JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL SAUREL

Sur un théorème de M. Duhem

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 83-90.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__83_0>

Sur un théorème de M. Duhem;

PAR M. PAUL SAUREL.

M. Duhem a donné dernièrement (¹) une importante généralisation d'un théorème bien connu de Clebsch. Je voudrais indiquer une démonstration qui conduit très simplement au théorème de M. Duhem.

Considérons les trois équations simultanées au dérivées partielles :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} f(u) + g(\Delta u) + \dfrac{\partial}{\partial x} h(\sigma) = 0, \\ f(v) + g(\Delta v) + \dfrac{\partial}{\partial y} h(\sigma) = 0, \\ f(w) + g(\Delta w) + \dfrac{\partial}{\partial z} h(\sigma) = 0. \end{cases}$$

Dans ces équations, u, v, w sont des fonctions de x, y, z, t;

$$\text{(2)} \qquad f = A_0 + A_1 \frac{\partial}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n}{\partial t^n},$$

A_0, A_1, ..., A_n étant des constantes;

$$\text{(3)} \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$\text{(4)} \qquad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

(¹) P. DUHEM, *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5ᵉ série, t. VI, fasc. II, p. 215; 1900).

et g et h sont deux opérateurs linéaires quelconques à coefficients constants.

Des équations (1) on obtient facilement

$$(5)\qquad f(\sigma)+g(\Delta\sigma)+h(\Delta\sigma)=0.$$

M. Duhem appelle cette équation l'*équation aux dilatations* et il l'écrit sous la forme abrégée

$$(6)\qquad \omega(\sigma)=0.$$

Désignons par ω une quelconque des expressions

$$\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z};\quad \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

On obtient facilement des équations (1)

$$(7)\qquad f(\omega)+g(\Delta\omega)=0.$$

M. Duhem appelle cette équation l'*équation aux rotations* et il l'écrit sous la forme abrégée

$$(8)\qquad \mathfrak{R}(\omega)=0.$$

Le théorème de M. Duhem est le suivant :

Toute solution u, v, w des équations (1) *peut être mise sous la forme*

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} u&=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\\ v&=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\\ w&=\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y},\end{aligned}\right.$$

F *étant une intégrale de l'équation aux dilatations* (6), *et* P, Q, R *trois intégrales de l'équation aux rotations* (8), *ces fonctions étant* *de plus liées par la relation*

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{10}$$

Pour démontrer ce théorème, posons

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + u', \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + v', \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + w', \end{aligned}\right. \tag{11}$$

u, v, w étant une solution donnée des équations (1). Des équations (11), on tire immédiatement

$$\sigma = \Delta\Phi + \sigma', \tag{12}$$

où l'on a posé

$$\sigma' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}. \tag{13}$$

Si dans les équations (1) nous substituons les valeurs de u, v, w données par les équations (11), nous trouvons

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{A}(u') + \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}h(\sigma') = 0, \\ &\mathfrak{A}(v') + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}h(\sigma') = 0, \\ &\mathfrak{A}(w') + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{G}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}h(\sigma') = 0. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Choisissons maintenant la fonction Φ, de façon que l'on ait en même temps

$$\sigma' = 0, \tag{15}$$

$$\mathfrak{G}(\Phi) = 0. \tag{16}$$

L'équation (12) nous montre que nous pouvons remplacer ces conditions par les suivantes,

$$\Delta\Phi = \sigma, \tag{17}$$

$$\omega(\Phi) = 0. \tag{18}$$

S'il est possible de trouver une fonction Φ qui satisfasse à ces deux conditions, et nous montrerons plus tard qu'un tel choix est possible, les équations (11) détermineront u', v', w' et les équations (14) montrent que l'on a

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{R}(u') = 0,\\ &\mathfrak{R}(v') = 0,\\ &\mathfrak{R}(w') = 0.\end{aligned}\right. \tag{19}$$

Les fonctions u', v', w' étant ainsi déterminées, nous définirons maintenant trois nouvelles fonctions p, q, r par les équations

$$\Delta p + u' = 0, \qquad \Delta q + v' = 0, \qquad \Delta r + w' = 0, \tag{20}$$

$$\mathfrak{R}(p) = 0, \qquad \mathfrak{R}(q) = 0, \qquad \mathfrak{R}(r) = 0. \tag{21}$$

La démonstration par laquelle nous montrerons que les équations (17) et (18) sont compatibles s'applique également aux équations (20) et (21); les fonctions p, q, r sont donc déterminées.

La première des équations (20) peut s'écrire sous la forme

$$u' = -\Delta p = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Si donc nous posons

$$\Phi' = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z}, \tag{22}$$

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z},\\ \mathrm{Q} &= \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x},\\ \mathrm{R} &= \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y},\end{aligned}\right. \tag{23}$$

nous aurons

$$u' = -\frac{\partial\Phi'}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \tag{24}$$

et deux équations analogues pour v' et w'. Si nous portons ces valeurs de u', v', w' dans les équations (11) et si nous posons

$$F = \Phi - \Phi', \tag{25}$$

nous aurons enfin

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

F est une intégrale de l'équation aux dilatations, c'est-à-dire que l'on a

$$\omega(F) = \omega(\Phi) - \omega(\Phi') = 0.$$

En effet, l'équation (18) montre que

$$\omega(\Phi) = 0.$$

De plus, les définitions (5) et (7) de ω et de $\mathfrak{A}$ nous permettent d'écrire

$$\omega(\Phi') = \mathfrak{A}(\Phi') + h(\Delta\Phi').$$

Alors les équations (22) et (21) montrent que

$$\mathfrak{A}(\Phi') = 0,$$

tandis que les équations (22), (20) et (15) montrent que

$$\Delta\Phi' = -\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}\right) = 0.$$

Ainsi

$$\omega(\Phi') = 0$$

et F est bien une intégrale de l'équation aux dilatations.

P, Q, R sont des intégrales de l'équation aux rotations, comme le montrent immédiatement les équations (23) et (21). De plus, les équations (23) montrent que

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

La généralisation du théorème de Clebsch est ainsi établie si les équations (17) et (18), ainsi que les équations (20) et (21), sont compatibles.

Pour compléter notre démonstration, il faut donc montrer que l'on peut trouver une fonction Φ, telle que

$$\Delta\Phi = \sigma, \tag{17}$$

$$\omega(\Phi) = 0, \tag{18}$$

σ étant assujettie à la condition (6),

$$\omega(\sigma) = 0. \tag{6}$$

Soit G une fonction, telle que

$$\Delta G = \sigma.$$

L'équation (17) nous montre que Φ ne peut différer de G que par une fonction harmonique que nous désignerons par H. Nous pouvons donc poser

$$\Phi = G + H. \tag{27}$$

Il faut maintenant déterminer la fonction harmonique H, de telle façon que l'équation (18) soit satisfaite. Si nous substituons la valeur de Φ donnée par l'équation (27) dans l'équation (18), nous aurons

$$\mathfrak{D}(G) + \mathfrak{D}(H) = 0. \tag{28}$$

Comme

$$\Delta G = \sigma,$$

nous aurons, en vertu de l'équation (6),

$$\Delta\mathfrak{D}(G) = \mathfrak{D}(\sigma) = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$\mathfrak{D}(G) = \varphi,$$

φ étant une fonction harmonique. D'autre part, comme

$$\mathfrak{D}(H) = f(H) + g(\Delta H) + h(\Delta H)$$

et que H est harmonique, nous aurons

$$\mathfrak{D}(H) = f(H).$$

L'équation (28) devient donc

$$f(H) + \varphi = 0, \tag{29}$$

ou bien, en se rappelant la définition (2) de f,

$$A_0 H + A_1 \frac{\partial H}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n H}{\partial t^n} + \varphi = 0. \tag{30}$$

Il reste donc à démontrer que l'on peut trouver une fonction harmonique H qui satisfasse à l'équation (30) dans laquelle φ est une fonction harmonique donnée. M. Duhem a donné de ce théorème la démonstration suivante [1] :

Si pour $t = 0$, on choisit arbitrairement

$$H, \quad \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} H}{\partial t^{n-1}},$$

[1] *Loc. cit.*, p. 233.

l'équation (30) et les équations que l'on obtient en différentiant cette équation par rapport à t donneront les valeurs pour $t=0$ des dérivées d'ordre supérieur à $n-1$. De plus, comme φ est harmonique, on a

$$A_0 \Delta H + A_1 \Delta \frac{\partial H}{\partial t} + \ldots + A_n \Delta \frac{\partial^n H}{\partial t^n} = 0.$$

Si donc, à l'instant $t=0$, on prend pour

$$H, \quad \frac{\partial H}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{n-1} H}{\partial t^{n-1}}$$

des fonctions harmoniques quelconques, on voit que les dérivées d'ordre supérieur à $n-1$ sont aussi pour $t=0$ des fonctions harmoniques. Ainsi, tous les coefficients du développement de H, en série de puissances de t, sont des fonctions harmoniques; pour toutes les valeurs de t, H est donc une fonction harmonique et l'on a ainsi une fonction qui satisfait aux conditions données.

La démonstration par laquelle nous venons de démontrer que les équations (6), (17) et (18)

$$\omega(\sigma)=0, \qquad \Delta\Phi=\sigma, \qquad \omega(\Phi)=0,$$

sont compatibles, s'applique aussi bien aux équations (19), (20) et (21)

$$\mathfrak{R}(u')=0, \qquad \Delta p + u' = 0, \qquad \mathfrak{R}(p)=0.$$

Cette remarque termine la démonstration de la généralisation du théorème de Clebsch.