JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ARISTIDE ZOUKIS

Sur l'hexacoryphe complet

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 135-168.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__135_0>

Sur l'hexacoryphe (¹) *complet;*

PAR M. ARISTIDE ZOUKIS.

Dans le présent Travail nous nous occupons de l'hexacoryphe complet. En considérant les quinze arêtes de l'hexacoryphe et les quinze surfaces du second degré S^2 ayant pour directrices trois de ces droites, nous démontrons diverses propriétés de ces surfaces et, entre autres, cette propriété remarquable que ces surfaces, prises trois à trois de vingt manières différentes, passent par une même biquadratique. Ces vingt biquadratiques se rangent en dix couples et les courbes de chacun de ces couples constituent le lieu géométrique des points dont on peut projeter, sur un plan quelconque, comme trois fois homologues dans l'un ou l'autre de deux manières possibles, les deux triangles d'un des dix couples, qui, ayant pour sommets les six sommets de l'hexacoryphe, se trouvent situés sur deux de ces faces opposées.

En considérant ensuite les quarante-cinq cubiques suivant lesquelles se coupent, deux à deux, les quinze surfaces S^2, quand elles ont une directrice commune, nous sommes amenés à la considération de quarante-cinq nouvelles surfaces Σ^2 du second degré formant entre elles et avec les quinze surfaces S^2 certaines configurations remarquables.

Les équations des quinze surfaces S^2 et des quarante-cinq surfaces Σ^2

(¹) ἕξ ≡ six, κορυφή ≡ sommet.

sont données au moyen des dix polynomes du second degré qui, égalés à zéro, représentent les divers couples des faces opposées de l'hexacoryphe. Ces dix polynomes sont liés entre eux par certaines identités dont l'importance est capitale pour l'étude que nous faisons ([1]).

Enfin nous considérons quelques surfaces du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe et qui font une configuration semblable à celle des couples des faces opposées de l'hexacoryphe des surfaces S^2 et des surfaces Σ^2.

Quelques-unes de ces surfaces ont, parmi d'autres propriétés, celle d'avoir leurs points associés en couples. Les droites déterminées par ces couples de points rencontrent toutes suivant deux points la cubique déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe. Cette propriété établie, nous trouvons diverses distributions des droites de cette congruence en génératrices de surfaces du deuxième, du quatrième, jusqu'au dix-huitième degré.

I.

1. Soient dans l'espace 1, 2, 3, 4, 5, 6 les six sommets d'un hexacoryphe complet et D_{12}, D_{13}, ... les quinze droites qui joignent ces sommets deux à deux. Trois droites D_{ij}, D_{kl}, D_{mn} n'ayant aucun indice commun déterminent un hyperboloïde $S^2_{ij,kl,mn}$ contenant ces droites. Il y a en tout quinze surfaces pareilles.

Les quinze droites D peuvent se ranger en six pentades (groupes de cinq) 1, 2, 3, 4, 5, 6, dont chacune contient les cinq droites qui passent par un même sommet de l'hexacoryphe.

Chaque surface $S^2_{ij,kl,mn}$ contient une droite de chacune de ces pentades.

De même les quinze surfaces $S^2_{ij,kl,mn}$ se rangent en six pentades telles que les surfaces de chaque pentade passent par toutes les quinze droites D.

([1]) Des identités analogues existent entre les polynomes qui, égalés à zéro, représentent les couples des faces opposés à $n-1$ dimensions de la figure complète ayant pour sommets $2n$ points d'un espace à n dimensions.

Nous désignons ces pentades par les indices I, II, III, IV, V, VI. Chacune des quinze surfaces $S^2_{ij,kl,mn}$ appartient à deux pentades et peut être aussi représentée par le couple d'indices de ces deux pentades.

Nous aurons ainsi :

I.	II.	III.
$S^2_{\mathrm{I\,II}} \equiv S^2_{12,34,56}$	$S^2_{\mathrm{I\,II}} \equiv S^2_{12,34,56}$	$S^2_{\mathrm{I\,III}} \equiv S^2_{13,25,46}$
$S^2_{\mathrm{I\,III}} \equiv S^2_{13,25,46}$	$S^2_{\mathrm{II\,III}} \equiv S^2_{16,24,35}$	$S^2_{\mathrm{II\,III}} \equiv S^2_{16,24,35}$
$S^2_{\mathrm{I\,IV}} \equiv S^2_{14,26,35}$	$S^2_{\mathrm{II\,IV}} \equiv S^2_{15,23,46}$	$S^2_{\mathrm{III\,IV}} \equiv S^2_{12,36,45}$
$S^2_{\mathrm{I\,V}} \equiv S^2_{15,24,36}$	$S^2_{\mathrm{II\,V}} \equiv S^2_{13,26,45}$	$S^2_{\mathrm{III\,V}} \equiv S^2_{14,23,56}$
$S^2_{\mathrm{I\,VI}} \equiv S^2_{16,23,45}$	$S^2_{\mathrm{II\,VI}} \equiv S^2_{14,25,36}$	$S^2_{\mathrm{III\,VI}} \equiv S^2_{15,26,34}$

IV.	V.	VI.
$S^2_{\mathrm{I\,IV}} \equiv S^2_{14,26,35}$	$S^2_{\mathrm{I\,V}} \equiv S^2_{15,24,36}$	$S^2_{\mathrm{I\,VI}} \equiv S^2_{16,23,45}$
$S^2_{\mathrm{II\,IV}} \equiv S^2_{15,23,46}$	$S^2_{\mathrm{II\,V}} \equiv S^2_{13,26,45}$	$S^2_{\mathrm{II\,VI}} \equiv S^2_{14,25,36}$
$S^2_{\mathrm{III\,IV}} \equiv S^2_{12,36,45}$	$S^2_{\mathrm{III\,V}} \equiv S^2_{14,23,56}$	$S^2_{\mathrm{III\,VI}} \equiv S^2_{15,26,34}$
$S^2_{\mathrm{IV\,V}} \equiv S^2_{16,25,34}$	$S^2_{\mathrm{IV\,V}} \equiv S^2_{16,25,34}$	$S^2_{\mathrm{IV\,VI}} \equiv S^2_{13,24,56}$
$S^2_{\mathrm{IV\,VI}} \equiv S^2_{13,24,56}$	$S^2_{\mathrm{V\,VI}} \equiv S^2_{12,35,46}$	$S^2_{\mathrm{V\,VI}} \equiv S^2_{12,35,46}$

De même que trois droites D n'ayant aucun indice en commun se trouvent sur une surface S^2, de même trois surfaces S^2 n'ayant aucun indice en commun passent par une droite D. Cette droite peut être représentée par l'ensemble des indices de ces trois surfaces. Ainsi la droite D_{12} peut être aussi représentée par le symbole $D_{\mathrm{I\,II},\,\mathrm{III\,IV},\,\mathrm{V\,VI}}$, $S^2_{\mathrm{I\,II}}$, $S^2_{\mathrm{III\,IV}}$, $S^2_{\mathrm{V\,VI}}$ étant les trois surfaces qui passent par cette droite.

2. Deux surfaces S^2_{IJ}, S^2_{IK} (¹) ayant un indice commun n'ont aucune droite commune et se coupent suivant une biquadratique.

Deux surfaces S^2_{IJ}, S^2_{KL}, qui n'ont aucun indice commun, passent par une même droite D qui est la droite $D_{\mathrm{IJ},\,\mathrm{KL},\,\mathrm{MN}}$.

Trois surfaces S^2_{IJ}, S^2_{JK}, S^2_{KI}, dont les symboles ne contiennent que trois indices I, J, K, ont pour directrices les neuf droites D qui joignent trois sommets de l'hexacoryphe avec les trois autres sommets.

(¹) Nous ferons usage des lettres i, j, k, l, m, n pour indiquer une permutation quelconque des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, et des lettres I, J, K, L, M, N pour indiquer une permutation quelconque des indices I, II, III, IV, V, VI.

Ainsi, par exemple, sur les surfaces $S^2_{I\,II}$, $S^2_{II,\,III}$, $S^2_{III,\,I}$ se trouvent les neuf droites qui joignent les points 1, 4, 5 avec les points 2, 3, 6.

3. La surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,\,kl,\,mn}$ est le lieu des points p d'où se projettent homologiquement sur un plan quelconque les deux triangles de chacun des quatre couples :

$$ikm \text{ et } jln, \quad ikn \text{ et } jlm, \quad ilm \text{ et } jkn, \quad iln \text{ et } jkm.$$

Le centre commun de ces quatre homologies se trouve sur la droite de la surface $S^2_{ij,\,kl,\,mn}$ passant en p et appuyée sur les trois droites D_{ij}, D_{kl}, D_{mn}.

Considérons une seconde surface $S^2_{JK} \equiv S^2_{il,\,kn,\,jm}$ ayant un indice commun avec la surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,\,kl,\,mn}$, c'est-à-dire (nº **2**) n'ayant aucune directrice commune avec elle. Cette nouvelle surface est aussi le lieu des points par lesquels, sur un plan quelconque, les deux triangles ikm et jln, du premier seulement des quatre couples précédents, se projettent homologues avec sommets correspondants les (il), (kn), (mj).

Par conséquent, de tous les points de la biquadratique suivant laquelle (nº **2**) se coupent les deux surfaces S^2_{IJ}, S^2_{JK}, les deux triangles ikm et jln se projettent, sur un plan quelconque, de deux manières homologues. Puisque maintenant, dans ces deux homologies, aux projections des points i, k, m correspondent respectivement dans l'une les projections des points j, l, n, et dans l'autre les projections des points l, n, j, il s'ensuit que les projections de ces deux triangles seront aussi, d'une troisième manière, homologues de telle sorte qu'aux projections des points i, k, m correspondent respectivement les projections des points n, j, l. On déduit de là que tous les points de la ligne d'intersection des deux surfaces $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,\,kl,\,mn}$, $S^2_{JK} \equiv S^2_{il,\,kn,\,mj}$ se trouvent sur la surface $S^2_{in,\,jk,\,lm}$, qui, d'après le nº **2**, a aussi pour symbole S^2_{JK}. On parvient ainsi à la proposition suivante :

Trois surfaces représentées par des symboles de la forme S^2_{IJ}, S^2_{JK}, S^2_{KI} passent par une même biquadratique C_{IJK}.

Nous avons vingt telles biquadratiques qui se rangent en dix couples (C_{IJK}, C_{LMN}).

4. Si nous écrivons les neuf directrices des trois surfaces

$$S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}, \quad S^2_{JK} \equiv S^2_{il,kn,mj}, \quad S^2_{KI} \equiv S^2_{in,jk,ml}$$

qui passent par la biquadratique C_{IJK}, comme élément d'un déterminant du troisième ordre

$$\begin{vmatrix} D_{ij}, & D_{kl}, & D_{mn} \\ D_{kn}, & D_{mj}, & D_{il} \\ D_{ml}, & D_{in}, & D_{kj} \end{vmatrix},$$

en posant dans chaque ligne horizontale les trois directrices d'une même surface de manière que dans chaque ligne verticale ne se trouve pas le même indice plus d'une fois, nous pouvons remarquer :

α. Que ces droites prises trois à trois, quand elles se trouvent dans la même ligne verticale, sont les directrices des trois autres surfaces $S^2_{ij,kn,ml}$, $S^2_{kl,jm,in}$ et $S^2_{mn,il,kj}$, lesquelles ayant une droite commune avec chacune des trois premières surfaces, ont pour symboles (n° **2**) S^2_{LM}, S^2_{MN}, S^2_{NL} et passent toutes (n° **3**) par la biquadratique C_{LMN} accouplée à C_{IJK};

β. Que par tous les points de cette biquadratique C_{LMN}, sur un plan quelconque, se projettent de trois manières homologues, dans l'un des deux cas possibles, les mêmes deux triangles *ikm* et *jln*;

γ. Que seulement les deux biquadratiques C_{IJK}, C_{LMN} ont cette dernière propriété.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Les couples de biquadratiques C correspondent aux divers couples des faces opposées de l'hexacoryphe et les deux courbes de chaque couple sont le lieu des points par lesquels les deux triangles situés sur les deux faces opposées de l'hexacoryphe qui forment le couple correspondant se projettent, sur un plan quelconque, de trois manières homologues dans l'un ou dans l'autre de deux cas possibles.

Cela posé, nous pouvons représenter le couple des biquadratiques C_{IJK} et C_{LMN}, soit par le symbole $C_{(IJK)(LMN)}$, soit par le symbole $C_{(ikm)(jln)}$, F_{ikm} et F_{jln} étant le couple correspondant des faces opposées de l'hexacoryphe.

Ces nouveaux symboles de couples des biquadratiques C, d'après les indices donnés (n° 1) aux six pentades des surfaces S^2, sont

$$\begin{array}{ll}
(123)(456) \equiv (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI}), & (124)(356) \equiv (\mathrm{I\,III\,VI})(\mathrm{II\,IV\,V}),\\
(125)(346) \equiv (\mathrm{I\,IV\,VI})(\mathrm{II\,III\,V}), & (126)(345) \equiv (\mathrm{I\,III\,V})(\mathrm{II\,IV\,VI}),\\
(134)(256) \equiv (\mathrm{I\,V\,VI})(\mathrm{II\,III\,IV}), & (135)(246) \equiv (\mathrm{I\,II\,VI})(\mathrm{III\,IV\,V}),\\
(136)(245) \equiv (\mathrm{I\,II\,IV})(\mathrm{III\,V\,VI}), & (145)(236) \equiv (\mathrm{I\,II\,III})(\mathrm{IV\,V\,VI}),\\
(146)(235) \equiv (\mathrm{I\,II\,V})(\mathrm{III\,IV\,VI}), & (156)(234) \equiv (\mathrm{I\,III\,IV})(\mathrm{II\,V\,VI}).
\end{array}$$

5. Sur chaque surface S^2 en dehors de ces trois directrices D se trouvent six autres droites G passant respectivement par les six sommets de l'hexacoryphe. Ainsi, la surface $S^2_{ij,kl,mn}$ contient les six droites qui constituent les intersections des faces

$$\begin{array}{lll}
F_{ikl} \text{ et } F_{imn}, & F_{jkl} \text{ et } F_{jmn}, & F_{kij} \text{ et } F_{kmn},\\
F_{lij} \text{ et } F_{lmn}, & F_{mij} \text{ et } F_{mkl}, & F_{nij} \text{ et } F_{nkl}.
\end{array}$$

Nous pouvons représenter ces droites respectivement par les symboles

$$G_{i(kl,mn)},\quad G_{j(kl,mn)},\quad G_{k(mn,ij)},\quad G_{l(mn,ij)},\quad G_{m(ij,kl)},\quad G_{n(ij,kl)}.$$

Il y a $15.6 = 90$ pareilles droites que nous distinguons par le nom de *génératrices des surfaces* S^2. Ces 90 droites se rangent en 45 couples $(G_{i(kl,mn)}, G_{j(kl,mn)})$ qui correspondent aux 45 couples (D_{kl}, D_{mn}) des droites D qui n'ont aucun indice en commun.

6. Deux surfaces S^2_{IJ}, S^2_{KL} n'ayant aucun indice en commun se coupent suivant une droite D (n° 2) et une cubique passant par quatre sommets de l'hexacoryphe. Nous avons $\frac{15.6}{2} = 45$ telles cubiques et nous les représentons, par exemple celle par laquelle passent les deux surfaces $S^2_{\mathrm{I\,II}} \equiv S^2_{12,34,56}$ et $S^2_{\mathrm{III\,IV}} \equiv S^2_{13,24,56}$, soit par le symbole $C_{\mathrm{I\,II},\,\mathrm{III\,IV}}$, soit par le symbole $C_{14,23}$.

7. Par la ligne d'intersection des deux surfaces $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$ et $S^2_{KL} \equiv S^2_{ik,jl,mn}$, qui se compose de la droite D_{mn} et de la cubique $C_{IJ,KL} \equiv C_{il,jk}$, passent deux surfaces Σ^2 du second degré dont chacune coupe suivant quatre droites la troisième surface $S^2_{MN} \equiv S^2_{il,jk,mn}$ qui passe par la même droite D_{mn}, c'est-à-dire la première suivant les deux directrices D_{mn} et D_{il} et le couple correspondant (n° 5) des génératrices $(G_{j(il,mn)}, G_{k(il,mn)})$, et la seconde suivant les deux directrices D_{mn}, D_{jk} et le couple correspondant des génératrices

$$(G_{i(mn,jk)}, G_{l(mn,jk)}).$$

Nous représenterons ces deux surfaces par des symboles tels que

(1) $$\Sigma^2_{il,mn} \equiv \Sigma^2_{IK,JL} \quad \text{et} \quad \Sigma^2_{jk,mn} \equiv \Sigma^2_{IL,JK}.$$

Chacune de ces deux surfaces passe encore par une autre cubique C, c'est-à-dire la première par la cubique $C_{jk,mn} \equiv C_{IL,JK}$ et la seconde par la cubique $C_{il,mn} \equiv C_{IK,JL}$. De même donc que par la cubique $C_{IJ,KL} \equiv C_{il,jk}$ passent les deux surfaces (1), de même la surface $\Sigma^2_{IJ,KL} \equiv \Sigma^2_{il,jk}$ passe par les deux cubiques C ayant les mêmes indices.

Nous avons 45 telles surfaces Σ^2. Ces surfaces trois à trois, représentées par des symboles de la forme

(2) $$\Sigma^2_{ij,kl} \equiv \Sigma^2_{KL,MN}, \quad \Sigma^2_{kl,mn} \equiv \Sigma^2_{KM,LN}, \quad \Sigma^2_{mn,ij} \equiv \Sigma^2_{KN,LM},$$

rencontrent chacune suivant quatre droites la surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$.

Deux à deux, les trois surfaces Σ^2 de chacun de ces quinze triples se coupent suivant les 45 cubiques C.

Les 45 cubiques C correspondent aux 45 surfaces Σ^2 et la cubique $C_{ij,kl} \equiv C_{KL,MN}$ qui correspond à la surface $\Sigma^2_{ij,kl} \equiv \Sigma^2_{KL,MN}$ est l'intersection de deux surfaces Σ^2 qui, avec la surface considérée, forment le triple (2).

8. Si nous considérons un des six groupes I, II, III, IV, V, VI des surfaces S^2 (n° **1**), trois quelconques de ces surfaces, par exemple les surfaces S^2_{KL}, S^2_{KM}, S^2_{KN} du groupe K, ne passent pas par une même courbe, mais elles se coupent en deux points P différents des sommets de l'hexacoryphe que nous représenterons par le symbole P_{KLMN}.

Par ces deux points passent les trois biquadratiques C_{KLM}, C_{KMN}, C_{KLN} suivant lesquelles se coupent, prises deux à deux (n° 3), les trois surfaces S^2_{KL}, S^2_{KM}, S^2_{KN}. Par conséquent, par ces mêmes points passent aussi les trois surfaces S^2_{LM}, S^2_{MN}, S^2_{NL} et la biquadratique C_{LMN}, suivant laquelle elles se coupent.

Nous avons quinze tels couples de points P correspondant aux quinze surfaces S^2; le couple P_{KLMN} correspond à la surface S^2_{IJ}.

Sur chaque surface S^2 se trouvent six couples de points P, et trois couples de ces points se trouvent sur chaque biquadratique C. Les quatre biquadratiques qui forment couples avec les quatre biquadratiques qui passent par le couple des points P_{KLMN} sont celles par lesquelles passe la surface S^2_{IJ}. Ces quatre biquadratiques se coupent deux à deux suivant les six couples des points P situés sur cette surface S^2_{IJ}.

Les six surfaces S^2 qui passent par le couple de points P_{KLMN} se coupent aussi, prises deux à deux, comme il suit :

$$S^2_{KL} \text{ et } S^2_{MN}, \quad S^2_{KM} \text{ et } S^2_{LN}, \quad S^2_{KN} \text{ et } S^2_{LM},$$

suivant les trois directrices D de la surface S^2_{IJ} accompagnées par les trois cubiques

$$C_{KL,MN}, \quad C_{KM,LN} \quad C_{KN,LM}. \tag{1}$$

Donc ces trois cubiques passent aussi par le couple des points P_{KLMN}.

Puisque les trois cubiques (1) sont aussi les intersections des trois surfaces

$$\Sigma^2_{KL,MN}, \quad \Sigma^2_{KM,LN}, \quad \Sigma^2_{KN,LM},$$

prises deux à deux, il s'ensuit que ces trois surfaces Σ^2 passent aussi par les mêmes points P_{KLMN} (1).

(1) Nous reviendrons sur ces points P dans un autre Travail relatif à l'étude de la projection de l'hexacoryphe d'un de ces points sur un plan quelconque.

II.

9. Si nous posons

$$(ijk) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ x_i & y_i & z_i & w_i \\ x_j & y_j & z_j & w_j \\ x_k & y_k & z_k & w_k \end{vmatrix},$$

x_i, y_i, z_i, w_i étant les coordonnées du sommet i de l'hexacoryphe, la surface $S^2_{ij,kl,mn}$ sera représentée par une des trois équations équivalentes

$$(ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0, \quad (kli).(mnj) - (klj).(mni) = 0,$$
$$(mnk).(ijl) - (mnl).(ijk) = 0.$$

Les équations des quarante-cinq surfaces Σ^2 sont les équations qu'on obtient en changeant, dans les quarante-cinq équations précédentes des quinze surfaces S^2, le signe de l'un de deux polynomes qu'elle contient. Ainsi l'équation de la surface $\Sigma^2_{ij.kl}$ est

$$(ijm).(kln) + (ijn).(klm) = 0.$$

10. Les dix polynomes du second degré $(1, 2, 3).(4, 5, 6)$, ..., dont chacun représente un couple des faces opposées de l'hexacoryphe, pris quatre à quatre, quand ces symboles ont dans la même parenthèse un même couple des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, sont liés par une identité linéaire. Nous avons quinze identités pareilles correspondant aux quinze droites D. L'identité qui correspond à la droite D_{ij} est

$$(ijk).(lmn) - (ijl).(knm) + (ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0.$$

Ces quinze identités comme les droites D (n° 1) se rangent en six pentades 1, 2, 3, 4, 5, 6. Les cinq identités de chaque pentade sont indépendantes entre elles et de celles-ci l'on peut obtenir toutes les autres ([1]).

([1]) D'une manière analogue, en prenant, dans l'espace à n dimensions, $2n$ points

11. Si nous ajoutons quatre à quatre les identités de chacune des six pentades, en ayant égard, dans la somme, à l'identité qui reste de la pentade considérée, nous formerons un nouveau groupe de quinze identités correspondant aussi aux quinze droites D et contenant chacun six polynomes. L'identité qui correspond à la droite D_{ij} est

$$(ikl).(jmn)+(imn).(jkl)-(ikm).(jln)$$
$$-(iln).(jkm)+(ikn).(jlm)+(ilm).(jkn)=0,$$

et contient les six polynomes qui n'entrent pas dans l'identité du n° **10** correspondant à la même droite D_{ij}, et qui n'ont pas les indices i, j dans la même parenthèse. Cette identité s'obtient en ayant égard à l'identité du n° **10** correspondant à la droite D_{ij}, soit dans la somme des quatre identités de la pentade i correspondant aux droites D_{ik}, D_{il}, D_{im}, D_{in}, soit dans la somme des identités de la pentade j correspondant aux droites D_{jk}, D_{jl}, D_{jm}, D_{jn}.

12. Si nous exprimons que les trente identités des n^{os} **10** et **11** se vérifient en un point quelconque de la droite D_{ij}, les unes de ces iden-

---

$1, 2, 3, \ldots, 2n$, et les $\frac{1}{2}\frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}$ polynomes du second degré qui, égalés à zéro, représentent les divers couples des faces opposées à $n-1$ dimensions de la figure, nous aurons, entre ces polynomes, $\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1.2\ldots(n-1)}$ identités linéaires correspondant aux diverses faces à $n-2$ dimensions de la figure.

Ces identités sont de la forme

$$(i_1\ldots i_{n-1}i_n).(i_{n+1}\ldots i_{2n})-(i_1\ldots i_{n-1}i_{n+1}).(i_n i_{n+2}\ldots i_{2n})$$
$$+(i_1\ldots i_{n-1}i_{n+2}).(i_n i_{n+1}i_{n+3}\ldots i_{2n})-\ldots$$
$$+(-1)^{n-1}(i_1\ldots i_{n-1}i_{2n-1}).(i_n i_{n+1}\ldots i_{2n-2}i_{2n})$$
$$+(-1)^n(i_1\ldots i_{n-1}i_{2n}).(i_n i_{n+1}\ldots i_{2n-1})=0,$$

$(i_1 i_2\ldots i_n)=0$ étant l'équation sous forme de déterminant (n° 9) de la face à $n-1$ dimensions déterminée par les n sommets de la figure $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$, et $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}$ étant les $n-1$ sommets de la figure qui déterminent la face à $n-2$ dimensions correspondant à cette identité.

tités se détruisent et les autres donnent l'identité

$$(ijkl).(ijmn) - (ijkm).(ijln) + (ijkn).(ijlm) = 0,$$

$(ijkl)$ étant la valeur que prend le polynome (jkl) (n° **9**) au point i.

Cette identité, multipliée par $(klmn)$, devient

$$A_{ij.kl,mn} + A_{ij,km,ln} + A_{ij,kn,lm} \equiv A_{IJ} + A_{KL} + A_{MN} = 0,$$

$A_{ij.kl.mn} \equiv A_{IJ}$ étant égal au produit $(ijkl)(klmn)(mnij)$.

On déduit de cette identité que

$$A_{IK} - A_{JK} = A_{IL} - A_{JL} = A_{IM} - A_{JM} - A_{IN} - A_{JN}.$$

Nous représenterons ces différences égales par le symbole $R_{IJ} = - R_{JI}$.

13. Il est aisé de voir que, étant donnés quatre de dix polynomes $(123).(456)$, $(124).(356)$, ... indépendants entre eux, tous les autres se déterminent et peuvent être exprimés linéairement au moyen de polynomes donnés. On conclut de là que ces dix polynomes pris cinq à cinq se lient par deux cent cinquante-deux identités linéaires et que six seulement de ces identités sont indépendantes entre elles.

Parmi ces deux cent cinquante-deux identités, les $15.6 = 90$, dont chacune contient quatre polynomes ayant dans la même parenthèse un même couple des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, et un quelconque des six autres polynomes, se confondent évidemment, prises six à six, avec les quinze identités déjà trouvées du n° **10**, parmi lesquelles nous avons vu que cinq seulement sont indépendantes entre elles.

Les autres $252 - 90 = 162$ identités peuvent être trouvées comme il suit :

Considérons une quelconque des $\frac{24.15}{2} = 180$ surfaces du second degré dont chacune passe par les six sommets de l'hexacoryphe et par trois de ses arêtes D consécutives qui ne forment pas un triangle : par exemple par les arêtes D_{kl}, D_{ij}, D_{jl}. Cette surface appartient évidemment au faisceau

$$(ikn).(jlm) + \lambda(ikm).(jln) = 0.$$

Si, dans cette équation, nous déterminons le paramètre λ de manière que l'équation se vérifie en un point quelconque de la droite D_{ij}, nous aurons l'équation de la surface considérée

$$A_{ij,kn,lm.}(ikm).(jln) + A_{ij,km,nl.}(ikn).(jlm) = 0.$$

Mais l'équation de cette même surface, puisqu'elle contient la droite D_{ij}, peut aussi se former au moyen de trois quelconques des quatre polynomes

$$(ijk).(lmn), \quad (ijl).(kmn), \quad (ijm).(kln), \quad (ijn).(klm)$$

qui s'annulent en un point quelconque de la droite D_{ij} et qui, n'étant pas indépendants entre eux, se lient par l'identité du n° **10**, correspondant à la droite D_{ij}.

Si donc, au moyen de ces quatre polynomes pris trois à trois, nous formons les quatre équations équivalentes de la surface considérée et si nous identifions ces équations avec l'équation déjà trouvée de cette même surface, nous aurons les quatre suivantes des cent soixante-deux identités cherchées :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{km,in,jl.}(kij).(mnl) + A_{ik,jn,lm.}(ijl).(knm) + A_{ji,ln,mk.}(jlm).(ink) \\ &\qquad + A_{lj,mn,ki.}(lmk).(jni) + A_{ml,kn,ij.}(mki).(lnj) = 0, \\ &A_{kn,im,jl.}(kij).(nml) + A_{ik,jm,ln.}(ijl).(kmn) + A_{ji,lm,nk.}(jln).(imk) \\ &\qquad + A_{lj,nm,ki.}(lnk).(jmi) + A_{nl,km,ij.}(nki).(lmj) = 0. \end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &R_{IJ.}(ijk)(lmn) + A_{ik,jn,ml.}(ijm).(kln) + A_{ik,jm,nl.}(ijn).(kml) \\ &\qquad + A_{ij,kn,ml.}(ikm).(jnl) + A_{ij,km,nl.}(ikn).(jml) = 0, \\ &R_{IJ.}(jli)(kmn) + A_{jl,in,mk.}(jim).(lnk) + A_{jl,im,nk.}(jin).(lmk) \\ &\qquad + A_{ji,lm,nk.}(jln).(imk) + A_{ji,ln,mk.}(jlm).(ink) = 0. \end{aligned}\right.$$

ou (n° **12**)

$$\begin{aligned} R_{IJ} = -R_{JI} \equiv \pm R_{il,jk,mn} &= A_{ik,jm,ln} - A_{im,jl,kn} = A_{in,jl,km} - A_{ik,jn,lm} \\ &= A_{ij,kn,lm} - A_{in,jm,kl} = A_{im,jn,kl} - A_{ij,km,ln}. \end{aligned}$$

Ces identités, prises deux à deux, donnent l'identité

$$(ijk).(lmn) - (ijl).(kmn) + (ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0$$

du n° **10** qui correspond à la droite D_{ij}. On voit donc que cinq identités du n° **10** indépendantes entre elles et une quelconque des identités du présent numéro forment un groupe de six identités indépendantes entre elles, desquelles se produisent toutes les autres identités. On peut aussi de plusieurs manières, parmi les cent soixante-deux nouvelles identités, choisir six identités indépendantes entre elles, une fois que les identités du n° **10** ne sont qu'une conséquence de celles-ci.

14. Ces cent soixante-deux nouvelles identités se rangent en deux groupes dont l'un contient soixante-douze et l'autre quatre-vingt-dix identités.

Les $\frac{1}{2}\,\frac{1.2.3.4.5}{5}.6 = 72$ identités du premier groupe contiennent chacune cinq polynomes qui, pris trois à trois de cinq manières différentes, s'annulent en un point quelconque d'une des cinq arêtes consécutives D de l'hexacoryphe, formant un pentagone gauche fermé. Les deux premières identités (1) des quatre identités que nous avons écrites appartiennent à ce groupe et, pour celles-ci, les arêtes consécutives de l'hexacoryphe sont, pour la première, D_{ki}, D_{ij}, D_{jl}, D_{lm}, D_{mk}, et, pour la seconde, D_{ki}, D_{ij}, D_{jl}, D_{ln}, D_{nk}.

Dans chacune de ces soixante-douze identités, bien simples, on peut prendre, de cinq manières différentes, une somme de deux termes dont les coefficients A ont un couple d'indices commun. Ces cinq sommes égalées à zéro représentent les cinq surfaces du second degré qui passent chacune par les six sommets de l'hexacoryphe et par trois côtés consécutifs du pentagone correspondant à l'identité considérée.

Cela considéré, la détermination géométrique des surfaces représentées par les autres sommes des termes de la même identité, pris deux à deux, est une conséquence immédiate de l'existence de cette identité ([1]).

Maintenant les autres $15.6 = 90$ identités du second groupe contiennent chacune cinq polynomes dont les quatre n'entrent pas dans les trois équations équivalentes (n° **9**) d'une des quinze surfaces S, et

---

([1]) Si, dans une quelconque de ces soixante-douze identités, nous remplaçons les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 par les indices I, II, III, IV, V, VI, en ayant égard aux correspondances des n^{os} **1** et **4**, exceptions faites des signes, elle prendra la forme le cinquième est un quelconque des six autres polynomes. Les deux dernières identités (2), des quatre identités que nous avons écrites, appartiennent à ce groupe et contiennent, toutes les deux, les quatre polynomes :

$$(ijm).(kln), \quad (ijn).(klm), \quad (ikm).(jln), \quad (ikn).(jlm),$$

qui n'ont dans la même parenthèse aucun des trois couples des indices (i, l), (j, k), (m, n) et, par conséquent, n'entrent pas dans les trois équations équivalentes de la surface $S_{il,jk,mn} \equiv S_{11}$.

Dans chacune de ces quatre-vingt-dix identités, on peut prendre, de quatre manières différentes, une somme de deux termes dont les coefficients A ont un couple d'indices commun. S'il s'agit de l'identité qui lie le polynome $(ikl).(jmn)$ et les quatre polynomes qui n'entrent pas dans les équations de la surface $S_{ij,kl,mn}$, ces quatre sommets, égalés à zéro, représentent les quatre surfaces du second degré qui passent par les six sommets de l'hexacoryphe et chacune par un des quatre triples suivants d'arêtes consécutives de l'hexacoryphe

$$(D_{ki}, D_{il}, D_{lj}), \quad (D_{li}, D_{ik}, D_{kj}), \quad (D_{mj}, D_{jn}, D_{ni}), \quad (D_{nj}, D_{jm}, D_{mi}).$$

Cela considéré, la détermination géométrique des surfaces représentées par les autres sommes des termes de la même identité, pris deux à deux, est une conséquence de cette même identité [1].

---

aussi simple :

$$A_{IK.(IJK).(LMN)} + A_{JL.(JKL).(MIN)} + A_{KM.(KLM)(IJM)} + A_{LI.(LMI).(JKN)} + A_{MJ.(MIJ).(KLN)} = 0$$

ou, si l'on change l'ordre des termes,

$$A_{IK.(IJK).(LMN)} + A_{KM.(KLM).(IJN)} + A_{MJ.(MIJ).(KLN)} + A_{JL.(JKL).(MIN)} + A_{LI.(LMI).(JKN)} = 0.$$

On parvient ainsi à des correspondances entre les arrangements des six indices 1, 2, 3, 4, 5, 6, cinq à cinq, et les arrangements pareils des six indices I, II, III, IV, V, VI.

[1] Si, comme pour les autres identités, nous remplaçons dans une quelconque de ces quatre-vingt-dix identités, les indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 par les indices I, II, III, IV, V, VI, elle prendra la forme

$$R_{IJ.(IKL).(JMN)} + A_{JK.(IJK).(LMN)} + A_{JL.(IJL).(KMN)} + A_{IM.(IJM).(KLN)} + A_{IN.(IJN).(KLM)} = 0,$$

qui est plus simple que l'autre.

15. Si l'on considère l'équation

$$\lambda.(ijm).(kln) + \mu.(ijn).(klm) = 0,$$

où $\lambda:\mu$ est un paramètre et $(ijm).(kln)$, $(ijn).(klm)$, deux quelconques des dix polynomes $(123).(456)$, $(124).(356)$, ...; elle représente évidemment un faisceau de surfaces du second degré dont la biquadratique commune se forme d'un couple de droites D n'ayant aucun indice en commun (le couple D_{ij}, D_{kl}) et du couple correspondant (n° **5**) de droites G (le couple $G_{m(ij,kl)}$, $G_{n(ij,kl)}$).

Il y a en tout $\frac{10.9}{2} = 45$ tels faisceaux correspondant aux quarante-cinq couples de droites D qui n'ont aucun indice en commun.

Il est facile de voir que trois de ces faisceaux, dont les équations contiennent six polynomes différents entre eux, sont homographiques entre eux. Dans ces homographies, à chaque surface d'un des faisceaux correspondent des surfaces de deux autres faisceaux qui la coupent suivant la même biquadratique.

En effet, toutes les surfaces des trois faisceaux passent par les six sommets de l'hexacoryphe et n'ont aucun autre point commun, puisque, autrement, les six polynomes qui entrent dans les équations de ces trois faisceaux appartiendraient au même réseau de surfaces du second degré, ce qui est contraire à ce que nous avons dit au n° **13**.

Cela posé, il est évident que les surfaces des deux autres faisceaux qui coupent suivant la même biquadratique une surface arbitraire du premier faisceau passent chacune par les deux points, différents des sommets de l'hexacoryphe, suivant lesquels les deux droites G communes aux surfaces de l'autre faisceau coupent la surface arbitraire du premier faisceau.

16. On parvient aux mêmes résultats si l'on considère que les six polynomes, différents entre eux, qui entrent dans les équations des trois faisceaux se lient toujours par deux identités indépendantes entre elles (n° **13**). Si donc nous représentons par $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ ces six polynomes et si nous supposons que

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 = 0$$

sont les deux identités qui lient ces six polynomes, nous aurons l'identité plus générale

$$\lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6)$$
$$+ \mu(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6) = 0,$$

où le paramètre $\lambda : \mu$ peut prendre toute valeur arbitraire.

Si maintenant nous écrivons cette identité sous la forme

$$(\lambda a_1 + \mu b_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2 + (\lambda a_3 + \mu b_3)x_3$$
$$+ (\lambda a_4 + \mu b_4)x_4 + (\lambda a_5 + \mu b_5)x_5 + (\lambda a_6 + \mu b_6)x_6 = 0,$$

et si nous séparons de l'une quelconque des quinze manières possibles en trois couples les six termes de son premier membre, nous aurons trois polynomes du second degré qui, égalés à zéro, par exemple

$$(1)\qquad \begin{cases} (\lambda a_1 + \mu b_1)x_1 + (\lambda a_2 + \mu b_2)x_2 = 0, \\ (\lambda a_3 + \mu b_3)x_3 + (\lambda a_4 + \mu b_4)x_4 = 0, \\ (\lambda a_5 + \mu b_5)x_5 + (\lambda a_6 + \mu b_6)x_6 = 0, \end{cases}$$

représentent trois faisceaux de surfaces du second degré homographiques selon la manière exposée, c'est-à-dire que pour chaque valeur du paramètre $\lambda : \mu$ ces trois équations représentent trois surfaces du second degré passant par la même biquadratique.

Puisqu'il y a deux cent dix combinaisons des dix polynomes $(123)(456)$, $(124)(356)$, ..., six à six et que quinze triples de faisceaux homographiques se produisent de chacune de ces combinaisons, il s'ensuit que les quarante-cinq faisceaux de surfaces du second degré qui correspondent aux quarante-cinq couples de droites D n'ayant aucun indice en commun, se rangent de $210.15 = 3150$ manières différentes en triples homographiques.

A chacun de ces trois mille cent cinquante triples de faisceaux homographiques correspond une surface du quatrième degré qui est le lieu décrit par la biquadratique, par chaque position de laquelle passent trois surfaces appartenant respectivement aux trois faisceaux homographiques qui forment le triple correspondant.

L'équation qui représente cette surface est une quelconque des trois équations équivalentes que l'on trouve en éliminant le paramètre $\lambda : \mu$ entre deux quelconques des équations (1) qui représentent les trois faisceaux homographiques formant le triple correspondant.

Toutes ces trois mille cent cinquante surfaces du quatrième degré ont pour points doubles les six sommets de l'hexacoryphe et chacune d'elles passe par les trois biquadratiques dont chacune est commune aux surfaces d'un des trois faisceaux homographiques du triple correspondant, c'est-à-dire chacune de ces surfaces passe par trois couples de droites D n'ayant pas d'indice commun et par les trois couples correspondants de droites G ([1]).

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ces trois mille cent cinquante surfaces du quatrième degré et des triples correspondants de faisceaux homographiques de surfaces du second degré. De même, nous ne formerons pas une étude géométrique des cent soixante-deux identités du n° **15** de laquelle se déduisent plusieurs propriétés des surfaces du second degré représentées par les sommes des termes de ces identités pris deux à deux.

Dans ce qui suit, nous nous bornerons seulement à l'étude des identités des n^{os} **10** et **11** qui entraînent aussi toutes les propriétés, énoncées jusqu'à maintenant, des surfaces S^2 et Σ^2 (n^{os} **3**, **7** et **8**).

III.

17. Les quarante-cinq surfaces Σ^2 (n° **7**) prises trois à trois, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$\Sigma^2_{ij,kl} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IJ},\mathrm{KL}}, \quad \Sigma^2_{ik,jl} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{KL},\mathrm{MN}}, \quad \Sigma^2_{il,jk} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{MN},\mathrm{IJ}},$$

([1]) Quelques-unes de ces surfaces dégénèrent et deviennent soit deux des quinze surfaces S, soit une de ces surfaces et une des cent quatre-vingts surfaces (n° **13**) du second degré qui passent par les six sommets de l'hexacoryphe et par trois de ces arêtes consécutives ne formant pas un triangle. Dans ces cas, l'un des trois faisceaux homographiques du triple correspondant devient une surface déterminée et les surfaces correspondantes des deux autres faisceaux homographiques se coupent toujours sur cette surface déterminée ou se confondent en une seule surface.

passent par une même biquadratique. Nous avons quinze pareilles biquadratiques correspondant aux quinze droites D. Nous les représentons par des symboles de la forme $T_{(ijkl)} \equiv T_{IJ,KL,MN}$, $D_{mn} \equiv D_{IJ,KL,MN}$ étant la droite correspondante.

Cette propriété des surfaces Σ^2 est une conséquence de l'existence des identités du n° **11**, puisque les trois polynomes qui représentent trois pareilles surfaces entrent toujours dans une même de ces identités.

Il faut remarquer que la cubique $C_{ij,kl}$ (n° **6**) rencontre, en deux points différents des sommets de l'hexacoryphe, chacune des deux biquadratiques $T_{(ijmn)}$, $T_{(klmn)}$. De même, la biquadratique $T_{(ijkl)}$ rencontre en deux points différents des sommets de l'hexacoryphe chacune des six cubiques

$$C_{ij,mn},\quad C_{ik,mn},\quad C_{il,mn},\quad C_{jk,mn},\quad C_{jl,mn},\quad C_{kl,mn}.$$

18. Les quarante-cinq surfaces Σ^2 prises trois à trois, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$\Sigma^2_{ij,kl} \equiv \Sigma^2_{IJ,KL},\quad \Sigma^2_{ij,km} \equiv \Sigma^2_{KM,JN},\quad \Sigma^2_{ij,kn} \equiv \Sigma^2_{LN,JM},$$

passent par une même ligne du quatrième degré composée de la droite D_{ij} et d'une cubique que nous représentons par le symbole $t_{(ij)k}$. Nous avons soixante cubiques pareilles.

Plus généralement, on peut remarquer que, si l'on considère les six faisceaux du second degré qui (n° **15**) correspondent aux six couples de droites D qui contiennent une même droite D_{ij}, il existe une double infinité de cubiques par chacune desquelles passent six surfaces appartenant respectivement à ces six faisceaux. Les équations de six pareilles surfaces sont de la forme

$$\frac{(ijk).(lmn)}{\lambda_1} = \frac{-(ijl).(kmn)}{\lambda_2} = \frac{(ijn).(kln)}{\lambda_3} = \frac{-(ijn).(klm)}{\lambda_4}$$

où il faut avoir

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0.$$

Cette propriété n'est qu'une conséquence immédiate de l'identité du n° **10** :

$$(ijk).(lmn) - (ijl).(kmn) + (ijm).(kln) - (ijn).(klm) = 0.$$

19. *a.* Les quarante-cinq surfaces Σ^2 se rangent en dix groupes $(ijk).(lmn) \equiv (IJK).(LMN)$ (n° **4**). Le groupe $(ijk)(lmn)$ contient les neuf surfaces dont chacune passe par deux des six droites D situées sur les faces F_{ijk} et F_{lmn} de l'hexacoryphe; c'est-à-dire les deux couples des indices de chacune de ces neuf surfaces sont contenus chacun dans une des parenthèses de l'indice du groupe.

b. Les quarante-cinq cubiques C se rangent aussi en dix groupes ayant les mêmes indices. Le groupe $(ijk)(lmn) \equiv (IJK)(LMN)$ contient les neuf cubiques suivant lesquelles, prises deux à deux, se coupent les six surfaces S^2 qui n'ont pour directrice aucune des six droites D situées sur les deux faces F_{ijk}, F_{lmn} de l'hexacoryphe. Ces six surfaces se coupent d'autre part, prises trois à trois, suivant les deux biquadratiques $C_{(ijk)(lmn)} \equiv C_{(IJK)(LMN)}$ (n° **4**).

Donc, toutes les neuf cubiques du groupe $(ijk)(lmn)$ sont rencontrées chacune en deux points différents des sommets de l'hexacoryphe, par chacune des deux biquadratiques C qui forment le couple ayant le même indice que le groupe considéré.

20. Les neuf surfaces Σ^2 de chaque groupe, prises quatre à quatre, de neuf manières différentes correspondant aux neuf surfaces de ce groupe, passent par deux points f différents des sommets de l'hexacoryphe. Ainsi, si nous considérons la surface $\Sigma^2_{ij,mn}$, dans le groupe $(ijk)(lmn)$, nous aurons comme correspondantes à cette surface les quatre surfaces

$$(1) \qquad \Sigma^2_{ij,lm}, \quad \Sigma^2_{ij,ln}, \quad \Sigma^2_{mn,ki}, \quad \Sigma^2_{mn,kj},$$

lesquelles, seules, parmi les surfaces du groupe considéré, rencontrent la surface $\Sigma^2_{ij,mn}$ suivant une de ces directrices D_{ij}, D_{mn}.

La vérité de cette propriété devient évidente si l'on considère que les équations de quatre telles surfaces sont de la forme

$$x_1 + y = 0, \qquad x_2 + y = 0, \qquad x_3 - y = 0, \qquad x_4 - y = 0,$$

où

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

est une des identités du n° **10**.

Par les deux points f où se rencontrent les quatre surfaces (1) passent aussi (n° **18**) les deux surfaces

$$(2) \qquad \Sigma^2_{ij,kl} \quad \text{et} \quad \Sigma^2_{mn,kl}$$

(les équations de ces deux surfaces sont $x_1 - x_2 = 0$ et $x_3 - x_4 = 0$). L'intersection de ces deux surfaces qui est la cubique $C_{ij,mn}$ avec la droite D_{kl} passe aussi par les mêmes deux points f.

Puisque chaque surface Σ^2 appartient à deux groupes, si nous considérons aussi dans le groupe $(ijl)(kmn)$ la surface $\Sigma^2_{ij,mn}$ considérée dans le groupe $(ijk)(lmn)$, nous aurons quatre nouvelles surfaces

$$\Sigma^2_{ij,km}, \quad \Sigma^2_{ij,kn}, \quad \Sigma^2_{mn,il}, \quad \Sigma^2_{mn,jl},$$

et de nouveau les deux surfaces (2) passant par un autre couple de points f situés aussi sur la cubique $C_{ij,mn}$ ayant le même indice avec la surface considérée $\Sigma^2_{ij,mn}$.

La totalité des points f est évidemment quatre-vingt-dix couples.

Les couples des points f peuvent aussi être considérés comme les intersections des cubiques t (n° **15**), lesquelles, d'après ce qui a été exposé, se coupent suivant deux points f quand elles sont représentées par des symboles $t_{(ij)k}$, $t_{(mn)l}$ n'ayant aucun indice commun. Les neuf couples des points f suivant lesquels les trois cubiques $t_{(ij)k}$, $t_{(jk)i}$, $t_{(ki)j}$ rencontrent les trois cubiques $t_{(lm)n}$, $t_{(mn)l}$, $t_{(nl)m}$, sont les correspondantes aux neuf surfaces du groupe $(ijk)(lmn)$ considérées dans ce groupe.

21. Les neuf cubiques d'un groupe $(ijk)(lmn) = (\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})$, prises trois à trois, de six manières différentes, se coupent suivant deux points q différents des sommets de l'hexacoryphe. Chaque triple se compose de trois cubiques de la forme

$$C_{ij,lm} \equiv C_{\mathrm{IJ,LM}}, \quad C_{ik,mn} \equiv C_{\mathrm{IJ,MN}}, \quad C_{ki,nl} = C_{\mathrm{IJ,NL}}.$$

Un examen simple des indices de ces trois cubiques nous apprend que les six couples de points q dérivés du groupe

$$(ijk)(lmn) \equiv (\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})$$

sont les couples des points différents des sommets de l'hexacoryphe suivant lesquels chacune des deux biquadratiques du couple

$$\mathrm{C}_{ijk,lmn} \equiv \mathrm{C}_{\mathrm{IJK},\mathrm{LMN}} \quad (\text{n}^\circ\ 3)$$

rencontre chacune des trois surfaces S^2 qui passent par l'autre biquadratique de ce couple. Ainsi, les six couples de points q dérivés du groupe $(ijk)(lmn)$ se trouvent trois à trois sur les deux biquadratiques du couple $\mathrm{C}_{ijk,lmn}$ et deux à deux sur les neuf cubiques C de ce groupe.

Puisque chaque cubique $\mathrm{C}_{ij,kl}$ appartient à deux groupes $(ijm)(kln)$, $(ijn)(klm)$, il s'ensuit que quatre couples des points q se trouvent sur chaque cubique C et que la totalité de ces points est soixante couples.

Il est évident que par chaque couple de points q passent six surfaces Σ^2 et quatre surfaces S^2.

22. De même, les neuf surfaces Σ^2 de chaque groupe

$$(ijk)(lmn) \equiv (\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN}),$$

prises trois à trois, de six manières différentes, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$\Sigma^2_{ij,lm} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IJ},\mathrm{LM}}, \quad \Sigma^2_{jk,mn} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IJ},\mathrm{MN}}, \quad \Sigma^2_{ki,nl} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IJ},\mathrm{NL}},$$

ont la propriété de se couper, prises deux à deux, suivant trois biquadratiques par chacune desquelles passe une des trois surfaces $\mathrm{S}^2_{\mathrm{NL}}$, $\mathrm{S}^2_{\mathrm{LM}}$, $\mathrm{S}^2_{\mathrm{MN}}$ qui se coupent suivant la biquadratique $\mathrm{C}_{\mathrm{LMN}}$. Nous avons soixante pareils triples de surfaces Σ et, par conséquent, cent quatre-vingts nouvelles biquadratiques par chacune desquelles passent deux surfaces Σ^2 et une surface S^2. Chaque surface Σ^2 passe par huit telles biquadratiques et chaque surface S^2 par douze.

23. Si l'on prend les dix-huit surfaces Σ^2 qui passent (n° **7**) deux à deux par les neuf cubiques C du groupe

$$(123)(456) \equiv (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI}),$$

par exemple, elles diffèrent toutes entre elles et peuvent être posées comme les éléments de deux déterminants

$$\left|\begin{array}{ccc} \Sigma^2_{12,34} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IV\,VI,\,III\,V}}, & \Sigma^2_{12,35} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{I\,III,\,II\,IV}}, & \Sigma^2_{12,36} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{II\,V,\,I\,VI}} \\ \Sigma^2_{13,24} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{III\,V,\,I\,II}}, & \Sigma^2_{13,25} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{II\,IV,\,V\,VI}}, & \Sigma^2_{13,26} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{I\,VI,\,III\,IV}} \\ \Sigma^2_{14,23} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{I\,II,\,IV\,VI}}, & \Sigma^2_{15,23} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{V\,VI,\,I\,III}}, & \Sigma^2_{16,23} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{III\,IV,\,II\,V}} \end{array}\right|,$$

$$\left|\begin{array}{ccc} \Sigma^2_{34,56} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{V\,VI,\,III\,IV}}, & \Sigma^2_{24,56} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{I\,III,\,II\,V}}, & \Sigma^2_{14,56} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{II\,IV,\,I\,VI}} \\ \Sigma^2_{35,46} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{III\,IV,\,I\,II}}, & \Sigma^2_{25,46} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{II\,V,\,IV\,VI}}, & \Sigma^2_{15,46} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{I\,VI,\,III\,V}} \\ \Sigma^2_{36,45} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{I\,II,\,V\,VI}} & \Sigma^2_{26,45} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{IV\,VI,\,I\,III}}, & \Sigma^2_{16,45} \equiv \Sigma^2_{\mathrm{III\,V,\,II\,IV}} \end{array}\right|,$$

Alors, on voit aisément que ces dix-huit surfaces, qui se coupent deux à deux suivant les neuf cubiques du groupe

$$(123)(456) \equiv (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI}),$$

quand elles ont la même place dans les deux déterminants et qui passent toutes par les six sommets de l'hexacoryphe :

α'. Prises trois à trois de six manières différentes, passent par six cubiques t (n° **18**) (quand elles se trouvent dans la même ligne horizontale que l'un des deux déterminants);

β', Prises trois à trois, de six manières différentes, passent par six biquadratiques T (n° **17**) (quand elles se trouvent dans la même ligne verticale de l'un des deux déterminants);

γ'. Prises six à six, de neuf manières différentes, passent par les neuf couples de points f (n° **20**) qui correspondent aux neuf surfaces Σ^2 du groupe $(123)(456) \equiv (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI})$, considérées dans ce groupe (quand elles se trouvent dans une ligne horizontale de chacun des deux déterminants);

δ'. Prises six à six, de six manières différentes, passent par les six couples de points q (nº **21**) dérivés du groupe

$$(123)(456) \equiv (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI})$$

(quand elles se trouvent dans les termes de même rang des deux déterminants ordonnés, l'un suivant la première ligne horizontale et le second suivant la première ligne verticale);

ε'. *Prises cinq à cinq*, de dix-huit manières différentes, passent par les dix-huit couples des points où se rencontrent les cubiques t et les biquadratiques T considérées plus haut (quand elles se trouvent dans une ligne horizontale et une ligne verticale de l'un des deux déterminants).

IV.

24. Il y a quinze surfaces $S^{2.3}$ du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe. Ces surfaces passent toutes par les quinze couples de points P (nº **8**) et correspondent aux quinze droites D_{ij}.

Nous représenterons ces surfaces par des symboles de la forme $S_{ij}^{2.3} \equiv S_{\mathrm{IJ,KL,MN}}^{2.3}$, ce symbole représentant la surface qui correspond à la droite $D_{ij} \equiv D_{\mathrm{IJ,KL,MN}}$.

L'équation de la surface $S_{ij}^{2.3} \equiv S_{\mathrm{IJ,KL,MN}}^{2.3}$ est

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0, \tag{1}$$

dans laquelle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sont six des dix polynomes du second degré $(123)(456)$, $(124)(356)$, ... liés par l'identité

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0,$$

qui est celle des identités du nº **11** qui correspond à la droite

$$D_{ij} \equiv D_{\mathrm{IJ,KL,MN}}.$$

25. Sur chaque surface $S_{ij}^{2.3} \equiv S_{\mathrm{IJ,KL,MN}}^{2.3}$ sont situées les quinze courbes suivantes du quatrième degré :

α. Les huit biquadratiques qui font les quatre couples

$$C_{(ijk)(lmn)} \equiv C_{(\mathrm{ILM})(\mathrm{JKN})}, \qquad C_{(ijl)(kmn)} \equiv C_{(\mathrm{IKN})(\mathrm{JLM})},$$
$$C_{(ijm)(kln)} \equiv C_{(\mathrm{ILN})(\mathrm{JKM})}, \qquad C_{(ijn)(klm)} \equiv C_{(\mathrm{IKM})(\mathrm{JLN})} \quad (^1);$$

β. La biquadratique $T_{klmn} \equiv T_{\mathrm{IJ,KL,MN}}$ (n° **17**);

γ. Les six droites D qui joignent deux à deux les quatre points k, l, m, n accompagnées par les six cubiques qui ont commun le couple des indices i et j, lesquelles sont (n° **17**) toutes rencontrées par la biquadratique T_{klmn}, chacune suivant deux points différents des sommets de l'hexacoryphe.

Six à six, les quinze surfaces $S^{2.3}$ passent par le même couple de biquadratiques C et six à six par la même droite D. Ainsi, par le couple de biquadratiques $C_{(ijk)(lmn)}$ passent les six surfaces $S_{ij}^{2.3}$, $S_{jk}^{2.3}$, $S_{ki}^{2.3}$, $S_{lm}^{2.3}$, $S_{mn}^{2.3}$, $S_{nl}^{2.3}$, et par la droite D_{ij} les six surfaces $S_{kl}^{2.3}$, $S_{km}^{2.3}$, $S_{kn}^{2.3}$, $S_{lm}^{2.3}$, $S_{ln}^{2.3}$, $S_{mn}^{2.3}$.

26. Les quinze courbes du quatrième degré situées sur la surface $S_{ij}^{2.3} \equiv S_{\mathrm{IJ,KL,MN}}^{2.3}$ représentée par l'équation (1) du n° **24**, prises trois à trois, se trouvent sur les quinze surfaces du second degré, ayant pour équations $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, ... Ces surfaces, prises trois à trois, quand elles sont représentées par des équations n'ayant aucun polynome commun, passent par une même des quinze courbes du quatrième degré et sont les douze surfaces S^2 qui ne passent pas par la droite $D_{ij} \equiv D_{\mathrm{IJ,KL,MN}}$ et les trois surfaces $\Sigma_{kl,mn}^2$, $\Sigma_{km,ln}^2$, $\Sigma_{kn,lm}^2$ qui passent par la biquadratique T_{klmn} (²).

(¹) En énumérant les points d'intersection d'une surface $S_{ij}^{2.3}$ et de deux surfaces S^2 passant respectivement par les deux courbes C, qui forment l'un des quatre couples qui se trouvent sur la surface $S_{ij}^{2.3}$, nous pouvons voir que les deux courbes C du couple considéré ne se coupent qu'aux six sommets de l'hexacoryphe. Si les deux courbes du couple $C_{(ijk)(lmn)}$ avaient un autre point commun, de ce point et sur un plan quelconque les deux triangles ijk et lmn seraient projetés six fois homologues, ce qui ne peut arriver que dans des cas exceptionnels, ainsi que nous l'établirons dans un prochain Travail (*voir* n° **8**).

(²) Ces quinze surfaces du second degré $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 + x_3 = 0$, ... et les quinze courbes du quatrième degré ($x_1 + x_2 = 0$, $x_3 + x_4 = 0$, $x_5 + x_6 = 0$)

27. Les quinze surfaces $S^{2.3}$, prises trois à trois, quand elles sont représentées par des symboles de la forme

$$S_{ij}^{2.3} \equiv S_{IJ,KL,MN}^{2.3}, \qquad S_{jk}^{2.3} \equiv S_{LN,JM,IK}^{2.3}, \qquad S_{ki}^{2.3} \equiv S_{KM,IN,JL}^{2.3},$$

passent par une même courbe du trente-sixième degré L_{ijk} ayant pour points du neuvième ordre les six sommets de l'hexacoryphe et passant par tous les quinze couples des points P (n° **8**). Nous avons vingt pareilles courbes qui se rangent en dix couples $L_{(ijk),(lmn)} \equiv L_{(ILM),(JKN)}$.

Les deux biquadratiques $C_{(ijk),(lmn)} \equiv C_{(ILM),(JKN)}$ et les trois droites D_{lm}, D_{mn}, D_{nl} sont parties de la courbe L_{ijk}. Donc la courbe L_{ijk} correspond à la face F_{ijk} de l'hexacoryphe et le couple des courbes $L_{(ijk),(lmn)} \equiv L_{(ILM),(JKN)}$ correspond au couple des courbes du quatrième degré $C_{(ijk),(lmn)} \equiv C_{(ILM),(JKN)}$.

28. Deux surfaces $S_{ij}^{2.3} \equiv S_{IJ,KL,MN}^{2.3}$, $S_{kl}^{2.3} \equiv S_{IJ,KN,LM}^{2.3}$ ayant en commun un couple I, J, des indices I, II, ... et, par conséquent, aucun des indices 1, 2, 3, ..., en commun, se coupent suivant une courbe du trente-sixième degré $A_{ij,kl} \equiv A_{KM,LN}$ ayant pour points multiples du neuvième ordre les six sommets de l'hexacoryphe et passant par tous les quinze couples de points P (n° **8**).

Nous avons quarante-cinq pareilles courbes $A_{ij,kl} \equiv A_{KM,LN}$ correspondant aux quarante-cinq cubiques $C_{ij,kl} \equiv C_{KM,LN}$. La courbe

$$A_{ij,kl} \equiv A_{KM,LN}$$

se compose des deux couples de biquadratiques $C_{(ijm),(kln)} \equiv C_{(KMI),(LNJ)}$, $C_{(ijn),(klm)} \equiv C_{(KMI),(LNI)}$, de la cubique $C_{ij,kl} \equiv C_{KM,LN}$ avec la droite D_{mn}, et d'une courbe $K_{ij,kl} \equiv K_{KM,LN}$ du seizième degré correspondant aussi à la cubique $C_{ij,kl} \equiv C_{KM,LN}$.

29. Il y a aussi quarante-cinq surfaces $\Sigma_{ij,kl}^{2.3} \equiv \Sigma_{KM,LN}^{2.3}$ du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe et

---

situées sur la surface $S_{ij}^{2.3}$ forment une configuration semblable et ayant des propriétés analogues à celles de la configuration remarquable des quinze cercles dans l'espace étudiée par M. Cyp. Stéphanos (*Comptes rendus*, 1881, 2e semestre, p. 578 et 633).

correspondant aux quarante-cinq surfaces du second degré

$$\Sigma^{2.3}_{ij,kl} \equiv \Sigma^{2.3}_{\mathrm{KM},\mathrm{LN}};$$

c'est-à-dire que ces surfaces passent (n° **7**) deux à deux par chacune des quarante-cinq courbes Λ (n° **28**) et contiennent chacune deux de ces courbes, et généralement elles ont des propriétés analogues à celles des surfaces Σ^2. Ainsi les deux surfaces :

$$\Sigma^{2.3}_{il,jk} \equiv \Sigma^{2.3}_{\mathrm{IJ},\mathrm{KM}}, \qquad \Sigma^{2.3}_{ik,jl} \equiv \Sigma^{2.3}_{\mathrm{IJ},\mathrm{LN}}$$

passent par la courbe $\Lambda_{ij,kl} \equiv \Lambda_{\mathrm{KM},\mathrm{LN}}$, et encore la première passe par la courbe $\Lambda_{ik,jl} \equiv \Lambda_{\mathrm{IJ},\mathrm{LN}}$ et la seconde par la courbe $\Lambda_{il,jk} \equiv \Lambda_{\mathrm{IJ},\mathrm{KM}}$.

L'équation de la surface $\Sigma^{2.3}_{ij,kl} \equiv \Sigma^{2.3}_{\mathrm{KM},\mathrm{LN}}$ est

$$\begin{aligned} &2(ijn)^3.(klm)^3 - 2(ijm)^3.(kln)^3 + (ijl)^3.(kmn)^3 \\ &\quad - (ijk)^3.(lmn)^3 + (kli)^3.(jmn)^3 - (klj)^3 - (imn)^3 = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que c'est la somme des équations, prises avec des signes convenables, des deux surfaces $S^{2.3}_{il} \equiv S^{2.3}_{\mathrm{IL},\mathrm{JN},\mathrm{KM}}$ et $S^{2.3}_{jk} \equiv S^{2.3}_{\mathrm{IN},\mathrm{JL},\mathrm{KM}}$ qui se coupent suivant la courbe $\Lambda_{il,jk} \equiv \Lambda_{\mathrm{IJ},\mathrm{LN}}$ ou des deux surfaces

$$S^{2.3}_{ik} \equiv S^{2.3}_{\mathrm{IK},\mathrm{JM},\mathrm{LN}} \qquad \text{et} \qquad S^{2.3}_{jl} \equiv S^{2.3}_{\mathrm{IM},\mathrm{JK},\mathrm{LN}}$$

qui se coupent suivant la courbe $\Lambda_{ik,jl} \equiv \Lambda_{\mathrm{KM},\mathrm{IJ}}$.

Le premier membre de cette équation peut être aussi considéré comme la somme des cubes des termes des deux identités du n° **10** qui correspondent aux droites D_{ij} et D_{kl}, prises avec des signes tels que, dans la somme, les polynomes $(ijm)(kln)$ et $(ijn)(klm)$, communs à ces deux identités, auront le coefficient 2. Cela posé, en remarquant que

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = -3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha),$$

nous pourrons écrire l'équation précédente sous la forme

$$\begin{aligned} &3[(ijn)(klm) - (ijm)(klm)] \\ &\quad \times \{[(ijn)(klm) + (ijl)(kmn)].[(ijn)(klm) - (ijk)(lmn)] \\ &\qquad + [(ijn)(klm) + (kli)(jmn)].[(ijn)(klm) - (klj)(imn)]\} = 0, \end{aligned}$$

ou, symboliquement, soit sous la forme

$$3 S^2_{ij.kl.mn}(S^2_{ij.km.ln} . S^2_{ij.lm.kn} + S^2_{kl.im.jn} . S^2_{kl.in.jm}) = 0,$$

soit sous la forme

$$3 . S^2_{IJ} . (S^2_{MN} . S^2_{KL} + S^2_{KN} . S^2_{LM}) = 0,$$

$S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij.kl.mn}$ étant le polynome qui, égalé à zéro, représente la surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij.kl.mn}$.

L'équation de la surface du sixième degré

$$\Sigma^{2.3}_{ij.kl} \equiv \Sigma^{2.3}_{KM.LN}$$

étant mise sous cette forme, on voit que cette surface se compose de la surface du second degré $S^{2.3}_{ij.kl.mn} \equiv S^{2.3}_{IJ}$ et d'une surface du quatrième degré qui contient les quatre biquadratiques C_{KLM}, C_{LMN}, C_{MNK}, C_{NKL}, a pour points doubles le couple des points $P_{KL.MN}$ (n° **8**) et passe par les deux courbes du seizième degré $K_{ik.jl} \equiv K_{IJ.KM}$ et $K_{il.jk} \equiv K_{IJ.LN}$ (n° **28**).

30. Les propriétés des quinze surfaces $S^{2.3}$ et des quarante-cinq surfaces $\Sigma^{2.3}$ du sixième degré, étudiées aux n^{os} **27**, **28** et **29**, sont évidemment semblables à celles des surfaces du deuxième degré S^2 et Σ^2 que nous avons vues aux n^{os} **3**, **4**, **6** et **7**; mais, dans cette nouvelle configuration, chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé, suivant une quelconque des manières possibles, par un des indices I, II, III, IV, V, VI, et réciproquement.

Nous allons voir maintenant que, après un tel remplacement des indices, la configuration des surfaces du sixième degré $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ aura de même toutes les autres propriétés analogues à celles de la configuration des surfaces de deuxième degré S^2 et Σ^2, qui sont les conséquences des identités des n^{os} **10** et **11** et que nous avons vues aux n^{os} **8**, **17**, **18**, **19**, **20**, **21**, **22** et **23**.

En effet, il y a dix polynomes du sixième degré $F^3_{(ijk)(lmn)} \equiv F^3_{(ILM)(JKN)}$ correspondant aux dix polynomes du deuxième degré

$$(ijk)(lmn) \equiv (ILM)(JKN).$$

Le polynome

$$F^3_{(ijk)(lmn)} = F^3_{(ILM)(JKN)} = 3(ijk)^3.(lmn)^3 - (ijl)^3.(kmn)^3 + (ijm)^3.(kln)^3 - (ijn)^3.(klm)^3 + (ikl)^3.(jmn)^3 - (ikm)^3.(jln)^3 + (ikn)^3.(jlm)^3 - (jkl)^3.(imn)^3 + (jkm)^3.(iln)^3 - (jkn)^3.(ilm)^3,$$

qui correspond au polynome du deuxième degré

$$(ijk)(lmn) = (ILM)(JKN),$$

est la somme des cubes des termes des trois identités du n° **10** qui correspondent aux droites D_{ij}, D_{jk}, D_{ki}, ou des trois identités qui correspondent aux trois droites D_{lm}, D_{mn}, D_{nl}, prises avec des signes tels que le polynome $(ijk)^3.(lmn)^3$ ait, dans la somme, le coefficient 3 et les indices i, j, k, l, m, n, suivant la même disposition que dans le symbole $F^3_{(ijk)(lmn)}$. Cela posé, il s'ensuit que chacun des dix polynomes du sixième degré F^3 est, par son symbole $F^3_{(ijk)(lmn)}$, déterminé non seulement en valeur absolue, mais encore au signe près. Donc, pour les polynomes du second degré $(ijk)(lmn)$ de même que pour les polynomes correspondants du sixième degré $F^3_{(ijk)(lmn)}$, la permutation de deux indices i, j, trouvés dans la même parenthèse, change le signe du polynome et la permutation des deux parenthèses ne le change pas.

De même par l'autre symbole $F^3_{(ILM)(JKN)}$ on peut aussi déterminer, au signe près, le polynome représenté par ce symbole. Il suffit, en effet, de fixer, au signe près, une des correspondances du n° 4, par eexmple $(123)(456) \equiv (\mathrm{I\,IV\,V})(\mathrm{II\,III\,VI})$ et de remarquer que, si $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$, la permutation des indices I et J équivaut aux permutations des indices i et j, k et l, m et n, et de même la permutation des indices i et j équivaut aux permutations des indices I et J, K et L, M et N, si $D_{ij} = D_{IJ,KL,MN}$.

Cela remarqué, nous verrons que, au contraire, le polynome $F^3_{(IKM)(JKN)}$ change le signe si l'on permute ces deux parenthèses et ne le change pas si l'on permute deux indices, I et L par exemple, trouvés dans la même parenthèse.

31. Les dix polynomes $F^3_{(ijk)(lmn)} \equiv F^3_{(ILM)(JKN)}$ pris quatre à quatre, de quinze manières différentes, quand ils ont dans la même parenthèse un même couple d'indices I et J et, par conséquent, si $S_{IJ} \equiv S_{ij,kl,mn}$, n'ont aucun des trois couples des indices i et j, k et l, m et n, dans la même parenthèse, se lient par quinze identités linéaires correspondant aux quinze surfaces $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$.

De ces identités, celle qui correspond à la surface $S^2_{IJ} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$ est

$$F^3_{(IJK)(LMN)} + F^3_{(IJL)(KMN)} + F^3_{(IJM)(KLN)} + F^3_{(IJN)(KLM)} = 0,$$

ou, dans l'autre représentation,

$$F^3_{(ikm)(jln)} + F^3_{(ikn)(jlm)} + F^3_{(ilm)(jkn)} + F^3_{(iln)(jkm)} = 0.$$

On voit donc que la formation de ces identités est parfaitement semblable à celle des identités du n° **10**; mais, dans celles-ci, chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé, suivant une quelconque des manières possibles, par un des indices I, II, III, IV, V, VI, et réciproquement.

De ces identités, comme au n° **11**, nous pouvons former quinze autres identités correspondant aussi aux quinze surfaces du deuxième degré S^2 et contenant chacune six polynomes F^3 dans lesquels un couple d'indices I, J n'entre pas dans la même parenthèse.

32. Si nous égalons à zéro chacun des dix polynomes F^3, nous aurons les équations de dix surfaces du sixième degré ayant pour points triples les six sommets de l'hexacoryphe. Toutes ces surfaces passent par les quinze couples des points P (n° **8**), et chacune d'elles, par exemple la surface représentée par l'équation $F^3_{(ijk)(lmn)} = 0$, contient les six droites D_{ij}, D_{jk}, D_{ki}, D_{lm}, D_{mn}, D_{nl}.

Cela devient évident si l'on considère que

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = -3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$$

et que, par conséquent, le polynome $F^3_{(ijk)(lmn)}$, qui est, de deux manières différentes, la somme des cubes des termes des trois identités du n° **10**, peut être écrit soit sous la forme

$$S^2_{ij.kl,mn}.S^2_{ij.km,ln}.S^2_{ij,kn.lm}+S^2_{jk,il.mn}.S^2_{jk.im.ln}.S^2_{jk,in,lm}\\+S^2_{ki,jl.mn}.S^2_{ki.jm.ln}.S^2_{ki.jn.lm},$$

soit sous la forme

$$S^2_{lm.ij.kn}.S^2_{lm.ik,jn}.S^2_{lm.in.jk}+S^2_{mn.ij.kl}.S^2_{mn.ik,jl}.S^2_{mn.il.jk}\\+S^2_{ln.ij,km}.S^2_{nl.ik,jm}.S^2_{nl.im.jk},$$

$S^2_{ij.kl,mn}$ étant le polynome qui, égalé à zéro, représente la surface $S^2_{ij,kl,mn}$.

33. On déduit des identités du n° **31** que les dix surfaces $F^3=0$, comme les surfaces du second degré qui constituent les dix couples des faces opposées de l'hexacoryphe, prises quatre à quatre de quinze manières différentes, appartiennent à un même réseau et, par conséquent, font une configuration semblable à celle des faces opposées de l'hexacoryphe, mais dans laquelle chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé par un des indices I, II, III, IV, V, VI et réciproquement.

Si maintenant, comme au n° **9**, nous considérons les quinze surfaces du sixième degré qui correspondent aux quinze droites $D_{ij}\equiv D_{IJ.KL.MN}$ et qui sont représentées, par exemple celle qui correspond à la droite

$$D_{ij}\equiv D_{IJ.KL.MN},$$

par les trois équations équivalentes

$$F^3_{(IJK)(LMN)}+F^3_{(IJL)(KMN)}=0,$$
$$F^3_{(IJM)(NKL)}+F^3_{(IJN)(MKL)}=0,$$
$$F^3_{(KLI)(JMN)}+F^3_{(KLJ)(IMN)}=0,$$

ou dans l'autre représentation par les équations

$$F^3_{(ilm)(jkn)} + F^3_{(jkn)(jlm)} = 0,$$
$$F^3_{(iln)(jkm)} + F^3_{(ikm)(jln)} = 0,$$
$$F^3_{(ikl)(jmn)} + F^3_{(imn)(jkl)} = 0;$$

nous verrons aisément que cette surface est la surface $S^{2.3}_{ij} \equiv S^{2.3}_{\mathrm{IJ,KL,MN}}$ du n° **24**, qui correspond à la droite $D_{ij} \equiv D_{\mathrm{IJ,KL,MN}}$.

Si de même, comme au n° **9**, dans chacune des $3.15 = 45$ équations précédentes des quinze surfaces $S^{2.3}$, nous changeons le signe de l'un des deux polynomes F^3 qu'elle contient, nous aurons les équations des quarante-cinq surfaces du sixième degré $\Sigma^{2.3}$ du n° **29**.

Cela posé, nous sommes évidemment en mesure de dire que les dix surfaces $F^3_{(ijk)(lmn)} \equiv F^3_{(\mathrm{ILM})(\mathrm{JKN})}$, les quinze surfaces $S^{2.3}_{ij} \equiv S^{2.3}_{\mathrm{IJ,KL,MN}}$ et les quarante-cinq surfaces $\Sigma^{3.3}_{ij,kl} \equiv \Sigma^{2.3}_{\mathrm{KM,LN}}$ du sixième degré font une configuration semblable et ayant toutes les propriétés analogues aux propriétés, déduites des identités des n^{os} **10** et **11**, de la configuration formée par les dix couples $F_{(ilm)(jkn)} \equiv F_{(\mathrm{IJK})(\mathrm{LMN})}$ de faces opposées de l'hexacoryphe; les quinze surfaces $S^2_{\mathrm{IJ}} \equiv S^2_{ij,kl,mn}$ et les quarante-cinq surfaces $\Sigma^2_{\mathrm{IJ,KL}} \equiv \Sigma^2_{km,ln}$ du second degré. Il faut remarquer que, dans cette nouvelle configuration des surfaces du sixième degré F^3, $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$, chacun des indices 1, 2, 3, 4, 5, 6 est remplacé suivant une quelconque des manières possibles par un des indices I, II, III, IV, V, VI, et réciproquement. C. Q. F. D. (n° **30**).

34. Comme de la configuration des surfaces du second degré S^2, Σ^2 et des couples des faces opposées de l'hexacoryphe nous avons formé la configuration des surfaces du sixième degré $S^{2.3}$, $\Sigma^{2.3}$ et F^3, de même de cette dernière configuration nous pouvons former une nouvelle configuration des surfaces du 2.3^e degré, et ainsi de suite on peut former une suite infinie de configurations des surfaces de degrés 2.3^n, semblables et ayant toutes les propriétés analogues aux propriétés de la configuration des surfaces du second degré S^2, Σ^2 et des couples de faces opposées de l'hexacoryphe qui sont conséquences des identités des n^{os} **10** et **11**.

35. Au lieu de prendre les troisièmes puissances des dix polynomes

$$(ijk)(lmn) \equiv (\mathrm{ILM})(\mathrm{JKN})$$

et former les dix polynomes F^3 et puis les polynomes qui représentent les surfaces du sixième degré $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$, nous pouvons évidemment prendre les $(2p+1)^{\text{iemes}}$ puissances de ces mêmes polynomes

$$(ijk)(lmn) \equiv (\mathrm{ILM})(\mathrm{JKN}).$$

Nous aurons alors une configuration de surfaces du $2.(2p+1)^{\text{ieme}}$ degré $S^{2(2p+1)}$, $\Sigma^{2(2p+1)}$ et F^{2p+1} ayant toutes les propriétés de la configuration des surfaces du sixième degré $S^{2.3}$, $\Sigma^{2.3}$ et F^3, qui sont conséquences des identités du n° **31**.

Les surfaces de cette configuration auront pour points multiples du $(2p+1)^{\text{ieme}}$ ordre les six sommets de l'hexacoryphe; de même les surfaces $S^{2(2p+1)}$ auront les propriétés du n° **25**, mais la configuration des surfaces $S^{2(2p+1)}$, $\Sigma^{2(2p+1)}$, F^{2p+1} n'aura pas les propriétés des surfaces $S^{2.3}$, $\Sigma^{2.3}$ et F^3, qui sont conséquences de l'identité

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - (\alpha + \beta + \gamma)^3 = -3(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha).$$

C'est cette identité et les identités des n$^{\text{os}}$ **10** et **11** qui nous donnent aussi cette dernière propriété des surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$.

36. Les points de chacune des quinze surfaces $S^{2.3}_{ij} \equiv S^{2.3}_{\mathrm{IJ,KL,MN}}$ et des quarante-cinq surfaces $\Sigma^{2.3}_{ij,kl} \equiv \Sigma^{2.3}_{\mathrm{KM,LN}}$ du sixième degré peuvent être associés en couples $(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$ et les surfaces du second degré qui passent par les six sommets de l'hexacoryphe et par le point P d'une surface $S^{2.3}$ ou $\Sigma^{2.3}$ passent par un autre point de cette surface qui est l'associé P′ de P.

Les droites déterminées par les divers couples de points associés $(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$ de chacune des surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ forment une congruence dont toutes les droites rencontrent deux fois la cubique φ déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe. Chaque droite joignant deux points associés $(\mathrm{P}, \mathrm{P}')$ d'une surface $S^{2.3}$ ou $\Sigma^{2.3}$ rencontre cette surface suivant quatre autres points associés en deux couples.

Réciproquement, chaque droite rencontrant deux fois la cubique φ rencontre chacune des soixante surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ suivant trois couples de points associés. Donc, les soixante congruences déterminées par les divers couples de points associés de chacune des soixante surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ se confondent en une seule qui est la congruence, prise trois fois, des droites qui rencontrent suivant deux points la cubique φ déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe.

37. Chaque surface du second degré passant par les six sommets de l'hexacoryphe rencontre chacune des soixante surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ suivant une courbe variable du douzième degré ayant les six sommets de l'hexacoryphe pour points triples. Les points de chacune de ces soixante courbes du douzième degré sont associés en couples et les droites déterminées par les divers couples de ces points sont les génératrices des soixante surfaces réglées du sixième degré ayant pour ligne triple la cubique φ.

Ces soixante surfaces réglées du sixième degré se confondent en une seule, qui est la surface sécante, prise trois fois, quand cette surface sécante du second degré passe par la cubique φ.

Si la surface sécante du second degré passe par une des courbes du quatrième degré situées sur une surface $S^{2.3}$ ou $\Sigma^{2.3}$, elle rencontre cette surface suivant cette courbe du quatrième degré et suivant une courbe du huitième degré ayant pour points doubles les six sommets de l'hexacoryphe.

Les points de chacune de ces deux courbes sont associés en couples. Les droites déterminées par les divers couples de points associés de la courbe du quatrième degré sont les génératrices de la surface du second degré qui passe par cette courbe du quatrième degré et par la cubique φ. De même, les droites déterminées par les divers couples de points associés de la courbe du huitième degré sont les génératrices d'une surface du quatrième degré ayant pour ligne double la cubique φ. Si la surface sécante du second degré rencontre une des surfaces $S^{2.3}$ ou $\Sigma^{2.3}$ suivant trois courbes du quatrième degré, les points de ces courbes seront associés en couples, et les droites déterminées par ces couples de points associés seront les génératrices des trois surfaces du second degré qui passent par la cubique φ et une de ces trois courbes du quatrième degré.

Les courbes du trente-sixième degré L et A (nos **27** et **28**) et aussi toutes les courbes suivant lesquelles les surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$ se coupent, prises deux à deux, ont évidemment leurs points associés en couples. Si l'une quelconque de ces courbes se compose de plusieurs autres courbes d'un degré moins élevé, les points de ces courbes seront aussi associés en couples. Les droites déterminées par ces couples de points associés sont les génératrices de surfaces réglées d'un degré égal à la moitié du degré de la courbe conduisante.

Il faut remarquer que, de même que les surfaces $S^{2.3}$ et $\Sigma^{2.3}$, toute surface du sixième degré représentée par une équation de la forme

$$\begin{gathered}(\lambda a_1 + \mu b_1)^3 x_1^3 + (\lambda a_2 + \mu b_2)^3 x_2^3 + (\lambda a_3 + \mu b_3)^3 x_3^3 \\ + (\lambda a_4 + \mu b_4)^3 x_4^3 + (\lambda a_5 + \mu b_5)^3 x_5^3 + (\lambda a_6 + \mu b_6)^3 x_6^3 = 0,\end{gathered}$$

où (n° **16**)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 x_5 + a_6 x_6 = 0$$

et

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 x_5 + b_6 x_6 = 0,$$

sont les deux identités indépendantes entre elles qui lient les six polynomes x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 et $\lambda : \mu$ un paramètre arbitraire, aura ses points associés en couples tels que les droites déterminées par ces couples de points associés rencontrent, chacune suivant deux points, la cubique φ déterminée par les six sommets de l'hexacoryphe.

Les propriétés et les configurations que font ces nouvelles surfaces du sixième degré sont des conséquences des identités des nos **10**, **11** et **13**; mais, comme nous n'avons pas étudié les identités du n° **13**, nous n'entrerons pas non plus dans l'étude de ces surfaces.