JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL APPELL

Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la dynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 5-12.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Remarques d'ordre analytique sur une nouvelle forme des équations de la Dynamique;

PAR M. PAUL APPELL.

1. Comme nous l'avons montré dans un Mémoire inséré dans le premier fascicule de l'année 1900 de ce Recueil, un système matériel est caractérisé par la fonction

$$S = \frac{1}{2}\sum m J^2,$$

où J désigne l'accélération du point de masse m : en appelant q_1, $q_2, \ldots, q_n$ les paramètres dont les variations virtuelles sont arbitraires, cette fonction S est une fonction du second degré de $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ que l'on peut supposer réduite aux seuls termes en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$: les coefficients de cette fonction peuvent dépendre de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et d'autres paramètres dont les variations virtuelles sont des fonctions linéaires et homogènes données des variations de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Pour un déplacement virtuel arbitraire imprimé au système, la somme des travaux des forces appliquées est

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_n \delta q_n.$$

Dès lors les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

M. de Saint-Germain a proposé (*Comptes rendus*, t. CXXX, p. 1174; 1900) d'appeler cette fonction S l'*énergie d'accélération*, par analogie avec le nom d'*énergie cinétique* ou *énergie de vitesse* donnée à la demi-force vive T.

Nous nous proposons actuellement de montrer que la fonction S ne peut pas être choisie arbitrairement en fonction des paramètres sous les seules conditions du degré en $q''_1, q''_2, \ldots, q''_n$ et $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$. La fonction S étant supposée connue, nous montrerons comment on peut en déduire les termes correctifs dans les équations de Lagrange; enfin nous donnerons quelques indications sur l'application des méthodes de transformation aux problèmes de dynamique auxquels les équations de Lagrange ne s'appliquent pas.

Nous supposerons, pour simplifier, que les liaisons ne dépendent pas du temps et que les coefficients de S ne contiennent que q_1, $q_2, \ldots, q_n$.

2. D'après l'expression de S donnée dans le précédent Mémoire

$$S = \frac{1}{2} \sum m(x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

cette fonction est de la forme suivante :

$$(1) \qquad S = \varphi(q''_1, q''_2, \ldots, q''_n) + \psi_1 q''_1 + \psi_2 q''_2 + \ldots + \psi_n q''_n,$$

où φ est une forme quadratique des q''

$$(2) \qquad \varphi(q''_1, \ldots, q''_n) = \sum a_{ij} q''_i q''_j \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

dont les coefficients a_{ij} sont supposés dépendre uniquement de q_1, $q_2, \ldots, q_n$, et où $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont des formes quadratiques en q'_1, $q'_2, \ldots, q'_n$ dont les coefficients dépendent aussi de $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

La demi-force vive du système

$$T = \frac{1}{2}\sum m(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ dont les coefficients sont les mêmes que ceux de la forme φ, de sorte que

$$T = \varphi(q'_1, q'_2, \ldots q'_n) = \sum a_{ij} q'_i q'_j; \tag{3}$$

ce fait résulte du calcul même des deux fonctions S et T. Pour simplifier l'écriture, nous ferons

$$\varphi(q''_1, q''_2, \ldots, q''_n) = \varphi_2,$$
$$\varphi(q'_1, q'_2, \ldots, q'_n) = \varphi_1;$$

alors

$$\begin{cases} S = \varphi_2 + \psi_1 q''_1 + \psi_2 q''_2 + \ldots + \psi_n q''_n, \\ T = \varphi_1. \end{cases} \tag{4}$$

3. *Conditions nécessaires que doit remplir* S. — Comme il est facile de le vérifier et comme nous l'avons montré à la fin du précédent Mémoire, on a identiquement

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q''_1} q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q''_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q''_n} q'_n. \tag{5}$$

Voyons ce que donne cette identité d'après les formes (4) de S et T : elle devient

$$\begin{cases} q'_1 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q''_1} + q'_2 \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q''_2} + \ldots + q'_n \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q''_n} \\ \qquad + \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \ldots + \psi_n q'_n \\ = q''_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q'_1} + q''_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q'_2} + \ldots + q''_n \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q'_n} \\ \qquad + q'_1 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} + q'_2 \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} + \ldots + q'_n \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_n}. \end{cases} \tag{6}$$

Ici le deuxième membre est l'expression développée de $\frac{d\mathrm{T}}{dt}$, telle qu'elle résulte de ce fait que T dépend de t par l'intermédiaire de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Or la première ligne du premier membre de (6) est identique à la première ligne du second, d'après une propriété élémentaire des formes quadratiques. L'identité (6) se réduit donc à

$$(7)\quad \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \ldots + \psi_n q'_n = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_n} q'_n.$$

Cette relation doit avoir lieu quels que soient $q_1, q_2, \ldots, q_n, q'_1$, $q'_2, \ldots, q'_n$. Elle établit donc des relations nécessaires entre les coefficients des formes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ et les coefficients a_{ij} de φ_1. Pour abréger l'écriture, nous désignerons par une seule lettre les deux membres de l'identité (7), en posant

$$(8)\quad \mathrm{E} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_n} q'_n \equiv \psi_1 q'_1 + \psi_2 q'_2 + \ldots + \psi_n q'_n,$$

cette fonction E est une forme cubique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

4. *Termes correctifs dans les équations de Lagrange.* — L'identité (7) étant supposée remplie, cherchons une expression de la différence

$$(9)\quad \Delta_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q'_1}\right) - \frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q_1} - \frac{\partial\mathrm{S}}{\partial q''_1}.$$

Comme nous avons posé $\mathrm{T} = \varphi_1$, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q'_1}\right) = {} & \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'^2_1} q''_1 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q'_2} q''_2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q'_n} q''_n \\ & + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial q'_1\,\partial q_n} q'_n,\end{aligned}$$

car $\frac{\partial\mathrm{T}}{\partial q'_1}$ ou $\frac{\partial\varphi_1}{\partial q'_1}$ dépend de t par l'intermédiaire de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, q_1$, $q_2, \ldots, q_n$.

En explicitant la première ligne et tenant compte de l'expression de E, on peut écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_1}\right) = 2(a_{11}q''_1 + a_{12}q''_2 + \ldots + a_{1n}q''_n) + \frac{\partial E}{\partial q'_1} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}.$$

D'autre part

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial S}{\partial q''_1} = 2(a_{11}q''_1 + a_{12}q''_2 + \ldots + a_{1n}q''_n) + \psi_1.$$

La différence (9) appelée Δ_1 devient donc, après réduction,

$$\Delta_1 = \frac{\partial E}{\partial q'_1} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} - \psi_1.$$

On a de même, en posant

$$\Delta_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial S}{\partial q''_\alpha},$$

$$(10) \qquad \Delta_\alpha = \frac{\partial E}{\partial q'_\alpha} - 2\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_\alpha} - \psi_\alpha.$$

Ceci posé, les équations du mouvement sont

$$\frac{\partial S}{\partial q''_\alpha} = Q_\alpha.$$

On peut donc les écrire

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha + \Delta_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

où le terme Δ_α a pour expression la quantité (10). Ces quantités Δ_α forment ce qu'on peut appeler les *termes correctifs* dans les équations de Lagrange. On voit que les équations de Lagrange pourront s'appliquer au système, si ces termes Δ_α sont tous identiquement nuls. Ce fait se produit quand le système considéré est assujetti à des liaisons pouvant toutes être exprimées sous forme finie et que les paramètres sont de véritables coordonnées : d'après Hertz le système est alors dit *holonôme*.

Si le système n'est pas holonôme, le mouvement du système est le même que celui d'un système holonôme admettant même force vive $2T$ que le premier et sollicité par les forces

$$Q_1 + \Delta_1, \quad Q_2 + \Delta_2, \quad \ldots, \quad Q_n + \Delta_n.$$

Le fait qu'un système non holonôme et un système holonôme peuvent avoir identiquement le même T se trouve démontré sur un exemple simple que nous avons donné dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik, begründet von Crelle*, t. 122, p. 205.

5. *Équations des forces vives : Vérification.* — Les liaisons étant indépendantes du temps, l'équation des forces vives est

$$\frac{dT}{dt} = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \ldots + Q_n q'_n. \tag{12}$$

Pour déduire cette équation des équations (11) il faut multiplier la première de ces équations par q'_1, la deuxième par q'_2, etc., la dernière par q'_n et ajouter.

On obtient alors l'équation (12), parce qu'on a identiquement

$$\Delta_1 q'_1 + \Delta_2 q'_2 + \ldots + \Delta_n q'_n = 0. \tag{13}$$

En effet, d'après les expressions (10) des quantités Δ_α et la définition de E [équation (8)], on a

$$\Delta_1 q'_1 + \Delta_2 q'_2 + \ldots + \Delta_n q'_n = q'_1 \frac{\partial E}{\partial q'_1} + \ldots + q'_n \frac{\partial E}{\partial q'_n} - 3E:$$

mais E étant homogène et du troisième degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, le deuxième membre est nul identiquement, d'après le théorème des fonctions homogènes.

6. *Application des méthodes de transformation.* — Terminons par l'indication d'un problème qui se pose naturellement. Si les composantes des forces $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ dépendent uniquement de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et non des vitesses, les seconds membres des équations du mouvement (11) peuvent contenir néanmoins les vitesses, dans les termes Δ_α, quand le système n'est pas holonôme : ces termes sont du second degré en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$.

Peut-on faire disparaître les termes de cette nature en faisant un changement de variables portant sur les paramètres et le temps?

On pourrait, en particulier, essayer une transformation de la forme

$$(14)\qquad \begin{cases} p_\alpha = f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n) & (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \\ dt = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,dt_1, \\ p'_\alpha = \dfrac{dp_\alpha}{dt_1}, \end{cases}$$

où f_α et λ sont des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n$, p_α les nouveaux paramètres et t_1 le nouveau temps. D'après un calcul que nous avons fait dans un article : *Sur des transformations de mouvement* (*Journal de Crelle*, t. 110, p. 37), les équations du mouvement (11) prendront la forme

$$(15)\qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial p'_\alpha}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial p_\alpha} = \Phi_\alpha + \sum_{i=1}^{i=n} R_\alpha^{i}(Q_i + \Delta_i)$$

où Φ_α est une forme quadratique de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, et où les R_α^{i} dépendent uniquement de $q_1, q_2, \ldots, q_n$. On fera dès lors disparaître les dérivées dans les seconds membres, si l'on peut particulariser la transformation de telle façon que l'on ait identiquement

$$(16)\qquad \Phi_\alpha + \sum_{i=1}^{i=n} R_\alpha^{i}\Delta_i = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces conditions, dont les premiers membres sont des formes quadratiques de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, devant avoir lieu quelles que soient ces dérivées, on aura, en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$, un nombre plus grand d'équations définissant les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et λ. Ces équations seront en général trop nombreuses, et le problème ne pourra être résolu que pour des systèmes particuliers.