m,q,\ldots,r} = \int_{c'_1}\cdots\int_{c'_1}\cdots\int_{c'_p}\cdots\int_{c'_p} \frac{\frac{\mathrm{F}(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1}\cdots\frac{\mathrm{F}(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{(m)}}\cdots\frac{\mathrm{F}_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}}(t_1^{(1)}\cdots t_p^{(r)})^{-\mathrm{N}}dt_1^{(1)}\cdots dt_p^{(r)}}{1-\frac{z}{t_1^{(1)}\cdots t_p^{(r)}}}$$

est inférieur à

$$\frac{1}{\theta_{m,\ldots,r}}\int_{c'_1}\cdots\int_{c'_1}\cdots\int_{c'_p}\cdots\int_{c'_p}\left|\frac{\mathrm{F}(t_1^{(1)})}{2\pi i t_1}\right|\cdots\left|\frac{\mathrm{F}(t_1^{(m)})}{2\pi i t_1^{m}}\right|\cdots\left|\frac{\mathrm{F}_p(t_p^{(r)})}{2\pi i t_p^{(r)}}\right|\left|t_1^1\cdots t_p^r\right|^{-\mathrm{N}}|dt_1^1|\cdots|dt_p^r|.$$

Déterminons N de telle façon que

$$\left[\int_{c'_1}\left|\frac{\mathrm{F}(t'_1)}{2\pi i t_1}\right||t'_1|^{-\mathrm{N}}|dt'_1|\right] = \rho_1 < \mathrm{R}_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\int_{c'_p}\left|\frac{\mathrm{F}(t_p)}{2\pi i t_p}\right||t_p|^{-\mathrm{N}}|dt_p| = \rho_p < \mathrm{R}_p.$$

Il est possible de prendre N suffisamment grand, de telle sorte que sous la condition

$$\mathrm{N} \geqq \mathrm{N}_0$$

les inégalités précédentes soient vérifiées, à cause des modules de t_1 sur c'_1, de t_2 sur c'_2, ..., de t_p sur c'_p, modules qui restent supérieurs à un sur chacun de ces contours c'. Ainsi le module de $\mathrm{I}_{m,q,\ldots,r}$ reste inférieur à

$$\frac{1}{\theta_{m,\ldots,r}}\rho_1^m\rho_2^q\cdots\rho_p^r.$$

La série qui figure dans le second membre de l'identité définissant $\Phi(z)$ a ses termes respectivement inférieurs à

$$\frac{1}{\theta}\alpha(m,q,\ldots,r)\rho_1^m\rho_2^q\cdots\rho_p^r,$$

où θ désigne la plus petite des quantités $\theta_{m,q,\ldots,r}$, θ étant d'ailleurs différent de zéro. Or, d'après les conditions qui déterminent

$$f(x,y,\ldots,w),$$

la série, dont le terme général est

$$\alpha(m, q, \ldots, r) R_1^m R_2^q \ldots R_p^r,$$

est absolument convergente. *A fortiori*, à cause des inégalités

$$\begin{gathered} \rho_1 < R_1, \\ \rho_2 < R_2, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \rho_p < R_p, \end{gathered}$$

la série de terme général

$$\alpha(m, q, \ldots, r) \rho_1^m \rho_2^q \ldots \rho_p^r$$

est absolument convergente.

Ainsi la série qui intervient dans l'expression de $\Phi(z)$ est convergente et, par suite, la fonction $\Phi(z)$ n'a en toute rigueur aucun point singulier en dehors de l'aire obtenue, en multipliant de toutes les manières possibles les points des aires $A_1, A_2, \ldots, A_p$ limitées par $c_1, c_2, \ldots, c_p$. En réservant le point à l'infini, la fonction $\Phi(z)$ n'a donc pas d'autres points singuliers que les points obtenus en multipliant de toutes les manières possibles les singularités de $F_1(z)$, $F_2(z)$, ..., $F_p(z)$.

Ce théorème se complétera d'ailleurs aisément par le suivant :

Soient $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ *des fonctions données par une série de Taylor*

$$\begin{gathered} F_1(z) = \Sigma a_1(n) z^n, \\ F_2(z) = \Sigma a_2(n) z^n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_p(z) = \Sigma a_p(n) z^n, \end{gathered}$$

et soit $\Phi(z)$ *une fonction donnée de même par une série de Taylor*

$$\Phi(z) = \Sigma f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)] z^n.$$

Si la fonction

$$f(x, y, \ldots, w)$$

est entière, la fonction

$$\Phi(z)$$

n'a pas d'autres points singuliers (sauf $x=1$ *et* $x=\infty$*) en dehors des points obtenus en multipliant entre eux de toutes les manières possibles les points singuliers des fonctions* $F_1(z)$, $F_2(z), \ldots, F_p(z)$ *chacun d'eux y figurant un nombre quelconque de fois.*

Il suffit, pour établir cette proposition, de répéter ce que nous avons dit dans les deux propositions qui la précèdent. En d'autres termes, on remarque que le développement de

$$f(x, y, \ldots, w),$$

suivant les puissances de $x, y, \ldots, w$, est ici valable pour toutes valeurs des variables $x, y, \ldots, w$; le raisonnement s'achève facilement.

Le second théorème général, dont nous avons donné l'énoncé, admet un corollaire bien simple et qui explique aisément le fait suivant. Lorsqu'on cherche les points singuliers d'une fonction donnée par une série de Taylor (à rayon de convergence au moins égal à un),

$$F(z) = \Sigma A(n) z^n,$$

en tirant la connaissance des points singuliers de la forme analytique,

$$A(x),$$

on trouve que, pour des circonstances analytiques extrêmement nombreuses et importantes de cette forme, la fonction

$$F(z)$$

a tous ses points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles, en dehors du cercle de rayon un. La proposition qui suit en donne l'explication par son énoncé même :

Étant données plusieurs fonctions

$$F_1(z)=\Sigma a_1(n)z^n,$$
$$F_2(z)=\Sigma a_2(n)z^n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_p(z)=\Sigma a_p(n)z^n,$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un, sous la condition que

$$f(x, y, \ldots, w)$$

soit holomorphe au voisinage de l'origine ($x=0, y=0, \ldots, w=0$), *si les p fonctions* $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ *ont leurs points singuliers (à distance finie) sur l'axe des quantités réelles, la fonction* $\Phi(z)$ *donnée par la série de Taylor*

$$\Phi(z)=\Sigma f[a_1(n), a_2(n), \ldots, a_p(n)]z^n$$

a ses points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles.

La généralité même de la définition de

$$f(x, y, \ldots, w)$$

montre la latitude que l'on a pour trouver des fonctions ayant leurs points singuliers à distance finie sur l'axe des quantités réelles, en partant de noyaux tayloriens dépendant de formes analytiques

$$A(x).$$

Remarque. — Ce corollaire est susceptible de plus de précision, quand les points singuliers de $F_1(z), \ldots, F_p(z)$ sont sur l'axe des quantités réelles positives; dans ce cas, la fonction $\Phi(z)$ a ses points singuliers répartis sur ce même axe.

Il est facile de tirer encore du théorème général qui précède d'autres corollaires. Voici tout d'abord une première proposition :

Etant données plusieurs fonctions

$$F_1(z) = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2(z) = \Sigma a_2(n) z^n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$F_p(z) = \Sigma a_p(n) z^n,$$

valables à l'intérieur d'un cercle de rayon supérieur à un, sous la condition que la fonction

$$f(x, y, \dots, w)$$

soit holomorphe au voisinage de l'origine $(x = 0, y = 0, \dots, w = 0)$, *si les* p *fonctions* $F_1(z) \dots F_p(z)$ *ont leurs points singuliers situés sur un nombre limité de droites passant par l'origine faisant avec l'axe des quantités réelles des angles commensurables avec l'angle droit, les points singuliers de* $\Phi(z)$ *sont situés sur un nombre limité de droites.*

En effet, les points singuliers de $\Phi(z)$ s'obtiennent en multipliant entre eux les points singuliers de $F_1(z)$, $F_2(z), \dots, F_p(z)$; par suite l'argument de chacun d'eux est compris dans la formule

$$\theta = \alpha_1 \theta_1 + \alpha_2 \theta_2 + \dots + \alpha_k \theta_k,$$

où $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ désignent les arguments des droites en nombre limité sur lesquelles se trouvent les points singuliers de $F_1(z) \dots F_p(z)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ étant des nombres entiers; les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_k$ étant commensurables avec 360°, égaux par exemple à

$$\frac{p_1}{q_1} 360,$$
$$\frac{p_2}{q_2} 360,$$
$$\dots\dots,$$
$$\frac{p_k}{q_k} 360;$$

il suffira, pour avoir toutes les valeurs de θ entre 0 et 360°, de donner au plus à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ toutes les valeurs entières de o à m, où m est le plus petit commun multiple à $q_1, q_2, \ldots, q_k$; à ces valeurs en nombre fini correspondent un nombre fini de valeurs de θ.

Voici une dernière remarque sur les points singuliers de $\Phi(z)$.

Désignons par R_1 le rayon du cercle de convergence de $\Phi(z)$ et soit E l'ensemble total des points singuliers de $F_1, F_2, \ldots, F_p$; en supposant que les points de E puissent se répartir successivement sur les cercles de rayons $R_1, R_2, \ldots, R_\mu$, les points singuliers de $\Phi(z)$, *de module au plus égal à* R_1^ρ, sont situés sur des cercles dont les rayons se trouvent parmi les quantités

$$R_1^\alpha \times R_2^\beta \times \ldots \times R_\mu^\lambda$$

avec la condition

$$\alpha + \beta + \ldots + \lambda \leqq \rho - 1.$$

Cette remarque résulte de la proposition générale sur les points singuliers de $\Phi(z)$, qui se trouvent parmi les produits des divers points de l'ensemble E.

Nous pouvons résumer tout ce qui vient d'être dit sur les fonctions d'une variable considérées dans leur développement de Taylor par cette considération synthétique.

Soient deux fonctions quelconques,

$$F_1(z),$$
$$F_2(z),$$

développables au voisinage de l'origine en séries de Taylor

$$F_1(z) = \Sigma a_1(n) z^n,$$
$$F_2(z) = \Sigma a_2(n) z^n,$$

de rayon de convergence supérieur à un.

Nous savons que dans tous les cas (Borel, *Mémoire sur les séries divergentes*) nous pouvons considérer $a(X)$ et $b(X)$ comme des fonctions entières en X, dont les valeurs pour les nombres entiers positifs sont

$$a(n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$b(n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Écrivons
$$b(x) = f[a(x)],$$

où f est une fonction analytique en général non uniforme. Sauf dans le cas où l'origine est un point singulier, on passe des singularités de $F_1(z)$ aux singularités de $F(z)$ par la multiplication des singularités de la première fonction. La *différence profonde* des ensembles de points singuliers de deux fonctions quelconques

$$F_1(z)$$
et
$$F_2(z)$$

est donc *condensée* dans le point singulier à l'origine de

$$f(x).$$

La méthode dont nous nous sommes servis s'étend aux fonctions de plusieurs variables.

Soient
$$F_1(z, z', z'') = \Sigma a_1(n, n', n'') z^n z'^{n'} z''^{n''},$$
$$F_2(z, z', z'') = \Sigma a_2(n, n', n'') z^n z'^{n'} z''^{n''},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$F_p(z, z', z'') = \Sigma a_p(n, n', n'') z^n z'^{n'} z''^{n''}$$

des fonctions des variables z, z', z'' holomorphes lorsque (z, z', z'') sont respectivement à l'intérieur de c, c', c'', ces contours renfermant le cercle de rayon *un* de leur plan, dont le centre est l'origine.

Si
$$f(x, y, \ldots, w)$$

est une fonction de p variables, holomorphe au voisinage de l'origine ($x = 0$, $y = 0$, $w = 0$), la fonction

$$\begin{aligned}\Phi(z, z', z'') \\ = \Sigma f[a_1(n, n', n''), a_2(n, n', n''), \ldots, a_p(n, n', n'')] z^n z'^{n'} z''^{n''}\end{aligned}$$

est holomorphe à l'intérieur de la surface limitée par (c, c', c'') (sauf aux points $z = 1$, $z' = 1$, $z'' = 1$ de cette surface).

Il suffit de remplacer l'expression de

$$a_p(n, n', n'')$$

suivant une intégrale triple

$$a_p(n, n', n'') = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_c \int_{c'} \int_{c''} \frac{F(t_p, t'_p, t''_p)}{t_p, t'_p, t''_p} \times t_p^{-n} t_p'^{-n'} t_p''^{-n''} dt_p \, dt'_p \, dt''_p \qquad \left\{ \begin{array}{l} |t_p| > 1 \\ |t'_p| > 1 \\ |t''_p| > 1 \end{array} \right.$$

et les expressions analogues de a_1, a_2, ..., a_{p-1} par des intégrales triples; en développant $f(x, y, \ldots, w)$ suivant les puissances des variables x, y, ..., w

$$f(x, y, \ldots, w) = \Sigma\alpha(m, q, \ldots, z) x^m y^q \ldots w^r$$

si l'on remplace dans ce développement x, y, ..., w par $a_1(n, n', n'')$, $a_p(n, n', n'')$, ces coefficients étant mis sous forme d'intégrales triples comme il vient d'être dit, on obtient par série la représentation de

$$\Phi(z, z', z'').$$

Cette représentation est valable à l'intérieur de la surface limitée par les contours c, c', c''; il en sera de même pour tous les contours associés c, c', c'' analogues aux cercles à rayons associés.

La méthode que nous avons employée s'étend des fonctions d'une variable aux fonctions de plusieurs variables. La généralité des propositions auxquelles elle donne lieu permet de se figurer la multiplicité de leurs applications possibles. Je développerai, prochainement, l'usage qu'on peut en faire pour l'étude des singularités de l'intégrale d'une équation différentielle générale.