JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les fonctions abéliennes singulières ; (troisième mémoire)

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 97-123.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__97_0>

Sur les fonctions abéliennes singulières;

(Troisième Mémoire)

PAR M. G. HUMBERT.

Les couples de périodes normales des fonctions abéliennes auxquelles conduit le problème d'inversion, appliqué à une courbe de genre deux, sont du type

$$(1,0);\quad (0,1);\quad (g,h);\quad (h,g');$$

et si g_1, h_1, g'_1 désignent les parties imaginaires de g, h, g', la quantité

$$h_1^2 - g_1 g'_1$$

est *essentiellement négative.*

Existe-t-il des fonctions uniformes de deux variables, admettant quatre couples de périodes du type précédent, *dans le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ serait positif?*

Ce sujet se lie étroitement à la théorie des fonctions abéliennes singulières, qui a fait l'objet de deux Mémoires publiés dans ce Journal (5e série, t. V et VI) : les fonctions dont il s'agit d'entreprendre l'étude n'existent, en effet, que si g, h, g' vérifient une de ces relations qui caractérisent les fonctions abéliennes singulières

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

où A, ..., E sont des entiers.

C'est pour cette raison que nous désignerons les fonctions à étudier sous le nom de *fonctions quadruplement périodiques singulières*, en gardant celui d'*abéliennes* pour les fonctions qui correspondent au cas de $h_1^2 - g_1 g'_1$ négatif.

La théorie de la *transformation* établit entre les deux classes de fonctions un lien plus intime encore : les transformations singulières *de degré négatif*, dont nous avons réservé explicitement l'étude, font passer d'un système de périodes pour lequel $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif à un système analogue pour lequel $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif, et réciproquement; en d'autres termes, les fonctions abéliennes singulières et les fonctions quadruplement périodiques singulières se transforment ainsi les unes dans les autres.

Les divers paragraphes du présent Mémoire ont pour objets principaux :

1° La recherche des conditions d'existence des fonctions quadruplement périodiques singulières, et leur expression par des quotients de fonctions intermédiaires nouvelles;

2° La transformation de ces fonctions, et les transformations de degré négatif des fonctions abéliennes singulières;

3° Les propriétés principales des nouvelles fonctions intermédiaires;

4° L'étude du cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est nul : je montre qu'il y a alors dégénérescence ou réduction du nombre des périodes.

Nota. — Les numéros de ce Travail font suite à ceux de nos deux Mémoires précédents; pour indiquer un renvoi à un numéro du premier ou du second, nous ferons précéder le nombre correspondant du chiffre romain I ou II.

Existence et expression des fonctions quadruplement périodiques singulières.

231. Soit $(1,0)$; $(0,1)$; (g,h); (h,g') un système de périodes pour les variables u et v, avec la condition fondamentale

$$(1)\qquad h_1^2 - g_1 g'_1 > 0,$$

g_1, h_1, g'_1 désignant les parties imaginaires de g, h, g'. Il résulte d'un beau théorème de M. Appell (*Journal de Mathématiques*, 4[e] série, t. VII) que toute fonction uniforme $F(u, v)$, admettant les quatre paires de périodes précédentes, est le quotient de deux fonctions *entières* de u, v, appartenant à la classe des *fonctions intermédiaires*, c'est-à-dire se reproduisant, multipliées par une exponentielle $e^{\lambda u+\mu v+\nu}$, quand u et v augmentent d'une période.

En multipliant une fonction intermédiaire par une exponentielle,

$$e^{au^2+2buv+cv^2+du+fv},$$

on peut déterminer les constantes a, b, c, d, f de manière que le produit obtenu, $\varphi(u, v)$, vérifie (I, n° **20**) les relations

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v),\\ \varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)e^{\theta u},\\ \varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)e^{\lambda u+\mu v+\nu},\\ \varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)e^{\lambda' u+\mu' v+\nu'}.\end{aligned}\right.$$

Les deux premières de ces relations ne sont compatibles que si

$$\theta = -2\pi i n,$$

n étant entier; de même la première et la seconde, combinées successivement avec les deux autres, donnent

$$\lambda = -2\pi i l; \qquad \lambda' = 2\pi i l';$$
$$\mu = 2\pi i(m - ng); \qquad \mu' = 2\pi i(m' - n'h),$$

l, m, l', m' étant entiers. Enfin, par la combinaison des deux dernières relations (2), on obtient

$$\lambda h + \mu g' = \lambda' g + \mu' h + 2\pi i q,$$

q étant entier. En y remplaçant λ, μ, λ', μ' par leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$(3)\qquad l'g + (m'+l)h - mg' - n(h^2 - gg') + q = 0.$$

232. Si les entiers l', $m'+l$, m, n, q sont nuls à la fois, la relation (3) est satisfaite quels que soient g, h, g' : dans ce cas, les quantités θ, μ, λ', qui figurent dans les équations (2), sont nulles; λ et μ' sont égaux à $-2\pi i l$, et dès lors ces équations (2) sont du type de celles qui caractérisent les fonctions thêta de u, v, formées avec les périodes $(1,0)$; $(0,1)$; (g,h); (h,g'). Mais cette conclusion est inadmissible, cas les séries thêta, construites avec ces périodes, sont divergentes à cause de l'inégalité fondamentale (1) : $h_1^2 - g_1 g'_1 > 0$.

Il est donc nécessaire, pour l'existence de fonctions $\varphi(u,v)$ vérifiant les relations (2), que les coefficients numériques dans l'équation (3) ne soient pas nuls simultanément, c'est-à-dire que les quantités g, h, g', $h^2 - gg'$ doivent être liées par une relation linéaire à coefficients entiers : c'est ce que j'ai appelé, dans les Mémoires I et II, une *relation singulière* entre les périodes.

233. Soit alors

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 \tag{4}$$

cette relation, les entiers A, B, ..., E étant supposés sans diviseur commun. En écrivant que le premier membre de (3) est identique à celui de (4), multiplié par un facteur entier, $-k$, on trouve

$$l' = -Ak; \quad m'+l = -Bk; \quad m = Ck; \quad n = Dk; \quad q = -Ek,$$

de sorte que les relations (2) deviennent

$$(5) \quad \begin{cases} \varphi(u+1,v) = \varphi(u,v), \\ \varphi(u,v+1) = \varphi(u,v)e^{-2\pi i Dku}, \\ \varphi(u+g,v+h) = \varphi(u,v)e^{-2\pi i[lu-(C-Dg)kv]+\nu}, \\ \varphi(u+h,v+g') = \varphi(u,v)e^{-2\pi i[Aku+(l+Bk+Dkh)v]+\nu'}. \end{cases}$$

La fonction $\varphi(u,v)$ est donc ce que j'ai appelé (II, n° **163**) une *fonction intermédiaire singulière*, formée avec les périodes g, h, g', liées par (4); les entiers l et k sont ses *indices*.

Il s'agit maintenant de chercher si de pareilles fonctions existent lorsque $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif : le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif a été complètement étudié dans les premiers Mémoires.

Invariant et réduction de la relation singulière.

234. Un certain nombre de résultats et de démonstrations, donnés par d'autres ou par nous pour le cas des périodes normales, s'étendent sans changement au cas actuel ($h_1^2 - g_1 g'_1 > 0$); indiquons les plus utiles pour notre objet.

235. La théorie ordinaire de la transformation, créée par M. Hermite, demeure applicable, dans les conditions suivantes :

Soit un premier système de fonctions uniformes à deux variables U et V, admettant les quatre couples de périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); (H, G'); soit de même un second système analogue, de variables u et v, et de périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'); on pose

$$U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v,$$

λ, λ', μ, μ' étant des constantes, et l'on cherche à déterminer ces constantes et les périodes g, h, g', en fonction de G, H, G', ou inversement, de manière qu'à un système u, v, donné aux périodes près, ne corresponde qu'un système U, V, aux périodes près.

La transformation est dite *ordinaire* lorsque, dans cette recherche, on fait abstraction de toute relation liant g, h, g'.

Les résultats fondamentaux obtenus par M. Hermite, pour les transformations ordinaires, subsistent alors même que $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif; rien n'est à changer aux démonstrations. Par exemple, pour une *transformation d'ordre k*, les périodes g, h, g' s'expriment, en fonction de G, H, G', par les équations classiques [où $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$]

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31}G + 2(db)_{03}H + (db)_{02}G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},\\
h &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [2(ad)_{03} - k]H + (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\
g' &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}G + 2(ac)_{03}H + (ac)_{02}G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\
h^2 - gg' &= \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31}G + 2(cd)_{03}H + (cd)_{02}G' + (cd)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},
\end{aligned}\right.$$

les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules; les a_i, b_i, c_i, d_i sont des entiers vérifiant les relations de la transformation d'ordre k:

$$\begin{aligned}(ad)_{01} + (bc)_{01} &= (ad)_{02} + (bc)_{02}\\ &= (ad)_{13} + (bc)_{13} = (ad)_{23} + (bc)_{23} = 0.\\ (ad)_{03} + (bc)_{03} &= (ad)_{12} + (bc)_{12} = k.\end{aligned}$$

De ces formules M. Hermite a déduit la suivante

$$h_1^2 - g_1 g_1' = \frac{k^2}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G_1'), \tag{7}$$

$\mathfrak{M}^2$ désignant une quantité réelle positive, et G_1, H_1, G_1', les parties imaginaires de G, H, G'. En d'autres termes, $h_1^2 - g_1 g_1'$ et $H_1^2 - G_1 G_1'$ sont toujours de même signe, c'est-à-dire que :

Une transformation ordinaire change une fonction quadruplement périodique singulière de U, V *en une fonction analogue de* u, v.

256. Pour compléter ce résultat, observons que la relation singulière (4), entre g, h, g', conduit, en vertu de (6), à une relation singulière entre G, H, G'; et réciproquement, si G, H, G' vérifient une relation singulière, il en est de même de g, h, g'.

Dès lors, on établit, comme dans mon premier Mémoire (nos **1-3**), que :

Une transformation ordinaire du premier ordre change la relation singulière (4)

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \tag{4}$$

où A, ..., E *sont des entiers sans diviseur commun, en une relation singulière analogue par rapport aux nouvelles périodes; dans cette opération, la quantité*

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

demeure invariable.

Nous l'appellerons encore l'*invariant* de la relation (4).

237. *Réciproquement,* il résulte des nos **4** à **13** du premier Mémoire que deux relations singulières de même invariant sont réductibles l'une à l'autre par une transformation ordinaire du premier ordre : les démonstrations ne font, en effet, aucune hypothèse sur le signe de $h_1^2 - g_1 g'_1$.

Dès lors, si Δ est son invariant, la relation singulière (4) peut se ramener au type

$$-\frac{\Delta}{4}g + g' = 0, \qquad \text{si } \Delta \text{ est de la forme } 4\text{N};$$

$$-\frac{\Delta - 1}{4}g + h + g' = 0, \qquad \text{si } \Delta \text{ est de la forme } 4\text{N} + 1.$$

Mais nous n'avons pas le droit de dire ici que l'invariant est un nombre essentiellement positif, car la démonstration (I, **14**) suppose $h_1^2 - g_1 g'_1$ négatif; nous parviendrons plus loin à ce résultat d'une manière différente.

Fonctions intermédiaires singulières.

238. Cela posé, pour étudier les fonctions intermédiaires singulières, nous avons le droit de supposer la relation singulière (4) ramenée au type

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0, \tag{8}$$

où α, β, γ sont entiers et sans diviseur commun. Dans ce cas, les relations (5), où l'on fait $\text{A} = \alpha$, $\text{B} = \beta$, $\text{C} = \gamma$, $\text{D} = \text{E} = 0$, deviennent

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v),\\ &\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[lu - k\gamma v] + \nu},\\ &\varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[k\alpha u + (l+\beta k)v] + \nu'};\end{aligned}\right.$$

et il s'agit de reconnaître s'il existe des fonctions uniformes entières vérifiant ces relations (9), dans lesquelles l et k désignent deux entiers, jusqu'ici arbitraires.

239. Imitons, à cet effet, la méthode de notre premier Mémoire (I, nos **21-29**), en distinguant deux cas, selon que la quantité δ

$$\delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2 \tag{10}$$

est nulle ou non.

Si $\delta = 0$, il faut que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant de (8), soit un carré parfait, $\beta^2 - 4\alpha\gamma = n^2$; on est alors placé dans un cas elliptique (I, n° **15**) et les fonctions $\varphi(u, v)$ correspondantes se réduisent, pour $\delta = 0$, à des fonctions thêta elliptiques d'une seule variable: la démonstration, donnée au n° **23** du premier Mémoire, est encore valable, car elle suppose seulement que $h_1^2 - g_1 g_1'$ n'est pas nul.

Laissant de côté le cas de $\delta = 0$, nous pouvons, puisque $\delta \gtrless 0$, faire dans la fonction $\varphi(u, v)$ le changement de variables

$$\begin{aligned} u &= -(l+\beta k)\mathrm{U} - k\gamma \mathrm{V}, \\ v &= \quad -k\alpha \mathrm{U} \quad - \quad l\mathrm{V}, \end{aligned}$$

et nous reconnaissons (I, n° **24**) que $\varphi(u, v)$ devient une fonction $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, vérifiant les relations

$$\left\{ \begin{aligned} &\theta(\mathrm{U}+1, \mathrm{V}) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}+1) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}), \\ &\qquad \theta(\mathrm{U}+\mathrm{G}, \mathrm{V}+\mathrm{H}) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i \delta \mathrm{U} + \mathrm{const.}}, \\ &\qquad \theta(\mathrm{U}+\mathrm{H}, \mathrm{V}+\mathrm{G}') = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})\, e^{2\pi i \delta \mathrm{V} + \mathrm{const.}}; \end{aligned} \right. \tag{11}$$

$$\theta\left(\mathrm{U} - \frac{l}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(\mathrm{U} + \frac{k\gamma}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{l+\beta k}{\delta}\right) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}). \tag{12}$$

On a posé, pour abréger,

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{G} &= -lg + k\gamma h, \\ \delta\mathrm{H} &= -lh + k\gamma g' = -k\alpha g - (l+\beta k)h, \\ \delta\mathrm{G}' &= \qquad\qquad\quad -k\alpha h - (l+\beta k)g'. \end{aligned}$$

Les relations (11) montrent que $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$ est une fonction thêta, de U, V, formée avec les périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); $(\mathrm{H}, \mathrm{G}')$;

pour qu'il existe de telles fonctions, deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

1° Si G_1, H_1, G'_1 désignent les parties imaginaires de G, H, G', il faut que $H_1^2 - G_1 G'_1$ soit négatif; or, en vertu des expressions ci-dessus,

$$\begin{aligned}\delta^2(H_1^2 - G_1 G'_1) &= [-k\alpha g_1 - (l+\beta k)h_1](-lh_1 + k\gamma g'_1) \\ &\quad -[-k\alpha h_1 - (l+\beta k)g'_1](-lg_1 + k\gamma h_1) \\ &= \delta(h_1^2 - g_1 g'_1).\end{aligned}$$

Ainsi $H_1^2 - G_1 G'_1$ a le signe de $\delta(h_1^2 - g_1 g'_1)$; comme, par hypothèse, $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif, il est nécessaire que l'on ait

$$(13) \qquad \delta < 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2 < 0.$$

2° En second lieu, δ, ordre de la fonction $\theta(U, V)$, doit avoir un signe contraire à celui de la partie imaginaire de G, c'est-à-dire que G_1 doit être positif :

$$(14) \qquad -lg_1 + k\gamma h_1 > 0.$$

Si les inégalités (13) et (14) sont vérifiées, il existe des fonctions thêta, $\theta(U, V)$, satisfaisant aux relations (11); il faut chercher maintenant si, parmi ces fonctions, on peut en trouver qui vérifient aussi les relations (12). Le raisonnement du n° **27** du Mémoire I s'applique encore sans modification, en remplaçant δ par sa valeur absolue, mod δ, et l'on reconnaît que les fonctions $\theta(U, V)$, vérifiant (11) et (12), sont des fonctions linéaires et homogènes de mod δ d'entre elles.

260. En résumé, les conditions (13) et (14)

$$\delta < 0 \qquad \text{et} \qquad -lg_1 + k\gamma h_1 > 0$$

sont nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des fonctions intermédiaires singulières vérifiant les relations (9), c'est-à-dire d'*indices* l et k, dans l'hypothèse où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est positif.

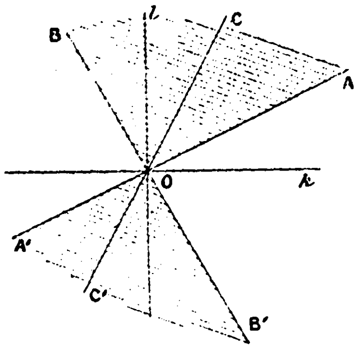
261. *Remarque*. — Pour que δ, c'est-à-dire $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, puisse être négatif, il est nécessaire que les racines de ce trinome en l et k soient réelles et inégales, c'est-à-dire que

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0.$$

En d'autres termes, l'*invariant* de la relation singulière qui lie les périodes doit être *positif*, comme dans le cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif.

262. Cela posé, on peut donner une autre forme à l'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$. A cet effet, regardons l et k comme les coordonnées

Fig. 1.



d'un point dans un plan, et construisons les deux droites *réelles*, AOA' et BOB', qui ont pour équation

$$l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = 0.$$

La condition $\delta < 0$ exprime que le point l, k n'est pas, par rapport aux droites AOA', BOB' dans la région qui contient l'axe des l, c'est-à-dire que ce point doit se trouver dans la région non ombrée.

Construisons de même la droite $-lg_1 + k\gamma h_1 = 0$; cette droite, COC', est dans la région ombrée, car si l'on fait $l = \gamma h_1$, $k = g_1$ dans le trinome $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve, en tenant compte de ce que $\alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1$ est nul, $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g'_1)$, quantité positive. L'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ ne sera donc vérifiée, *dans la région non ombrée,* que par les points de l'*un* des deux angles AOB' ou BOA'.

Pour reconnaître quel angle convient, observons que la droite

$2l + \beta k = 0$ est dans la région non ombrée, car si l'on fait $l = -\frac{1}{2}\beta$, $k = 1$ dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve $-\frac{1}{4}(\beta^2 - 4\alpha\gamma)$, résultat négatif. Remplaçons alors l et k par $-\frac{1}{2}\beta$ et 1 dans $-lg_1 + k\gamma h_1$, nous obtenons $\frac{1}{2}(2\gamma h_1 + \beta g_1)$; si cette quantité est positive, l'inégalité $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ sera vérifiée dans celui des deux angles AOB' et BOA' pour lequel la coordonnée k est positive; ce sera l'inverse si $2\gamma h_1 + \beta g_1 < 0$.

En résumé, les deux conditions $\delta < 0$ et $-lg_1 + k\gamma h_1 > 0$ sont équivalentes aux suivantes

$$\delta < 0 \quad \text{et} \quad k(2\gamma h_1 + \beta g_1) > 0; \tag{15}$$

et l'on peut énoncer ce théorème :

263. *Soit un système de périodes* $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), *entre lesquelles existe la relation singulière*

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

α, β, γ *étant entiers sans diviseur commun; désignons par* g_1, h_1, g'_1 *les parties imaginaires de* g, h, g', *et supposons*

$$h_1^2 - g_1 g'_1 > 0.$$

Pour qu'il existe des fonctions INTERMÉDIAIRES SINGULIÈRES, $\varphi(u, v)$, *d'indices* l *et* k, *c'est-à-dire vérifiant les relations*

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v)\\ &\varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i(lu - k\gamma v) + \nu},\\ &\varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[k\alpha u + (l+\beta k)v] + \nu'},\end{aligned}\right. \tag{9}$$

où ν *et* ν' *sont deux constantes données, il faut et il suffit :*

1° *Que les indices (entiers)* l *et* k *soient tels que la quantité*

$$l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$$

soit négative;

2° *Que l'indice k ait le signe de la quantité*

$$2\gamma h_1 + \beta g_1.$$

Les fonctions $\varphi(u, v)$ *vérifiant les relations précédentes s'expriment alors en fonction linéaire et homogène de* mod δ *d'entre elles,* δ *désignant* $l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2$.

Développements en série des fonctions intermédiaires.

264. En augmentant u et v de constantes convenables, on peut faire en sorte que, dans les équations (9), les constantes ν et ν' aient des valeurs particulières

$$\nu = -\pi i[lg - k\gamma h]; \qquad \nu' = -\pi i[k\alpha h + (l+\beta k)g'].$$

La fonction entière $\varphi(u, v)$, qui vérifie les deux premières relations (9), peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$\varphi(u, v) = \sum_{m,n} \mathrm{A}_{mn} e^{2\pi i(mu+nv)}.$$

Pour abréger les calculs ultérieurs posons (I, n° **39**)

$$\mathrm{A}_{mn} = \mathrm{B}_{mn} e^{\pi i[\mathrm{G}_0 m^2 + 2\mathrm{H}_0 mn + \mathrm{G}'_0 n^2]},$$

où G_0, H_0, G'_0 désignent les quantités

$$\mathrm{G}_0 = \frac{1}{\delta}[(l+\beta k)g + k\gamma h],$$

$$\mathrm{H}_0 = \frac{1}{\delta}[(l+\beta k)h + k\gamma g'] = \frac{1}{\delta}[-k\alpha g + lh],$$

$$\mathrm{G}'_0 \qquad\qquad = \frac{1}{\delta}[-k\alpha h + lg'].$$

En exprimant que la série $\varphi(u, v)$ vérifie les deux dernières relations (9), on trouve

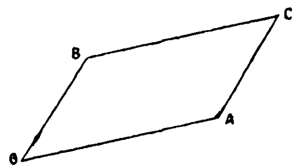
$$\mathrm{B}_{m,n} = \mathrm{B}_{m+l,\, n-k\gamma} = \mathrm{B}_{m-k\alpha,\, n+l+k\beta}.$$

Ainsi $B_{m,n}$ ne change pas quand on augmente m et n de l et $-k\gamma$, ou de $k\alpha$ et $l+k\beta$; géométriquement, si m, n sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, $B_{m,n}$ a la même valeur en tous les points homologues d'un réseau de parallélogrammes, construit sur les périodes $l-ik\gamma$, $k\alpha+i(l+k\beta)$. Construisons ce réseau à partir de l'origine, et appelons *parallélogramme principal* celui qui a pour sommets les points O, A, B, C de coordonnées :

$$\begin{array}{ll} \mathrm{O}: x=0, y=0; & \mathrm{B}: x=k\alpha, \quad y=l+k\beta; \\ \mathrm{A}: x=l, y=-k\gamma; & \mathrm{C}: x=l+k\alpha, y=-k\gamma+l+k\beta. \end{array}$$

L'aire de ce parallélogramme est $\bmod\delta$; il y a donc, à son intérieur et sur les côtés OA, OB, $\bmod\delta$ points de coordonnées entières; soit p, q un de ces points (parmi lesquels figure l'origine); à ce point et aux

Fig. 2.



points homologues du réseau correspondent, dans $\varphi(u,v)$, les termes pour lesquels $m=p+l\rho+k\alpha\sigma$, $n=q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma$, ρ et σ étant des entiers quelconques. La somme de ces termes est, à un facteur constant près, la série $\Phi_{p,q}(u,v)$:

$$\sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i[p+l\rho+k\alpha\sigma]u+2\pi i[q-k\gamma\rho+(l+\beta k)\sigma]v} \times e^{\pi i f(p+l\rho+k\alpha\sigma,\, q-k\gamma\rho+(l+\beta k)\sigma)},$$

$f(x,y)$ désignant la forme quadratique $G_0x^2+2H_0xy+G'_0y^2$; et ρ, σ prenant toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$. Comme p et q peuvent recevoir $\bmod\delta$ systèmes de valeurs, répondant aux points à coordonnées entières du parallélogramme principal, on voit que la fonction $\varphi(u,v)$ est une fonction linéaire et homogène des $\bmod\delta$ fonctions $\Phi_{p,q}(u,v)$, dont on a les développements en séries de Fourier. Ces séries sont convergentes comme on le reconnaît aisément en s'appuyant sur les inégalités $\delta<0$ et $-lg_1+k\gamma h_1>0$.

265. *Fonctions quadruplement périodiques singulières.* — Une quelconque de ces fonctions sera, d'après le théorème rappelé plus haut de M. Appell, le quotient de deux fonctions intermédiaires $\varphi(u, v)$, c'est-à-dire le quotient de deux combinaisons linéaires et homogènes de séries $\Phi_{p,q}(u, v)$, où l'on remplacera u et v par $u +$ const., $v +$ const. Ces séries, tant au numérateur qu'au dénominateur, correspondront aux mêmes valeurs des indices l et k, valeurs quelconques d'ailleurs, vérifiant seulement les inégalités fondamentales (15).

Transformation.

266. La théorie des transformations singulières, comprenant comme cas particulier celle des transformations ordinaires et telle que nous l'avons présentée dans notre second Mémoire (n$^{\text{os}}$ **136** et suivants), s'applique sans changement au cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est positif. Voici l'énoncé général du problème :

Soit un premier système de fonctions uniformes à deux variables, U *et* V, *admettant comme périodes les quantités* (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G'); *soit de même un second système analogue, de variables* u *et* v *et de périodes* (1, 0); (0, 1); (G, H); (H, G') : *les quantités* $H_1^2 - G_1 G_1'$ et $h_1^2 - g_1 g_1'$ *peuvent avoir un signe quelconque, c'est-à-dire que les fonctions du premier et du second système peuvent être soit abéliennes, soit quadruplement périodiques singulières. Il s'agit de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions du premier système s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions du second, et cela en établissant entre les variables des relations de la forme*

$$(1) \qquad U = \lambda u + \mu v, \qquad V = \lambda' u + \mu' v;$$

λ, μ, λ', μ' *désignant des constantes.*

Il résulte du Mémoire II que, si g, h, g' sont liés par une relation singulière

$$(2) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

les relations qui lient les périodes G, H, G′ et g, h, g' sont

$$G = \frac{(cd)_{02} + (ac)_{02} g + [(bc)_{02} + (da)_{02}] h + (db)_{02} g' + (ab)_{02}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + [(bc)_{23} + (da)_{23}] h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$G' = \frac{(cd)_{31} + (ac)_{31} g + [(bc)_{31} + (da)_{31}] h + (db)_{31} g' + (ab)_{31}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + [(bc)_{23} + (da)_{23}] h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$-H = \frac{(cd)_{03} + (ac)_{03} g + [(bc)_{03} + (da)_{03}] h + (db)_{03} g' + (ab)_{03}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + [(bc)_{23} + (da)_{23}] h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$H = \frac{(cd)_{12} + (ac)_{12} g + [(bc)_{12} + (da)_{12}] h + (db)_{12} g' + (ab)_{12}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + [(bc)_{23} + (da)_{23}] h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

$$H^2 - GG' = \frac{(cd)_{01} + (ac)_{01} g + [(bc)_{01} + (da)_{01}] h + (db)_{01} g' + (ab)_{01}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23} g + [(bc)_{23} + (da)_{23}] h + (db)_{23} g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},$$

où l'on a posé $(ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$.

Dans ces formules, les seize quantités a_i, b_i, c_i, d_i sont les *entiers caractéristiques* de la transformation; ils vérifient les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} (ac)_{03} + (ac)_{12} &= \mathrm{A}k, \\ (db)_{03} + (db)_{12} &= \mathrm{C}k, \\ (ab)_{03} + (ab)_{12} &= \mathrm{D}k, \\ (cd)_{03} + (cd)_{12} &= \mathrm{E}k, \\ (bc)_{03} + (bc)_{12} - (ad)_{03} - (ad)_{12} &= \mathrm{B}k, \end{aligned} \right.$$

k désignant un entier, d'ailleurs quelconque.

Inversement, g, h, g' et $h^2 - gg'$ sont donnés par des formules analogues (II, n° **138**), en fonction de G, H, G′ et H² − GG′; et l'on en déduit que si g, h, g' vérifient une relation singulière, il en est de même de G, H, G′ et réciproquement.

267. Le *degré* de la transformation est la valeur du déterminant $(a_0 b_1 c_2 d_3)$; nous le désignerons par δ.

Les *indices* de la transformation sont deux entiers, l et k :

$$(4) \qquad l = (ad)_{03} + (ad)_{12};$$

et k est l'entier qui figure dans les formules (3), avec la convention faite (II, n° **141**) pour préciser son signe.

Entre le degré et les indices existe la relation

$$(5) \qquad \delta = l^2 + Bkl + (AC + DE)k^2.$$

Si $k = 0$, la transformation est ordinaire; le degré est alors le carré de l'ordre, $\delta = l^2$.

Soit Δ l'invariant de la relation singulière (2) entre g, h, g'; soit de même Δ' celui de la relation singulière correspondante entre G, H, G': on a (II, n° **142**)

$$k^2 \Delta = k'^2 \Delta',$$

k' désignant un entier, ce qui montre que Δ et Δ' sont de même signe, comme cela devait être, puisque nous savons que l'invariant d'une relation singulière est positif, quel que soit le signe de $h_1^2 - g_1 g'_1$ (I, n° **14** et III, n° **261**).

268. *Signe du degré*. — A un *point* (u, v), c'est-à-dire à un système de valeurs de u, v, déterminées aux périodes près, la transformation considérée fait correspondre, par hypothèse, un seul point (U, V); inversement (II, n° **143**), à un point (U, V) elle fait correspondre un nombre de points (u, v) égal à son degré en valeur absolue, c'est-à-dire égal à mod δ.

Les indices l et k étant des entiers quelconques, et l'invariant

$$B^2 - 4AC - 4DE$$

étant positif, le nombre δ, donné par (5), peut être *soit positif, soit négatif*.

Il résulte, de plus, du Mémoire II (n° **144** ou n° **161**) que l'on a, entre les parties imaginaires des périodes g, h, g' et G, H, G', la relation

$$(6) \qquad h_1^2 - g_1 g'_1 = \frac{\delta}{\mathfrak{M}^2}(H_1^2 - G_1 G'_1),$$

où $\mathfrak{M}^2$ est une quantité réelle et positive.

De là cette conséquence importante que :

Les transformations de degré positif font passer d'un système *de fonctions abéliennes ou de fonctions quadruplement périodiques singulières à un système de même nature.*

Les transformations de degré négatif font passer d'un système de fonctions abéliennes à un système de fonctions quadruplement périodiques singulières, et réciproquement.

269. Les théorèmes et formules relatifs à la composition de deux transformations, à la réduction d'une transformation, à la transformation des fonctions intermédiaires singulières, subsistent sans modification, alors même que $h_1^2 - g_1 g_1'$ serait positif et δ négatif.

En particulier, les transformations de degré -1 sont données, à une transformation ordinaire près d'ordre un, par les formules (II, n° **166**)

$$(7) \qquad U = lu - \gamma k v, \qquad V = ku + (l + \beta k)v,$$

en supposant g, h, g' liés par la relation singulière (où $\alpha = 1$, comme on a le droit de l'admettre)

$$g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

Dans ces formules, l et k sont les indices de la transformation considérée; ils vérifient la relation $\delta = -1$, c'est-à-dire

$$(8) \qquad l^2 + \beta k l + \gamma k^2 = -1 \qquad \text{ou} \qquad (2l + \beta k)^2 - \Delta k^2 = -4.$$

Quant aux périodes des fonctions en U et V, elles ont pour expression

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} G &= lg - \gamma k h, \\ H &= lh - \gamma k g' = kg + (l + \beta k)h, \\ G' & = kh + (l + \beta k)g', \\ &\text{d'où} \\ -g &= (l + \beta k)G + \gamma k H, \\ -h &= (l + \beta k)H + \gamma k G' = -kG + lH, \\ -g' & = -kH + lG', \end{aligned} \right.$$

elles sont liées aussi par la relation

$$G + \beta H + \gamma G' = 0.$$

On démontre (II, n° **180**) que toutes ces transformations sont les puissances *impaires* d'une même transformation de degré -1.

270. De là résultent des conséquences intéressantes pour la théorie des fonctions quadruplement périodiques singulières.

1° Trois fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux mêmes périodes, sont liées par une relation algébrique. Car une transformation de degré négatif les change en trois fonctions abéliennes de u, v, aux mêmes périodes.

2° Soit un système de fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (G, H); (H, G'), ou plus simplement (G, H, G'). Pour que ce système admette des transformations de degré -1, il faut et il suffit, comme on le reconnaît par (8), que la forme

$$x^2 - \Delta y^2,$$

où Δ désigne l'invariant de la relation singulière en G, H, G', puisse représenter le nombre -4.

Si cette condition est réalisée, une quelconque des transformations correspondantes de degré -1 change *toute* fonction quadruplement périodique singulière de U, V, aux périodes (G, H, G'), en une fonction *abélienne* (n° **268**) de u, v, dont les périodes (g, h, g') sont liées à G, H, G' par (9). Réciproquement, la transformation inverse change *toute* fonction abélienne de u, v, aux périodes g, h, g', en une fonction quadruplement périodique singulière de U, V, aux périodes G, H, G' : dans ces transformations, les *points* u, v et U, V se correspondent d'une manière univoque.

En d'autres termes, *dans le cas considéré, la théorie des fonctions quadruplement périodiques singulières se confond exactement avec celle des fonctions abéliennes.*

Au point de vue de la théorie des surfaces, la conséquence est la suivante :

Appelons *surface hyperelliptique* toute surface algébrique pour laquelle les coordonnées d'un point sont des fonctions uniformes de deux paramètres à quatre paires de périodes : trois fonctions quadruplement périodiques singulières étant liées (1°) par une relation algébrique, déterminent ainsi une surface hyperelliptique; cette surface sera dite *générale* si, à un de ses points, ne répond qu'un système de valeurs des paramètres, aux périodes près.

D'après ce qui précède, si l'invariant Δ d'un système de fonctions quadruplement périodiques singulières est tel que la forme $x^2 - \Delta y^2$ puisse représenter -4, toute surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions de ce système, sera aussi une surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions abéliennes (singulières).

Les fonctions quadruplement périodiques considérées ne conduisent donc pas à de nouvelles surfaces hyperelliptiques *générales*.

3° Si la forme $x^2 - \Delta y^2$ ne peut représenter le nombre -4, les conclusions sont différentes.

Les fonctions quadruplement périodiques singulières de U, V, aux périodes (G, H, G') et d'invariant Δ, n'admettent pas alors de transformation de degré -1. Une transformation de degré négatif, δ, les change toujours en fonctions abéliennes de u, v; mais en fonctions abéliennes *particulières;* car à un système U, V, la transformation considérée fait correspondre mod δ systèmes u, v, qui se déduisent de l'un d'eux par l'addition de constantes (parties aliquotes de périodes); les fonctions abéliennes de u, v obtenues par cette transformation ne changent donc pas quand on augmente les variables, u et v, de certaines quantités, différentes des périodes.

Dès lors, une surface hyperelliptique *générale*, correspondant à des fonctions quadruplement périodiques singulières dont l'invariant Δ est tel que la forme $x^2 - \Delta y^2$ ne puisse représenter -4, ne sera jamais une surface hyperelliptique *générale* correspondant a des fonctions abéliennes. On suppose, bien entendu, que les périodes des fonctions singulières considérées ne sont liées que par une seule relation singulière.

On obtiendra donc, dans ce cas, de nouvelles surfaces hyperelliptiques *générales*, échappant, comme surfaces *générales*, à la représentation paramétrique par les fonctions abéliennes.

La liaison de ces surfaces avec la courbe de genre deux est la suivante : Une surface hyperelliptique générale, S, représentable par des fonctions abéliennes, correspond *point par couple* (II, n° **181**) à une courbe C, de genre deux, c'est-à-dire qu'à un point de S répond un couple sur C, et réciproquement. Si S n'est pas une surface générale, à un de ses points correspondent q systèmes d'arguments abéliens ($q > 1$), et par suite à un point de S répondent q couples sur C, tandis qu'à un couple de C ne répond toujours qu'un point de S.

Soit maintenant $-4N$ le plus petit multiple négatif de 4 (en valeur absolue) que puisse représenter la forme $x^2 - \Delta y^2$; il résulte de (8) qu'il existera des transformations de degré $-N$ pour les fonctions quadruplement périodiques singulières d'invariant Δ. Une de ces transformations changera les fonctions considérées de U, V en fonctions abéliennes de u, v, de manière qu'à un point U, V répondent N points u, v (n° **268**): une surface elliptique *générale*, représentable paramétriquement par les fonctions quadruplement périodiques en question, sera donc liée à une courbe C, de genre deux, de telle sorte qu'à un couple sur la courbe réponde un seul point de la surface, mais qu'à un point de la surface répondent N couples sur la courbe.

Propriétés des fonctions intermédiaires singulières.

271. Il s'agit, bien entendu, des fonctions intermédiaires singulières qui correspondent au cas où $h_1^2 - g_1 g_1'$ est positif; le cas de $h_1^2 - g_1 g_1'$ négatif a été traité dans les deux précédents Mémoires.

Soit toujours

$$(1) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0 \qquad (h_1^2 - g_1 g_1' > 0),$$

la relation singulière entre les périodes d'une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u, v)$, d'indices l et k; celle-ci vérifie les relations (5) du n° **253**

$$\begin{aligned}
\varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i D k u},\\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [lu - (C - Dg)kv] + \nu},\\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i [Aku + (l + Bk + Dkh)v] + \nu'}.
\end{aligned}$$

Opérons sur cette fonction une transformation d'indices l_1 et k_1, faisant passer des variables u, v aux variables u', v'; soit

$$(2)\qquad A_1 \mathcal{G} + B_1 \mathcal{H} + C_1 \mathcal{G}' + D_1(\mathcal{H}^2 - \mathcal{G}\mathcal{G}') + E_1 = 0,$$

la relation singulière entre les périodes de u', v'; désignons par Δ et Δ_1 les invariants des relations (1) et (2); la transformation considérée change $\varphi(u, v)$ en une fonction intermédiaire de u', v', aux périodes $(\mathcal{G}, \mathcal{H}, \mathcal{G}')$, et dont les indices l_2 et k_2 sont donnés par les relations (II, n° **165**) :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} 2k_2 &= k_1(2l + Bk) + \varepsilon_1 k\sqrt{\frac{\Delta}{\Delta_1}}(2l_1 + B_1 k_1), \\ 2(2l_2 + B_1 k_2) &= (2l + Bk)(2l_1 + B_1 k_1) + \varepsilon_1 k k_1 \sqrt{\Delta\Delta_1}; \end{aligned}\right.$$

formules dans lesquelles ε_1 désigne ± 1, selon une règle déterminée (II, n^{os} **165**, **142** et **149**).

272. *Corollaire.* — Deux fonctions intermédiaires singulières, correspondant à une même relation singulière (1), d'indices l et k, l' et k', ont toujours un nombre de zéros communs, abstraction faite des multiples des périodes, égal à la valeur absolue de

$$(4)\qquad 2ll' + B(kl' + lk') + 2(AC + DE)kk'.$$

Le théorème a été établi (II, n° **165**, *Remarque*) pour le cas de $h_1^2 - g_1 g_1' < 0$. Dans le cas contraire, une transformation de degré négatif, δ_1, change les deux fonctions de u, v considérées en fonctions analogues de u', v', pour lesquelles $\mathcal{H}_1^2 - \mathcal{G}_1\mathcal{G}_1'$ est négatif, et dont les indices, l_2 et k_2, l_2' et k_2' sont donnés par (3). De plus, à un système u', v' ne répond qu'un système u, v, tandis qu'à un système u, v répondent modδ_1 systèmes u', v'. Le nombre des zéros communs aux deux fonctions d'indices l_2 et k_2, l_2' et k_2', en u', v', étant par ce qui précède

$$(5)\qquad 2l_2 l_2' + B_1(k_2 l_2' + l_2 k_2') + 2(A_1 C_1 + D_1 E_1)k_2 k_2',$$

celui des zéros communs aux deux fonctions en u et v primitives, d'indices l et k, l' et k', s'obtiendra en divisant ce nombre par mod δ_1 : en remplaçant l_2, k_2, l'_2, k'_2 par leurs valeurs (3), on retombe ainsi sur le nombre (4), pris en valeur absolue. C. Q. F. D.

273. *Fonctions intermédiaires normales.* — En désignant par ω, ω', θ, θ' des nombres égaux à 0 ou 1, on donnera, pour les fonctions intermédiaires normales, d'indices l et k, et de caractéristique $(\omega, \theta, \omega', \theta')$ la même définition que dans le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$. Par exemple, en supposant la relation singulière entre g, h, g' ramenée au type

$$\alpha g + \beta h + g' = 0,$$

les équations auxquelles satisfont les fonctions intermédiaires normales, d'indices l, k, de caractéristique $(\omega, \theta, \omega', \theta')$, sont (I, n° **37**)

$$\begin{aligned}
F(u+1, v) &= e^{\omega\pi i} F(u, v), \\
F(u, v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u, v), \\
F(u+g, v+h) &= e^{\theta\pi i} F(u, v) e^{2\pi i[-lu+kv]+\pi i[-lg+kh]}, \\
F(u+h, v+g') &= e^{\theta'\pi i} F(u, v) e^{-2\pi i[k\alpha u+(l+k\beta)v]-\pi i[k\alpha h+(l+k\beta)g']}.
\end{aligned}$$

La caractéristique nulle est celle qui répond à $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

Parmi les fonctions intermédiaires, les seules qui puissent être paires ou impaires sont les fonctions normales.

274. Cela posé, les théorèmes sur le nombre des fonctions normales, paires et impaires, d'indices et de caractéristique donnés, qu'on a obtenus dans le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, s'étendent sans nouvelle démonstration au cas actuel; dans les théorèmes énumératifs, il suffira de remplacer la quantité δ :

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2,$$

laquelle est ici négative (n° **260**), par son module.

Par exemple :

Le nombre des fonctions normales singulières d'indices l et k, et *de caractéristique nulle, paires ou impaires, linéairement distinctes, est donné par le tableau*

		Paires.	Impaires.	
δ *impair*	....	$\dfrac{\bmod \delta + 1}{2}$	$\dfrac{\bmod \delta - 1}{2}$	
δ *pair*	k pair	$\dfrac{\bmod \delta + 4}{2}$	$\dfrac{\bmod \delta - 4}{2}$	$(\delta = l^2 + 4kl + 2k^2)$
	k impair	$\dfrac{\bmod \delta + 2}{2}$	$\dfrac{\bmod \delta - 2}{2}$	$(h_1^2 - g_1 g'_1 > 0)$

De même, *toutes* les fonctions normales paires, de caractéristique et d'indices donnés, ou *toutes* les fonctions impaires, s'annulent pour une demi-période quelconque; sous une autre forme, les fonctions paires s'annulent pour certaines demi-périodes, les fonctions impaires s'annulent pour les autres (I, n° **56**). Les valeurs de ces demi-périodes, données dans le Mémoire I (n^{os} **56-65**) pour le cas de $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, s'appliquent encore au cas actuel; faisons seulement observer ici qu'il n'y a plus lieu de considérer, sur une surface de Kummer, les courbes dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une fonction normale paire ou impaire : dans le Mémoire I, cette surface de Kummer avait les coordonnées homogènes d'un de ses points exprimables par certaines fonctions *thêta*, aux périodes (g, h, g'); or, dans le cas actuel, $h_1^2 - g_1 g'_1$ étant positif, de pareilles fonctions thêta n'existent plus.

Par exemple, en nous bornant aux fonctions de *caractéristique nulle*, d'indices l et k :

1° *Si δ est impair, les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta + 1)$ *fonctions paires s'annulent pour six demi-périodes; et les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta - 1)$ *fonctions impaires, pour les dix autres.*

2° *Si δ est pair et k pair, les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta + 4)$ *fonctions paires ne s'annulent simultanément pour aucune demi-période; et les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta - 4)$ *fonctions impaires s'annulent pour les seize demi-périodes.*

3° *Si δ est pair et k impair, les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta + 2)$ *fonctions paires s'annulent pour quatre demi-périodes; et les* $\frac{1}{2}(\bmod \delta - 2)$ *fonctions impaires, pour les douze autres.*

275. *Somme des zéros communs à deux fonctions intermédiaires.* — C'est un problème que nous n'avons pas traité dans nos deux premiers Mémoires; nous nous bornerons à donner sans démonstration le résultat, applicable aussi bien au cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est négatif qu'à celui où il est positif.

Soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$$

la relation singulière entre les périodes; les deux fonctions intermédiaires considérées peuvent évidemment (n° **264**) se mettre sous les formes

$$F_{l,k}(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad F_{l',k'}(u - \lambda', v - \mu');$$

λ, μ, λ', μ' étant des constantes, et $F_{l,k}(u, v)$, $F_{l',k'}(u, v)$ des fonctions normales de caractéristique nulle, d'indices respectifs l et k, l' et k'.

On trouve assez aisément pour les sommes des valeurs de u et v qui sont les zéros communs aux deux fonctions

$$\begin{aligned}\sum u &= (ll' + \alpha\gamma kk')(\lambda + \lambda') \\ &\quad + \beta(lk'\lambda + kl'\lambda') - \gamma(kl' - lk')(\mu - \mu'), \\ \sum v &= (ll' + \alpha\gamma kk')(\mu + \mu') \\ &\quad + \beta(lk'\mu' + kl'\mu) + \alpha(kl' - lk')(\lambda - \lambda'),\end{aligned}$$

à des périodes près.

Cas où $h_1^2 - g_1 g'_1$ est nul.

276. Nous terminerons ce Mémoire par l'étude des fonctions uniformes de u, v, admettant les périodes $(1, 0)$; $(0, 1)$; (g, h); (h, g'), dans l'hypothèse, écartée jusqu'ici, où $h_1^2 - g_1 g'_1 = 0$.

Je dis qu'il y a nécessairement, dans ce cas, dégénérescence ou réduction du nombre des périodes.

Admettons en effet que les quatre paires de périodes soient distinctes; les raisonnements des n^{os} **251-257** continuent à s'appliquer et établissent :

1° Que les périodes (g, h, g') sont liées par une relation singulière;

2° Que les fonctions uniformes à étudier sont des quotients de fonctions intermédiaires singulières;

3° Que la relation singulière peut se ramener, par une transformation ordinaire du premier ordre, au type $\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$, la quantité $h_1^2 - g_1 g'_1$ restant nulle après la transformation.

277. Tout revient donc à l'étude des fonctions entières, $\varphi(u, v)$ vérifiant les relations (9) du n° **258**

$$(6) \quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i(lu - k\gamma v_1 + \nu)}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[k\alpha u + (l+\beta k)v_1 + \nu']}. \end{cases}$$

Si les indices l et k sont tels que $\delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2$ ne soit pas nul, le raisonnement du n° **259** ramène $\varphi(u, v)$ à une fonction *thêta*, $\theta(U, V)$, aux périodes (G, H, G'), et l'on a trouvé

$$\delta(H_1^2 - G_1 G'_1) = h_1^2 - g_1 g'_1,$$

ce qui montre que $H_1^2 - G_1 G'_1$ est nul; la fonction *thêta* $\theta(U, V)$ ne peut donc pas exister, d'où même conclusion pour $\varphi(u, v)$.

Les fonctions entières $\varphi(u, v)$, satisfaisant aux relations (6) ci-dessus ne peuvent, par suite, exister que si δ est nul; il est nécessaire pour cela que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant de la relation singulière entre les périodes, soit un carré parfait, n^2. Cette relation pourra dès lors se ramener au type de même invariant

$$nh - 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad h = \frac{1}{n},$$

et la fonction intermédiaire $\varphi(u, v)$ vérifiera les équations (5) du n° **255**, qui deviennent ici

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i(lu + \nu)}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)\, e^{-2\pi i[(l+nk)v + \nu']}. \end{cases}$$

On reconnaît comme tout à l'heure qu'une pareille fonction ne peut exister que si $\delta = 0$, c'est-à-dire si $l^2 + nkl = 0$; d'où les deux hypothèses

$$l = 0, \qquad l + nk = 0.$$

278. Soit d'abord $l = 0$; on a

$$\varphi\left(u + g, v + \frac{1}{n}\right) = \varphi(u, v)e^{\nu'},$$

d'où

$$\varphi(u + ng, v + 1) = \varphi(u + ng, v) = \varphi(u, v)e^{\nu''}, \tag{8}$$

ν'' étant une constante. La fonction $\varphi(u, v)$ étant uniforme et admettant, par rapport à u ou v seul, la période 1, peut se développer en série de Fourier

$$\varphi(u, v) = \sum \mathrm{A}_{\rho,\sigma} e^{2\pi i(\rho u + \sigma v)}.$$

Exprimons qu'elle vérifie (8); il vient

$$\mathrm{A}_{\rho,\sigma} e^{2\pi i \rho n g} = \mathrm{A}_{\rho,\sigma} e^{\nu''},$$

d'où

$$\rho n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda, \tag{9}$$

λ désignant un entier.

Deux cas sont maintenant à distinguer selon que la relation (9) a lieu, ou non, pour plus d'une valeur de ρ.

1° Si elle n'est vérifiée que pour une seule valeur de l'entier ρ, soit ρ_0 cette valeur; la série $\varphi(u, v)$ s'écrit

$$\varphi(u, v) = e^{2\pi i \rho_0 u} \sum \mathrm{A}_\sigma e^{2\pi i \sigma v} = e^{2\pi i \rho_0 u} \psi(v),$$

et les relations (7) montrent que $\psi(v)$ est une fonction *thêta* de la variable v.

C'est un cas de dégénérescence.

2° Si la relation (9) est vérifiée pour deux valeurs ρ_0 et ρ, c'est-à-dire si

$$\rho_0 n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda_0; \qquad \rho n g = \frac{\nu''}{2\pi i} + \lambda,$$

on en tire

$$n(\rho - \rho_0) g = \lambda - \lambda_0,$$

c'est-à-dire que g est une fraction, $g = \frac{p}{q}$.

En ce cas, il y a *réduction du nombre des périodes*, ou, ce qui revient au même, on obtient une période nulle en combinant les périodes initiales. Car si x, y et z sont des entiers, les quantités

$$x + zg \quad \text{c'est-à-dire} \quad x + z\frac{p}{q},$$

$$y + zh \quad \text{c'est-à-dire} \quad y + z\frac{1}{n},$$

forment une période, qui peut évidemment se réduire à $(0, 0)$ par un choix convenable des entiers x, y, z.

279. Le cas où $l + nk$ serait nul donne lieu aux mêmes conclusions, et le théorème est établi.