EDMOND MAILLET

Sur une catégorie de fonctions transcendantes et les équations différentielles rationnelles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 19-57.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__19_0>

Sur une catégorie de fonctions transcendantes (1) *et les équations différentielles rationnelles;*

PAR M. EDMOND MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées,
Répétiteur à l'École Polytechnique.

I.

Nous nous proposons ici de chercher si les séries ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de la variable x, et dont les exposants ou les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance, peuvent être solutions des équations différentielles rationnelles en y et ses dérivées et dont les coefficients sont soit des polynomes entiers en x, soit des séries en $\frac{1}{x}$ ou x dont les exposants ou les coefficients satisfont à certaines conditions de croissance ou de décroissance.

Nous obtiendrons en particulier le théorème général suivant :

La fonction

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n est quelconque et ψ_n une fonction croissante de n telle que

$$\psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n}$$

(λ fini et $\neq 0$, μ_n croissant indéfiniment avec n), ne peut satisfaire

---

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. Paris, 25 février, 11 mars, 11 novembre 1901.

à une équation différentielle rationnelle en x, y et ses dérivées, d'ordre quelconque.

Nous indiquerons des extensions de ces résultats aux séries de fractions rationnelles et aux fractions continues. Il en résultera en particulier cette propriété remarquable : il existe une infinité de fonctions parmi lesquelles au moins les fonctions algébriques et celles définies par les équations différentielles rationnelles qui, développées en séries de fractions rationnelles de la forme

$$\varphi = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots$$

aux environs d'un point ordinaire x_0 (la base $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ étant formée de polynomes entiers en x arbitrairement choisis dont les racines ont leurs modules limités, R_n étant de degré > 0 et $<$ celui de Q_n, et P_0 un polynome) ne peuvent être telles que le terme de rang $n+1$ soit, par rapport au terme précédent, d'un ordre de petitesse supérieur à une certaine limite fonction des degrés des polynomes de base, quelle que soit la base choisie.

Nous signalerons l'analogie de ces résultats avec ceux obtenus par Liouville et par nous en ce qui concerne les nombres algébriques et les racines des équations transcendantes ([1]).

II.

Considérons l'équation différentielle

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = \sum A y^{i_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k},$$

F étant une fonction rationnelle de x, de y et de ses dérivées successives en x jusqu'à l'ordre $k \geqq 0$; on pourra toujours prendre pour les coefficients A des polynomes entiers en x.

([1]) Voir notre Note du *Journal de Mathématiques*, 1901, p. 419.

Soit la fonction

$$(2)\qquad \varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n est une quantité quelconque et ψ_n une fonction croissante de n, qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, mais qui est telle que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n : supposons que φ satisfasse à (1); on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \sum \frac{-\theta_n \psi_n}{x^{1+\psi_n}},\\ \frac{d^2\varphi}{dx^2} &= \sum \frac{\theta_n \psi_n (1+\psi_n)}{x^{2+\psi_n}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{d^k\varphi}{dx^k} &= \sum (-1)^k \frac{\theta_n \psi_n (1+\psi_n)\ldots(k-1+\psi_n)}{x^{k+\psi_n}}, \end{aligned}\right.$$

et, identiquement,

$$(4)\qquad 0 = \sum \mathrm{A} \left(\sum \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}}\right)^{i_0} \cdots \left[\sum (-1)^k \frac{\theta_n \psi_n (1+\psi_n)\ldots(k-1+\psi_n)}{x^{k+\psi_n}}\right]^{i_k},$$

où

$$\mathrm{A} = a_0 x^q + \ldots + a_q.$$

Considérons le produit Π qui multiplie A : son terme général en $\frac{1}{x}$ a pour exposant

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} = {} & m_1^0 \psi_\alpha + \ldots + m_{j_0}^0 \psi_\delta + m_1^1 (1+\psi_{\alpha_1}) + \ldots + m_{j_1}^1 (1+\psi_{\delta_1}) + \ldots \\ & + m_1^k (k+\psi_{\alpha_k}) + \ldots + m_{j_k}^k (k+\psi_{\delta_k}), \end{aligned}\right.$$

avec

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} & m_1^0 + \ldots + m_{j_0}^0 = i_0,\\ & m_1^1 + \ldots + m_{j_1}^1 = i_1,\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ & m_1^k + \ldots + m_{j_k}^k = i_k, \end{aligned}\right.$$

et pour coefficient

$$(7)\quad \begin{cases} B = \dfrac{i_0!}{m_1^0!\ldots m_{j_0}^0!}\cdots\dfrac{i_k!}{m_1^k!\ldots m_{j_k}^k!}(-1)^{ki_k}\theta_\alpha^{m_1^0}\ldots\theta_{\alpha_k}^{m_1^k}\ldots\theta_{\delta_{j_k}}^{m_{j_k}^k} \\ \quad\times\psi_{\alpha_1}^{m_1^1}\ldots\psi_{\delta_1}^{m_{j_1}^1}\ldots \\ \quad\times[(k-1+\psi_{\alpha_k})\ldots\psi_{\alpha_k}]^{m_1^k}\ldots[(k-1+\psi_{\delta_k})\ldots\psi_{\delta_k}]^{m_{j_k}^k}. \end{cases}$$

On aura en particulier dans Π un terme Θ_1 d'exposant

$$(8)\quad \begin{cases} E_1 = i'_0\psi_n + i'_1(1+\psi_n)+\ldots+i'_k(k+\psi_n) \\ \quad = (i'_0+i'_1+\ldots+i'_k)\psi_n + i'_1 + 2i'_2+\ldots+ki'_k, \end{cases}$$

avec le coefficient

$$(9)\quad B_1 = (-1)^{i'_1+\ldots+ki'_k}\theta_n^{i'_0+\ldots+i'_k}\psi_n^{i'_1+\ldots+i'_k}\ldots(k-1+\psi_n)^{i'_k}.$$

Posons

$$(10)\quad \begin{cases} i_0+\ i_1+\ldots+\ i_k = P, & i'_0+\ i'_1+\ldots+\ i'_k = P', \\ i_1+2i_2+\ldots+ki_k = N, & i'_1+2i'_2+\ldots+ki'_k = N'. \end{cases}$$

Le terme de degré E_1 dans Π donnera dans le second membre de (4) des termes de degré $E_1-\varepsilon_1$, avec $0\leqq\varepsilon_1\leqq q$, termes qui ne seront pas tous nuls, dont l'un au moins devra se réduire avec d'autres de même degré, et qui donnent lieu pour chaque valeur de n à un nombre fini de relations de la forme

$$(11)\qquad \Sigma aB = 0.$$

Or le degré d'un de ces autres termes est de la forme $E-\varepsilon$, avec $0\leqq\varepsilon\leqq\chi$, χ étant le plus grand degré des polynomes A, et l'on devra avoir

$$(12)\qquad E_1 = E-\varepsilon+\varepsilon_1.$$

Cherchons les termes du deuxième membre de (4) pouvant satisfaire à cette égalité, c'est-à-dire à

$$(13)\qquad P'\psi_n + N' = m_1^0\psi_\alpha+\ldots+m_{j_k}^k\psi_{\delta_k}+N-\varepsilon+\varepsilon_1.$$

Pour toute valeur de P, le second membre de (13) devra, si n est suffisamment grand, être tel que P′ des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$, en nombre $i_0 + \ldots + i_k = P$ [chacune étant comptée ici autant de fois que l'indique son coefficient dans le second membre de (13)], soient égales à n, puisque $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} > \eta$, quel que soit η, quand n est assez grand; les autres, en nombre $P - P' \geqq 0$, seront telles que la somme des quantités ψ_α correspondantes soit égale à $N' - N + \varepsilon - \varepsilon_1$, c'est-à-dire limitée.

Ceci posé :

1° Supposons P′ maximum et $= P''$, parmi les quantités P, en nombre limité et $\leqq$ au nombre ν des termes de (1); toutes les quantités P sont égales à P″ dans (13); il faut $N' = N - \varepsilon + \varepsilon_1$. Les coefficients B correspondants sont tous de la forme B_1; le nombre des termes correspondants qui entrent dans (11) est $\leqq$ au nombre des quantités P égales à P″ dans (1). Il doit donc y avoir deux termes distincts de (1) pour lesquels P″ a la même valeur.

2° Supposons P′ quelconque. Le nombre des systèmes de quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ telles que $\mu_1^0 \psi_\alpha + \ldots = N' - N + \varepsilon - \varepsilon_1 (\mu_1^0 \leqq m_1^0, \ldots)$ est limité, puisque les valeurs négatives de ψ_α sont limitées inférieurement. Il en résulte que le nombre des termes qui entrent dans (11) sera limité et $\leqq \nu'$, ν' étant limité.

Ce n'est pas tout : B_1 est de l'ordre de grandeur de

$$\theta_n^{P'} \psi_n^{N'} \tag{14}$$

d'après (9). Le nombre des termes de (11) étant fini, il devra y avoir un terme au moins de (11) autre que B_1 et du même ordre de grandeur au moins que B_1. Pour les valeurs de $P \geqq P'$, il devra y avoir au moins un coefficient B pour lequel P′ des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont égales à n, les $P - P'$ autres étant limitées, et tel que B soit d'ordre

$$\geqq \theta_n^{P'} \psi_n^{N'}.$$

Les coefficients $\theta_\alpha, \ldots$ correspondant à des valeurs de $\alpha, \ldots$ limitées, sont limités : par suite B est d'ordre $\leqq \theta_n^{P'} \psi_n^{N}$. Donc, il faudra qu'on ait un terme B pour lequel $N \geqq N'$. Si en particulier N′ est maximum et $= N_1''$, il faut $N = N_1''$.

Considérons alors les deux cas suivants :

Condition C.

1° $P = P''$. — Parmi les termes B correspondants d'ordre $\theta_{''}^{P''}\psi_{''}^{N''}$, il y en a pour lesquels N' est maximum et $= N''$. Pour ceux-là, $\psi_{''}^{N''}$ et B sont d'ordre maximum; il devra y en avoir deux au moins de cette espèce. *A fortiori* devra-t-il y avoir deux termes pour lesquels $P' = P''$ parmi les termes de (1).

Condition D.

2° $N' = N''_1$. — Parmi les termes correspondants, prenons tous ceux pour lesquels P' a la même valeur maxima P''_1; il devra y en avoir au moins deux.

L'application des conditions C et D ci-dessus donne alors les résultats suivants :

1° Quand (1) est d'ordre zéro, c'est-à-dire est un polynome entier en x, y, la condition C suffit à montrer que (4) est impossible : il n'y a qu'un terme pour lequel $P' = P''$.

2° Quand (1) est du premier ordre, la condition C, par exemple, montre que l'on devrait avoir deux termes distincts correspondant à $P'' = i_0 + i_1$, $N'' = i_1$ dans (1), c'est-à-dire à un même système de valeurs de i_0 et i_1, ce qui est impossible.

3° Quand (1) est d'ordre quelconque k, et que, pour tous les termes de (1) pour lesquels $P = P''$, $N = N''$, ou $N = N''_1$, $P = P''_1$, $n - 2$ des quantités $i_0, i_1, \ldots, i_k$ ont même valeur deux à deux, il en est de même des deux autres. Ces termes se réduisent à un, et les conditions C et D ne peuvent avoir lieu.

4° Ce sera encore le cas, par exemple, pour les équations différentielles rationnelles en x et y, et linéaires par rapport aux dérivées de y. La valeur maxima N''_1 de N' est égale à k, et la valeur P''_1 correspondante est $i'_0 + 1$, i'_0 étant le degré en y du polynome entier en x, y qui forme le coefficient de $\frac{d^k y}{dx^k}$. Il n'y a qu'un terme correspondant et la condition D n'est pas satisfaite.

La condition C conduirait aux mêmes résultats.

5° Considérons parmi les équations différentielles d'ordre k celles qui sont complètes par rapport aux dérivées de y qui y entrent, c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome complet de même degré j séparément par rapport à chacune de celles des quantités y', y'', …, $y^{(k)}$ qui entrent dans (1), en nombre l. La valeur maxima N''_1 de N' correspond au terme pour lequel tous les y', y'', …, $y^{(k)}$ qui entrent dans (1) ont l'exposant j et qui a pour coefficient un polynome quelconque $M(x,y)$. La valeur maxima correspondante P''_1 de P' est unique et est relative au terme de $M(x,y)$ d'exposant maximum en y. La condition D n'est donc pas remplie.

6° Considérons enfin les équations différentielles rationnelles en x et y dont le premier membre forme un polynome de degré total λ par rapport à celles des quantités y', y'', …, $y^{(k)}$ qui y entrent, en nombre l, ce polynome comprenant tous les termes possibles de la forme

$$Gy'^{a_1}y''^{a_2}\ldots y^{(k)a_l},\qquad a_1+a_2+\ldots+a_l=\lambda,$$

G étant un polynome entier en x et y.

La valeur maxima de N est évidemment $k\lambda$, et la condition D n'est pas remplie.

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème I. — *Soit la fonction*

$$\varphi=\frac{\theta_1}{x^{\psi_1}}+\ldots+\frac{\theta_n}{x^{\psi_n}}+\ldots,$$

où θ_n est quelconque, et ψ_n une fonction croissante, qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, mais qui est telle que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n :

I. *φ ne peut être une fonction algébrique de x.*

II. *φ ne peut être solution d'une équation différentielle de premier ordre, rationnelle en x, y, y'.*

III. *φ ne peut être solution des équations différentielles rationnelles en x et y, et linéaires par rapport aux autres dérivées de y.*

IV. *φ ne peut être solution des équations différentielles rationnelles d'ordre k complètes par rapport à celles des dérivées de y qui y entrent en nombre l, c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome de même degré j séparément par rapport à ces quantités avec un terme d'exposant total lj.*

V. *φ ne peut être solution des équations différentielles rationnelles en x et y d'ordre k, dont le premier membre forme un polynome de degré total λ par rapport à celles des quantités y', y'', ..., $y^{(k)}$ qui y entrent, si ce polynome comprend tous les termes possibles de la forme*

$$Gy'^{a_1}y''^{a_2}\ldots(y^{(k)})^{a_l}, \qquad a_1+a_2+\ldots+a_l=\lambda,$$

G étant un polynome entier en x et y.

On peut même aller un peu plus loin pour les équations différentielles linéaires ordinaires à coefficients rationnels.

Une fonction

$$\Phi=\sum\frac{\theta_n}{x^{\psi_n}}$$

n'en peut être une solution que si

$$A_0\Sigma(-1)^k\theta_n\psi_n(1+\psi_n)\ldots(k-1+\psi_n)x^{-k-\psi_n}+\ldots \\ +A_k\Sigma\theta_n x^{-\psi_n}=T.$$

Si $\psi_n-\psi_{n-1}$ croît indéfiniment avec n, pour n assez grand, l'ensemble des termes dont l'exposant ne diffère que d'une quantité finie de $-\psi_n$ doit se réduire à zéro. On en conclura un nombre fini de relations de la forme

$$[a_k\psi_n(1+\psi_n)\ldots(k-1+\psi_n)+\ldots+a_0]\theta_n=0,$$

ce qui exige, quand n est assez grand, $a_k=0$, et A_0 devrait se réduire à zéro. Donc :

Théorème II. — *La fonction*

$$\Phi=\sum_1^\infty{}_n\frac{\theta_n}{x^{\psi_n}}$$

ne peut être solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x que si $\psi_n - \psi_{n-1}$ ne croît pas indéfiniment avec n.

III.

On peut établir des théorèmes similaires, dans le cas où la croissance de ψ_n est moins rapide, moyennant certaines hypothèses que nous préciserons tout à l'heure. Supposons seulement que $\psi_{n+1} - \psi_n \geqq 1$.

Tout ce que nous avons dit dans le § II reste vrai jusqu'à (12) inclusivement.

Cherchons les termes du deuxième membre de (4) pouvant satisfaire à (12), c'est-à-dire à

$$(15) \qquad P'\psi_n + N' = m_1^0\psi_\alpha + \ldots + m_\mu^k\psi_{\delta_k} + N - \varepsilon + \varepsilon_1.$$

Pour toute valeur de P′ le second membre de (15) devra, si n est suffisamment grand, être tel que

$$(16) \qquad P'\psi_n \geqq \psi_\beta + \varepsilon',$$

ε' étant fini, et β la plus grande des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$. On en conclut

$$(17) \qquad \beta \leqq \chi_n,$$

χ_n étant une fonction croissante de n.

Pour toute valeur de

$$P = m_1^0 + \ldots + m_\mu^k,$$

on aura alors comme limite supérieure du nombre des solutions de (15), quand ε et ε_1 sont donnés, le nombre des systèmes de valeurs que peuvent prendre P quantités $a, b, \ldots, d$ quand on donne à chacune d'elles les valeurs $1, 2, \ldots, \chi_n$, c'est-à-dire $\chi_n^P \leqq \chi_n^{P''}$, si P″ désigne encore le maximum de P pour tous les termes de (1). Le nombre des systèmes de valeurs de $\varepsilon_1 - \varepsilon$ est fini et $\leqq \rho$; par suite chaque produit AΠ, auquel correspond une même valeur de N et de P, pourra fournir au plus $\rho\chi_n^{P''}$, termes distincts satisfaisant à (15), et l'ensemble des produits AΠ au plus $\sigma\chi_n^{P''}$ termes, σ étant fini.

Ceci posé, soit $P' = P''$; les coefficients B qui entrent dans (11) sont en nombre $\leqq \sigma\chi_n^{P''}$. (12) devient

$$(18) \qquad P''\psi_n + N' = m_1^0\psi_\alpha + \ldots + m_{j}^k\psi_{\delta k} + N - \varepsilon + \varepsilon_1;$$

on a

$$m_1^0 + \ldots + m_j^k \leqq P''.$$

Si toutes les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont $\leqq n$, (18) est impossible pour n assez grand, à moins que

$$(19) \qquad m_1^0 + \ldots + m_{jk}^k = P''.$$

Par conséquent, les termes de (11) se divisent en deux catégories : 1° ceux pour lesquels (19) a lieu et $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont $\leqq n$; pour eux, $P = P'$; 2° ceux pour lesquels une au moins des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ est $> n$.

Considérons la première catégorie de termes : s'il n'y a qu'un terme de (1) pour lequel $P = P''$, les termes de la première catégorie se réduisent à un [1] dès que n est grand, si ε est convenablement choisi. C'est par exemple le cas quand F, dans (1), est un polynome entier en x et y, ou encore quand F ne contient qu'une seule des quantités $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^ky}{dx^k}$, et est de la forme $F\left(x, \frac{d^ky}{dx^k}\right) = 0$ (cas des fonctions abéliennes et de leurs intégrales successives). On peut prendre alors

$$\psi_n = n + \nu, \qquad \chi_n = P''n + \rho_1 \ (\rho_1 \text{ fini}),$$

(c'est encore le cas des équations de Riccati et de Bernoulli, à coefficients rationnels).

Plus généralement, même si le nombre des termes de (1) pour lesquels $P = P''$ est > 1, d'après (18), une des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ ne

---

(1) Si q' est le degré du terme le moins élevé dans $A\Pi$, il n'y a dans le produit qu'un terme de degré $P''\psi_n + N' - q'$ qui ne se réduit avec aucun autre tel que $\alpha, \ldots, \delta_k \leqq n$.

pourrait être $< n$ que si

$$(20) \qquad \psi_n \leqq \psi_{n-1} + \mathrm{A},$$

ce qui est impossible dès que $\psi_n - \psi_{n-1}$ dépasse une certaine quantité finie fonction de N et des degrés des polynomes A [1], *a fortiori* si $\psi_n - \psi_{n-1}$ croît indéfiniment avec n.

Supposons que ceci ait lieu : si toutes les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k$ sont égales à n, il faut

$$m_1^0 + \ldots + m_{j_k}^k = \mathrm{P}''.$$

Or, les termes B correspondants sont de l'ordre de grandeur de $\theta_n^{\mathrm{P}''} \psi_n^{\mathrm{N}'}$; leur nombre est d'ailleurs limité, car il y en a au plus un pour chaque produit Π. Supposons alors que parmi eux il n'y en ait qu'un pour lequel $\mathrm{N}' = \mathrm{N}''$; la somme des modules des autres sera d'ordre inférieur à $\theta_n^{\mathrm{P}''} \psi_n^{\mathrm{N}''}$.

Finalement, dans tous ces cas, l'ensemble des termes de la première catégorie donne dans (11) une somme de l'ordre de $\theta_n^{\mathrm{P}''} \psi_n^{\mathrm{N}''}$. Supposons qu'il en soit ainsi, et considérons maintenant l'ensemble des termes B de la deuxième catégorie : pour que (11) soit possible, il faudra évidemment, dans tous les cas précités, que la somme des modules de ces termes, chacun multiplié par un facteur constant et limité, soit au moins de l'ordre de grandeur de $|\theta_n^{\mathrm{P}''} \psi_n^{\mathrm{N}''}|$, c'est-à-dire *a fortiori* que

$$(21) \qquad \left|\theta_n^{\mathrm{P}''} \psi_n^{\mathrm{N}'}\right| \leqq \lambda_2 \Sigma \left|\theta_\alpha^{m_1^0} \ldots \theta_{\delta_k}^{m_{j_k}^k} \psi_\alpha^{m_1^0} \ldots \right| \psi_{\delta_k} \ldots (k - 1 + \psi_{\delta_k})|^{m_{j_k}^k}.$$

Or, si $|\theta_n|$ est une fonction décroissante de n que l'on peut toujours

---

[1] Soit, par exemple, $\mathrm{L}' > \psi_{n+1} - \psi_n > \mathrm{L}$, d'où $\psi_n > n\mathrm{L} + l$, $\psi_{\theta n} > \theta n \mathrm{L} + l_1$, $\psi_n < n\mathrm{L}' + l'$, $\mathrm{P}'\psi_n < \mathrm{P}' n \mathrm{L}' + \mathrm{P}' l'$. Posant $\theta n \leqq \beta < (\theta + 1) n$, (16) donne

$$l_1 + \theta n \mathrm{L} < \psi_{\theta n} \leqq \psi_\beta \leqq \mathrm{P}'\psi_n - \varepsilon' < \mathrm{P}' n \mathrm{L}' + l''.$$

On peut prendre

$$\chi_n = \frac{\mathrm{P}' n \mathrm{L}' + l'' - l_1}{\mathrm{L}} + n.$$

supposer telle que $|\theta_1| < 1$, on a ici

$$\left|\theta_\alpha^{m'''^1_1} \ldots \theta_{\delta_k}^{m'''^k_{j_k}}\right| \leqq \left|\theta_{n+1}\right|.$$

On a d'ailleurs, d'après (16),

$$\psi_\alpha^{m'''^1_1} \ldots [\psi_{\delta_k} \ldots (k - 1 + \psi_{\delta_k})]^{m'''^k_{j_k}} \leqq \lambda_3(\mathrm{P}''\psi_n + \nu_1)^{\mathrm{N}} \leqq \lambda_3(\mathrm{P}''\psi_n + \nu_1)^{\mathrm{N}''_1}$$

N''_1 étant la valeur maxima des quantités N_1, et λ_3 étant fini. Le nombre des termes du deuxième membre de (11) est d'ailleurs au plus égal à $\sigma\chi_n^{\mathrm{P}''}$, et (21) donne

$$|\theta_n^{\mathrm{P}''}\psi_n\mathrm{N}''| \leqq \lambda_4|(\mathrm{P}''\psi_n + \nu_1)^{\mathrm{N}''_1}\chi_n^{\mathrm{P}''}\theta_{n+1}|,$$

λ_4 étant fini, ou encore

$$|\theta_n^{\mathrm{P}''}| \leqq \lambda_5|\theta_{n+1}\chi_n^{\mathrm{P}''}\psi_n^{\nu'_1}|,$$

λ_5 étant fini.

Dès lors,

$$(22) \qquad |\theta_{n+1}| \geqq \left|\frac{\theta_n^{\mathrm{P}''}}{\lambda_5\chi_n^{\mathrm{P}''}\psi_n^{\nu'_1}}\right|.$$

La fonction ψ_n étant donnée, par suite la fonction χ_n ou une limite supérieure ϖ_n, ceci sera impossible dès que

$$(23) \qquad |\theta_{n+1}| < \left|\frac{\theta_n^{\mathrm{P}''}}{\lambda_5\chi_n^{\mathrm{P}''}\psi_n^{\nu'_1}}\right|;$$

ou, *a fortiori*, dès que

$$(24) \qquad |\theta_{n+1}| < \left|\frac{\theta_n^{\mathrm{P}''}}{\lambda_5\varpi_n^{\mathrm{P}''}\psi_n^{\nu'_1}}\right|.$$

Dans le cas des fonctions algébriques ou des fonctions abéliennes et de leurs intégrales successives, on peut prendre $\psi_n = n + \nu'$,

$$\chi_n = \mathrm{P}''n + \rho_1,$$

et (11) sera impossible dès que (23) a lieu, par exemple quand $\theta_n = \zeta^{-n!}$, ζ étant > 1, puisque

$$\zeta^{-(n+1)!} < \frac{\zeta^{-n!\,\mathrm{P}''}}{\lambda_3(\mathrm{P}''n+\rho_1)^{\mathrm{P}''}(n+\nu')^{\nu'_1}}$$

pour n assez grand.

Soit encore une équation (1) donnée. Si $\psi_n - \psi_{n-1}$ reste compris entre deux limites finies L et L' définies comme précédemment, et suffisamment grandes, (11) est encore impossible quand $\theta_n = \zeta^{-n!}$.

Enfin supposons que $\psi_n - \psi_{n-1}$ croisse indéfiniment avec n; si la fonction ψ_n donne, d'après (16), $\beta \leqq \mathrm{R}n$, R étant fini (ce qui a lieu, par exemple, quand $\psi_n = n^m$, car on a

$$\rho_2 + \mathrm{P}''n^m < \mathrm{R}^m n^m$$

dès que

$$\mathrm{R} > \sqrt[m]{\mathrm{P}''+1},$$

n étant assez grand), on peut prendre

$$\chi_n^{\mathrm{P}''} = (\mathrm{R}n)^{\mathrm{P}''}, \qquad \psi_n^{\nu'_1} = n^{m\nu'_1}.$$

(23) aura lieu quand $\theta_n = \zeta^{-n!}$, et (1) sera alors impossible.

Au surplus, quel que soit le mode de croissance de ψ_n et de χ_n, (23) donne toujours le moyen de déterminer le mode de décroissance de θ_n de façon que (11) soit impossible, pourvu que $\psi_n - \psi_{n-1}$ croisse indéfiniment avec n [1].

Condition C'.

En résumé, on peut formuler ici une condition analogue à la condition C :

Dans le cas où ψ_n et θ_n sont tels que

$$|\theta_{n+1}| < \left|\frac{|\theta_n|^{\mathrm{P}''}}{\chi_n^{\mathrm{P}''}\psi_n^{\nu'_1}\lambda_5}\right|,$$

---

[1] On pourrait peut-être, par une discussion un peu plus approfondie améliorer l'inégalité (23) et la préciser : nous n'insistons pas.

il doit y avoir au moins deux termes de (1) correspondant à la valeur maxima P″ de P dès que $\psi_n - \psi_{n-1} \geqq 1$.

Quand $\psi_n - \psi_{n-1}$ croît indéfiniment avec n, parmi les termes de (1) correspondant à la valeur maxima P″ de P il doit y en avoir deux au moins pour lesquels N est maximum et $= N''$. Cette condition est même nécessaire dès que $\psi_n - \psi_{n-1}$ dépasse une certaine limite finie fonction des coefficients, des exposants et de l'ordre de (1).

L'application de cette condition donne alors les résultats suivants :

1° Quand (1) est un polynome entier en x et y, ou en x et $\frac{d^k y}{dx^k}$, la condition C′ n'est pas remplie et il n'y a qu'un terme pour lequel $P = P''$. On pourra prendre ici $\psi_n - \psi_{n-1} = 1$.

2° Quand (1) est du premier ordre, la condition C′ (deuxième partie) montre que l'on devrait avoir deux termes distincts correspondant à $P'' = i_0 + i_1$, $N'' = i_1$, c'est-à-dire à un même système de valeurs de i_0 et i_1, ce qui n'est pas.

3° Quand (1) est d'ordre quelconque k, et que, pour tous les termes de (1) pour lesquels $P = P''$, $N = N''$, $n - 2$ des quantités $i_0, \ldots, i_k$ ont même valeur; il en est de même des deux autres. Ces termes se réduisent à un, et la condition C′ (deuxième partie) ne peut avoir lieu.

4° Ce sera encore le cas pour les équations différentielles rationnelles en x et y, et linéaires par rapport aux dérivées de y. On a ici

$$P = i_0, \qquad N = 0$$

pour les termes ne contenant pas de dérivées de y, et

$$P' = i'_0 + 1, \qquad N' = \lambda > 0$$

pour les autres termes.

Deux valeurs de N′ ne peuvent être égales sans que les valeurs de P′ ou de P diffèrent. La condition C′ (deuxième partie) n'a pas lieu.

5° Considérons parmi les équations différentielles rationnelles d'ordre k celles qui sont complètes par rapport à y et aux dérivées de y, c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome complet de même degré par rapport à toutes les quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui entrent dans (1). Si j est la valeur maxima commune de $i_0, \ldots, i_k$, la valeur maxima de P est lj, l étant le nombre des quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui entrent dans (1), et il n'y a qu'un terme pour lequel P a cette valeur. On pourra prendre ici $\psi_n - \psi_{n-1} = 1$. C'est, en particulier, le cas quand une seule de ces quantités entre dans (1) (cas particuliers indiqués ci-dessus). La condition C' (première partie) n'est pas remplie.

6° Considérons enfin les équations différentielles rationnelles en x, $y, \ldots, y^{(k)}$ dont le premier membre forme un polynome de degré total λ par rapport à celles des quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$ qui y entrent, en nombre l. Si ce polynome comprend tous les termes possibles de la forme

$$G y^{a_0} \ldots y^{(k)a_l}, \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_l = \lambda,$$

G étant un polynome entier en x, la valeur maxima de P est évidemment λ; les valeurs N sont $a_1 + \ldots + ka_k \leqq k\lambda$, et la valeur maxima de N pour les termes en question, égale à $k\lambda$, correspond au terme unique $G y^{(k)\lambda}$. La condition C' (deuxième partie) n'est pas remplie.

On peut résumer la plupart des résultats précédents dans le théorème suivant :

Théorème III. — *Soit la fonction*

$$\varphi = \frac{0_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{0_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où ψ_n est une fonction croissante de n, qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, $\psi_{n+1} - \psi_n$ croissant indéfiniment avec n.

Soit encore

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A(x) y^{i_0} \ldots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k} = 0$$

une équation différentielle rationnelle en x, y et ses dérivées, les $A(x)$ étant des polynomes entiers en x.

Si ω_n [1] *est une certaine fonction croissante de* n *qui dépend de* ψ_n, *et si l'on a*

$$(25) \qquad |\theta_{n+1}| < \left|\frac{\theta_n}{\omega_n}\right|^{\nu},$$

quelle que soit la constante ν *pour* n *assez grand :*

I. φ *ne peut être ni fonction algébrique, ni fonction abélienne, ni une intégrale d'une fonction abélienne;*

II. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles du premier ordre en* x, y, y';

III. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles en* x *et* y, *et linéaires par rapport aux autres dérivées de* y;

IV. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles* (1) *d'ordre* k *complètes par rapport à celles des quantités* y, $y', \ldots, y^{(k)}$ *qui y entrent, en nombre* l, *c'est-à-dire dont le premier membre forme un polynome complet de même degré* j *séparément par rapport à celles des quantités* $y, y', \ldots, y^{(k)}$ *qui y entrent, avec un terme d'exposant* lj;

V. φ *ne peut être solution des équations différentielles rationnelles d'ordre* k *dont le premier membre forme un polynome de degré total* λ *par rapport à celles des quantités* $y, y', \ldots, y^{(k)}$ *qui y entrent, en nombre* l, *si ce polynome comprend tous les termes possibles de la forme*

$$G y^{a_0} y'^{a_1} \ldots y^{(k)a_l}, \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_l = \lambda,$$

G *étant un polynome entier en* x.

Quand $\theta_n = \zeta^{-n^2}$ ($\zeta > 1$), *et que* $\psi_n = n^m$ ($m > 1$), *la condition* (25) *est toujours satisfaite.*

Les propriétés I *et* IV *restent vraies quand* $\psi_{n+1} - \psi_n$ *est fini et* ≥ 1. *Ainsi elles sont applicables à la fonction* φ *quand* $\theta_n = \zeta^{-n^2}$.

---

(1) Ici $\omega_n^{\nu} = \lambda_5 \chi_n^{\rho''} \psi_n^{\nu'_1}$.

IV.

On peut obtenir des résultats plus généraux sur les fonctions de la forme (2) et les équations de la forme (1) quand on fait sur ψ_n des hypothèses plus restrictives.

En effet, supposons encore que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n; prenons dans le produit II le terme en $\frac{1}{x}$ obtenu en formant le produit de P termes ayant pour exposants respectifs, à une quantité finie près :

$$\psi_n, \quad \psi_{n+1}, \quad \ldots, \quad \psi_{n+P-1};$$

ce terme pourra être obtenu en attribuant successivement à $\alpha, \ldots, \delta_k$ les valeurs distinctes $n, n+1, \ldots, n+P-1$ $(m_1^0 = \ldots = m_p^k = 1)$ dans un ordre quelconque; il aura alors dans II l'exposant

$$(26) \qquad E_2 = \psi_{n+P-1} + \psi_{n+P-2} + \ldots + \psi_n + N,$$

et pour coefficient

$$(27) \quad B_2 = \Sigma \lambda_\sigma i_0! \ldots i_k! (-1)^N \theta_{n+P-1} \ldots \theta_{n+1}\theta_n \times \psi_{n+P-1}^{\sigma_1} \ldots \psi_n^{\sigma_P};$$

on a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_P = N,$$

et λ_σ est fini, *positif*, et limité supérieurement et inférieurement quel que soit n; parmi les P quantités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_P$, il y en a i_k égales à k, i_{k-1} à $k-1$, ..., i_1 à 1, i_0 à 0, et cela de toutes les manières possibles ([1]).

Si l'on suppose $P = P''$, le terme correspondant de degré E_2 donnera encore dans le second membre de (4) des termes qui ne pourront se

---

([1]) On ne doit considérer ici comme distincts deux termes de B_2 que quand deux des systèmes de valeurs des exposants $\sigma_1, \ldots, \sigma_P$ correspondants sont distincts par l'ordre de ces quantités.

réduire qu'avec ceux d'exposants de la forme (12). Ces exposants devront satisfaire à

$$(28)\qquad \psi_{n+P''-1}+\psi_{n+P''-2}+\ldots+\psi_n=m_1^0\psi_\alpha+\ldots+m_{j_k}^k\psi_{\partial_k}+\omega,$$

où ω est fini, et l'on en conclut que le second membre doit être tel, comme le premier, que $P=P''$, et qu'une et une seule des quantités $\alpha, \ldots, \partial_k$ soit égale à une des quantités $n, n+1, \ldots, n+P''-1$. Les termes de (4) en question sont ceux que nous avons considérés tout d'abord; leur nombre est limité.

Pour que (11) soit possible, il faudra donc que, parmi les quantités B_2 dont l'ordre de grandeur en n est maximum, et pour lesquelles $P=P''$, il y en ait au moins deux de même ordre, provenant de deux termes différents de (4), c'est-à-dire *a fortiori* deux telles que

$$(29)\qquad \psi_{n+P''-1}^{\sigma_1}\ldots\psi_n^{\sigma_{P''}}=\lambda\psi_{n+P''-1}^{\sigma'_1}\ldots\psi_n^{\sigma'_{P''}},$$

λ étant fini et limité supérieurement et inférieurement, les quantités correspondantes $i, i_{k-1}, \ldots, i_0$ n'étant pas toutes égales aux quantités $i''_k, i''_{k-1}, \ldots, i''_0$ correspondantes. On peut supposer que σ_τ soit la première des quantités $\sigma_1, \ldots, \sigma_{P''}$ qui ne soit pas égale à la quantité correspondante σ'_τ et $\tau<P''$; en effet, si l'on avait $\sigma_1=\sigma'_1$, $\sigma_2=\sigma'_2, \ldots, \sigma_{P''-1}=\sigma'_{P''-1}$, on aurait $\sigma_{P''}=\sigma'_{P''}$; parmi les quantités $\sigma_1, \ldots, \sigma_{P''}$, il y en aurait i_0 égales à o, i_1 égales à 1, ..., i_k égales à k, et de même i''_0 égales à o, ..., i''_k égales à k; donc $i_0=i''_0, \ldots$, $i_k=i''_k$, et les deux termes B_2 correspondants coïncideraient, contrairement à ce qui précède. On aura alors

$$(30)\qquad \psi_{n+P''-\tau}^{\sigma_\tau}\ldots\psi_n^{\sigma_{P''}}=\lambda\psi_{n+P''-\tau}^{\sigma'_\tau}\ldots\psi_n^{\sigma'_{P''}},$$

d'où, si, par exemple, $\sigma_\tau>\sigma'_\tau$,

$$(31)\qquad \psi_{n+P''-\tau}^{\sigma_\tau-\sigma'_\tau}=\lambda\psi_{n+P''-\tau-1}^{\sigma'_{\tau+1}-\sigma_{\tau+1}}\ldots\psi_n^{\sigma'_{P''}-\sigma_{P''}},$$

avec $\sigma_\tau-\sigma'_\tau\leqq k$, $\tau<P''$, et

$$(32)\qquad \psi_{n+P''-\tau}=\lambda\psi_{n+P''-\tau-1}^{\mu_{\tau+1}}\ldots\psi_n^{\mu_{P''}},$$

$\mu_{\tau+1}, \ldots, \mu_{p''}$ étant rationnels, positifs ou négatifs, et de dénominateurs $\leqq k$.

Nous ne chercherons pas provisoirement à discuter l'égalité (32). Nous remarquerons seulement qu'il n'est pas difficile d'imaginer des lois de croissance de ψ_n telles que (32) soit impossible. Il suffit de prendre

$$\psi_{n+1} = \nu \psi_n^{\varpi_n},$$

ν étant une quantité qui reste limitée supérieurement et inférieurement et ϖ_n une fonction croissante de n qui croît indéfiniment avec n. Il faudrait, en effet, pour n assez grand

$$\psi_{n+p''-\tau} < \lambda_1 \psi_{n+p''-\tau-1}^{\mu_{\tau+1}+\ldots+\mu_{p''}},$$

ce qui est impossible dès que n surpasse une certaine limite. Donc :

Théorème IV. — *Soit la fonction*

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où θ_n est quelconque et ψ_n une fonction croissante de n qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, mais qui est telle que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n : φ ne peut satisfaire à une équation différentielle rationnelle d'ordre quelconque que si l'on a au moins une relation de la forme

$$\psi_{n+\nu} = \lambda \psi_{n+\nu-1}^{\mu_1} \ldots \psi_n^{\mu_\nu}$$

(ν entier, $\mu_1, \ldots, \mu_\nu$ rationnels ne peuvent avoir qu'un nombre limité de valeurs ne dépendant que des exposants de y et de ses dérivées dans l'équation donnée et de l'ordre k de cette équation, les dénominateurs $p_1, \ldots, p_\nu$ étant $\leqq k$).

En particulier, φ ne satisfait à aucune équation différentielle rationnelle quand $\psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n}$, μ_n étant une fonction de n qui croît indéfiniment avec n, et λ une quantité finie $\neq 0$ et limitée supérieurement et inférieurement.

Remarque. — Les résultats obtenus dans les quatre premiers paragraphes s'étendent évidemment aux séries obtenues en remplaçant $\frac{1}{x}$ par $x - x_0$ et qui pourraient représenter le développement d'une solution aux environs du point x_0 (réel ou imaginaire).

V.

Les résultats précédemment obtenus ne sont pas spéciaux aux séries ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de x; ils s'étendent aux séries de polynomes et de fractions rationnelles, par suite aux fractions continues.

Nous nous contenterons d'indiquer ici une partie de ces extensions en employant un autre mode de démonstration qui donne des résultats plus complets à certains égards.

Soit d'abord

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n} + \ldots \tag{33}$$

une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de la variable x, P_0 étant un polynome; nous supposons la série $\varphi_1 - P_0$ convergente aux environs du point $x = \infty$ qui est ainsi un pôle ou un point ordinaire pour φ_1.

Désignons par

$$Q_0, \quad Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots \tag{34}$$

une suite de polynomes de degrés $q_0, q_1, q_2, \ldots > 0$; on pourra toujours, et d'une seule manière, mettre φ_1 sous la forme

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots, \tag{35}$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ étant des polynomes entiers en x de degrés r_1, $r_2, \ldots, r_n, \ldots <$ ceux de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ respectivement.

En effet, si

$$(\varphi_1 - P_0) = \varepsilon_1,$$

$\varepsilon_1 Q_1$ sera une série comprenant un polynome R_1 de degré inférieur d'une unité au moins à celui de Q_1 et une partie ε_2 de la forme

$$\frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots$$

$$\varphi_1 - P_0 = \frac{R_1}{Q_1} + \frac{\varepsilon_2}{Q_1}.$$

On mettra, de la même manière, ε_2 sous la forme

$$\varepsilon_2 = \frac{R_2}{Q_2} + \frac{\varepsilon_3}{Q_2},$$

d'où

$$\varphi_1 - P_0 = \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \frac{\varepsilon_3}{Q_1 Q_2}, \ldots.$$

Par analogie avec ce que nous avons dit pour les *systèmes de numération généralisés*, nous dirons que (34) est la *base d'un système de représentation* aux environs du point $x = \infty$; (35) est la représentation de φ_1 dans ce système (au cas, bien entendu, où φ_1 est une série convergente ou sommable). On pourra évidemment supposer

$$Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_n = \ldots;$$

le système de représentation correspond alors aux systèmes de numération ordinaires.

Désignons par $\frac{\varpi_n}{S_n}$ la fraction $\varphi_1 - \frac{\varepsilon_{n+1}}{Q_1 \ldots Q_n}$, et soit encore l'équation différentielle

$$(1) \qquad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A y^{i_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k},$$

dont φ_1 est solution.

Soit $y = \eta_n + h_n$, $y' = \eta'_n + h'_n$, $\ldots$, $y^{(k)} = \eta_n^{(k)} + h_n^{(k)}$, en supposant que η_n soit une fonction de x qui diffère d'aussi peu qu'on veut de y ainsi que ses dérivées dès que $|x| > \mu$ (μ fini). Prenons pour η_n la fraction $\frac{\varpi_n}{S_n}$; on a

$$\frac{\varpi_n}{S_n} = P_0 + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 \ldots Q_n} = \frac{P_0 Q_1 \ldots Q_n + \ldots + R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n}$$

avec $S_n = Q_1 Q_2 \ldots Q_n$.

Supposons encore que les zéros [1] des polynomes (34) aient tous leurs modules limités supérieurement; prenons μ supérieur à ce module; on a $r_1 < q_1, \ldots, r_n < q_n, \ldots$

$$(36) \qquad h_n = \frac{\varepsilon_{n+1}}{Q_1 \ldots Q_n} = \frac{R_{n+1}}{S_{n+1}} + \ldots = \frac{\gamma_0}{x^{s_{n+1}-r_{n+1}}},$$

si $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = s_n$, $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ finis > 0;

$$h'_n = \frac{R'_{n+1} S_{n+1} - S'_{n+1} R_{n+1}}{S^2_{n+1}} + \ldots$$

est d'ordre plus petit, ainsi que toutes les autres dérivées de h.

On aura alors

$$(37) \left\{ \begin{aligned} & F(x, \eta_n + h_n, \ldots, \eta_n^{(k)} + h_n^{(k)}) \\ & \quad = F(x, \eta_n, \ldots, \eta_n^{(k)}) + (h_n F'_y + \ldots + h_n^{(k)} F'_{y^{(k)}})(1 + \varepsilon) = 0, \end{aligned} \right.$$

ε tendant vers 0 quand $h_n, \ldots, h_n^{(k)}$ tendent vers 0, $|x|$ croissant indéfiniment. On peut assigner à $|\varepsilon|$ une limite supérieure donnée *a priori* aussi petite qu'on veut, pourvu qu'on prenne n et $|x|$ supérieurs à une limite assez grande. Alors

$$(38) \quad |F(x, \eta_n, \ldots, \eta_n^{(k)})| = |(h_n F'_y + \ldots + h_n^{(k)} F'_{y^{(k)}})(1 + \varepsilon)|.$$

Le premier membre est de la forme

$$|\Sigma A \eta_n^{i_0} \ldots \eta_n^{(k) i_k}|.$$

Or $|\eta_n| = \left| \frac{\varpi_n}{S_n} \right|$ est $\geqq \frac{\beta_2}{x^{s_n}}$. On voit sans peine que $|\eta_n^{(l)}|$ [2] est $\geqq \frac{\beta_3}{x^{s_n(l+1)}}$.

Le terme général du premier membre de (38) est alors au moins

---

[1] Si l'on suppose tous les coefficients réels, il suffit de supposer les modules des zéros réels limités et x réel.

[2] $\eta_n^{(l)}$ est $\geqq \frac{\beta_3}{x^{s_n(l+1)}}$; en effet, soit

$$\eta_n^{(l-1)} = \frac{\alpha_{l-1}}{S_n^l}, \qquad \alpha_{l-1} \text{ étant un polynome,}$$

$$\eta_n^{(l)} = \frac{\alpha'_{l-1} S_n^l - l\alpha_{l-1} S_n^{l-1} S'_n}{S_n^{2l}} = \frac{\alpha'_{l-1} S_n - l\alpha_{l-1} S'_n}{S_n^{l+1}} \geqq \frac{\beta_3}{x^{s_n(l+1)}}.$$

égal à

$$\frac{\beta_4}{x^{s_n[i_0+2i_1+\ldots+(k+1)i_k]-\sigma}} = \frac{\beta_4}{x^{s_n(\mathrm{P}+\mathrm{N})-\sigma}},$$

si l'on pose, σ étant fini,

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= i_0 + i_1 + \ldots + i_k, \\ \mathrm{N} &= i_1 + 2i_2 + \ldots + ki_k. \end{aligned}$$

Le deuxième membre de (38), si l'on suppose que φ_1 n'annule pas simultanément F'_y, ..., $\mathrm{F}'_{y^{(k)}}$, est $\leqq \frac{\beta_4}{x^{s_{n+1}-r_{n+1}+\delta}}$ (δ const.). On devra donc avoir, si ϖ est le minimum de $\mathrm{P}+\mathrm{N}$ pour les termes de (1)

$$\frac{\lambda}{x^{s_n\varpi-\sigma}} \leqq |\mathrm{F}(x, \eta_n, \ldots, \eta_n^{(k)})| = |(h\mathrm{F}'_y + \ldots + h_n^{(k)}\mathrm{F}'_{y^{(k)}})(1+\varepsilon)| \leqq \frac{\lambda'}{x^{s_{n+1}-r_{n+1}+\delta}},$$

(39) $$s_{n+1} - r_{n+1} \leqq s_n\varpi + \delta_1 \qquad (\delta_1 \text{ fini}).$$

On pourra toujours, quand q_1, q_2, ..., q_n sont donnés, prendre $q_{n+1} - r_{n+1}$ assez grand pour que cette condition ne soit pas remplie.

Soit, par exemple, $q_n = n!(1+\eta)$, $(0 \leqq \eta \leqq 1)$, $r_n = \eta' n!$ ($\lim \eta' = 0$ pour $n=\infty$, η' étant limité); il suffit qu'on ait

$$(n+1)! > \mu[n! + (n-1)! + \ldots + 1]\varpi$$

(μ limité), ou, *a fortiori*,

$$(n+1)! > \mu[n! + (n-1)!(n-1)]\varpi,$$

ce qui a lieu évidemment pour n assez grand.

Remarque. — Un raisonnement semblable est applicable quand φ_1 annule F'_y, ..., $\mathrm{F}'_{y^{(k)}}$ sans annuler toutes les dérivées successives F'_{y^2}, $\mathrm{F}'_{yy'}$, ... La formule (37) est un peu modifiée.

En effet, supposons d'abord que φ_1 annule toutes les dérivées premières, secondes, etc., de F par rapport à y, y', ... Soit i_k^0 le maximum de i_k, i_{k-1}^0 le maximum de i_{k-1} pour les termes tels que $i_k = i_k^0$, ..., i_0^0 le maximum de i_0 pour les termes tels que $i_k = i_k^0$, $i_{k-1} = i_{k-1}^0$, ..., $i_1 = i_1^0$: ces derniers se réduisent à 1. Soit, par exemple, $i_0^0 = i_1^0 = \ldots = i_f^0 = 0$, avec $i_{f+1} \neq 0$; φ_1 doit annuler la dérivée

$$\frac{\partial^{i_k^0+\ldots+i_{f+1}^0-1} F}{\partial^{(i_k^0)} y^{(k)}\, \partial^{i_{k-1}^0} y^{(k-1)} \ldots \partial^{i_{f+1}^0-1} y^{(f+1)}}$$

qui est de la forme $Ay^{(f+1)} + A_1$. On n'a évidemment pas $A = 0$; si $A_1 = 0$, φ_1 serait un polynome (¹), cas que nous écarterons. Prenant encore une fois la dérivée en $y^{(f+1)}$, on est conduit à un résultat absurde; donc φ_1 n'annule pas toutes les dérivées de F par rapport à y, y', ..., $y^{(k)}$. L'emploi d'une formule analogue à (37) conduira à des conséquences semblables; mais on trouvera pour la limite supérieure du second membre de l'égalité qui remplace (38) une limite supérieure plus avantageuse que celle donnée par (39). Finalement (39) restera vrai dans tous les cas.

Le théorème que nous obtenons ainsi peut s'énoncer comme il suit :

Théorème V. — *Soit la série illimitée*

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{R_1}{Q_1} + \frac{R_2}{Q_1 Q_2} + \ldots + \frac{R_n}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots,$$

P_0, R_1, R_2, ..., R_n, ..., Q_1, Q_2, ..., Q_n, ... *étant des polynomes entiers en* x *de degrés* p_0, r_1, r_2, ..., r_n, ..., q_1, q_2, ..., q_n, ... *respectivement avec* $r_1 < q_1$, ..., $r_n < q_n$, ..., *les zéros réels de* Q_1, Q_2, ..., Q_n, ... *ayant leurs modules limités. Si* φ *est solution d'une équation différentielle rationnelle en* x, y, $\frac{dy}{dx}$, ..., $\frac{d^k y}{dx^k}$, *on doit avoir, dès que n est assez grand,*

$$q_{n+1} \leqq (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\varpi + r_{n+1} + \delta_1$$

(ϖ *entier qui ne dépend que de* k *et des exposants de* y, y', ..., $y^{(k)}$ *dans l'équation en question,* δ_1 *entier fini*).

En particulier, φ *ne peut être solution d'une pareille équation*

(¹) Ce polynome serait de degré $\leqq k-1$. Le théorème V reste évidemment vrai quand φ_1 est une simple fraction rationnelle de la forme (35) avec $R_n \neq 0$, $R_{n+1} = R_{n+2} = \ldots = 0$, n étant assez grand.

quand $q_n = n!(1+\eta)$, *avec* $0 \leq \eta \leq 1$, $r_n = n!\eta'(\lim \eta' = 0$ *pour* $n = \infty)$.

Remarque. — Changeons, dans φ_1 et (1), $\frac{1}{x}$ en $z - z_0$: φ_1 devient le développement en série de fractions rationnelles d'une fonction de $z - z_0$ aux environs du point $z = z_0$; (1) devient une équation différentielle rationnelle d'ordre k en z. Les mêmes considérations restent évidemment applicables : si l'ordre de petitesse des termes successifs de φ_1 aux environs de $z = z_0$ croît suffisamment vite, φ ne peut être solution d'une équation différentielle rationnelle.

Application aux fractions continues illimitées.

Soit la fonction

$$\varphi = R_0 + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{R_2 + \dots}},$$

supposée donnée par son développement en fraction continue illimitée, R_0, R_1, R_2, ... étant des polynomes (¹) à coefficients réels, dont les racines réelles ont un module limité et $\leq \mu$, et tous positifs pour $x > \mu$: les réduites successives étant

$$\frac{P_1}{Q_1}, \quad \frac{P_2}{Q_2}, \quad \frac{P_3}{Q_3}, \quad \dots,$$

on a

$$\psi = \frac{P_1}{Q_1} + \left(\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_1}{Q_1}\right) + \dots + \left(\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right) + \dots,$$

ou

$$(40) \qquad \psi = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{1}{Q_2 Q_3} + \dots + \frac{(-1)^n}{Q_{n-1} Q_n} + \dots.$$

Le dernier membre est une série de fractions rationnelles à laquelle

---

(¹) $\frac{P_n}{Q_n}$ étant irréductible et ayant une valeur finie pour $|x| > \mu$, Q_n n'a aucune racine réelle de module $> \mu$.

on peut appliquer ce qui précède sous certaines conditions ([1]). On a

$$\psi = \frac{P_1}{Q_1} + \frac{1}{Q_1 Q_2} - \frac{Q_1}{Q_1 Q_2 Q_3} + \ldots + \frac{(-1)^n Q_1 \ldots Q_{n-2}}{Q_1 Q_2 \ldots Q_n} + \ldots.$$

Soient encore

$$q_1, \quad q_2, \quad q_3, \quad \ldots, \quad q_n, \quad \ldots$$

les degrés des dénominateurs des réduites; supposon

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-2} < q_n;$$

ψ sera justement de la forme (35) et le théorème précédent sera applicable. Si

$$(41) \quad q_{n+1} > (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\varpi + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} + \delta_1,$$

ce qui entraîne d'ailleurs l'inégalité précédente, ψ ne peut être solution de (1).

On a

$$q_1 < q_2 < \ldots,$$

$$Q_{n+1} = R_n Q_n + Q_{n-1},$$

et

$$q_{n+1} = q_n + r_n,$$

puisque $q_n > q_{n-1}$. Il suffira donc que, pour n assez grand,

$$(42) \quad q_n + r_n > (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)\varpi + q_1 + q_2 + \ldots + q_{n-1} + \delta_1$$

pour que ψ ne soit pas solution d'une équation différentielle rationnelle d'ordre k.

([1]) Nous aurions pu évidemment, au lieu de (35), considérer la forme plus générale de φ_1

$$\varphi_1 = P_0 + \frac{R'_1}{S_1} + \frac{R'_2}{S^2} + \ldots + \frac{R'_n}{S_n} + \ldots,$$

S_{n-1} ne divisant pas forcément S_n et les ordres de petitesse des fractions successives allant en augmentant. Ce qui précède indique suffisamment la marche à suivre.

Ce sera le cas, en particulier, quel que soit k, si l'on prend

$$r_n = n!(1+\eta) \qquad (0 \leqq \eta \leqq 1).$$

En effet, il suffira, d'après (42), qu'on ait

$$n! > (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)(\varpi + 1).$$

Or,

$$\begin{cases} q_n = q_{n-1} + r_{n-1}, \\ q_{n-1} = q_{n-2} + r_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_2 = q_1 \quad + r_1, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned} q_n &= r_{n-1} + r_{n-2} + \ldots + r_1 + q_1, \\ &\leqq 2[(n-1)! + (n-2)! + \ldots + 1] + q_1, \\ &\leqq 2\,(n-1)! + 2\frac{n-2}{n-1}(n-1)! + q_1 \leqq 4(n-1)! \end{aligned}$$

pour n assez grand. Il suffira alors, *a fortiori*, qu'on ait

$$n! > 4\left[(n-1)! + \frac{(n-1)!}{n-1}(n-1)\right](\varpi + 1),$$

ou

$$n! > (n-1)!\,8(\varpi + 1),$$

ce qui a toujours lieu pour une valeur suffisamment grande de n.

Si l'on considère enfin le cas particulier où F, dans (1), est une fonction de x et de y seuls, on aura $k = 0$. On peut améliorer un peu la condition (41) en remarquant que le deuxième membre de (38) est, en réalité, d'ordre au plus égal à celui de $\frac{x^{-\delta}}{Q_n Q_{n+1}}$, c'est-à-dire de l'ordre de $\frac{1}{x^{q_n+q_{n+1}+\delta}}$. D'autre part, l'ordre de $\eta_n = \frac{P_n}{Q_n}$ est $\geqq$ à celui de $\frac{1}{x^{q_n}}$, et celui du premier membre de (38) à celui de $\frac{1}{x^{q_n l_0 - \sigma}}$. (39) peut donc être remplacé par

$$\frac{\lambda_1}{x^{q_n i_0 - \sigma}} \leqq |F(x, y_n)| \leqq \frac{\lambda'_1}{x^{q_n + q_{n+1} - \delta}}$$

(λ_1, λ'_1 constantes finies et > 0), d'où

$$q_n + q_{n+1} \leqq q_n i_0 + \delta_1 \qquad (\delta_1 \text{ fini}),$$

$$q_{n+1} \leqq (q_n - 1)\, i_0 + \delta_1.$$

Or

$$q_{n+1} = q_n + r_n,$$

et, par suite,

$$r_n \leqq (q_n - 2)\, i_0 + \delta_1.$$

Nous obtenons ainsi le corollaire suivant :

Corollaire. — La fraction continue illimitée

$$\psi = R_0 + \cfrac{1}{R_1 + \cfrac{1}{R_2 + \dots}},$$

où R_0, R_1, R_2, ... sont des polynomes en x à coefficients réels de degrés r_0, r_1, r_2, ... respectivement, les modules des racines réelles de ces polynomes étant limités et les coefficients des plus hautes puissances de x tous positifs, ne peut être une solution d'une équation différentielle rationnelle d'ordre k que si

$$q_n + r_n \leqq (q_1 + q_2 + \ldots + q_n)(\varpi + 1),$$

ϖ étant un entier positif qui ne dépend que de k et des exposants de $y, y', \ldots, y^{(k)}$ dans l'équation en question, et $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ les degrés des dénominateurs des réduites successives.

En particulier :

1° On ne peut avoir $r_n = n!\,(1 + \eta)$ $(0 \leqq \eta \leqq 1)$;

2° ψ ne peut être une fonction algébrique que si

$$r_n \leqq i_0 (q_n - 2) + \delta_1,$$

i_0 étant le degré de ψ, δ_1 une constante finie.

Ces résultats sont évidemment, jusqu'à un certain point, des extensions aux fonctions algébriques et aux équations différentielles des résultats indiqués par Liouville pour les solutions des équations algébriques à coefficients entiers.

On voit ainsi qu'il existe une infinité de fonctions, parmi lesquelles au moins les fonctions algébriques et celles définies par les équations différentielles rationnelles qui, développées dans un système de représentation de base quelconque aux environs du point x_0 (du point $x = \infty$), les racines des polynomes de base ayant leurs modules limités, ne peuvent être telles que le terme de rang $n+1$ soit, par rapport au terme précédent, d'un ordre de petitesse supérieur à une certaine limite fonction des degrés des dénominateurs des termes précédents. C'est là un fait aussi remarquable que la propriété correspondante pour les nombres représentés dans un système de numération de base quelconque [1].

VI.

Dans ce qui suit, nous chercherons à étendre les résultats précédents aux équations différentielles rationnelles par rapport à y et ses dérivées et de la forme (4) (§ II), quand les A sont non plus des polynomes, mais des fonctions de la forme

$$(43)\qquad A = \sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{\eta_n a_{n,A}}{x^{\varpi_{n,A}}},$$

$a_{n,A}$ étant fini et $\neq 0$ au moins en général, η_n quelconque, mais $\neq 0$ et ne dépendant pas de A, et $\varpi_{n,A}$ une fonction croissante de n telle que $\varpi_{n,A} - \varpi_{n,A_1}$ soit toujours fini ainsi que $\varpi_{n,A} - \psi_n$.

Nous commencerons par étendre le théorème IV à ces équations différentielles en supposant que $\frac{\psi_{n+1}}{\psi_n}$ croisse indéfiniment avec n.

Nous suivrons à peu près la même marche qu'au § IV.

(1) *Voir* notre Note précitée.

Prenons dans le produit AΠ le terme en $\frac{1}{x}$ d'exposant E'_2 obtenu en formant le produit de $P+1$ termes ayant pour exposants respectifs, à une quantité finie près,

$$\psi_n, \psi_{n+1}, \ldots, \psi_{n+P-1}, \varpi_{n+P,A} = \psi_{n+P} + \rho$$

ρ étant fini.

Ce terme pourra être obtenu de la même manière qu'au § IV, mais en tenant compte du terme $\varpi_{\Delta,A}$ qui entre dans E'_2, et donnant successivement à $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ les valeurs $n, n+1, \ldots, n+P$ dans un ordre quelconque; on aura

$$(44) \qquad E'_2 = \psi_{n+P} + \psi_{n+P-1} + \ldots + \psi_n + \rho_1;$$

le coefficient correspondant sera

$$(45) \qquad B'_2 = \Sigma i_0! \ldots i_k! (-1)^x a_{j_P,A} \eta_{j_P} \theta_{j_{P-1}} \ldots \theta_{j_0} \times \lambda_\sigma \psi_{n+P}^{\sigma_1} \ldots \psi_n^{\sigma_{P+1}}.$$

On a

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_{P+1} = N,$$

λ_σ est fini, positif et limité supérieurement et inférieurement; parmi les quantités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{P+1}$, il y en a i_k égales à k, i_{k-1} à $k-1, \ldots,$ i_1 à 1, i_0+1 à 0, et cela de toutes les manières possibles, $j_P, j_{P-1}, \ldots, j_0$ ont, dans un certain ordre, les valeurs $n+P, n+P-1, \ldots, n$ et l'exposant σ de ψ_{j_P} est 0.

Supposons $P = P''$. Le terme correspondant de degré E'_2 donnera dans AΠ un terme qui ne pourra se réduire qu'avec ceux d'exposants de la forme (12). Ces exposants devront satisfaire à

$$(46) \qquad \omega + \psi_{n+P''} + \psi_{n+P''-1} + \ldots + \psi_n = m_1^0 \psi_\alpha + \ldots + m_{i_k}^k \psi_{\delta_k} + \varpi_{\Delta,A},$$

où ω est fini, et l'on en conclut que le second membre doit être tel, comme le premier, que $P = P''$ et qu'une et une seule des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ soit égale à une des quantités $n, n+1, \ldots, n+P''$. Les termes en question sont ceux que nous avons considérés tout d'abord; leur nombre est limité.

Pour que (11) soit possible, il faudra donc : 1° ou bien que, pour deux des quantités B'_2, on ait $P = P''$, et que leur ordre de grandeur en n soit le même, c'est-à-dire, *a fortiori*, qu'il y en ait deux telles que

$$(47)\quad \left|\eta_{j_{P''}}\theta_{j_{P''-1}}\cdots\theta_{j_0}\psi_{n+P''}^{\sigma_1}\cdots\psi_n^{\sigma_{P''+1}}\right| = \left|\lambda\eta_{l_{P''}}\theta_{l_{P''-1}}\cdots\theta_{l_0}\psi_{n+P''}^{\sigma'_1}\cdots\psi_n^{\sigma'_{P''+1}}\right|,$$

$|\lambda|$ étant fini et limité supérieurement et inférieurement; 2° ou bien que, dans un des coefficients B'_2 au moins, il y ait au moins deux termes d'ordre maximum égal [1], ce qui conduit à la même égalité. Dans le premier cas, les quantités correspondantes $i_k, i_{k-1}, \ldots, i_0$ ne sont pas toutes égales aux quantités $i'_k, i'_{k-1}, \ldots, i'_0$; on le voit comme au § IV. Ce premier cas exigera donc que

$$\left|\eta_{j_{P''}}\theta_{l_{P''}}\psi_{n+P''-\tau+1}^{\sigma_\tau}\cdots\psi_n^{\sigma_{P''+1}}\right| = \left|\lambda\eta_{l_{P''}}\theta_{j_{P''}}\psi_{n+P''-\tau+1}^{\sigma'_\tau}\cdots\psi_n^{\sigma'_{P''+1}}\right|,$$

d'où, si par exemple $\sigma_\tau > \sigma'_\tau$,

$$(48)\qquad \psi_{n+P''-\tau+1} = \left|\lambda\left(\frac{\eta_{l_{P''}}}{\eta_{j_{P''}}}\frac{\theta_{j_{P''}}}{\theta_{l_{P''}}}\right)^{\frac{1}{\sigma_\tau}}\psi_{n+P''-\tau}^{\mu'_{\tau+1}}\cdots\psi_n^{\mu'_{P''+1}}\right|.$$

Dans le second cas, si les deux termes de B'_2 du même ordre sont tels que l'on n'ait pas à la fois $\sigma_1 = \sigma'_1, \ldots, \sigma_{P+1} = \sigma'_{P+1}$, on est encore conduit à (48). Mais, s'il en est différemment, il devra y avoir deux termes de B'_2 pour lesquels $a_{j_A}\eta_{j_{P''}}\theta_{j'_{P''-1}}\ldots\theta_{j_0}$ et $a_{j'_A}\eta_{j'_{P''}}\theta_{j'_{P''-1}}\ldots\theta_{j'_0}$ soient comparables; pour le premier de ces termes, $\psi_{j_{P''}}$ a pour exposant o, et pour le second, $\psi_{j'_{P''}}$ a pour exposant o. Dans le cas où $i_0 = o$, ces deux termes ne pourraient être tels que $\sigma_1 = \sigma'_1$, $\sigma_2 = \sigma'_2, \ldots,$ et le deuxième cas est alors impossible; il en est autrement si l'un des termes pour lesquels $P = P''$ est tel que $i_0 \geqq 1$. Alors, parmi les coefficients $\theta_{j_{P''-1}}, \ldots, \theta_{j_0}$, en nombre P'', il y en a $P'' - 1$ qui figurent dans le second membre de (45); on aura donc finalement, si $\theta_{j_{P''}}$ est celui

---

(1) Encore ce cas doit-il être exclu quand, dans les A, tous les termes à partir du $h^{\text{ième}}$ (h fini) sont de même signe.

qui n'y figure pas,

$$\eta_{i j_{p''}} \theta_{l_{p''}} = \lambda'' \eta_{i j'_{p''}} \theta_{l'_{p''}},$$

avec

$$l_{p''} = j'_{p''}, \qquad l'_{p''} = j_{p''},$$

c'est-à-dire

$$(49) \qquad \eta_{i j_{p''}} \theta_{l_{p''}} = \lambda'' \eta_{i l_{p''}} \theta_{j_{p''}}.$$

Une des conditions (48) et (49) doit finalement avoir lieu.

Dès lors, il n'est pas difficile d'imaginer des cas très étendus où elles n'ont lieu ni l'une ni l'autre : en effet, comme au théorème V, supposons

$$(50) \qquad \psi_{n+1} = \lambda \psi_n^{\mu_n};$$

(48) donne

$$\psi_{n+p''-\tau+1} = \lambda_1 H^{\frac{1}{\sigma_\tau}} \psi_{n+p''-\tau}^{\mu'_{\tau+1}} \cdots \psi_n^{\mu'_{p''-1}},$$

avec

$$H = \left| \frac{\eta_{i l_{p''}} \theta_{j_{p''}}}{\theta_{l_{p''}} \eta_{i j_{p''}}} \right|.$$

La première condition exige

$$\psi_{n+p''-\tau+1} < \lambda_1 H^{\frac{1}{\sigma_\tau}} \psi_{n+p''-\tau}^{\nu} \qquad (\nu \text{ fini} > 0),$$

$$H > \frac{1}{\lambda_2} \psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu)\sigma_\tau}.$$

Elle exige aussi

$$\psi_{n+p''-\tau+1} > \lambda'_1 H^{\frac{1}{\sigma_\tau}} \psi_n^{\nu'} \qquad (\nu' \text{ fini} > 0),$$

$$H < \frac{\psi_{n+p''-\tau+1}^{\sigma_\tau}}{\lambda'_1 \psi_n^{\nu'\sigma_\tau}},$$

ce qui donne finalement

$$(51) \qquad \frac{\psi_{n+p''-\tau+1}^{\sigma_\tau}}{\lambda'_1 \psi_n^{\nu'\sigma_\tau}} > H > \frac{1}{\lambda_2} \psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu)\sigma_\tau},$$

les deux membres extrêmes croissant indéfiniment avec n.

Il suffira que H soit $>$ le premier membre ou $<$ que le dernier, sans que (49) ait lieu, pour qu'il y ait impossibilité. Un cas simple est celui où $\frac{\tau_{i/p''}}{\tau_{i/p''}}$ reste limité; il suffira que le rapport $\frac{\theta_{J_{p''}}}{\theta_{I_{p''}}}$ ne reste pas limité quand n croît indéfiniment pour que (49) n'ait pas lieu. Supposons, par exemple, que $\left|\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\right|$ tende vers zéro en décroissant quand n croît indéfiniment; on a

$$\left|\frac{\theta_{J_{p''}}}{\theta_{I_{p''}}}\right| \leqq \left|\frac{\theta_n}{\theta_{n+p''}}\right|.$$

(51) donne

$$\psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu)^{\sigma_\tau}} < \left|\mathrm{A}\frac{\theta_n}{\theta_{n+p''}}\right| < \psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu_1)^{\sigma_\tau}} \qquad (\mathrm{A}, \nu_1 \text{ finis}).$$

Il faudra, *a fortiori*,

$$\left|\mathrm{A}\frac{\theta_n}{\theta_{n+1}}\right| < \psi_{n+p''-\tau}^{(\mu_{n+p''-\tau}-\nu_1)^{\sigma_\tau}} < \psi_n^{(2\mu_{n+p''-\tau})^{\rho}} \qquad (\rho \text{ fini}),$$

ce qui exigera

$$|\theta_{n+1}| > \frac{\mathrm{A}\,|\theta_n|}{\psi_n^{(2\mu_{n+p''-\tau})^{\rho}}}.$$

On sera donc sûr d'un cas d'impossibilité quand

$$|\theta_{n+1}| < \frac{\mathrm{A}\,|\theta_n|}{\psi_n^{(\mu_{n+\nu_n})^{\rho_n}}}$$

(μ_n, ν_n et ρ_n fonctions croissantes de n).

Il faudra encore

$$\left|\frac{\theta_{n+p''-1}}{\theta_{n+p''}}\right|^{p''} > \left|\frac{\theta_n}{\theta_{n+p''}}\right| > \frac{1}{\mathrm{A}}\psi_{n+p''-\tau}^{\mu''_n},$$

$$\left|\frac{\theta_{n+p''-1}}{\theta_{n+p''}}\right| > \frac{1}{\lambda_3}\psi_{n+p''-\tau}^{\frac{\mu''_n}{p''}},$$

$$|\theta_{n+p''}| < \lambda_3|\theta_{n+p''-1}|\,\psi_{n+p''-\tau}^{-\frac{\mu''_n}{p''}} < |\theta_{n+p''-1}|\,\psi_n^{-\frac{\mu_n}{\omega_1}} \qquad (\omega_1 \text{ const.}).$$

On sera encore sûr d'un cas d'impossibilité si

$$|\theta_{n+P''}| > \frac{|\theta_{n+P''-1}|}{\psi_n^M} \qquad (\text{M fini} > 0).$$

Nous résumerons les résultats les plus nets de la discussion précédente dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME VI. — *Soit la série illimitée*

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots$$

où, pour n assez grand, $\left|\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n}\right|$ *décroît en tendant vers* o *quand n croît indéfiniment et où* $\psi_{n+1} = \lambda\psi_n^{\mu_n}$ *(*μ_n *étant une fonction croissante de n qui croît indéfiniment avec n, et* λ *une quantité finie* > 0 *et limitée supérieurement et inférieurement, qui peut varier avec n).*

Soit encore l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A y^{i_0}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{i_1}\cdots\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k},$$

d'ordre k, où les A *sont des séries de la forme* $\sum_1^\infty{}_n \frac{\eta_n a_{n\Lambda}}{x^{\varpi_{n\Lambda}}}$ *(*$|a_{n\Lambda}|$ *fini et* $\neq 0$*, au moins en général;* η_n *quelconque,* $\neq 0$*, ne dépendant pas de* A *et tel que* $\lim\left|\frac{\eta_{n+1}}{\eta_n}\right|$ *soit fini; et* $\varpi_{n\Lambda}$ *une fonction croissante de n telle que* $\varpi_{n\Lambda} - \varpi_{n\Lambda_1}$ *soit toujours fini ainsi que* $\varpi_{n\Lambda} - \psi_n$*).*

φ *ne peut être solution de* $F = 0$:

1° *Quand*

$$A|\theta_n| > \theta_{n+1}\psi_n^{(\mu_n+\nu)\rho_n}$$

*(*A *fini,* μ_n, ν_n, ρ_n *croissant indéfiniment avec n);*

2° *Quand*

$$|\theta_{n+P''}| > \frac{|\theta_{n+P''-1}|}{\psi_n^M} \qquad (\text{M } \textit{fini} > 0),$$

si P″ *est le maximum de* $i_0 + i_1 + \ldots + i_k$.

VII.

On peut encore étendre aux équations différentielles de la forme indiquée au § VI les théorèmes I et III (§ II et III).

Nous n'entrerons pas dans le détail en ce qui concerne le théorème semblable au théorème I; la démonstration est presque la même; on obtient ainsi :

THÉORÈME VII. — *Tout étant posé comme au théorème précédent* (*les conditions* $\psi_{n+1} = \lambda\psi_n^{\mu_n}$ *et* $\lim \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n}$ *finies étant laissées de côté*), *les conclusions du théorème* I *subsistent pourvu toutefois que*

$$|\theta_n| < \lambda|\eta_n\psi_n| \qquad (\lambda \textit{ fini} > 0)$$

dans les cas IV *et* V. *On a des résultats presque analogues quand*

$$\varpi_{n\Lambda} = \psi_n(1+\eta)\,(\lim \eta = 0 \textit{ pour } n = \infty).$$

Nous croyons utile néanmoins de donner la démonstration du théorème analogue au théorème III.

Opérons comme au § III. Soit $\psi_{n+1} - \psi_n \geqq 1$, et $\varpi_{n,\Lambda} - \psi_n$ fini et $\leqq R$ en valeur absolue, R étant fini et limité.

Cherchons les termes du deuxième membre de (4) pour lesquels (12) (§ I) a lieu en supposant immédiatement $P' = P''$, c'est-à-dire tels que

$$(15\,bis)\qquad P''\psi_n + \varpi_{n,\Lambda} = m_1^0\psi_\alpha + \ldots + m_{i_k}^k\psi_{\delta_k} + \varpi_{\Delta,\Lambda} + \omega.$$

On en déduit encore

$$(16\,bis)\qquad P''\psi_n + \varpi_{n,\Lambda} \geqq \psi_\beta + \omega \qquad \text{et} \qquad \geqq \varpi_{\Delta,\Lambda} + \omega;$$

par suite

$$(P''+1)\psi_n \geqq \psi_\beta + \omega' \qquad \text{et} \qquad \geqq \varpi_{\Delta,A} + \omega',$$

(17 *bis*) $$\beta \leqq \chi_n, \qquad \Delta \leqq \chi_n,$$

χ_n étant une fonction croissante de n.

Pour toute valeur de $P'' = m_1^0 + \ldots + m_{j_k}^k$, on a comme limite supérieure du nombre des solutions de (15 *bis*) $\chi_n^{1+P''}$. On a encore au plus $\sigma\chi_n^{1+P''}$ termes B correspondants, σ étant fini.

Par hypothèse

$$m_1^0 + \ldots + m_{j_k}^k \leqq P''.$$

Si toutes les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ sont $\leqq n$, (15 *bis*) est impossible à moins que

(19 *bis*) $$m_1^0 + \ldots + m_{j_k}^k = P''.$$

Les coefficients B de (11) se divisent en deux catégories : ceux pour lesquels (19 *bis*) a lieu, et $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ sont $\leqq n$; ceux pour lesquels une au moins des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ est $> n$.

Considérons la première catégorie de termes : s'il n'y a qu'un terme de (1) pour lequel $P = P''$, les termes de la première catégorie se réduisent à un pour n assez grand (cas où F est un polynome entier en y, où F ne contient qu'une seule des quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$, où F satisfait aux conditions du cas IV du théorème III. On peut prendre alors $\psi_n = n + \nu$, $\varpi_{n,A} = n + \nu'_A$, $\chi_n = (1 + P'')n + \rho_1$ (ρ_1 fini).

Plus généralement, même si l'on a deux termes, tels que $P = P''$, une des quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ ne pourrait être $< n$ dès que $\psi_n - \psi_{n-1}$ surpasse une quantité finie fonction de N, R et des $i_0, \ldots, i_k$. Quand ceci a lieu, supposons les quantités $\alpha, \ldots, \delta_k, \Delta$ égales à n. On a

$$m_1^0 + \ldots + m_{j_k}^k = P'';$$

les termes B correspondants sont de l'ordre de grandeur de $\eta_n \theta_n^{P''} \psi_n^{N'}$; leur nombre est limité. Si, parmi eux, on n'en a qu'un pour lequel $N' = N''$, la somme des modules des autres est d'ordre inférieur à celui de $\eta_n \theta_n^{P''} \psi_n^{N''}$.

Dans tous ces cas, même si la première catégorie comprend plus d'un terme, l'ensemble de ses termes donne dans au moins une relation analogue à (11) une somme dont le module est de l'ordre de

$$\eta_n \theta_n^{P'''} \psi_n^{N''}.$$

Supposons qu'il en soit ainsi.

Considérons l'ensemble des termes B de la deuxième catégorie : il faudra que la somme des modules de ces termes, chacun multiplié par un facteur constant positif et limité, soit au moins de l'ordre de grandeur de $\eta_n \theta_n^{P'''} \psi_n^{N''}$, c'est-à-dire *a fortiori* que

$$(21\ bis) \qquad |\eta_n \theta_n^{P'''} \psi_n^{N''}| \leqq \lambda_2 \Sigma |\eta_\Delta \theta_\alpha^{m'''^0_1} \ldots \theta_{\delta_k}^{m'''^k_{i_k}} \psi_\alpha^{m'''^0_1} \ldots \psi_{\delta_k}^{k m'''^k_{i_k}}|,$$

la somme Σ s'étendant à tous les termes B de la deuxième catégorie.

Nous décomposerons ces termes en trois sous-catégories :

1° Ceux pour lesquels $\Delta > n$ et une des quantités α est $> n$: leur nombre est $\leqq \sigma_1 \chi_n^{P'''+1}$; chaque terme a son module

$$\leqq \tau_1 |\eta_{n+1} \theta_{n+1}| \, |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1},$$

N_1 étant le maximum des quantités N ;

2° Ceux pour lesquels $\Delta > n$ sans que ceci ait lieu : leur nombre est $\leqq \sigma_2 n^{P'''} \chi_n$; chaque terme a son module

$$\leqq \tau_2 |\eta_{n+1}| \, |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1};$$

3° Ceux pour lesquels $\Delta < n$; leur nombre est $\leqq \sigma_3 n \chi_n^{P'''}$; chaque terme a son module $\leqq \tau_3 |\theta_{n+1}| \, |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1}$. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ sont finis.

(21 *bis*) donne alors

$$|\eta_n \theta_n^{P'''} \psi_n^{N''}| \leqq \sigma_1 |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1} \{ |\eta_{n+1} \theta_{n+1} \chi_n^{1+P'''}| \\ + |\eta_{n+1} n^{P'''} \chi_n| + |\theta_{n+1} n \chi_n^{P'''}| \}.$$

Sans discuter en détail cette inégalité, on en conclut de suite

$$|\eta_n \theta_n^{P'''} \psi_n^{N''}| \leqq |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1} \{ |\eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}| + |\eta_{n+1} \theta_{n+1}| \} \sigma_4 \chi_n^{1+P'''},$$

car $\chi_n > n$, ou encore

$$|\eta_n \theta_n^{\mu''} \psi_n^{N''}| \leqq 2\sigma_4 \chi_n^{1+\mu''} \{|\eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}|\} |(1 + P'')\psi_n + \nu_1|^{N_1}.$$

On sera donc conduit à une impossibilité quand

$$(23\ bis) \qquad |\eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}| < \frac{\eta_n \theta_n^{\mu''}}{\sigma_5 \chi_n^{1+\mu''} \psi_n^{\nu'}},$$

ν' étant $\geqq N_1$.

Dans le cas où F est un polynome entier par rapport à l'une des quantités $y, y', \ldots, y^{(k)}$ et ne contient pas les autres, ou aussi quand F remplit les conditions du cas IV du théorème III, on peut encore prendre $\psi_n = n + \nu'_1$. On en conclut, en particulier, que (23 *bis*) a lieu quand $\eta_n \zeta^{n^{\nu'}}$ et $\theta_n \zeta^{n^{\nu'}}$ sont de la forme $1 + \eta$ $(\lim_{n=\infty} \eta = 0)$, car

$$2\zeta^{-(n+1)^{\nu'}} < \frac{\zeta^{-n^{\nu'}(1+\mu'')}}{n^{\mu}} \quad (\mu \text{ limité}, \zeta > 1).$$

Dans tous les cas considérés à la page 54, supposons que $\psi_n = n^m$; (23 *bis*) a encore lieu quand $\eta_n \zeta^{n^{\nu'}}$ et $\theta_n \zeta^{n^{\nu'}}$ sont de la forme $1 + \eta$.

Enfin on conclut de ce qui précède une condition analogue à la condition C' du § III, et ce théorème :

Théorème VIII. — *Soit la série illimitée*

$$\varphi = \frac{\theta_1}{x^{\psi_1}} + \ldots + \frac{\theta_n}{x^{\psi_n}} + \ldots,$$

où ψ_n est une fonction croissante de n qui peut être négative pour les valeurs de n inférieures à une limite finie, $\psi_{n+1} - \psi_n$ croissant indéfiniment avec n.

Soit encore

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^k y}{dx^k}\right) = \sum A y^{i_0} \left(\frac{dy}{dx}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)^{i_k},$$

une équation différentielle rationnelle en y et ses dérivées, les $A(x)$ étant des fonctions de la forme $\sum \frac{\gamma_n a_{n\lambda}}{x^{\varpi_{n\lambda}}}$, qui ne peuvent différer *que par les valeurs des $a_{n\lambda}$ et des $\varpi_{n\lambda}$, les η_n étant quelconques, mais $\neq 0$ et ne dépendant pas de λ, les $a_{n\lambda}$ limités supérieurement et inférieurement et $\neq 0$ en général, et $\varpi_{n\lambda}$ une fonction croissante de n telle que $\varpi_{n\lambda} - \psi_n \leqq R$, R étant limité quel que soit* A.

Si ξ_n est une certaine fonction croissante de n qui dépend de ψ_n, et si l'on a

$$(25\ bis) \qquad |\eta_{n+1}| + |\theta_{n+1}| < \frac{|\eta_n \theta_n^\nu|}{\xi_n^{\nu}},$$

quelle que soit la constante ν, φ ne peut être solution de $F = 0$:

I. — *Quand* F *est algébrique par rapport à une des quantités $y, y', \ldots, y^k$ et ne contient pas les autres, ou est du premier ordre;*

II. — *Quand* F *est linéaire par rapport aux dérivées de y;*

III. — *Dans les cas indiqués aux cas IV et V du théorème III.*

Si $\eta_n = \zeta^{-n^m}(1 + \eta)$, $\theta_n = \zeta^{-n^m}(1 + \eta')$ $(\zeta > 1$, $\lim \eta = 0$, $\lim \eta' = 0$ *pour* $n = \infty)$, *et* $\psi_n = n^m$ $(m > 1)$, *la condition* (25 *bis*) *a toujours lieu.*

Les propriétés I et IV du théorème III restent vraies quand $\psi_{n+1} - \psi_n$ est fini et $\leqq 1$. Elles sont applicables à φ quand η_n et θ_n ont les valeurs ci-dessus [1].

---

[1] La lecture de notre Mémoire exige seulement la connaissance du Cours d'Analyse de l'École Polytechnique et des Éléments de la Théorie des fractions continues algébriques.

On pourra rapprocher les résultats de notre Mémoire d'une question posée par M. Autonne dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1894, p. 90, et 1899, p. 25.