JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GEMINIANO PIRONDINI

Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 229-251.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__229_0>

Symétrie tangentielle par rapport à une surface de révolution;

PAR M. GEMINIANO PIRONDINI.

I.

Définitions. Formules fondamentales. — Σ étant une surface de révolution quelconque et A un point de l'espace, on coupe Σ par le plan méridien passant par A. Si du point A on mène une tangente AA_0 à la section méridienne obtenue M, et si on la prolonge d'une longueur $A_0A_1 = AA_0$ au delà du point de contact A_0, le point A_1 auquel on arrive est le *point correspondant* de A. Le point A a évidemment autant de points correspondants A_1 que la ligne méridienne M a de tangentes issues de A.

Cette construction, appliquée à chaque point d'une figure quelconque, constitue une transformation géométrique remarquable qu'on appelle *symétrie tangentielle par rapport à la surface de révolution* Σ (*surface fondamentale*).

Les points de la surface Σ (qu'on suppose de révolution autour de l'axe des z) sont rapportés aux parallèles ($u =$ const.) et à un système de génératrices égales ($v =$ const.). Si $A(x, y, z)$, $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_0(\xi, \eta, \zeta)$ sont trois points correspondants des figures symétriques F, F_1 et de la surface Σ, on a

$$(1) \qquad \xi = \rho\cos(u+v), \qquad \eta = \rho\sin(u+v), \qquad \zeta = \zeta(u),$$

ρ et ζ (fonctions de u) étant les coordonnées d'un point quelconque de la ligne méridienne de Σ.

Les cosinus directeurs des tangentes au parallèle $u = \text{const.}$ et à la génératrice $v = \text{const.}$ sont respectivement proportionnels aux dérivées

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}, \frac{\partial\eta}{\partial v}, \frac{\partial\zeta}{\partial v}\right), \qquad \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\eta}{\partial u}, \frac{\partial\zeta}{\partial u}\right).$$

Conséquemment, les cosinus directeurs de la normale à la surface Σ sont proportionnels aux différences

$$\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u} = \rho\zeta'\cos(u+v), \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u} = \rho\zeta'\sin(u+v),$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u} - \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial u} = -\rho\rho',$$

et comme les cosinus directeurs de la droite AA_0A_1 sont proportionnels aux différences

$$x - \rho\cos(u+v), \quad y - \rho\sin(u+v), \quad z - \zeta,$$

la condition d'orthogonalité entre la droite AA_0A_1 et la normale de la surface Σ est exprimée par l'équation

$$(2) \qquad x\cos(u+v) + y\sin(u+v) = \rho + \frac{(z-\zeta)\rho'}{\zeta'}.$$

La condition que la droite AA_0A_1 rencontre l'axe de la surface Σ est exprimée par la relation

$$(3) \qquad x\sin(u+v) - y\cos(u+v) = 0.$$

Si l'on ajoute les équations (2), (3), après les avoir élevées au carré, on trouve que les conditions (2), (3) peuvent être remplacées par les autres

$$(4) \qquad \sqrt{x^2+y^2} = \rho + \frac{(z-\zeta)\rho'}{\zeta'}.$$

$$(5) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}(u+v).$$

En remarquant, enfin, que le point A_0 est le milieu du segment AA_1, on a

$$(6)\qquad x_1 = 2\xi - x,\qquad y_1 = 2\eta - y,\qquad z_1 = 2\zeta - z.$$

Les équations (1), (4), (5), (6) constituent les formules fondamentales de la transformation.

Dans la symétrie des surfaces, u et v sont à regarder comme des paramètres indépendants. Dans la symétrie des lignes, on doit attribuer à v une valeur constante quelconque (préférablement $v = 0$).

Quand la figure primitive est une $\left\{\begin{array}{l}\text{surface } S\\ \text{ligne } L\end{array}\right\}$ la figure symétrique est, en général, une $\left\{\begin{array}{l}\text{surface } S_1\\ \text{ligne } L_1\end{array}\right\}$.

Dans le dernier cas, le lieu des points de contact A_0 entre les droites AA_0A_1 et la surface Σ est une ligne Λ, qu'on peut appeler la *projection tangentielle* de la ligne L sur la surface Σ.

Il s'ensuit qu'on peut se proposer les six questions suivantes :

$$\textit{On donne}\left\{\begin{array}{ll}(\mathrm{A}) & \Sigma \text{ et } S,\\ (\mathrm{B}) & S \text{ et } S_1,\\ (\mathrm{C}) & \Sigma \text{ et } L,\\ (\mathrm{D}) & \Sigma \text{ et } \Lambda,\\ (\mathrm{E}) & L \text{ et } \Lambda,\\ (\mathrm{F}) & L \text{ et } L_1,\end{array}\right.\qquad \textit{déterminer}\left\{\begin{array}{l}S_1.\\ \Sigma.\\ \Lambda \text{ et } L_1.\\ L \text{ et } L_1.\\ \Sigma \text{ et } L_1.\\ \Sigma \text{ et } \Lambda.\end{array}\right.$$

II.

Résolution des questions (A), (C). — En supposant que la ligne méridienne de Σ soit représentée par l'équation

$$(7)\qquad \zeta = \varphi(\rho),$$

la première condition (4) se réduit à

$$(8)\qquad \sqrt{x^2+y^2} = \rho + \frac{z-\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}.$$

D'ailleurs, en remplaçant $\sin(u+v)$, $\cos(u+v)$ par les valeurs qu'on déduit de la condition (5), les équations (1) donnent

$$(9) \qquad \xi = \frac{\rho x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \eta = \frac{\rho y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \zeta = \varphi(\rho).$$

Les coordonnées x, y, z sont évidemment des fonctions de deux paramètres t, w, ou d'un seul paramètre t, suivant que la figure primitive F est une surface ou une ligne. En ayant recours à la condition (8), on peut éliminer un des trois paramètres ρ, t, w dans le premier cas, et un des deux paramètres ρ, t dans le second cas. Après cela, les équations (6), où ξ, η, ζ ont les valeurs (9), définissent, dans tout cas, la figure F_1 symétrique de F.

Les équations (9), quand la figure primitive est une ligne L, définissent sa projection tangentielle Λ.

Résolution de la question (D). — La surface Σ est définie par sa ligne méridienne (7). La projection tangentielle Λ est évidemment connue aussitôt que l'on donne sa projection équatoriale Λ_0 :

$$(10) \qquad \rho = \lambda(u).$$

Comme on a, dans ce cas,

$$\operatorname{tang} u = \frac{y}{x},$$

la condition (8) donne

$$z = \varphi\left[\lambda\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right] + \left[\sqrt{x^2+y^2} - \lambda\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right]\varphi'\left[\lambda\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}\right)\right].$$

Cette équation représente la surface réglée K, lieu des tangentes aux lignes méridiennes de la surface Σ, le long de la ligne Λ suivant laquelle cette surface est coupée par le cylindre ayant les génératrices parallèles à l'axe de Σ et dont la section droite est la courbe (10).

La question (D) a une infinité de solutions, car les lignes L, L_1 tracées sur la surface K sont assujetties à la seule condition d'être des courbes symétriques par rapport à la ligne Λ.

Résolution de la question (E). — En supposant que la ligne primitive L et la projection tangentielle Λ soient définies respectivement par les équations

$$(11)\qquad \begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos u, & y &= \mathrm{R}\sin u, & z &= z(u),\\ \xi &= \rho\cos u, & \eta &= \rho\sin u, & \zeta &= \zeta(u), \end{aligned}$$

la condition (5) est vérifiée par identité et la condition (4) donne

$$(12)\qquad (\mathrm{R}-\rho)\zeta' - (z-\zeta)\rho' = 0.$$

Il s'ensuit que les lignes L, Λ ne sont pas complètement arbitraires.

La condition (12) vérifiée, la ligne méridienne de Σ et la ligne symétrique L_1 sont définies respectivement par les équations

$$\xi_0 = \rho(u), \qquad \zeta_0 = \zeta(u),$$
$$x_1 = (2\rho - \mathrm{R})\cos u, \qquad y_1 = (2\rho-\mathrm{R})\sin u, \qquad z_1 = 2\zeta(u) - z(u).$$

Cas particulier. — Si l'on suppose successivement

$$(13)\qquad z = m\zeta + n, \qquad z\zeta = h$$

(m, n, h étant des constantes), l'équation différentielle (12) se réduit respectivement aux autres

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{R}-\rho)\zeta' - [(m-1)\zeta + n]\rho' &= 0,\\ (\mathrm{R}-\rho)\zeta\zeta' - (h-\zeta^2)\rho' &= 0, \end{aligned}\right.$$

d'où l'on déduit respectivement

$$\mathrm{R} = \rho + [(m-1)\zeta + n]\frac{\rho'}{\zeta'}, \qquad \zeta = \left(\alpha + n\int \frac{\rho'}{\mathrm{R}-\rho}\, e^{-(m-1)\int\frac{\rho' du}{\mathrm{R}-\rho}} du\right) e^{(m-1)\int\frac{\rho' du}{\mathrm{R}-\rho}},$$

$$\mathrm{R} = \rho + \frac{(h-\zeta^2)\rho'}{\zeta\zeta'}, \qquad \zeta = e^{-\int\frac{\rho' du}{\mathrm{R}-\rho}}\sqrt{\beta + 2h\int\frac{\rho'}{\mathrm{R}-\rho}\, e^{2\int\frac{\rho' du}{\mathrm{R}-\rho}} du}$$

(α, β constantes).

On voit d'ici que, *quand les hauteurs des points correspondants* *des lignes* L, Λ *par rapport au plan coordonné* (xy) *sont liées par une relation linéaire, ou bien quand le produit de ces hauteurs est une constante, la question* (E) *peut être résolue complètement en se donnant arbitrairement (en chacun de ces cas) la ligne* Λ, *ou les projections équatoriales des lignes* L, Λ.

Résolution de la question (F). — La ligne primitive L est définie par les équations (11), et la ligne symétrique L_1 par les équations

$$x_1 = R_1 \cos u, \qquad y_1 = R_1 \sin u, \qquad z_1 = z_1(u).$$

Comme on a évidemment

$$(15) \quad \xi = \frac{R+R_1}{2}\cos u, \qquad \eta = \frac{R+R_1}{2}\sin u, \qquad \zeta = \frac{z(u)+z_1(u)}{2},$$

il suffit de remplacer ρ et ζ, dans l'équation (12), respectivement par $\frac{R+R_1}{2}$ et $\frac{z+z_1}{2}$, ce qui donne

$$(16) \qquad (R-R_1)(z'+z_1') - (z-z_1)(R'+R_1') = 0.$$

Les lignes L, L_1 ne peuvent donc pas être choisies d'une façon absolument arbitraire.

La condition (16) vérifiée par un choix convenable des fonctions R, R_1, z, z_1, la projection tangentielle Λ est définie par les équations (15), et la ligne méridienne de Σ par les équations

$$\rho = \frac{R+R_1}{2}, \qquad \zeta = \frac{z+z_1}{2}.$$

III.

Propriétés remarquables de la transformation. — Si l'on fait tourner la figure constituée par les lignes symétriques L, L_1 et la projection tangentielle Λ autour de l'axe des z, les conditions (4), (5) sont évidemment vérifiées à chaque instant du mouvement. Par conséquent :

I. *Si* L, L_1 *sont des lignes symétriques par rapport à une surface de révolution* Σ, *les surfaces* S, S_1 *engendrées par la rotation de ces lignes autour de l'axe de* Σ *sont des surfaces symétriques par rapport à* Σ.

Si l'on pose $\sqrt{x^2+y^2}=R$, on voit que les conditions (4), (5) ne changent pas si l'on remplace R, z, ρ, ζ respectivement par les expressions

$$\alpha R+a,\quad \beta z+b,\quad \alpha\rho+a,\quad \beta\zeta+b,$$

ou par les autres

$$\lambda z+l,\quad \mu R+m,\quad \lambda\zeta+l,\quad \mu\rho+n,$$

α, β, λ, μ, a, b, l, m étant des constantes arbitraires.

Si l'on remarque alors que

$$R_1=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=2\rho-R,\qquad z_1=2\zeta-z,$$

on voit que R_1, z_1 sont remplacés par les expressions

$$\alpha R_1+a,\qquad \beta z_1+b$$

ou par les autres

$$\lambda z_1+l,\qquad \mu R_1+m.$$

On a donc la propriété générale :

II. *Si* F_1 *est la figure symétrique de* F *par rapport à la surface de révolution* Σ *dont la ligne méridienne est* $\zeta=\varphi(\rho)$, *et* F′, F'_1 *les figures qu'on construit des figures* F, F_1 *en prenant pour distances* R, R_1 *de leurs points à l'axe de* Σ *les expressions*

$$\left\{\begin{matrix}\alpha R+a, & \alpha R_1+a\\ \lambda z+l, & \lambda z_1+l\end{matrix}\right\}$$

et pour hauteurs z, z_1 *de leurs points sur le plan coordonné* (xy)

les expressions $\left\{ \begin{matrix} \beta z + b, & \beta z_1 + b \\ \mu R + m, & \mu R_1 + m \end{matrix} \right\}$, F_1 *sera la figure symétrique de* F' *par rapport à la surface de révolution* Σ' *dont la ligne méridienne est* $\left\{ \begin{matrix} \dfrac{\zeta - b}{\beta} = \varphi\left(\dfrac{\rho - a}{\alpha}\right) \\ \dfrac{\rho - l}{\lambda} = \varphi\left(\dfrac{\zeta - m}{\mu}\right) \end{matrix} \right\}$.

Quand les figures F, F_1 *sont des lignes* L, L_1, *la projection tangentielle* Λ' *de la ligne* L' *sur la surface de révolution* Σ' *peut se déduire de la projection tangentielle* Λ *de la ligne* L *sur la surface de révolution* Σ, *en prenant pour rayon vecteur* ρ *de la projection équatoriale de la ligne et pour hauteur* ζ *de ses points du plan coordonné* (xy) *les expressions* $\left\{ \begin{matrix} \alpha\rho + a, & \beta\zeta + b \\ \lambda\zeta + l, & \mu\rho + m \end{matrix} \right\}$.

Si l'on fait successivement $(m = 0, n = 0)$, $n = 0$, $m = 1$ dans la première équation (13), on a respectivement

$$\zeta = a e^{-\int \frac{\rho'\, du}{R - \rho}}, \qquad \zeta = b e^{(m-1)\int \frac{\rho'\, du}{R - \rho}}, \qquad \zeta = n \int \frac{\rho'\, du}{R - \rho},$$

a et b étant des constantes arbitraires.

En désignant par γ une constante, que l'on remplace ζ par $\sqrt{\gamma\zeta}$ dans la deuxième équation (14). Après cela, si l'on identifie l'égalité qu'on va obtenir à la première équation (14), on a les conditions

$$m = 1, \qquad \gamma = \frac{2h}{n}.$$

Cette analyse démontre la propriété suivante :

III. *Soient* Λ *et* L_1 *la projection tangentielle et la courbe symétrique d'une ligne* L

$$\left\{ \begin{matrix} \textit{tracée sur le plan coordonné } (xy) \\ \textit{tracée sur le plan coordonné } (xy) \\ \textit{de l'espace (les hauteurs } z, \zeta, \textit{ vérifiant la relation } z + \zeta = n) \end{matrix} \right\},$$

par rapport à la surface de révolution Σ *dont la ligne méridienne est* $\zeta = \varphi(\rho)$.

Si Λ', L', L'_1 *sont les lignes qu'on déduit des lignes* Λ, L, L_1 *en prenant, sur les hauteurs relatives aux points de celles-ci, des lon-*

gueurs $\left\{\begin{matrix} c\zeta^{1-m}, \; cm\zeta^{1-m}, \; (2-m)c\left(\frac{z_1}{2}\right)^{1-m} \\ n\log\left(\frac{a}{\zeta}\right), \; n+n\log\left(\frac{a}{\zeta}\right), \; n\log\left(\frac{2a}{z_1}\right)-n \\ \sqrt{\frac{2h\zeta}{n}}, \; \sqrt{\frac{hn}{2(n-z)}}, \; \frac{(4z_1+n)\sqrt{h}}{\sqrt{6n(z_1+n)}} \end{matrix}\right\}$, Λ', L'_1 *seront respectivement la projection tangentielle et la ligne symétrique de* L' *par rapport à la surface de révolution* Σ' *dont la ligne méridienne est* $\left\{\begin{matrix} \zeta = c[\varphi(\rho)]^{1-m} \\ ae^{-\frac{\zeta}{n}} = \varphi(\rho) \\ \frac{n\zeta^2}{2h} = \varphi(\rho) \end{matrix}\right\}$.

Le principe I ramène l'étude de la symétrie de deux surfaces de révolution ayant même axe que Σ, à l'étude de la symétrie de leurs lignes méridiennes.

En vertu des principes II et III, à chaque propriété relative à la symétrie tangentielle d'une figure par rapport à une surface de révolution, on en peut associer une autre se déduisant tout de suite de la première, en établissant ainsi une sorte de dualité très féconde dans les applications (*voir* le § IV).

IV.

Cas particuliers et applications. — 1. Si l'on fait $z=0$ dans l'équation (8), on a

$$R = \rho - \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}.$$

Cette équation définit la ligne L_0 le long de laquelle la surface réglée K (§ II, question D) coupe le plan coordonné (xy), aussitôt que l'on donne la projection équatoriale de Λ.

En supposant, par exemple, $\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}$, il résulte

$$R = \tfrac{1}{2}\rho,$$

d'où le théorème :

Si l'on mène les tangentes aux lignes méridiennes d'un paraboloïde, le long d'une ligne quelconque Λ, *la surface réglée* K *qu'on engendre coupe le plan coordonné* (xy) *suivant la ligne* L_0, *lieu des milieux des rayons vecteurs qui vont aux points de la projection équatoriale de la ligne* Λ.

2. Quand on suppose que les coordonnées ξ, η, ζ sont proportionnelles respectivement aux coordonnées x, y, z, la condition $\frac{\eta}{\xi} = \frac{y}{x}$ nous apprend qu'on doit avoir

$$\xi = \alpha x, \qquad \eta = \alpha y, \qquad \zeta = \beta z,$$

α et β étant des constantes.

Et, comme on déduit, à l'aide de l'équation (4),

$$z = c R^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}}, \qquad \zeta = c\beta\alpha^{-\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}} \rho^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}},$$

$$z_1 = c(2\beta - 1)(2\alpha - 1)^{-\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}} R_1^{\frac{\alpha(1-\beta)}{\beta(1-\alpha)}},$$

c étant une constante, on a le théorème : *Quand les coordonnées* ξ, η, ζ *sont proportionnelles aux* x, y, z, *les coordonnées* x_1, y_1, z_1 *sont aussi proportionnelles aux* x, y, z. *Les lignes* L, Λ, L_1 *sont tracées sur des surfaces de révolution* S, Σ, S_1 *ayant pour lignes méridiennes des paraboles générales du même ordre.*

Celles-ci se réduisent à des paraboles ordinaires pour $\beta = \frac{\alpha}{2-\alpha}$, à des hyperboles équilatères pour $\beta = -\frac{\alpha}{1+2\alpha}$, etc.

3. En posant $\sqrt{x^2+y^2} = R$, et en supposant que la ligne primitive L soit placée sur une surface de révolution s ayant pour méridienne la ligne

$$(17) \qquad z = F(R),$$

la condition (8) donne

$$(18) \qquad R\varphi'(\rho) - F(R) = \rho\varphi'(\rho) - \varphi(\rho).$$

Si donc les rayons vecteurs ρ, R sont liés par une des relations

$$(19)\qquad \rho = \psi(R),$$

$$(20)\qquad R = \chi(\rho),$$

l'équation (18) se réduit respectivement à

$$(21)\qquad F(R) = [R - \psi(R)]\varphi'[\psi(R)] + \varphi[\psi(R)],$$

$$[\chi(\rho) - \rho]\varphi'(\rho) + \varphi(\rho) = F[\chi(\rho)].$$

Celle-ci donne par intégration

$$(22)\qquad \varphi(\rho) = \left\{\int \frac{F[\chi(\rho)]}{\chi(\rho)-\rho} e^{\int\frac{d\rho}{\chi(\rho)-\rho}} d\rho + c\right\} e^{-\int\frac{d\rho}{\chi(\rho)-\rho}},$$

c étant une constante arbitraire. On reconnaît d'ici que :

Quand on donne d'une façon arbitraire :

α. *les lignes méridiennes* (7), (17) *des surfaces de révolution* Σ, S;
β. *la ligne méridienne* (7) *de la surface fondamentale* Σ *et la relation* (19) *entre les rayons vecteurs* ρ, R;
γ. *la ligne méridienne* (17) *de la surface de révolution* S *et la relation* (20) *entre les rayons vecteurs* ρ, R;

les équations (18), (21), (22) *donnent respectivement :*

α. *la relation entre les rayons vecteurs* ρ, R;
β. *la ligne méridienne de la surface de révolution* S;
γ. *la ligne méridienne de la surface fondamentale* Σ.

Exemples. — 1° En supposant que Σ et S soient deux paraboloïdes, on a

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}, \qquad F(R) = \frac{R^2}{b}$$

et la relation (18) donne

$$\frac{R}{\rho} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ab}}{a}.$$

Si, *vice versa*, on suppose

$$\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}, \qquad \rho = k\mathrm{R},$$

la relation (21) donne

$$\mathrm{F}(\mathrm{R}) = k(2-k)\frac{\mathrm{R}^2}{a}.$$

D'où le théorème :

Quand la surface fondamentale Σ est un paraboloïde, la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive L soit tracée sur un autre paraboloïde est que les projections équatoriales des lignes L, Λ soient des courbes homothétiques par rapport à l'origine; et la ligne symétrique L_1 est placée sur un autre paraboloïde.

2° Que l'on suppose

$$\mathrm{F}(\mathrm{R}) = 0, \qquad \chi(\rho) = \frac{\rho}{k}$$

dans l'équation (22). On en déduit

$$\zeta = \varphi(\rho) = c\rho^{\frac{k}{k-1}}. \tag{23}$$

Et comme

$$\mathrm{R}_1 = 2\rho - \mathrm{R} = \frac{2k-1}{k}\rho, \qquad z_1 = 2\zeta,$$

et conséquemment

$$z_1 = 2c\left(\frac{k}{2k-1}\mathrm{R}_1\right)^{\frac{k}{2k-1}}, \tag{24}$$

on conclut :

Si la ligne primitive L, placée sur le plan coordonné (xy), et la projection équatoriale Λ_0 de Λ sont des courbes homothétiques par rapport à l'origine $\left(\frac{\rho}{\mathrm{R}} = k\right)$, la surface fondamentale Σ et la surface de révolution S_1 engendrée par la ligne symétrique L_1 ont pour lignes méridiennes les paraboles générales (23), (24).

En particulier, ce théorème est applicable :

Quand la ligne primitive L est une droite du plan $z = 0$, et la projection tangentielle Λ est sur un plan parallèle à la droite L et à l'axe de la surface Σ;

Quand la ligne primitive L est un cercle du plan $z = 0$, et la projection tangentielle Λ est sur un cylindre circulaire, avec la condition que le centre de similitude entre la section droite de ce cylindre et le cercle L soit à l'origine, etc.

Pour $k = 2$, les courbes (23), (24) sont des paraboles ordinaires; pour $k = \frac{1}{2}$, elles sont des hyperboles équilatères rapportées aux asymptotes, etc.

3° En supposant

$$F(R) = 0, \qquad \chi(\rho) = \frac{a^2}{\rho},$$

l'équation (22) donne

$$\varphi(\rho) = \sqrt{\alpha(\rho^2 - a^2)}. \tag{25}$$

Si l'on suppose, *vice versa*, que la fonction $\varphi(\rho)$ soit donnée par l'équation (25), et que, en outre, la fonction $F(R)$ se réduise à *zéro*, l'équation (18) donne

$$R\rho = a^2.$$

Il s'ensuit que *la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive* L, *tracée sur le plan coordonné* (xy), *et la projection équatoriale* Λ_0 *de* Λ *soient des courbes inverses par rapport à l'origine, est que* Σ *soit une surface du deuxième ordre ayant son centre à l'origine.*

En particulier : *Une droite ou un cercle, placés dans le plan de l'équateur d'une surface de révolution du deuxième ordre à centre, ont pour projection tangentielle, sur cette surface, une ligne* Λ *dont la projection équatoriale* Λ_0 *est un cercle.*

4° Quand $F(R) = 0$, on trouve que la condition

$$\chi(\rho) = \rho - a$$

équivaut à l'autre

$$\varphi(\rho) = ce^{\frac{\rho}{a}}.$$

On en conclut que *la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive* L, *placée sur le plan coordonné* (xy), *soit une conchoïde de la projection équatoriale* Λ_0 *de la ligne* $\Lambda(\mathrm{R}=\rho-a)$, *est que la ligne méridienne de la surface fondamentale* Σ *soit la courbe logarithmique* $\zeta = ce^{\frac{\rho}{a}}$.

5° En supposant successivement

$$\left[\mathrm{F}(\mathrm{R}) = \mathrm{R}\cot\theta,\ \chi(\rho) = \frac{a^2}{\rho}\right], \qquad \left[\mathrm{F}(\mathrm{R}) = \mathrm{R}\cot\theta,\ \chi(\rho) = \frac{\rho}{a}\right],$$

θ, a, étant des constantes, on trouve, à l'aide de l'équation (22),

$$\varphi(\rho) = \rho\cot\theta + \sqrt{m(\rho^2 - a^2)}, \qquad \varphi(\rho) = \rho\cot\theta + m\rho^{\frac{k}{k-1}},$$

m étant une constante.

On a donc le théorème : *Quand la ligne primitive* L *est placée sur un cône de révolution et les projections équatoriales des lignes* L, Λ *sont des courbes inverses* $(\mathrm{R}\rho = a^2)$, *ou des courbes homothétiques* $\left(\frac{\rho}{\mathrm{R}} = k\right)$, *par rapport à l'origine, la surface de révolution fondamentale* Σ *a pour ligne méridienne respectivement la conique*

$$(\cot^2\theta - m)\rho^2 - 2\cot\theta\rho\zeta + \zeta^2 + a^2 m = 0,$$

ou la parabole générale

$$\zeta = \rho\cot\theta + m\rho^{\frac{k}{k-1}},$$

θ *étant le demi-angle au sommet du cône.*

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ le cône contenant L se réduit au plan coordonné (xy) et l'on tombe sur des résultats trouvés précédemment. (Exemples 2° et 3°.)

Quand la parabole générale se réduit à une conique, elle est nécessairement une parabole $(k = 2)$, ou une hyperbole $(k = \frac{1}{2})$.

4. Le plan coordonné (xy) peut être considéré comme une surface de révolution dont la ligne méridienne est l'axe des x.

Dans cette hypothèse, la condition (8) donne

$$x = \rho - \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)},$$

d'où, en vertu des équations (6),

$$x_1 = \rho + \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}, \qquad y_1 = 0, \qquad z_1 = 2\varphi(\rho).$$

Si donc on a recours au principe I, on a : *La surface symétrique du plan coordonné* (xy) *par rapport à la surface de révolution dont la ligne méridienne est la courbe* (7), *est la surface de révolution dont la ligne méridienne est définie par les équations*

$$(26) \qquad x_{10} = \rho + \frac{\varphi(\rho)}{\varphi'(\rho)}, \qquad z_{10} = 2\varphi(\rho).$$

Exemples. — 1° En supposant $\varphi(\rho) = \frac{\rho^2}{a}$, on déduit

$$z_{10} = \frac{8}{9}\frac{x_{10}^2}{a}.$$

Donc : *La surface symétrique du plan tangent au sommet d'un paraboloïde de révolution, par rapport à cette surface, est un autre paraboloïde.*

2° Si l'on suppose $z_{10} = x_{10}\cot\theta$, θ étant une constante, les équations (26) donnent

$$[\rho\varphi(\rho)]'\cot\theta = 2\varphi(\rho)\varphi'(\rho),$$

et comme on déduit de là, par intégration,

$$\varphi^2(\rho) - \cot\theta\,\rho\,\varphi(\rho) + c = 0,$$

c étant une constante, on a : *La surface de révolution* Σ, *par rapport à laquelle le plan coordonné* (xy) *a pour surface symétrique* *un cône de révolution dont le sommet est à l'origine, a pour ligne méridienne l'hyperbole*

$$\zeta^2 - \cot\theta\,\zeta\rho + c = 0.$$

5. Si l'on a recours à la transformation donnée par le principe II du § III, quand on y suppose $\begin{Bmatrix} \alpha = 1, & \beta = 1, & b = 0, & \\ \lambda = 1, & l = 0, & \mu = 1, & m = 0 \end{Bmatrix}$, le théorème de l'application 3 conduit immédiatement à un autre théorème qui se déduit de celui-ci en remplaçant $\begin{Bmatrix} R, & \rho & & \\ R, & \rho, & z, & \zeta \end{Bmatrix}$ respectivement par $\begin{Bmatrix} R + a, & \rho + a & & \\ z, & \zeta, & R, & \rho \end{Bmatrix}$.

Ainsi, par exemple, le théorème de l'exemple 1° dans l'application 3, en vertu de la première transformation qu'on vient d'indiquer, donne :

Quand la surface fondamentale Σ *a pour ligne méridienne une parabole dont l'axe est parallèle à l'axe de la surface, la condition nécessaire et suffisante pour que la ligne primitive* L *soit placée sur une surface de révolution* S *de la même nature que* Σ, *est que les rayons vecteurs* ρ, R *soient liés par une relation linéaire. La ligne symétrique* L_1 *est tracée sur une surface de révolution* S_1 *de la même nature que* Σ *et* S.

6. Appliquons le principe III du § III aux théorèmes des exemples 2°, 3° de l'application 3, et ensuite appliquons aux théorèmes que l'on déduit le principe II, en y supposant $\lambda = 1$, $l = 0$, $\mu = 1$, $m = 0$.

On parvient ainsi aux propriétés suivantes :

Si les $\begin{Bmatrix} \textit{projections équatoriales} \\ \textit{hauteurs } z, \zeta \textit{ relatives aux points} \end{Bmatrix}$ *des lignes* L, Λ *sont* $\begin{Bmatrix} \textit{des courbes homothétiques par rapport à l'origine } \left(\frac{\rho}{R} = k\right) \\ \textit{proportionnelles } \left(\frac{\zeta}{z} = k\right) \end{Bmatrix}$

et si les $\begin{Bmatrix} \textit{hauteurs } \zeta, z \textit{ relatives aux points} \\ \textit{rayons vecteurs } \rho, R \textit{ des projections équatoriales} \end{Bmatrix}$ *des* *lignes* Λ, L *sont* $\left\{\begin{matrix}\textit{liées}\\ \textit{liés}\end{matrix}\right\}$ *par la relation* $\left\{\begin{matrix} z = c(1-m)\zeta^m \\ R = c(1-m)\rho^m \end{matrix}\right\}$ *(c, m étant des constantes, la surface fondamentale* Σ *et la surface de révolution* S_1 *engendrée par la ligne symétrique* L_1 *ont pour lignes méridiennes les paraboles générales*

$$\left\{\begin{matrix} \zeta = c^{1-m}\rho^{\frac{km}{k-1}}; & z_1 = (1-m)c^{1-m}\left(\dfrac{k}{2k-1}R_1\right)^{\frac{km}{k-1}} \\ \rho = c^{1-m}\zeta^{\frac{km}{k-1}}; & R_1 = (1-m)c^{1-m}\left(\dfrac{k}{2k-1}z_1\right)^{\frac{km}{k-1}} \end{matrix}\right\}.$$

Quand $\left\{\begin{matrix}\textit{les hauteurs } \zeta,\ z \textit{ relatives aux points}\\ \textit{les rayons vecteurs } \rho,\ R \textit{ des projections équatoriales}\end{matrix}\right\}$ *des lignes* Λ, L *sont* $\left\{\begin{matrix}\textit{liées}\\ \textit{liés}\end{matrix}\right\}$ *par la relation* $\left\{\begin{matrix} z = c(1-m)\zeta^m \\ R = c(1-m)\rho^m \end{matrix}\right\}$, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\left\{\begin{matrix}\textit{les projections équatoriales}\\ \textit{les hauteurs } \zeta,\ z \textit{ relatives aux points}\end{matrix}\right\}$ *des lignes* Λ, L $\left\{\begin{matrix}\textit{soient des courbes inverses par rapport à l'origine } (R\rho = a^2)\\ \textit{donnent un produit constant } (z\zeta = a^2)\end{matrix}\right\}$ *est que la surface fondamentale* Σ *ait pour méridienne la ligne* $\left\{\begin{matrix}\zeta = h(\sqrt{\rho^2 - a^2})^m \\ \rho = h(\sqrt{\zeta^2 - a^2})^m\end{matrix}\right\}$, *h étant une constante.*

V.

Résolution de la question (B). — S'il s'agit de deux surfaces de révolution S, S_1 ayant pour axes l'axe des z, le principe I du § III ramène la question (B) à la question (F), en remplaçant les surfaces S, S_1 par leurs lignes méridiennes L, L_1.

Dans le cas général, en désignant par v l'angle qu'un plan tournant autour de l'axe des z fait avec le plan coordonné (xz), et par u un paramètre arbitraire indépendant de v, on peut représenter les surfaces S, S_1 respectivement par les équations :

$$(27)\quad x = F(u, v)\cos v, \qquad y = F(u, v)\sin v, \qquad z = \Phi(u, v),$$

$$(28)\quad x_1 = f(t, v)\cos v, \qquad y_1 = f(t, v)\sin v, \qquad z_1 = \varphi(t, v),$$

t étant un paramètre indépendant de v et fonction de u, et F, Φ, f, φ désignant des fonctions arbitraires.

Comme il résulte

$$(29) \qquad \begin{cases} \xi = \dfrac{F(u, v) + f(t, v)}{2}\cos v, \\ \eta = \dfrac{F(u, v) + f(t, v)}{2}\sin v, \\ \zeta = \dfrac{\Phi(u, v) + \varphi(t, v)}{2}, \end{cases}$$

la condition

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{\eta}{\xi}$$

(exprimant que les points correspondants de surfaces S, S_1, Σ sont sur des droites coupant l'axe des z) est vérifiée par identité.

Quant à la condition (4), en remarquant que

$$\rho = \frac{F(u, v) + f(t, v)}{2}, \qquad \zeta = \frac{\Phi(u, v) + \varphi(t, v)}{2},$$

elle se réduit à l'autre

$$(30) \qquad (F - f)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{dt}{du}\right) = (\Phi - \varphi)\left(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{du}\right).$$

Il faut, en outre, exprimer que le lieu des milieux des droites qui joignent les couples de points correspondants des surfaces S, S_1 est une surface de révolution Σ ayant pour axe l'axe des z. Cette condition donne lieu aux relations suivantes :

$$(31) \qquad \frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

On voit d'ici que les surfaces (27), (28) ne peuvent pas être choisies d'une façon arbitraire.

Les conditions (30), (31) vérifiées par un choix convenable des fonctions F, Φ, f, φ et du paramètre t, la surface fondamentale Σ est définie par les équations (29).

Exemple. — En supposant que la surface S soit un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z, on a

$$F = \text{fonction de } v = V,$$

et comme $F + f$ et $\Phi + \varphi$ doivent être des fonctions de u [à cause des conditions (31)], on doit avoir

$$f = U - V, \qquad \varphi = U_1 - \Phi(u, v),$$

U et U_1 étant des fonctions de u.

Quant à la condition (30), elle donne

$$\Phi(u, v) = \frac{U_1'}{U'} V - \frac{UU_1' - U_1 U'}{2U'}.$$

On a donc les équations

$$(32) \quad x = V \cos v, \qquad y = V \sin v, \qquad z = \frac{U_1'}{U'} \qquad - \frac{UU_1' - U_1 U'}{2U'},$$

$$(33) \quad x_1 = (U - V)\cos v, \quad y_1 = (U - V)\sin v, \quad z_1 = -\frac{U_1'}{U'} V + \frac{UU_1' + U_1 U'}{2U'};$$

$$\xi = \frac{U}{2}\cos v, \qquad \eta = \frac{U}{2}\sin v, \qquad \zeta = \frac{U_1}{2}.$$

Celles-ci démontrent le théorème : *Les équations* (33) (*dans lesquelles* U, U_1 *sont des fonctions arbitraires de* u) *représentent la famille complète de surfaces qu'on peut regarder comme des surfaces symétriques du cylindre arbitraire* (32). *La surface fondamentale* Σ *a pour ligne méridienne la courbe*

$$\rho = \frac{U}{2}, \qquad \zeta = \frac{U_1}{2}.$$

En particulier, si l'on suppose

$$V = \frac{m}{\cos v}, \qquad U = 2u, \qquad U_1 = \frac{2u^2}{n}$$

(m et n étant des constantes) dans les équations (32), (33) et ensuite on élimine les paramètres u, v, on a : *Entre les surfaces* S_1 *symétriques du plan* $x = m$ *il y a la surface du quatrième ordre*

$$4nx_1^2z_1 = (x_1^2 + y_1^2)(3x_1^2 + 2mx_1 - m^2).$$

La surface fondamentale Σ *est le paraboloïde ayant pour ligne méridienne la parabole*

$$\zeta = \frac{\rho^2}{n}.$$

Dans la résolution de la question B, on peut appliquer les principes démontrés au § III, en déduisant ainsi des propriétés remarquables, relatives à la symétrie des surfaces, sans aucun développement de calcul.

Nous nous bornons aux exemples qu'on déduit en appliquant au dernier cas particulier le principe II, en y supposant successivement

$$(\lambda = 1,\ l = 0,\ \mu = 1,\ m = 0), \qquad (\alpha = 1,\ \beta = 1,\ h = 0).$$

On trouve respectivement

$$\left\{\begin{aligned} x &= \left(\frac{2mu}{n\cos v} - \frac{u^2}{n}\right)\cos v, & y &= \left(\frac{2mu}{n\cos v} - \frac{u^2}{n}\right)\sin v, & z &= \frac{m}{\cos v},\\ x_1 &= \left(\frac{3u^2}{n} - \frac{2mu}{n\cos v}\right)\cos v, & y_1 &= \left(\frac{3u^2}{n} - \frac{2mu}{n\cos v}\right)\sin v, & z_1 &= 2u - \frac{m}{\cos v},\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} x &= \left(\frac{m}{\cos v} + h\right)\cos v, & y &= \left(\frac{m}{\cos v} + h\right)\sin v, & z &= \frac{2mu}{n\cos v} - \frac{u^2}{n},\\ x_1 &= \left(2u - \frac{m}{\cos v} + h\right)\cos v, & y_1 &= \left(2u - \frac{m}{\cos v} + h\right)\sin v, & z_1 &= \frac{3u^2}{n} - \frac{2mu}{n\cos v}.\end{aligned}\right.$$

En éliminant u et v entre les deux couples d'équations, on a les théorèmes :

Entre les surfaces S_1 *symétriques* $\left\{\begin{array}{l}\textit{de la surface du quatrième ordre } x^2z^2 = m^2(x^2+y^2)\\ \textit{du cylindre dont la section droite est la conchoïde de Nicomède } R = \dfrac{m}{\cos v} + h\end{array}\right\}$, *il y a la sur-*

face du huitième ordre

$$\left\{\begin{array}{l} 4x_1^2(2nx_1-mz_1)^2(x_1^2+y_1^2)=[3x_1^2z_1^2-m^2(x_1^2+y_1^2)]^2 \\ 4h^2(3x_1+m)^2(x_1^2+y_1^2)x_1^2=[(3x_1^2+2mx_1-m^2)(x_1^2+y_1^2)+3h^2x_1^2-4nx_1^2z_1]^2 \end{array}\right\}.$$

La surface fondamentale Σ *a pour ligne méridienne la parabole*

$$\left\{\begin{array}{l} \rho=\dfrac{\zeta^2}{n} \\ \zeta=\dfrac{(\rho+h)^2}{n} \end{array}\right\}.$$

VI.

Un lieu géométrique remarquable. — Soit $L(x, y, z)$ *une ligne fixe et* Σ *une surface de révolution à laquelle on donne un mouvement de translation suivant la direction de son axe. Pour chaque position de* Σ, *on construit la ligne* L_1 *symétrique de* L.

Lieu des lignes L_1.

Soit $\Lambda(\xi, \eta, \zeta)$ la projection tangentielle de L sur la surface Σ, à un instant quelconque du mouvement. Si la ligne méridienne de Σ est la courbe (7), on a

$$\xi=\rho\cos u, \qquad \eta=\rho\sin u, \qquad \zeta=\varphi(\rho)+\theta,$$

ρ étant une fonction de u et θ un paramètre indépendant de u.

Comme, en appliquant les conditions (4), (5), on déduit

$$\theta=z-\varphi(\rho)+(\rho-\sqrt{x^2+y^2})\varphi'(\rho), \qquad \frac{y}{x}=\operatorname{tang} u,$$

les équations (6) nous apprennent que *le lieu des lignes symétriques* L_1 *est la surface* S_1 *définie par les équations*

$$(34) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_1=\dfrac{(2\rho-\sqrt{x^2+y^2})x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ y_1=\dfrac{(2\rho-\sqrt{x^2+y^2})y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \\ z_1=2(\rho-\sqrt{x^2+y^2})\varphi'(\rho)+z. \end{array}\right.$$

Cas particulier. — Si l'on suppose

$$x = a\cos\left(\frac{t}{a}\right), \qquad y = a\sin\left(\frac{t}{a}\right), \qquad z = \psi(t),$$

a étant une constante et $\psi(t)$ une fonction arbitraire de t, les équations (34) se réduisent aux autres :

$$(35) \qquad \begin{cases} x_1 = (2\rho - a)\cos\left(\dfrac{t}{a}\right), \\ y_1 = (2\rho - a)\sin\left(\dfrac{t}{a}\right), \\ z_1 = 2(\rho - a)\varphi'(\rho) + \psi(t). \end{cases}$$

On en conclut :

Quand la ligne L *est donnée d'une façon arbitraire sur un cylindre circulaire de rayon a, le lieu des lignes symétriques* L_1 *est la surface* S_1 *engendrée par la ligne plane invariable*

$$(36) \qquad z_0 = (x_0 - a)\varphi'\left(\frac{x_0 + a}{2}\right),$$

dont le plan est doué d'une translation dans la direction de l'axe des z et d'une rotation autour de cet axe, avec la condition que le rapport de la vitesse de translation à celle de rotation soit $a\psi'(t)$.

L'équation (36) fournit la ligne génératrice de la surface S_1 quand on donne la surface de révolution Σ.

Ainsi, par exemple, *quand la surface mobile* Σ *est un paraboloïde, la ligne génératrice de la surface* S_1 *est une parabole égale à la ligne méridienne de* Σ, *ayant pour axe l'axe des z.*

Mais si l'on pose

$$(37) \qquad z_0 = \lambda(x_0),$$

on déduit de l'égalité (36)

$$(38) \qquad \zeta = \frac{1}{2}\int \frac{\lambda(2\rho - a)}{\rho - a}\, d\rho.$$

L'équation (38) démontre que *par un choix convenable de la surface mobile* Σ *on peut faire en sorte que la génératrice de la surface* S_1 *soit une courbe* (37) *donnée arbitrairement d'avance.*

Pour que le rapport des vitesses de translation et de rotation soit une constante, il faut et il suffit que $\psi(t)$ soit une fonction linéaire de t. Il s'ensuit que, *quand la ligne fixe* L *est tracée sur un cylindre circulaire, la condition nécessaire et suffisante pour que la surface* S_1, *lieu des lignes symétriques* L_1, *soit un hélicoïde est que la ligne* L *soit une hélice.*

Si l'on suppose $\psi(t) = 0$ dans les équations (32), on a ce résultat :

Quand la ligne fixe L *est un cercle du plan* (xy) *ayant son centre à l'origine, le lieu des lignes symétriques* L_1 *est la surface de révolution ayant pour ligne méridienne la courbe* (36).