JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. BRUNEL

Sur les deux systèmes de triades de treize éléments

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 305-330.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__305_0>

Sur les deux systèmes de triades de treize éléments;

PAR M. G. BRUNEL,

Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

On appelle *système de triades* de $6n+1$ ou de $6n+3$ éléments un ensemble de triades tel que chacune des duades que l'on peut former avec les éléments considérés apparaisse dans l'ensemble une fois et une fois seulement.

De tels systèmes existent pour toute valeur de n. Cette proposition a été établie par Kirkman (1), puis sous une forme identique au fond, mais plus explicite, par Reiss (2).

Les résultats obtenus par M. Netto dans les *Mathematische Annalen* (3) ne sont pas d'un caractère aussi général, mais fournissent dans certains cas des systèmes distincts de ceux que l'on obtient par l'emploi du procédé de Kirkman-Reiss. M. H. Moore a établi ensuite (4) l'existence des systèmes de triades pour toute valeur de n et a montré en particulier que lorsque le nombre des éléments est supérieur à 13 il y a au moins deux systèmes de triades essentiellement distincts.

Dans le cas de 13 éléments MM. Netto et H. Moore étaient portés

(1) *Camb. and Dubl. M. J.*, t. II; 1847.
(2) *J. de Crelle*, t. 56; 1859.
(3) T. XLII; 1893.
(4) *Math. Ann.*, t. XLIII; 1893.

à croire qu'il n'existait effectivement qu'un seul système de triades.

M. Jan de Vries ([1]) a signalé l'existence d'un système de triades de 13 éléments, distinct de celui que M. Netto avait construit. Il ajoute qu'il n'est pas en état de prouver que les deux systèmes ainsi obtenus sont les seuls possibles.

Nous nous proposons d'établir ici que le système donné par M. Jan de Vries est identique au fond au système fourni par la construction de Kirkman-Reiss.

Nous montrerons aussi qu'il n'y a en réalité pour 13 éléments que deux systèmes distincts.

Représentons par S_1 le système de triades contenu dans le Tableau

S_1

1	4	0	0	0	0	0	0	1	2	2	3	3	1
2	5	1	2	3	8	10	12	6	6	4	4	5	5
3	6	4	5	6	9	11	7	9	8	11	10	7	12

4	5	6	4	5	6	1	1	2	2	3	3
7	9	11	9	8	7	7	8	9	10	11	12
8	10	12	12	11	10	11	10	7	12	9	8

;

les triades qui figurent dans un des rectangles du Tableau s'échangent entre elles par les substitutions suivantes :

$$(0)\ (1, 2, 3)\ (4, 5, 6)\ (7, 9, 11)\ (8, 10, 12)$$

et

$$(0)\ (1)\ (2, 3)\ (4)\ (5, 6)\ (7, 8)\ (9, 10)\ (11, 12).$$

Il n'y a donc en réalité que huit types distincts de triades dans le Tableau S_1, par exemple les triades

1	4	0	0	1	4	4	1
2	5	1	8	6	7	9	7
3	6	4	9	9	8	12	11

([1]) *Circ. Mat. di Palermo*, et *Verslagen Zitt. K. Ak. Wetens.*, t. III, p. 64-67; 1894.

Si l'on considère dans le Tableau S_1 les quatre triades

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 9 & 9 \\ 2 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 11 & 7 & 11 \end{array}$$

on reconnaît immédiatement que l'on peut écrire quatre triades différentes des précédentes et présentant les mêmes duades en substituant aux quatre triades les suivantes :

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 9 & 9 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 7 & 11 & 3 & 11 \end{array}$$

Par un tel échange le Tableau S_1 se trouve modifié et nous déduisons de la sorte du premier Tableau S_1 un nouveau Tableau S_2 que l'on peut disposer somme il suit :

S_2

6	4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2
4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2	6
5	12	0	11	1	7	10	3	2	6	4	9	8

6	4	9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2
9	8	5	12	0	11	1	7	10	3	2	6	4
1	7	10	3	2	6	4	9	8	5	12	0	11

Les triades qui figurent dans un des deux rectangles du Tableau s'échangent entre elles par la substitution cyclique

$$(6, 4, 9, 8, 5, 12, 0, 11, 1, 7, 10, 3, 2).$$

Il n'y a donc en réalité ici que deux types distincts de triades, par exemple les triades

$$\begin{array}{cc} 6 & 6 \\ 4 & 9 \\ 5 & 1 \end{array}$$

Les différents systèmes de triades de 13 éléments qui ont été donnés jusqu'ici peuvent être ramenés par une substitution convenable effectuée sur les éléments à coïncider avec le Tableau S_1 ou avec le Tableau S_2.

Prenons le système de Kirkman (¹) mis sous la forme

$$
K \left\{ \begin{array}{cccccccccccccc}
A & A & A & A & A & A & a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & a_3 & a_3 & a_4 & a_4 \\
a_1 & a_3 & b_1 & b_3 & c_1 & c_3 & b_1 & b_3 & b_2 & b_4 & b_4 & b_1 & b_2 & b_3 \\
a_2 & a_4 & b_2 & b_4 & c_2 & c_4 & c_1 & c_4 & c_3 & c_1 & c_3 & c_2 & c_4 & c_2 \\
 & a_1 & a_2 & a_1 & a_2 & b_1 & b_2 & b_1 & b_2 & c_1 & c_2 & c_1 & c_2 & \\
 & a_3 & a_4 & a_4 & a_3 & b_3 & b_4 & b_4 & b_3 & c_4 & c_3 & c_3 & c_4 & \\
 & b_2 & b_1 & b_4 & b_3 & c_3 & c_2 & c_4 & c_1 & a_3 & a_1 & a_4 & a_2 &
\end{array} \right.
$$

Si l'on remplace respectivement les symboles

$$A \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3 \quad b_4 \quad c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4$$

par les chiffres

$$6 \quad 9 \quad 1 \quad 8 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 10 \quad 7 \quad 11 \quad 12 \quad 4 \quad 5$$

on retrouve précisément le Tableau S_1. Nous pouvons exprimer ce fait par la relation suivante

$$\begin{pmatrix} A & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 6 & 9 & 1 & 8 & 2 & 3 & 0 & 10 & 7 & 11 & 12 & 4 & 5 \end{pmatrix} K = S_1.$$

Il n'est pas utile d'insister et d'indiquer les transformations qui permettent de passer des deux autres systèmes de triades que Kirkman a donnés dans le même Mémoire ou bien de celui que Reiss a construit (²) au seul système S_1.

Nous nous contenterons de donner les transformations relatives au

---

(¹) *Camb. and Dubl. M. J.*, t. VIII, p. 38-45; 1853.

(²) *J. de Crelle*, t. 56; 1859.

système de Jan de Vries [1]. Le système est le suivant :

$$
(\mathrm{V})\quad \left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
2 & 4 & 6 & 8 & 9 & 10 & 4 & 5 & 7 & 8 & 10 & 4 & 5 \\
3 & 5 & 7 & 11 & 12 & 13 & 6 & 11 & 13 & 9 & 12 & 8 & 12 \\
3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 6 & 7 & 11 \\
6 & 7 & 9 & 7 & 9 & 10 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 & 8 & 12 \\
13 & 11 & 10 & 12 & 13 & 11 & 10 & 9 & 13 & 12 & 11 & 10 & 13
\end{array}\right.
$$

et si l'on y permute

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13
\end{array}
$$

en

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
4 & 9 & 12 & 10 & 2 & 5 & 6 & 3 & 8 & 0 & 11 & 7 & 1
\end{array}
$$

on retrouve encore le Tableau S_1. Nous pouvons donc écrire la relation

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
4 & 9 & 12 & 10 & 2 & 5 & 6 & 3 & 8 & 0 & 11 & 7 & 1
\end{pmatrix} \mathrm{V} \equiv S_1.
$$

Le système de M. Jan de Vries n'est donc pas distinct de celui de Kirkman et rien n'est plus facile, avec ce qui précède, que de donner la substitution qui transforme l'une des formes dans l'autre. Il suffit de faire le produit de la substitution qui conduit de V à S_1 par l'inverse de la substitution qui conduit de K à S_1. On a

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
c_3 & a_1 & c_2 & b_3 & a_4 & c_4 & \mathrm{A} & b_1 & a_3 & b_2 & c_1 & b_4 & a_2
\end{pmatrix} \mathrm{V} \equiv \mathrm{K}.
$$

(1) *Zitt. Ak. Wetens.*, t. III; 1894.

En ce qui concerne le système de Netto ([1])

$$
(\mathrm{N})\qquad \left\{\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0\\
4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 & 2 & 3\\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\
2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1\\
8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7
\end{array}\right.
$$

il ne diffère évidemment que par la forme du système S_2, et l'on a, entre ces deux systèmes, la relation

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12\\
6 & 4 & 9 & 8 & 5 & 12 & 0 & 11 & 1 & 7 & 10 & 3 & 2
\end{pmatrix} \mathrm{N} = S_2.
$$

Nous nous proposons maintenant de montrer que S_1 et S_2 sont deux systèmes essentiellement distincts et que les autres systèmes que l'on peut construire se réduisent nécessairement à l'une de ces deux formes par une substitution convenablement choisie.

Considérons un système quelconque des triades des 13 éléments 0, 1, 2, ..., 12. Les triades sont au nombre de 26. Prenons l'une quelconque d'entre elles a, b, c et supprimons dans le Tableau cette triade et toutes celles qui contiennent un de ses éléments, a ou b ou c. Comme a figurait dans le système accouplé à tous les autres éléments, il existe, en dehors de la triade a, b, c, cinq autres triades contenant a. Il en est de même pour b et c. Le nombre total des triades supprimées est égal à $1 + 3.5 = 16$. Les triades qui restent sont en nombre égal à 10 et contiennent les éléments autres que a, b, c, c'est-à-dire un nombre d'éléments aussi égal à 10; enfin, un quelconque des éléments qui subsistent apparaît dans trois triades, puisque, dans le système initial, cet élément figurait dans six triades et que l'on a supprimé les trois triades distinctes où cet élément s'accouplait à a, à b et à c.

([1]) *Math. Ann.*, t. XLII; 1893.

Les triades qui subsistent, relativement à la triade quelconque a, b, c du système, correspondent donc à une configuration $(3,3)_{10}$ de Kantor.

D'autre part, les duades que l'on peut former avec 10 éléments sont en nombre égal à $\frac{10.9}{2} = 45$. Sur ces 45 duades, il y en a 30 qui sont employées dans les dix triades qui subsistent, ou, en d'autres termes, dans la configuration $(33)_{10}$ dont nous connaissons maintenant l'existence. Les quinze autres se divisent par groupes de cinq; il y a un groupe de cinq duades contenant les dix éléments, et chacun d'eux une seule fois, formé par les duades qui figurent avec a dans les triades supprimées; de même, il y a un groupe de cinq duades correspondant à b et un groupe de cinq correspondant à c.

Si l'on représente les dix éléments par dix points dans l'espace et une duade de deux éléments par une ligne qui relie les deux sommets correspondants, les quinze duades dont il s'est agi en dernier lieu correspondent à un réseau à dix sommets, chacun des sommets étant le point de départ de trois lignes ou arêtes. Cinq des arêtes sont relatives à un élément extérieur a et constituent ce que nous avons appelé ailleurs (¹) un *demi-trajet*. Un autre demi-trajet correspond à b; un troisième demi-trajet est relatif à c.

De ce qui précède il résulte que, pour construire un système de triades de 13 éléments, il suffit : 1° de construire un ensemble de dix triades pour dix éléments dans lequel chaque élément apparaît trois fois, et trois fois seulement; 2° de former le réseau des duades non employées dans les dix triades précédentes et de le décomposer en demi-trajets; 3° d'écrire un Tableau contenant les dix triades fournies par la première construction, une triade formée avec trois éléments distincts de ceux déjà employés et quinze triades obtenues en mettant devant chacune des duades qui entrent dans un demi-trajet un de ces trois nouveaux éléments.

La solution de la première partie de la question est connue. Kantor, Martinetti ont montré qu'il n'existait que dix configurations $(3,3)_{10}$

(¹) G. Brunel, *Analysis Situs : Recherches sur les réseaux* (*Mém. Soc. Ph. Nat. Bord.*, V_4, p. 165; 1895).

distinctes auxquelles on est convenu d'attribuer respectivement les symboles suivants :

A B C D E F G H J K

Nous aurons donc à examiner successivement ce qui arrive lorsque l'on prend, comme point de départ de la construction d'un système de triades, ces différentes configurations. Relativement aux Tableaux S_1 et S_2, les configurations $(33)_{10}$ qui se présentent comme correspondant aux différentes triades qui constituent chacun des Tableaux offrent les caractères suivants :

Système S_1.

La triade
$$\left(\begin{array}{ccc}1, & 2, & 3\\ 4, & 5, & 6\\ 0, & 1, & 4\\ 0, & 8, & 9\\ 1, & 6, & 9\\ 4, & 7, & 8\\ 4, & 9, & 12\\ 1, & 7, & 11\end{array}\right)$$
et, par suite, aussi les triades qui, dans le Tableau S_1, sont dans le même rectangle, fournissent des configurations de symboles respectifs :
$$\left\{\begin{array}{c}G\\ F\\ A\\ D\\ J\\ H\\ K\\ H\end{array}\right.$$

Il y a donc, pour le système S_1, des triades qui correspondent à des configurations $(33)_{10}$ de symboles

G F A D J H K

en nombres respectivement égaux à

1 1 3 3 6 9 3

Système S_2.

La triade
$$\left\{\begin{array}{ccc}4, & 5, & 6\\ 1, & 6, & 9\end{array}\right.$$
et, par suite, aussi les triades qui, dans le Tableau S_2, sont dans le même rectangle, fournissent des configurations de symboles respectifs :
$$\left\{\begin{array}{c}J\\ E\end{array}\right.$$

Il y a donc, pour le système S_2, des triades qui correspondent à des configurations $(3,3)_{10}$ de symboles

$$J \quad E$$

en nombres respectivement égaux à

$$13 \quad 13$$

Ceci nous montre une différence essentielle dans la constitution des systèmes S_1 et S_2 qui sont ainsi complètement distincts.

Les configurations de symbole B et C n'apparaissent pas dans la constitution des systèmes S_1 et S_2; on serait porté à croire que ces deux configurations fournissent alors des systèmes nouveaux de triades. Nous verrons qu'il n'en est rien et que la seconde partie de la question n'admet pas alors de solution.

Cette seconde partie de la question consiste à former, pour un réseau déterminé, les demi-trajets. Les réseaux que l'on a à considérer ici se présentent avec un caractère des plus simples, mais nous savons, d'une manière générale, former d'une façon systématique les demi-trajets relatifs à un réseau quelconque donné ([1]).

Soient i, k deux sommets quelconques du réseau; considérons un carré à n lignes et à n colonnes et faisons correspondre la $p^{\text{ième}}$ ligne et la $p^{\text{ième}}$ colonne du carré au sommet p. Dans la $i^{\text{ème}}$ colonne et dans la $k^{\text{ième}}$ ligne, nous conviendrons de mettre o lorsque les deux sommets du réseau i et k ne sont pas reliés par une arête, et de mettre un symbole $\frac{i}{k}$ indiquant la présence de l'arête qui relie i à k lorsque cette arête existe.

Le symbole $\frac{k}{i}$ sera considéré comme identique au symbole $\frac{i}{k}$, mais de signe contraire; cela revient à supposer que, sur chacune des arêtes du réseau, on choisit un sens déterminé.

Nous ne considérons pas les arêtes du réseau qui partent d'un sommet pour aboutir à ce même sommet. Nous n'avons pas non plus à supposer ici l'existence de plusieurs arêtes reliant les deux mêmes sommets.

([1]) *Mém. Soc. Ph. Nat. Bord.*, V_4, p. 176; 1895.

Dans ces conditions, à un réseau donné correspond un tableau carré parfaitement défini que l'on peut considérer comme un déterminant symétrique gauche.

Inversement, un déterminant symétrique gauche étant donné, il lui correspond un réseau parfaitement défini.

Les réseaux qui nous occupent contiennent un nombre pair de sommets. Or on sait qu'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair est le carré d'une expression qu'il est facile de former. Chacun des termes qui figurent dans cette expression correspond à un demi-trajet.

Le développement de cette expression se simplifie considérablement dans un cas tel que celui que nous rencontrons ici. Le réseau est alors un réseau à sommets trilatères, et nous nous proposons de former de toutes les façons possibles trois demi-trajets qui épuisent toutes les arêtes. Considérons un de ces demi-trajets et imaginons que, dans le réseau, on supprime les arêtes qui figurent dans le demi-trajet; il reste un réseau à sommets bilatères qui peut être connexe ou non. Si le réseau constitue un seul polygone, ses côtés pairs fournissent un demi-trajet, ses côtés impairs donnent le troisième demi-trajet. Si le réseau est formé de plusieurs polygones, il suffit que l'un de ces polygones ait un nombre impair de côtés pour que l'on ne puisse pas former de demi-trajet avec les arêtes qui restent; lorsque tous les polygones ont un nombre pair de côtés, on peut, de plusieurs façons, former les demi-trajets complémentaires, de 2^{l-1} façons s'il y a l polygones.

Nous allons considérer successivement les différentes configurations $(33)_{10}$ de Kantor et étudier les réseaux auxquels conduit chacune d'elles.

Configuration A.

On peut écrire une configuration A, où les éléments sont

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{cccccccccc} 2 & 3 & 5 & 6 & 5 & 6 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 11 & 8 & 7 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 8 & 7 & 10 & 12 & 11 & 10 & 7 & 12 & 9 & 8 \end{array} \right.$$

qui résulte de la suppression des éléments 0, 1, 4 dans S_1. Les duades qui ne figurent pas dans A peuvent être représentées par le Tableau suivant

2	3	5	6	7	8	9	10
3	6	6	9	8	9	12	11
5	10	12		11	10		
11				12			

correspondant à un réseau à dix sommets trilatères, les arêtes du réseau étant des lignes qui joignent un quelconque des points de la première ligne aux points de la même colonne :

$$\begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 3 & & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 6 & \cdots & 11 \end{matrix}.$$

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons au-dessous de chaque demi-trajet les demi-trajets qui complètent avec la première les 15 duades. Lorsqu'un même demi-trajet peut être complété de différentes façons nous le répéterons avec les différents demi-trajets qui le complètent; lorsqu'un demi-trajet ne peut être complété, nous indiquerons entre crochets un polygone d'un nombre impair de côtés formé avec les duades non employées et dont l'existence entraîne l'impossibilité des demi-trajets complémentaires.

On obtient de la sorte les Tableaux suivants

$$(a_3)\quad \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{matrix} 2 & 5 & 7 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 11 \\ [2 & 5 & 12 & 7 & 11] \end{matrix}\right. \\ \left\{\begin{matrix} 2 & 5 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 11 & 10 & 12 \\ 2 & 12 & 8 & 6 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 11 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 11 \\ 12 & 8 & 6 & 10 & 2 \end{matrix}\right. \end{array}\right.$$

$$(a_3)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 7 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 12 & 9 & 11 \\[1ex] 2 & 12 & 6 & 10 & 7 \\ 5 & 9 & 3 & 8 & 11 \\[1ex] 5 & 9 & 3 & 8 & 11 \\ 12 & 6 & 10 & 7 & 2 \end{array}\right.$$

$$(a_2)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 6 & 7 & 10 \\ 3 & 12 & 9 & 8 & 11 \\[1ex] 2 & 6 & 10 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 8 & 12 & 11 \\[1ex] 5 & 3 & 8 & 12 & 11 \\ 6 & 10 & 9 & 7 & 2 \end{array}\right.$$

$$(a_4)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 12 & 9 & 11 & 10 \\[1ex] 2 & 6 & 10 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 11 & 8 & 12 \\[1ex] 5 & 3 & 11 & 8 & 12 \\ 6 & 10 & 2 & 9 & 7 \end{array}\right.$$

$$(a_1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 12 & 9 & 11 & 10 \\[1ex] 2 & 6 & 10 & 7 & 9 \\ 5 & 3 & 11 & 12 & 8 \\[1ex] 5 & 3 & 11 & 12 & 8 \\ 6 & 10 & 2 & 9 & 7 \end{array}\right.$$

Remarquons tout d'abord que si l'on forme avec les éléments 0, 1, 4 la suite des triades déduites des demi-trajets a_1 :

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	4	4	4	4	4
0	2	5	6	7	8	2	6	10	7	9	5	3	11	12	8
4	3	12	9	11	10	5	3	11	12	8	6	10	2	9	7

on retrouve toutes les triades qui, avec celles contenues déjà dans A, constituent S_1.

Nous pouvons écrire symboliquement cette proposition de cette façon

$$A + (1, 0, 4) a_1 \equiv S_1.$$

Ceci posé remarquons que la substitution cyclique

$$\sigma_a = (7, 3, 12, 10, 5, 8, 2, 9, 11, 6)$$

laisse A inaltérable, mais permute entre eux les Tableaux a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; on a en effet

$$\sigma_a a_1 = a_2, \qquad \sigma_a a_2 = a_3, \qquad \sigma_a a_3 = a_4, \qquad \sigma_a a_4 = a_5, \qquad \sigma_a a_5 = a_1,$$

les rangées des Tableaux se correspondant dans un certain ordre. Nous conclurons de là que, en désignant dans chaque cas par a, b, c les éléments 0, 1, 4 pris dans un ordre convenablement choisi, on aura les relations

$$\begin{aligned} \sigma_a[A + (a, b, c) a_5] &\equiv S_1, \\ \sigma_a^2[A + (a, b, c) a_4] &\equiv S_1, \\ \sigma_a^3[A + (a, b, c) a_3] &\equiv S_1, \\ \sigma_a^4[A + (a, b, c) a_2] &\equiv S_1, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la configuration A fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration B.

On peut écrire une configuration B, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9,$$

sous la forme

$$(\mathrm{B})\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 5 & 5 & 6 & 8 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 9 & 7 & 9 & 8 & 8 & 9 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans B peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	4	5	6
7	4	3	6	5	7	7
8	6	5	9	9		
9	8	8				

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\7\end{smallmatrix}$ par exemple, et essayons de les compléter; nous arrivons aux résultats suivants :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 & 9 & 5 \\ |0 & 8 & 1 & 4 & 9| \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 0\cdot & 8 & 2 & 3 & 9 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'il n'existe pas de groupes de trois demi-trajets épuisant toutes les duades. La configuration B ne fournit aucun système de triades.

Le réseau que nous avons ainsi rencontré est intéressant à un autre point de vue; il nous offre un exemple d'un réseau à sommets trilatères tel qu'il n'existe aucun contour fermé ou aucun ensemble de contours fermés comprenant chacun un nombre pair d'arêtes qui passe par tous les sommets.

Configuration C.

On peut écrire une configuration C, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9,$$

sous la forme

$$(\mathrm{C})\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 7 & 7 & 7 & 4 & 4 & 8 & 8 & 9 & 2 & 6 \\ 4 & 9 & 3 & 2 & 3 & 9 & 3 & 1 & 1 & 5 \\ 8 & 2 & 1 & 6 & 0 & 6 & 5 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans C sont précisément les mêmes que celles que nous avions déduites de l'examen de la configuration B, et avec lesquelles on ne peut former de groupes de demi-trajets.

La configuration C ne fournit aucun système de triades.

Configuration D.

On peut écrire une configuration D, où les éléments sont

$$1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 10\quad 11\quad 12,$$

sous la forme

$$(\mathrm{D})\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 6 & 6 & 6 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 11 & 4 & 10 & 5 & 7 & 10 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 7 & 12 & 11 & 12 & 11 & 10 & 7 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans D peuvent être représentées par le Tableau suivant :

1	2	3	4	5	7	10
4	5	6	7	10	12	11
6	6	11	12	11		
10	7	12				

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets qu'ils admettent :

$$(d_1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 12 & 11 \\ \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 12 & 11 & 10 \\ \\ 6 & 7 & 12 & 11 & 10 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right.$$

$$(d_2)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\
4 & 6 & 11 & 10 & 12 \\[1ex]
1 & 3 & 4 & 2 & 11 \\
6 & 12 & 7 & 5 & 10 \\[1ex]
6 & 12 & 7 & 5 & 10 \\
3 & 4 & 2 & 11 & 1
\end{array}\right.$$

Remarquons que la substitution

$$\sigma_d = (1)(2)(3)(6)(11, 12)(5, 7)(4, 10)$$

laisse D inaltéré, mais permute entre eux les Tableaux (d_1) et (d_2). Or la forme que nous avons choisie pour D résulte de la suppression des éléments 0, 8, 9 dans S_1. On voit alors immédiatement que l'on a

$$D + (0, 9, 8)\, d_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_d[D + (a, b, c)\, d_2] \equiv S_1.$$

a, b, c étant les éléments 0, 8, 9 placés dans un ordre convenablement choisi, c'est-à-dire que la configuration D fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration E.

On peut écrire une configuration E, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

$$(\mathrm{E})\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc}
6 & 8 & 5 & 12 & 0 & 7 & 4 & 12 & 0 & 1 \\
4 & 5 & 12 & 0 & 11 & 10 & 8 & 11 & 1 & 10 \\
5 & 11 & 1 & 7 & 10 & 6 & 7 & 6 & 4 & 8
\end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans E peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	4	5	6	7	8	10
5	6	10	7	8	11	12	12
6	7	11	10				
8	11	12					

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\5\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les soit avec un des polygones d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires quand ils existent :

$$(e)\qquad \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 8 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 12 & 10 & 11 \\ & [0 & 6 & 8] & \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 4 & 6 & 10 \\ 5 & 7 & 11 & 8 & 12 \\ \\ 0 & 1 & 7 & 10 & 12 \\ 6 & 11 & 5 & 4 & 8 \\ \\ 6 & 11 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 7 & 10 & 12 & 0 \end{array}\right. \end{array}$$

La forme que nous avons choisie pour E résulte de la suppression des éléments 2, 3, 9 dans S_2. On voit alors immédiatement que l'on a

$$E + (2, 3, 9)\,e \equiv S_2,$$

c'est-à-dire que la configuration E fournit un seul système de triades qui n'est autre que S_2.

Configuration F.

On peut écrire une configuration F, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

$$(F)\qquad\left\{\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & 11 & 2 & 11 & 7 & 9 & 8 & 10 & 12 \\ 12 & 8 & 10 & 3 & 7 & 9 & 11 & 10 & 12 & 8 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans F peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	7	8	9	11
1	9	8	7	8	11	10	12
2	12	11	10	10		12	
3							

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les soit avec un des polygones d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires quand ils existent.

$$(f)\qquad\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 9 & 11 \\ 1 & 8 & 7 & 10 & 12 \\ & [1 & 9 & 12] & \\[1ex] 0 & 2 & 3 & 7 & 9 \\ 1 & 11 & 10 & 8 & 12 \\[1ex] 0 & 8 & 12 & 9 & 7 \\ 2 & 11 & 1 & 10 & 3 \\[1ex] 2 & 11 & 1 & 10 & 3 \\ 8 & 12 & 9 & 7 & 0 \end{array}\right.$$

La forme que nous avons choisie pour F résulte de la suppression des éléments 4, 5, 6 dans S_1. On voit alors immédiatement que l'on a

$$F + (4, 5, 6) f \equiv S_1,$$

c'est-à-dire que la configuration F fournit un seul système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration G.

On peut écrire une configuration G, où les éléments sont

$$0 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12,$$

sous la forme

(G)

0	0	0	4	4	4	5	5	6	6
7	8	10	5	7	12	8	9	11	10
12	9	11	6	8	9	11	10	12	7

Les duades qui ne figurent pas dans G peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	4	5	6	7	8	9	10
4	10	7	8	9	10	11	12
5	11	12	9	11	12		
6							

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\4\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent.

(g_2)

0	5	6	9	10
4	7	8	11	12
0	12	10	11	9
5	8	4	7	6
5	8	4	7	6
12	10	11	9	0

(g_1)

0	5	6	7	8
4	12	9	11	10
0	7	11	10	8
5	9	4	12	6
5	9	4	12	6
7	11	10	8	0

La forme que nous avons choisie pour G résulte de la suppression des éléments 1, 2, 3 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_g = (0)(4)(5)(6)(7, 12)(8, 9)(10, 11)$$

laisse inaltérée G, mais permute entre eux les Tableaux g_1 et g_2. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$G + (1, 2, 3)g_1 \equiv S_1,$$

et, d'autre part,

$$\sigma_g[G + (a, b, c)g_2] \equiv S_1,$$

a, b, c étant les éléments 1, 2, 3 placés dans un ordre convenablement choisi, c'est-à-dire que la configuration G fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration II.

On peut écrire une configuration H, où les éléments sont

$$0 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 12,$$

sous la forme

(H)

3	5	5	5	4	6	4	6	9	2
8	4	9	0	3	3	12	8	0	10
12	6	10	2	10	0	9	2	8	12

Les duades qui ne figurent pas dans H peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	2	3	4	5	6	8
4	3	5	8	8	9	10
10	4	9		12	10	
12	9				12	

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\genfrac{}{}{0pt}{}{0}{4}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent :

$$(h_1)\qquad\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 12 & 9 & 10 \\[1ex] 0 & 6 & 2 & 8 & 3 \\ 10 & 12 & 4 & 5 & 9 \\[1ex] 10 & 12 & 4 & 5 & 9 \\ 6 & 0 & 8 & 3 & 2 \end{array}\right.$$

$$(h)\qquad\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 5 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 12 & 9 & 10 \\[1ex] 0 & 6 & 2 & 3 & 8 \\ 10 & 12 & 9 & 5 & 4 \\[1ex] 10 & 12 & 9 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 8 & 2 \end{array}\right.$$

$$(h_2)\qquad\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 6 & 8 \\ 4 & 9 & 5 & 12 & 10 \\[1ex] 0 & 6 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 2 & 8 & 12 \\[1ex] 10 & 9 & 2 & 8 & 12 \\ 5 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right.$$

La forme que nous avons choisie pour H résulte de la suppression des éléments 1, 7, 11 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_h = (3)(5)(8,\ 12)(2,\ 9)(0,\ 10)(4,\ 6)$$

laisse inaltérée H, mais permute entre eux les Tableaux h_1 et h_2. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$H + (1,\ 11,\ 7)h_1 \equiv S_1,$$

et, d'autre part,

$$\sigma_h[\mathrm{H} + (a, b, c)h_2] \equiv \mathrm{S}_1,$$

a, b, c étant les éléments 1, 7, 11 placés dans un ordre convenablement choisi.

Relativement à h', remarquons que, si l'on échange respectivement

$$\begin{matrix} 3 & 5 & 8 & 12 & 2 & 9 & 0 & 10 & 4 & 6 \end{matrix}$$

en

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 10 & 11 & 12 & 9 & 5 & 6 & 3 & 2, \end{matrix}$$

H devient

$$(\mathrm{H}'_1) \qquad \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 9 & 12 \\ 10 & 3 & 9 & 5 & 0 & 0 & 11 & 10 & 5 & 6 \\ 11 & 2 & 6 & 12 & 6 & 5 & 9 & 12 & 10 & 11, \end{matrix} \right.$$

qui est la forme H résultant de la suppression des éléments 4, 7, 8 dans S_1.

h' devient par cette substitution

$$(h'_1) \qquad \left\{ \begin{matrix} 3 & 12 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 0 & 11 & 9 & 6 \\ 5 & 2 & 12 & 0 & 10 \\ 6 & 11 & 9 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 11 & 0 & 10 & 12 \end{matrix} \right.$$

et l'on voit immédiatement que l'on a

$$\mathrm{H}_1 + (7, 4, 8)h'_1 \equiv \mathrm{S}_1.$$

La configuration H fournit donc un seul système de triades qui n'est autre que S_1.

Configuration J.

On peut écrire une configuration J, où les éléments sont

$$0\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 7\quad 8\quad 10\quad 11\quad 12,$$

sous la forme

$$(\mathrm{J})\qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 2 & 2 & 2 & 0 & 5 & 4 & 12 & 5 & 4 & 12 \\ 0 & 11 & 10 & 11 & 8 & 3 & 7 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 12 & 10 & 11 & 10 & 0 & 7 & 8 & 3 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans J peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	2	3	4	5	7	8	11
3	3	11	5	10	10	10	12
4	7		12	12	11		
8	8						

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les avec les demi-trajets complémentaires qu'ils admettent :

$$(j_1)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 8 & 11 \\ 3 & 7 & 5 & 10 & 12 \\ \\ 0 & 12 & 10 & 11 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ \\ 4 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ 12 & 10 & 11 & 2 & 0 \end{array}\right.$$

$$(j_2)\qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 5 & 10 & 12 \\ \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ \\ 4 & 5 & 8 & 3 & 7 \\ 12 & 10 & 0 & 11 & 2 \end{array}\right.$$

$$(j') \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 7 & 11 \\ 3 & 8 & 5 & 10 & 12 \\ \\ 0 & 12 & 10 & 2 & 11 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ \\ 4 & 5 & 8 & 7 & 3 \\ 12 & 10 & 0 & 11 & 2 \end{array} \right.$$

$$(j_3) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 12 & 10 & 11 \\ \\ 0 & 5 & 11 & 2 & 10 \\ 4 & 12 & 3 & 7 & 8 \\ \\ 4 & 12 & 3 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 2 & 10 & 0 \end{array} \right.$$

La forme que nous avons choisie pour J résulte de la suppression des éléments 1, 6, 9 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_j = (2)(7, 3, 8)(4, 5, 12)(0, 10, 11)$$

laisse inaltérée J, mais change j_1 en j_2, et j_2 en j_3. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$J + (6, 1, 9)j_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_j[J + (a, b, c)j] \equiv S_1,$$
$$\sigma_j^2[J + (a, b, c)j] \equiv S_1,$$

a, b, c étant les éléments 1, 6, 9 placés dans un ordre convenablement choisi.

Relativement à j', remarquons que la forme que nous avons choisie pour J résulte aussi de la suppression des éléments 1, 6, 9 dans S_2. On en conclut la relation

$$J + (6, 1, 9)j' \equiv S_2.$$

La configuration J fournit donc deux systèmes de triades, mais ces systèmes de triades ne sont autres que S_1 et S_2.

Configuration K.

On peut écrire une configuration K, où les éléments sont

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 10 \quad 11,$$

sous la forme

$$(\mathrm{K}) \qquad \left\{\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 11 & 2 & 10 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 5 & 8 & 6 & 7 & 10 & 2 \\ 11 & 2 & 10 & 3 & 8 & 6 & 7 & 5 & 11 & 3 \end{array}\right.$$

Les duades qui ne figurent pas dans K peuvent être représentées par le Tableau suivant :

0	1	2	3	5	6	7
1	5	7	8	6	11	8
7	6	10	10	10		
8		11	11			

Formons les demi-trajets qui contiennent une des arêtes, $\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ par exemple, et écrivons-les soit avec un des polynomes d'un nombre impair de côtés qui empêchent l'existence des demi-trajets complémentaires, soit avec les demi-trajets complémentaires, quand ils existent :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 7 & 8 & 10 & 11 \\ & [1 & 5 & 6] & \end{array}\right.$$

$$(k_2) \qquad \left\{\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 8 & 11 & 6 \\ 0 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & 11 & 1 & 10 & 8 \\ 7 & 11 & 1 & 10 & 8 \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right.$$

$$(k_1)\quad \left|\begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 11 & 8 & 10 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & 6 & 3 \\ 7 & 10 & 1 & 11 & 8 \\ 7 & 10 & 1 & 11 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right.$$

La forme que nous avons choisie pour K résulte de la suppression des éléments 4, 9, 12 dans S_1. D'autre part, la substitution

$$\sigma_k = (0, 1)(2, 10, 3, 11)(5, 8, 6, 7)$$

laisse inaltérée K, mais change k_1 en k_2. On reconnaît donc immédiatement que l'on a

$$K + (4, 12, 9) k_1 \equiv S_1$$

et, d'autre part,

$$\sigma_k [K + (a, b, c) k_2] \equiv S_1,$$

a, b, c étant les éléments 4, 9, 12 placés dans un ordre convenablement choisi, c'est-à-dire que la configuration K fournit un, et un seul, système de triades qui n'est autre que S_1.

En résumé, il n'y a que deux systèmes distincts de triades de 13 éléments. Dans la constitution de l'un d'eux nous reconnaissons la présence des configurations $(33)_{10}$ des symboles A, D, F, G, H, J et K; dans la constitution du second n'existent que les configurations E et J.

Les configurations B et C ne donnent naissance à aucun système de triades, mais fournissent un réseau à sommets trilatères, curieux au point de vue des trajets que l'on peut former avec ses arêtes.