JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL-J. SUCHAR

Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 8 (1902), p. 119-134.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1902_5_8__119_0>

Sur les équations différentielles linéaires de second ordre à coefficients algébriques;

PAR M. PAUL-J. SUCHAR,

Docteur ès Sciences.

M. Appell, à la fin de son Mémoire couronné *Sur les fonctions à multiplicateurs constants* (*Acta Mathematica*, t. XIII), fait quelques remarques sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques, dont l'intégrale générale peut cesser d'être uniforme sur la surface de Riemann correspondant à une relation algébrique donnée, en deux sortes de points : les points où certains des coefficients de l'équation deviennent infinis, et les points de ramification de la surface. Dans le domaine de chaque point critique il suppose que l'intégrale générale reste finie quand on l'a préalablement multipliée par une puissance convenable de $z-\alpha$ si α est un point critique ordinaire, ou par une puissance convenable de $\zeta-\gamma$, après avoir fait dans l'équation le changement $z-\alpha=(\zeta-\gamma)^m$, si α est un point de ramification et m l'ordre du point de ramification; il suppose de plus que l'équation fondamentale déterminante de M. Fuchs correspondant à ces points n'a que des racines entières. M. Appell classifie ces équations en trois espèces et il appelle *équations de première espèce* celles dont l'intégrale générale est partout finie, *de seconde espèce* celles dont l'intégrale générale n'a que des pôles et enfin *de troisième espèce* celles dont l'intégrale générale a des points critiques logarithmiques.

Je me propose, dans ce Mémoire, de former les équations dites *de première espèce*, en me bornant aux équations du second ordre et en supposant de plus que la surface de Riemann est hyperelliptique. Je dois cependant rappeler que, au moment où je me suis occupé de ce travail, il m'a été signalé par M. Appell qu'un travail sur le même sujet et signé par M. G. Vitali allait paraître dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XVI. J'ai pris connaissance d'un tirage à part de ce travail qui m'a été communiqué par mon maître M. Appell.

M. Vitali, dans son Mémoire, part de deux équations différentielles linéaires de second ordre, à coefficients algébriques, ayant le même groupe [1]; il forme le déterminant

$$y_1 t_2 - y_2 t_1$$

où y_1, y_2, t_1, t_2 sont les intégrales de deux équations formant un système fondamental; il suppose le groupe de deux équations tel que le déterminant précédent soit une fonction spéciale à multiplicateurs de M. Appell, ou bien soit nul. Les hypothèses que M. Vitali fait le conduisent à des types spéciaux des équations. J'ai cru être utile en poursuivant mes recherches commencées sans que mon travail soit une réédition de celui de M. Vitali.

1. Soit

$$s = \sqrt{(z - a_1)(z - a_2)\ldots(z - a_{2p+2})} \tag{1}$$

la relation algébrique donnée entre s et z et p le genre de la surface de Riemann correspondante.

Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = p_1 \frac{dy}{dz} + p_2 y, \tag{2}$$

où p_1 et p_2 sont deux fonctions rationnelles de z et de s.

Supposons que cette équation soit de première espèce et soient y_1

(1) *Voir*, pour la définition du groupe, Appell, *loc. cit.*, p. 168.

et y_2 deux intégrales de l'équation donnée formant un système fondamental. Désignons par y'_1 et y'_2 les dérivées par rapport à z de y_1 et y_2 et posons

$$(3) \qquad D = y_1 y'_2 - y_2 y'_1;$$

nous aurons

$$(4) \qquad D = Ce^{\int p_1 dz},$$

où C est une constante; on aura encore

$$(5) \qquad p_2 = \frac{y'_2 y''_1 - y'_1 y''_2}{D},$$

où y''_1, y''_2 sont les secondes dérivées de y_1 et y_2.

Les deux intégrales y_1 et y_2 étant de première espèce, leurs dérivées y'_1 et y'_2 ne deviendront infinies qu'aux points de ramification de la surface, et cela comme une puissance inférieure à l'unité, et au point à l'infini elles deviendront infiniment petites comme $\frac{1}{z^2}$.

Le déterminant D jouira évidemment des mêmes propriétés que y'_1 et y'_2; c'est-à-dire que si l'on pose

$$z - a_i = (\zeta - \gamma_i)^2,$$

et si l'on multiplie D par une puissance convenable de $(\zeta - \gamma_i)$, il restera fini au point considéré; il résulte alors que le déterminant D sera une fonction à multiplicateurs de M. Appell.

Si nous désignons par $u'(z)$ la dérivée d'une intégrale abélienne $u(z)$ de première espèce, le rapport

$$(6) \qquad \frac{e^{\int p_1 dz}}{u'(z)}$$

sera encore une fonction aux mêmes multiplicateurs [1]; il reste fini

---

[1] APPELL, *loc. cit.*, p. 22.

aux points de ramification et au point à l'infini, il devient infini aux zéros de $u'(z)$ en nombre de $2p-2$ dont $p-1$ sont dans un feuillet et les $p-1$ autres sont les superposés des premiers.

Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2p-2}$$

les zéros de $u'(z)$ et

$$\Pi_{\alpha_i\beta_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, 2p-2)$$

une intégrale normale abélienne de troisième espèce, devenant infinie au point α_i comme $-\log(z-\alpha_i)$ et au point β_i comme $\log(z-\beta_i)$. Nous aurons alors

$$\text{(7)} \qquad D = C u'(z) e^{\sum\limits_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i\beta_i} - 2u_1(z)},$$

où nous avons posé

$$u_1(z) = \mu_1 u^{(1)}(z) + \mu_2 u^{(2)}(z) + \ldots + \mu_p u^{(p)}(z)$$

et où

$$u^{(1)}(z), \quad u^{(2)}(z), \quad \ldots, \quad u^{(p)}(z)$$

sont les p intégrales abéliennes normales de première espèce.

Il peut se faire que le déterminant D soit une fonction spéciale de M. Appell; nous sommes alors amenés à partager les équations en deux groupes, et nous dirons simplement qu'une équation est de première espèce si le déterminant D est une fonction quelconque à multiplicateurs, et l'équation sera dite *de forme spéciale* si le déterminant D est une fonction spéciale à multiplicateurs.

Remarquons encore que si, dans l'équation, on fait le changement

$$y = Y e^{-u_1(z)},$$

$e^{-u_1(z)}$ étant une fonction spéciale de M. Appell, l'équation en Y aura pour déterminant

$$C u'(z) e^{\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i \beta_i}},$$

ou bien

$$C u'(z),$$

si elle était de forme spéciale; nous dirons alors que l'équation transformée est *de première espèce et de forme réduite* ou bien *spéciale et de forme réduite.*

2. Nous sommes maintenant en mesure de voir comment se comporte p_1 sur toute la surface. En effet, la formule (7) nous montre que p_1 ne peut avoir que des pôles de premier ordre qui sont tous à distance finie. En chaque point de ramification, le résidu doit être négatif et égal à -1, de sorte que, dans le domaine d'un point de ramification, p_1 sera de la forme

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{z-a_k} + \frac{a_{-1}^{k}}{(z-a_k)^{\frac{1}{2}}} + a_0^{(k)} + a_1^{(k)}(z-a_k) + \ldots$$

$$(k = 1, 2, \ldots, 2p+2),$$

tandis que, dans le domaine des autres points ordinaires qui sont des pôles pour p_1, les résidus doivent être entiers et positifs, et la somme de ces résidus sera égale à $2p-2$. Enfin, dans le domaine du point à l'infini, p_1 sera de la forme

$$-\frac{2}{z} + \frac{b_2^{(l)}}{z^2} + \frac{b_3^{(l)}}{z^3} + \ldots \qquad (l = 1, 2).$$

3. D'après ce qui précède il nous sera facile de reconnaître si une équation donnée de première espèce est de forme spéciale ou encore de la forme réduite. En effet, la fonction à multiplicateurs

$$e^{\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i \beta_i} - 2u_1(z)},$$

qui figure dans la formule (7) a pour zéros les points β_i et pour pôles les points α_i; or on sait que, entre ces zéros et ces pôles, il existe les

p relations suivantes [1] :

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{i=1}^{i=2p-2} \left| u^{(k)}(\beta_i) - u^{(k)}(\alpha_i) \right| \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}(b_{1k}\log m_1 + \ldots + b_{pk}\log m_p) \\ &\qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \end{aligned} \right.$$

Si l'équation n'est pas spéciale, il faut avoir

$$\sum_{i=1}^{i=2p-2} \left| u^{(k)}(\beta_i) - u^{(k)}(\alpha_i) \right| \neq 0.$$

On remarque que, dans cette formule, les points α_i sont les zéros de $u'(z)$, où $p-1$ points sont les superposés des $p-1$ autres; donc l'inégalité précédente sera satisfaite si les points β sont en nombre impair, ou, s'ils sont en nombre pair, il faut que deux points au moins ne soient pas superposés. Si, au contraire, l'équation donnée est de forme spéciale, il faut que les points β soient en nombre pair, qu'ils puissent se partager en deux groupes tels que les points du premier groupe soient les superposés des points du second, et il faut de plus que les résidus de deux points quelconques qui sont superposés soient égaux : il est bien entendu, comme nous l'avons déjà dit plus haut, que le nombre de points β est au plus égal à $2p-2$. Si ces conditions sont remplies, l'équation sera de forme spéciale.

En prenant la dérivée logarithmique de (7) et en ayant égard à la formule (4), on trouve, en général,

$$(9)\qquad p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z) + \frac{d}{dz}\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i\beta_i} - 2u_1'(z),$$

et si l'équation est de la forme réduite, on aura

$$p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z) + \frac{d}{dz}\sum_{i=1}^{i=2p-2} \Pi_{\alpha_i\beta_i}.$$

---

[1] Appell, *loc. cit.*, p. 13.

Dans le cas particulier où l'équation est de forme spéciale, on prendra pour p_1 la forme

$$(10) \qquad p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z) - 2u'_1(z),$$

pour éviter des points étrangers à la question; enfin, pour la forme spéciale réduite, on aura

$$p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z).$$

4. Il nous reste maintenant à chercher comment se comporte le second coefficient p_2 sur toute la surface. Nous allons apprendre d'abord comment il se comporte dans le domaine d'un point de ramification.

Nous laissons de côté le cas particulier où $p_2 = 0$; les équations admettent, comme l'a fait voir M. Appell ([1]), une intégrale qui est l'intégrale de première espèce d'une fonction à multiplicateurs constants. Faisons le changement de variable

$$(11) \qquad z - a_i = (\zeta - \gamma_i)^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p+2),$$

l'équation (2) se transforme en la suivante :

$$(12) \qquad \frac{d^2y}{d\zeta^2} = 2(\zeta - \gamma_i)\left[(p_1 + \frac{1}{2}\frac{1}{(\zeta - \gamma_i)^2}\right]\frac{dy}{d\zeta} + 4(\zeta - \gamma_i)^2 p_2 y.$$

Le déterminant analogue à D de l'équation (12) sera de la forme

$$(13) \qquad y_1\frac{dy_2}{d\zeta} - y_2\frac{dy_1}{d\zeta} = \varphi(\zeta, s),$$

où φ est une fonction finie et différente de zéro au point considéré. Si nous désignons par r_1 et r_2 les exposants auxquels appartiennent les deux intégrales y_1, y_2 considérées comme fonctions de ζ, s et qui

---

([1]) Appell, *loc. cit.*, p. 165.

forment un système fondamental : on sait que dans le domaine de ce point nous devons avoir ([1])

$$y_1 \frac{dy_2}{d\zeta} - y_2 \frac{dy_1}{d\zeta} = (\zeta - \gamma_i)^{r_1 + r_2 - 1} \psi(\zeta, s),$$

où la fonction ψ est finie et différente de zéro au même point; donc d'après (13) on doit avoir

$$r_1 + r_2 = 1.$$

Mais r_1 et r_2 sont les racines de l'équation fondamentale déterminante de M. Fuchs, correspondant à l'équation (12), et ces racines doivent être entières et positives; nous ne pourrons donc satisfaire qu'en posant

$$r_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad r_2 = 1.$$

Il résulte de là *que les deux intégrales qui forment un système fondamental de toute équation de second ordre, linéaire, à coefficients algébriques et de première espèce, appartiendront en chaque point de ramification de la surface, l'une à l'exposant zéro et l'autre à l'exposant un, après avoir fait dans l'équation le changement de variable donné par* (11).

Si nous nous rapportons à la formule (5), où nous ferons le changement de variable donné par (11), on trouve que p_2 dans le domaine de ce point sera de la forme

$$(14) \qquad \frac{A_{-2}}{(\zeta - \gamma_i)^2} + \frac{A_{-1}}{(\zeta - \gamma_i)} + A_0 + A_1(\zeta - \gamma_i) + \dots,$$

ou bien encore

$$(15) \qquad \frac{A_{-2}}{(z - a_i)} + \frac{A_{-1}}{(z - a_i)^{\frac{1}{2}}} + A_0 + A_1(z - a_i)^{\frac{1}{2}} + \dots.$$

Nous remarquons qu'il n'existe pas d'équation particulière où le premier coefficient A_{-2} soit nul. En effet, supposons que la proposition

---

([1]) Tannery, *Propriétés des intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients variables* (*Thèses*, 1874).

ne soit pas vraie et soit $A_{-2} = 0$. Nous avons vu que les deux intégrales y_1 et y_2, considérées comme fonctions de ζ et s, seront développées dans le domaine de ce point par les séries

$$(16)\qquad \begin{cases} y_1 = c_{10} + c_{11}(\zeta - \gamma_i) + \Sigma c_{1k}(\zeta - \gamma_i)^k, \\ y_2 = c_{21}(\zeta - \gamma_i) + \Sigma c_{2k}(\zeta - \gamma_i)^k. \end{cases}$$

Dans la première série les coefficients c_{10} et c_{11} sont nécessairement différents de zéro et dans la seconde le coefficient c_{21} sera différent de zéro. Cela est évident pour les coefficients c_{10} et c_{21}, il en sera de même pour c_{11}, car la dérivée de y_1, considérée comme fonction de z, et s doit devenir au point a_i infinie comme une puissance inférieure à l'unité. Donc pour que A_{-2} soit nul, en se rapportant à la formule (5), il faut que le nombre k dans les deux séries (16) soit au moins égal à 3. L'équation (12) doit être satisfaite, en particulier, par la première série de (16); mais si l'on substitue cette série dans (12) et qu'on *identifie*, on trouve que c_{11} doit être nul, ce qui est impossible; donc on ne peut pas satisfaire par une pareille série; on en conclut alors qu'il n'existe pas d'équation particulière où le coefficient A_{-2} soit nul.

5. Nous venons de voir comment se comporte p_2 dans le domaine d'un point de ramification, voyons maintenant comment il se comporte dans le domaine d'un point ordinaire β. Supposons d'abord que p_1 a l'unité pour résidu dans le domaine de chaque point β; alors le déterminant D n'aura que des zéros simples à distance finie. Si nous désignons encore par r_1 et r_2 les racines de l'équation de M. Fuchs, nous aurons

$$r_1 + r_2 = 2,$$

où nous ne pouvons satisfaire qu'en posant

$$r_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad r_2 = 2.$$

Il résulte alors que, si p_1 devient infini en $2p - 2$ points ordinaires, l'équation admet, en ces $2p - 2$ points, deux intégrales qui forment un système fondamental, et l'une d'elles appartient à l'exposant zéro et l'autre à l'exposant 2. En nous rapportant à la formule (5), on trouve que, dans le domaine de l'un de ces points β, p_2 sera de la forme

$$(17)\quad \frac{A_{-1}^{(i)}}{z-\beta_i}+A_0^{(i)}+A_1^{(i)}(z-\beta_i)+\ldots \qquad (i=1, 2, \ldots, 2p-2).$$

Supposons maintenant que le nombre des points β soit inférieur à $2p-2$, le coefficient p_1 deviendra alors infini en des points où le résidu correspondant est supérieur à 1. Soient β_i un de ces points et λ_i le résidu correspondant; le point β_i sera un zéro de D d'un ordre égal à λ_i; nous aurons alors, en appelant, comme tout à l'heure, r_1 et r_2 les racines de l'équation de M. Fuchs,

$$r_1+r_2=\lambda_i+1,$$

ou

$$r_2=(\lambda_i+1)-r_1.$$

Le nombre r_1 peut recevoir toutes les valeurs entières

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \frac{\lambda_i}{2},$$

si le nombre λ_i est pair, ou bien toutes les valeurs

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad \frac{\lambda_i-1}{2},$$

si λ_i est impair.

Nous aurons alors pour p_2 un développement de la forme

$$(18)\quad \frac{|(\lambda_i+1)-r_1|r_1}{(z-\beta_i)^2}+\frac{A_{-1}^{(i)}}{(z-\beta_i)}+A_0^{(i)}+A_1^{(i)}(z-\beta_i)+\ldots.$$

Dans le cas particulier où l'équation admet en tous les points β une intégrale qui appartient à l'exposant zéro, le coefficient p_2 aura un développement analogue à (17). Nous remarquons encore qu'il existe des équations où le coefficient p_2 reste fini dans le domaine d'un point β, puisque l'équation pourra être satisfaite par une intégrale de la forme

$$y_1=c_{10}+\sum c_{1k}(z-\beta_i)^k,$$

où k est au moins égal à 3.

6. Nous avons appris comment p_2 se comporte sur toute la surface de Riemann à distance finie, il nous reste à examiner comment il se comporte au point à l'infini. Si l'on pose $z = \frac{1}{t}$ et qu'on forme le déterminant analogue à D de l'équation transformée, on trouve que ce déterminant reste fini et différent de zéro pour $t = 0$; donc, au point à l'infini, les deux intégrales qui forment un système fondamental appartiendront l'une à l'exposant zéro et l'autre à l'exposant 1. Le coefficient p_2 dans le domaine de ce point sera de la forme

$$A_4 t^4 + A_5 t^5 + \ldots,$$

ou

$$\frac{A_4}{z_4} + \frac{A_5}{z_5} + \ldots. \tag{19}$$

La remarque que nous avons faite sur les points de ramification s'applique aussi pour le point à l'infini et l'on trouve que le coefficient A_4 doit être nécessairement différent de zéro.

7. Nous savons maintenant comment se comporte p_2 sur toute la surface. Il nous sera facile de le former.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où p_2 aura, dans le domaine des points β, un développement de la forme (17). Considérons alors la différence

$$p_2 - u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i M_i \Pi_{\alpha_i\beta_i}, \tag{20}$$

où $u'(z)$ est la dérivée de l'intégrale $u(z)$, abélienne de première espèce, ayant les points α_i pour zéros; $\Pi_{\alpha_i\beta_i}$ est une intégrale normale de troisième espèce et M_i sont des constantes, l'indice i se rapportant à tous les points β.

Nous pouvons disposer des constantes M_i pour que l'expression précédente reste finie en tous les points β, elle ne deviendra alors infinie qu'aux points de ramification, et cela de la manière que nous l'avons dit; enfin, à l'infini, elle devient infiniment petite comme $\frac{1}{z^4}$. Nous remarquons alors que cette expression a, à distance finie, $4p-4$ zéros, et il est facile de s'assurer que ces zéros ne sont pas arbitraires; ils se partagent, en effet, en deux groupes de points de $2p-2$ points et tels que les points du premier groupe sont les superposés des points du second.

Nous pouvons alors former deux intégrales abéliennes de première espèce $u_2(z)$ et $u_3(z)$, telles que les dérivées aient pour zéros les $4p-4$ zéros de l'expression (20); elle ne différera du produit $u'_2(z)\,u'_3(z)$ que par une constante C.

Nous aurons alors

$$(21) \qquad p_2 = u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i \mathrm{M}_i \Pi_{\alpha_i\beta_i} + \mathrm{C}u'_2(z)u'_3(z).$$

Admettons maintenant qu'il y ait des points β où p_2 ait un développement de la forme (18). Soit alors

$$\mathrm{Z}_{\beta_k}$$

une intégrale abélienne normale de seconde espèce, devenant, au point β_k, infinie comme

$$-\frac{1}{z-\beta_k} + \mathrm{C}_0 + \mathrm{C}_1(z-\beta_k) + \ldots;$$

désignons par Z'_{β_k} la dérivée de Z_{β_k} par rapport à z et considérons l'expression

$$(22) \qquad p_2 - u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i \mathrm{M}_i \Pi_{\alpha_i\beta_i} - u'(z)\sum_k \frac{|(\lambda_k+1)-r_1|r_1}{u'(\beta_k)}\mathrm{Z}'_{\beta_k},$$

où l'indice k se rapporte aux points β pour lesquels p_2 a un développement de la forme (18), λ_k est le résidu correspondant à un de ces points β, enfin l'indice i se rapporte aux points où p_2 a un développement de la forme (17) et aux points qui proviennent de l'indice k.

Nous pouvons encore disposer des constantes M_i pour que l'expression (22) soit finie en tous les points β, elle ne deviendra plus infinie qu'aux points de ramification de la manière montrée plus haut, et à l'infini, infiniment petite comme $\frac{1}{z^3}$. L'expression (22) ne différera alors du produit $u'_2(z)\,u'_3(z)$ que par une constante; nous aurons

$$p_2 = u'(z)\frac{d}{dz}\sum_i \mathrm{M}_i\,\Pi_{\alpha_i \beta_i}$$
$$- u'(z)\sum_k \frac{|(\lambda_k+1)-r_1|r_1}{u'(\beta_k)} Z'_{\beta_k} + \mathrm{C}u'_2(z)\,u'_3(z).$$

8. Nous allons terminer par un cas particulier où nous montrerons qu'il existe des équations de première espèce dont les coefficients sont rationnels en z seulement.

Supposons que l'on veuille former une équation de forme spéciale qui jouisse des propriétés suivantes : en tous les points critiques ordinaires l'équation admet deux intégrales formant un système fondamental, dont l'une appartient à l'exposant zéro; de plus, en tous ces points, l'intégrale qui appartient à l'exposant zéro doit être de la forme

$$y_1 = c_{10} + \sum c_{1k}(z-\beta_k)^k,$$

où k est au moins égal à 3. Il en résulte, d'après ce que nous avons vu, que le coefficient p_2 sera fini en tous ces points critiques; donc p_2 ne deviendra infini à distance finie qu'aux points de ramification et à l'infini infiniment petit comme $\frac{1}{z^3}$; donc p_2 ne différera du produit $u'_2(z)\,u'_3(z)$ que par une constante; donc p_2 sera une fonction rationnelle de z seulement. Supposons, en particulier, que l'équation soit non seulement de forme spéciale, mais encore de forme réduite; alors le coefficient p_1 est aussi rationnel en z seulement; il sera de la forme

$$p_1 = \frac{d}{dz}\log u'(z),$$

et l'équation cherchée sera

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d}{dz}\log u'(z)\frac{dy}{dz} + \mathrm{C}u'_2(z)\,u'_3(z)\,y.$$

Remarquons encore que, si le genre de la surface est 1, toutes les équations de première espèce seront de la forme spéciale ou de la forme réduite. En effet, la dérivée d'une intégrale abélienne de première espèce est sans zéro à distance finie, donc p_2 sera rationnelle en z et de la forme

$$p_2 = \mathrm{C}u'^2(z),$$

et l'équation la plus générale appartenant au genre 1 sera

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \left|\frac{d}{dz}\log u'(z) + \mathrm{A}u'(z)\right|\frac{dy}{dz} + \mathrm{C}u'^2(z)y.$$

9. Dans les numéros précédents, nous avons appris comment doivent être les coefficients d'une équation pour qu'elle soit de première espèce. Dans ce dernier numéro, nous allons démontrer une proposition concernant les équations qui ont un même groupe, donné d'avance (¹). Nous remarquons que, si l'on impose à une équation d'être de première espèce et d'avoir un groupe donné, la forme générale des coefficients de l'équation ne sera pas modifiée. En effet, connaissant le groupe de l'équation, on connaît aussi les multiplicateurs du déterminant D; alors la seule différence qui existera c'est que les zéros de D ne sont plus arbitraires; parmi ces points, qui sont des zéros de D, il y aura $p - 2$ points arbitraires; dès qu'on connaît les points α_i qui sont les zéros de $u'(z)$, les p autres points dépendront de tous ces points ainsi que du groupe de l'équation. On remarque encore qu'il n'y a aucun changement à apporter si le groupe de l'équation est tel que l'équation correspondante soit de forme spéciale, car les zéros de D forment alors, comme nous l'avons dit au début, un groupe spécial.

Revenons maintenant à la proposition que nous avons en vue.

Je dis qu'il existe $p - 1$ équations simplement de première espèce ayant un même groupe et qui sont linéairement indépendantes, et p dans le cas où elles sont de formes spéciales ou de formes spéciales et réduites.

Nous dirons que k équations ayant un même groupe donné sont

(¹) Appell, *loc. cit.*, p. 168.

linéairement indépendantes s'il n'existe aucun système de constantes pour lesquelles on puisse avoir

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_k y_k = 0,$$

où

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_k$$

sont des intégrales de k équations.

Soient alors

$$y_{1i}, \quad y_{2i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

deux intégrales formant un système fondamental d'un groupe de $p-1$ équations. Désignons par

$$p_{11}, \quad p_{12}, \quad \ldots, \quad p_{1\,p-1}$$

les coefficients de $\frac{dy}{dz}$ de ces $p-1$ équations. Le groupe de ces équations étant donné, nous savons que ces coefficients deviennent infinis en $p-2$ points arbitraires. Soient

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_{p-2}$$

les infinis arbitraires du coefficient p_{11}, et supposons qu'aucun de ces points ne rende infinis les autres coefficients. Supposons encore qu'il existe un système de constantes telles que l'on puisse avoir

$$c_1 y_{11} + c_2 y_{12} + \ldots + c_{p-1} y_{1\,p-1} = 0,$$
$$c_1 y_{21} + c_2 y_{22} + \ldots + c_{p-1} y_{2\,p-1} = 0;$$

des conditions imposées aux points β il résulte que les deux intégrales y_{11} et y_{21} de la première équation appartiendront aux exposants 0 et 2 et les intégrales des autres équations appartiendront aux exposants 0 et 1 dans le domaine de tous ces points β; admettons que les intégrales dont le premier indice est 1 appartiennent à l'exposant zéro. Nous aurons alors

$$c_1 \frac{d}{dz} y_{21} + c_2 \frac{d}{dz} y_{22} + \ldots + c_{p-1} \frac{d}{dz} y_{2p-1} = 0.$$

Si dans cette relation nous remplaçons z par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-2}$, nous aurons les $p-2$ équations linéaires et homogènes

$$c_2 \left| \frac{d}{dz} y_{22} \right|_{\beta_i} + c_3 \left| \frac{d}{dz} y_{23} \right|_{\beta_i} + \ldots + c_{p-1} \left| \frac{d}{dz} y_{2p-1} \right|_{\beta_i} = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p-2),$$

et, comme leur déterminant est différent de zéro, sans quoi il établirait une relation entre les $p-2$ points β qui sont arbitraires, on aura alors

$$c_2 = c_3 = \ldots = c_{p-1} = 0.$$

Un raisonnement analogue nous conduirait à p équations linéairement indépendantes si les équations étaient de formes spéciales.

La même proposition pourra encore être établie comme il suit.

Il est évident que deux systèmes d'équations simplement de première espèce ou de formes spéciales ayant deux groupes différents auront le même nombre d'équations linéairement indépendantes. Il est encore évident que ce nombre sera le même, quelles que soient les valeurs que l'on donnera aux coefficients arbitraires qui figurent dans le coefficient p_2 de ces équations. Nous pouvons alors disposer du groupe ainsi que des coefficients arbitraires, pour que les coefficients p_2 dans les équations du second système soient nuls sans que ces équations changent de type. Le nombre des équations linéairement indépendantes du premier système sera le même que celui du second système. Or ce dernier système a pour intégrales des intégrales de fonctions à multiplicateurs de première espèce, et l'on sait que le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes est $p-1$ ou p (1), selon que les équations sont simplement de première espèce ou de formes spéciales.

Paris, 25 août 1901.

---

(1) APPELL, *loc. cit.*, p. 25.