JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

LOVETT

Sur la géométrie à n dimensions

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 7 (1901), p. 259-303.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__259_0>

Sur la Géométrie à n dimensions;

PAR M. LOVETT.

Dans les spéculations des géomètres sur la Géométrie de l'espace à n dimensions on peut distinguer plusieurs directions, qui cependant se coupent souvent; on signale les catégories suivantes :

1° L'extension directe de la Géométrie de Descartes; cette extension n'est qu'une forme convenable de phraséologie; à ce point de vue l'espace à plusieurs dimensions n'est qu'un ensemble analytique et sa Géométrie n'est qu'une interprétation géométrique de faits et formules analytiques; sous cette forme l'espace à n dimensions provint des esprits de Grassmann, Cayley, Gauss et Cauchy, et il est probable qu'Euler et Lagrange furent familiers avec cette idée;

2° La généralisation des notions et des problèmes de la Géométrie métrique ou projective de l'espace ordinaire; les Mémoires de MM. Jordan, d'Ovidio et Veronese donnent des exemples de ce groupe d'investigations;

3° La transformation des espaces ordinaires visuels à deux ou trois dimensions en multiplicités à dimensions plus hautes ou plus petites en remplaçant le point ou son élément dualistique par d'autres éléments d'espace : par exemple la Géométrie de droites de Plücker, la Géométrie de sphères de Lie, la Géométrie à cinq dimensions de toutes les coniques du plan comme un auxiliaire à la théorie de vis de M. Ball; cette catégorie des géomètres est peut-être la plus concrète;

4° La théorie des correspondances birationnelles entre les ensembles à n dimensions, ce qui a été l'objet des recherches de MM. Brill, Kantor et Nœther;

5° L'extension des méthodes de la Géométrie différentielle ordinaire aux espaces à plusieurs dimensions; cette classe contient les travaux de Beltrami et Christoffel, de MM. Bianchi, Cesàro et Ricci, et les contributions récentes de M. Darboux et de ses élèves;

6° L'interprétation donnée à la Géométrie à n dimensions par la théorie des groupes continus; dans cette catégorie sont les Mémoires bien connus de Lie, et de MM. Klein et Poincaré;

7° La Géométrie absolue d'espace; ici on trouve la dissertation célèbre de Riemann, les Mémoires de Helmholtz et Lie, et le Traité de M. Veronese;

8° La Géométrie descriptive de l'espace à plusieurs dimensions dont on trouve les éléments dans les travaux de MM. Schlegel, Segre, Stringham et Veronese;

9° La Cinématique des espaces à n dimensions développée dans les Mémoires de Beltrami, Clifford et M. Jordan.

On se propose ici de faire quelques applications de la théorie des groupes continus finis et infinis à la Géométrie de l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

I. — Construction de la Géométrie euclidienne de l'espace à n dimensions.

M. Poincaré a donné une très belle application de la méthode de Lie, en déterminant les Géométries quadratiques à deux dimensions (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XV, p. 203-215).

Le Chapitre suivant expose la même théorie pour une Géométrie quelconque et construit la Géométrie euclidienne à n dimensions.

Nous allons faire les hypothèses suivantes par rapport à l'espace :

1° Soit l'espace une multiplicité de n dimensions; c'est-à-dire, soient n choses indépendantes nécessaires et suffisantes pour déterminer la position d'un élément de la multiplicité; ces n choses indépendantes sont nommées les *coordonnées de l'élément;*

2° Soit $\frac{1}{2}n(n+1)$ le nombre de degrés de liberté d'une figure de la multiplicité dans la multiplicité; c'est-à-dire, soient $\frac{1}{2}n(n+1)$

choses indépendantes nécessaires et suffisantes pour fixer la position d'un corps rigide; ces $\frac{1}{2}n(n+1)$ choses indépendantes sont nommées les *paramètres de la figure*.

Il est convenable de nommer l'élément un *point* et de désigner ses coordonnées par $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Considérons une figure quelconque qui contient ce point et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{1}{2}n(n+1)}$ les paramètres de la figure. Soient $x'_2, x'_2, \ldots, x'_n$ les coordonnées de la position nouvelle du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans la position nouvelle de la figure. On a

$$(1)\quad \begin{cases} x'_i = \xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \\ \nu = \frac{1}{2}n(n+1). \end{cases}$$

L'opération changeant $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ représente un des mouvements d'une figure à n dimensions; l'ensemble de ces opérations forme un groupe continu à $\frac{1}{2}n(n+1)$ paramètres. Parmi ces opérations on doit trouver la transformation identique; donc il doit y avoir un système de paramètres tel qu'on ait

$$(2)\qquad \xi_1 = x_1, \qquad \xi_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad \xi_n = x_n.$$

Sans perdre de généralité on peut supposer que ce système particulier de paramètres soit le suivant :

$$(3)\qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0.$$

Une transformation infinitésimale du groupe est une transformation dont les paramètres ne diffèrent que par des quantités infinitésimales des paramètres qui produisent la transformation identique; dans le cas (3) on obtient la transformation infinitésimale en donnant des valeurs infinitésimales aux paramètres; c'est-à-dire, par une telle transformation $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont changées en

$$(4)\qquad x_i + \sum_1^\nu \alpha_j \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad \nu = \frac{1}{2}n(n+1),$$

respectivement (dans les dérivées partielles il faut poser les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ égales à zéro).

En écrivant

$$(5)\qquad p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

le symbole bien connu de la transformation infinitésimale (4) est

$$(6)\qquad \mathrm{I} = \sum_1^n {}_i p_i \sum_1^\nu {}_j \alpha_j \frac{\partial \xi_i}{\partial \alpha_j}$$

ou en posant

$$(7)\qquad \mathrm{J}_i = \sum_1^n {}_j p_j \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

une transformation infinitésimale quelconque s'écrit

$$(8)\qquad \mathrm{I} = \sum_1^\nu {}_i \alpha_i \mathrm{J}_i.$$

D'après un théorème fondamental de Lie, on a

$$(9)\qquad (\mathrm{J}_i \mathrm{J}_j) = \sum_1^\nu {}_k \lambda_{ijk} \mathrm{J}_k \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où

$$(10)\qquad (\mathrm{J}_i \mathrm{J}_j) = \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial \mathrm{J}_i}{\partial p_k} \frac{\partial \mathrm{J}_j}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{J}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \mathrm{J}_j}{\partial p_k} \right),$$

et les λ_{ijk} sont des constantes. Il y a $\frac{1}{8}[n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)]$ de ces équations (9), mais les $\frac{1}{16}[n^3(n+1)^3 - 2n^2(n+1)^2]$ quantités λ_{ijk} ne sont pas tout à fait arbitraires, parce que les

$$\frac{1}{48}[n^3(n+1)^3 - 6n^2(n+1)^2 + 8n(n+1)]$$

identités de Jacobi

$$(11)\qquad [J_i(J_jJ_k)]+[J_j(J_kJ_i)]+[J_k(J_jJ_i)]=0 \qquad (i,j,k=1,x,\ldots,\nu)$$

ont lieu.

Tous les systèmes de quantités J_i qui satisfont aux équations (9) et (11) donnent des espaces dont les mouvements infinitésimaux indépendants se représentent respectivement par les transformations infinitésimales du système. Les fonctions des éléments qui sont des invariants sous ces transformations fournissent les propriétés caractéristiques de la Géométrie de l'espace. On se propose ici de trouver ces caractéristiques pour un système des transformations.

On vérifie facilement que les formes suivantes des transformations fondamentales J_1, J_2, ..., J_ν, savoir

$$(12)\qquad p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad x_ip_j - x_jp_i \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

satisfont aux équations (9) et (11).

Soient $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ deux points quelconques et $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n)$ leurs positions après la transformation

$$(13)\qquad I=\sum_1^\nu \alpha_i J_i$$

où les J_i ont les valeurs (12).

Si la fonction $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ est une fonction absolument invariante sous cette opération, on a

$$(14)\qquad I\varphi\equiv 0$$

pour toutes les valeurs des α_i; donc pour la détermination de la fonction φ on a le système suivant d'équations aux dérivées partielles :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}&=0\\ x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}+x'_i\frac{\partial\varphi}{\partial x'_j}-x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-x'_j\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}&=0\end{aligned}\right\} \qquad (i,j=1,2,\ldots,n),$$

Ce système complet a $\frac{1}{2}n(n+1)$ équations et $2n$ variables. Il n'y a pas de solution si les équations sont indépendantes. Prenons les $2n-1$ équations suivantes du système (15) :

$$(16) \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_\rho} + \frac{\partial\varphi}{\partial x'_\rho} = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(17) \quad x_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_\sigma} - x_\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + x'_1\frac{\partial\varphi}{\partial x'_\sigma} - x'_\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial x'_1} = 0 \qquad (\sigma = 2, 3, \ldots, n);$$

en multipliant les équations (16) respectivement par

$$l_h^{(ij)} |(x_1 - x'_1) \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

où

$$l_1^{(ij)} = |x_i, x'_j|, \qquad l_i^{(ij)} = |x_j, x'_i|, \qquad l_j^{(ij)} = |x_1, x'_i|, \qquad l_k^{(ij)} = 0$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n; \qquad k \neq i, \qquad k \neq j),$$

et les équations (17) respectivement par

$$\lambda_h^{(ij)} |(x_1 - x'_1)| \qquad (h = 2, 3, \ldots, n),$$

où

$$\lambda_i^{(ij)} = x'_j - x_j, \qquad \lambda_j^{(ij)} = x_i - x'_i, \qquad \lambda_k^{(ij)} = 0$$
$$(k = 2, 3, \ldots, n; \qquad k \neq i, \qquad k \neq j);$$

et en ajoutant on obtient les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ équations restantes du système (15), savoir

$$(18) \qquad x_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + x'_i\frac{\partial\varphi}{\partial x'_j} - x'_j\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i} = 0.$$

Le système complet (16) et (17) de $2n-1$ équations avec $2n$ variables a au moins une solution. On vérifie que cette solution est unique en observant qu'il y a un déterminant du $(2n-1)^{\text{ième}}$ ordre de la matrice

$$\left|\begin{array}{cccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\
x'_2-x_2 & x'_1-x_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x'_2 & x'_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\
x'_3-x_3 & 0 & x'_1-x_1 & 0 & \dots & 0 & -x'_3 & 0 & x'_1 & 0 & \dots & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
x'_n-x_n & 0 & 0 & 0 & \dots & x'_1-x_1 & -x'_n & 0 & 0 & 0 & \dots & x'_1
\end{array}\right|$$

qui n'est pas égal à zéro, savoir le déterminant des $2n-1$ dernières colonnes dont la valeur est $(x_1 - x'_1)^{n-1}$.

Cette solution unique du système (16) et (17) est facile à trouver. En effet les n équations (16) demandent que φ soit une fonction des quantités

$$X_i = x_i - x'_i \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

En ces variables nouvelles les $n-1$ équations (17) deviennent

$$X_i \frac{\partial\varphi}{\partial X_j} - X_j \frac{\partial\varphi}{\partial X_i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \dots, n),$$

qui montrent que φ est une fonction de

$$\sum_1^n X_i^2;$$

donc la fonction

$$(19) \qquad \delta = \sqrt{\sum_1^n (x_i - x'_i)^2}$$

est un invariant absolu sous la transformation la plus générale du groupe (12).

On dit que la fonction δ définit la distance des deux points

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Considérons maintenant la multiplicité linéaire des éléments

$$(20) \qquad x_i + \lambda_i x_1 + \alpha_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les variations données aux $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les transformations (12) sont les suivantes :

Sous p_j,

$$(21) \quad \delta x_j = 1, \qquad \delta x_i = 0, \qquad i \neq j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

Sous $x_i p_j - x_j p_i$,

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x_i = -x_j, \quad \delta x_j = +x_i, \quad \delta x_k = 0, \quad k \neq i, \quad k \neq j \\ \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

En formant les équations

$$(23) \qquad \delta(x_i + \lambda_i x_1 + \alpha_i) = 0$$

on trouve pour les variations des λ_i et α_i les valeurs suivantes :

Sous p_i,

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\lambda_j = 0, \quad \delta\alpha_j = -\lambda_j, \quad (i = 1; j = 2, 3, \ldots, n), \\ \delta\lambda_j = 0, \quad \delta\alpha_i = -1, \quad \delta\alpha_j = 0 \\ \qquad (i = 2, 3, \ldots, n; j = 2, 3, \ldots, n); \end{array} \right.$$

sous $x_i p_j - x_j p_i$,

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\lambda_i = -\lambda_j, \quad \delta\lambda_j = \lambda_i, \quad \delta\lambda_k = 0 \quad (i \neq 1, j \neq 1), \\ \delta\alpha_i = -\alpha_j, \quad \delta\alpha_j = \alpha_i, \quad \delta\alpha_k = 0 \\ \quad (k = 2, 3, \ldots, n; k \neq i, k \neq j); \\ \delta\lambda_i = \lambda_i^2 + 1, \quad \delta\lambda_k = \lambda_i\lambda_k \\ (i = 2, 3, \ldots, n; j = 1; k \neq 1; k = 2, 3, \ldots, n), \\ \delta\alpha_l = \alpha_i\lambda_l \quad (l = 2, 3, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Les invariants absolus de deux multiplicités linéaires

$$(26)\qquad (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n), \quad (\lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_n, \alpha'_2, \alpha'_3, \ldots, \alpha'_n)$$

sont des solutions du système des équations aux dérivées partielles

$$(27)\qquad \left\{\begin{array}{l} \sum_2^n {}_i \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}\delta_j\lambda_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}\delta_j\alpha_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_i}\delta_j\lambda'_i + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i}\delta_j\alpha'_i\right) = 0 \\ \qquad [j = 1, 2, \ldots, \nu = \frac{1}{2}n(n+1)], \end{array}\right.$$

où les variations δ_j doivent être remplacées successivement par les valeurs (24) et (25).

Il est commode d'arranger les équations (27) de la manière suivante :

Les $n-1$ équations

$$(28)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i} = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n);$$

l'équation

$$(29)\qquad \sum_2^n {}_i \left(\lambda_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} + \lambda'_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i}\right) = 0;$$

les $n-2$ équations

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j} - \lambda_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2} + \alpha_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_j} - \alpha_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_2} \\ \quad + \lambda'_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_j} - \lambda'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_2} + \alpha'_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_j} - \alpha'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_2} = 0 \end{array}\right. \qquad (j = 3, 4, \ldots, n);$$

les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ équations

$$(31)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_i \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j} - \lambda_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i} + \alpha_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_j} - \alpha_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i} \\ \qquad + \lambda'_i \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_j} - \lambda'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda'_i} + \alpha'_i \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_j} - \alpha'_j \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha'_i} = 0 \\ \qquad (i = 3, 4, \ldots, n;\ j = 2, 3, \ldots, n); \end{array}\right.$$

les $n-1$ équations

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda_j^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j}+(\lambda_j'^2+1)\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_j'}+\sum_2^n{}'\left(\lambda_i\lambda_j\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i}+\lambda_i'\lambda_j'\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_i'}\right)\\ &\qquad\qquad+\sum_2^n{}'\left(\alpha_i\alpha_j\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}+\alpha_i'\alpha_j'\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i'}\right)=0\\ &\qquad\qquad(i\neq j, j=2,3,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

Des équations (24) et (25) on déduit que les variations de λ_1, λ_2, ..., ne contiennent pas les α_1, α_2, ...; est-il donc possible de trouver des fonctions des λ_i et λ_i' qui soient invariantes? Si de telles fonctions

$$\psi(\lambda_2,\lambda_3,\ldots,\lambda_n,\lambda_2',\lambda_3',\ldots,\lambda_n')$$

existent, elles doivent être des solutions du système suivant de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations entre $2(n-1)$ variables :

Les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ équations

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda_i\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}-\lambda_j\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i}+\lambda_i'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j'}-\lambda_j'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i'}=0\\ &(i=3,4,\ldots,n;\ j=2,3,\ldots,n);\end{aligned}\right.$$

les $(n-2)$ équations

$$(34)\quad \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}-\lambda_j\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_2}+\lambda_2'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j'}-\lambda_j'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_2'}=0\qquad(j=3,4,\ldots,n);$$

les $n-1$ équations

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &(\lambda_j^2+1)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j}+(\lambda_j'^2+1)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_j'}+\sum_2^n{}'\left(\lambda_i\lambda_j\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i}+\lambda_i'\lambda_j'\frac{\partial\psi}{\partial\lambda_i'}\right)=0\\ &\qquad(i\neq j;\ j=2,3,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

On vérifie qu'il n'y a plus que $2n-3$ équations indépendantes dans ce système en observant que les $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ déterminants D du $2(n-1)^{\text{ième}}$ ordre sont zéro, où les déterminants D se forment en ajoutant les lignes de la suite

$$
(36)\quad \begin{vmatrix}
0 & -\lambda_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & -\lambda'_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda'_3 \\
0 & 0 & -\lambda_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & -\lambda'_n & 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda'_4 \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & . & .. & . & . & \ldots & . & \ldots & . & . & .. \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda_n & \lambda_{n-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda'_n & \lambda'_{n-1} \\
0 & -\lambda_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & -\lambda'_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda'_3 & 0 \\
0 & 0 & -\lambda_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & -\lambda'_{n-1} & 0 & \ldots & 0 & \lambda'_4 & 0 \\
. & . & \ldots & . & \ldots & . & .. & . & . & . & \ldots & . & \ldots & . & .. & . \\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda_{n-1} & \lambda_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -\lambda'_{n-1} & \lambda'_{n-2} & 0 \\
. & . & . & . & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & . & . & . & \ldots & \ldots & \ldots & . \\
0 & -\lambda_4 & \lambda_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda'_4 & \lambda'_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
$$

successivement à la matrice

$$
(37)\quad \begin{vmatrix}
-\lambda_3 & \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda'_3 & \lambda'_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
-\lambda_4 & 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 & -\lambda'_4 & 0 & \lambda'_2 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & . & \ldots & . & \ldots & . & \ldots & . & .. & . & \ldots & . \\
-\lambda_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_2 & -\lambda'_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda'_2 \\
\lambda_2^2+1 & \lambda_2\lambda_3 & \lambda_2\lambda_4 & \lambda_2\lambda_5 & \ldots & \lambda_2\lambda_n & \lambda'^2_2+1 & \lambda'_2\lambda'_3 & \lambda'_2\lambda'_4 & \lambda'_2\lambda'_5 & \ldots & \lambda'_2\lambda'_n \\
\lambda_2\lambda_3 & \lambda_3^2+1 & \lambda_3\lambda_4 & \lambda_3\lambda_5 & \ldots & \lambda_3\lambda_n & \lambda'_2\lambda'_3 & \lambda'^2_3+1 & \lambda'_3\lambda'_4 & \lambda'_3\lambda'_5 & \ldots & \lambda'_3\lambda'_n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\lambda_2\lambda_n & \lambda_3\lambda_n & \lambda_4\lambda_n & \lambda_5\lambda_n & \ldots & \lambda_n^2+1 & \lambda'_2\lambda'_n & \lambda'_3\lambda'_n & \lambda'_4\lambda'_n & \lambda'_5\lambda'_n & \ldots & \lambda'^2_n+1
\end{vmatrix}
$$

Considérons donc maintenant le système composé des $(2n-3)$ équations (34) et (35) entre les $2(n-1)$ variables $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \lambda'_2, \lambda'_3, \ldots, \lambda'_n$.

Les équations (34) demandent que ψ soit une fonction de

$$
(38)\qquad \xi \equiv \sum_2^n{}_i\,\lambda_i^2, \qquad \eta \equiv \sum_2^n{}_i\,\lambda_i\,, \qquad \zeta \equiv \sum_2^n{}_i\,\lambda_i\lambda'_i\,.
$$

Les équations (35) deviennent dans les variables ξ, η, ζ

$$
(39)\quad 2\lambda_j\xi_1\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} + 2\lambda'_j\eta_1\frac{\partial\varphi}{\partial\eta_1} + (\lambda_j+\lambda'_j)\zeta_1\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1} = 0 \quad (j = 2, 3, \ldots, n)
$$

où

$$(40)\qquad \xi_1 = \xi + 1, \qquad \eta_1 = \eta + 1, \qquad \zeta_1 = \zeta + 1.$$

De ces équations on déduit

$$(41)\qquad \frac{d\xi_1}{\xi_1} + \frac{d\eta_1}{\eta_1} - 2\frac{d\zeta_1}{\zeta_1} = 0,$$

c'est-à-dire que ψ est une fonction de

$$(42)\qquad \zeta_1^2 \,|\, \xi_1 \eta_1,$$

où la quantité

$$(43)\qquad \cos^2\theta = \frac{\sum_2^n{}_i (\lambda_i \lambda'_i + 1)^2}{\left(\sum_2^n{}_i \lambda_i^2 + 1\right)\left(\sum_2^n{}_i \lambda_i'^2 + 1\right)}$$

est un invariant absolu sous la transformation la plus générale du groupe (12).

On dit que l'angle θ est l'angle entre les deux multiplicités linéaires.

Il est facile de vérifier sur la matrice (37) que la solution (43) est la solution unique du système (34) et (35).

S'il s'agit de fonctions invariantes des α et des λ, on les trouvera par l'intégration du système composé des équations (28), (29), (30), (31) et (32). En effet, les équations (28) disent que φ est fonction de

$$\rho_i \equiv \alpha_i - \alpha'_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

En écrivant l'équation (29) dans les variables ρ_i on a

$$\sum_2^n{}_i \sigma_j \frac{\partial\varphi}{\partial\rho_j} = 0, \qquad \sigma_j \equiv \lambda_j - \lambda'_j \qquad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

ce qui demande que φ soit fonction d'un système quelconque des $(n-1)$ systèmes de $(n-2)$ déterminants

$$\rho_2\sigma_j - \rho_j\sigma_2 \equiv (\rho\sigma)_{2j},\quad \rho_3\sigma_j - \rho_j\sigma_3 \equiv (\rho\sigma)_{3j},\quad \ldots,\quad \rho_n\sigma_j - \rho_j\sigma_n \equiv (\rho\sigma)_{nj}$$
$$(j = 2, 3, \ldots, n).$$

Les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ équations (30) et (31) deviennent les $(n-1)$ suivantes

$$(\rho\sigma)_{ki}\frac{\partial\varphi}{\partial(\rho\sigma)_{kj}} - (\rho\sigma)_{kj}\frac{\partial\varphi}{\partial(\rho\sigma)_{ki}} = 0 \qquad (i, j = 2, 3, \ldots, n);$$

ces équations demandent que φ soit fonction de

$$P \equiv \sum_2^n {}_i\,[(\rho\sigma)_{ki}]^2;$$

d'ailleurs les équations (30) et (31) dans les variables originales nous disent que les λ et λ' entrent dans la fonction φ par des déterminants

$$\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \ldots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix},$$

et en effet seulement au moyen des formes

$$Q \equiv \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \ldots & \lambda'_n \end{vmatrix}^2,$$

et

$$R \equiv \sum_2^n {}_i\,(\lambda_i - \lambda'_i)^2;$$

aussi les équations (32) demandent que Q et R entrent par la combinaison

$$Q + R \equiv \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \ldots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \ldots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix}^2 \equiv T.$$

Enfin les équations (32) prennent les formes

$$(\lambda_j + \lambda'_j)\left(P\frac{\partial\varphi}{\partial P} + T\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right) = 0 \qquad (j = 2, 3, \ldots, n),$$

c'est-à-dire que la solution φ cherchée est une fonction arbitraire de

$$P \mid T;$$

ainsi les $(n-1)$ formes suivantes

$$\Delta_j^2 = \frac{\sum_2^n \left| \lambda_j - \lambda'_j, \alpha_k - \alpha'_k \right|^2}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \dots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix}^2} \qquad (j = 2, 3, \dots, n)$$

sont des fonctions invariantes des paramètres des deux multiplicités linéaires sous la transformation la plus générale du groupe (12).

Quand les deux multiplicités linéaires se coupent, toutes les formes Δ_j sont égales à zéro; réciproquement, si une Δ_j quelconque est égale à zéro, toutes les autres sont égales à zéro et les multiplicités ont un point commun.

Il est clair *a fortiori* qu'on a l'invariant

$$\Delta^2 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 - \lambda'_2 & \lambda_3 - \lambda'_3 & \dots & \lambda_n - \lambda'_n \\ \alpha_2 - \alpha'_2 & \alpha_3 - \alpha'_3 & \dots & \alpha_n - \alpha'_n \end{vmatrix}^2}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_n & 1 \\ \lambda'_2 & \lambda'_3 & \dots & \lambda'_n & 1 \end{vmatrix}^2}.$$

L'analogie entre les formes Δ et Δ_j et l'expression pour la distance de deux droites de l'espace ordinaire est évidente.

On remarque que les notions fondamentales de distance et de direction de l'espace à n dimensions sont introduites au moyen des invariants (19) et (43), la notion de distance par rapport à deux éléments de l'espace, et la notion de direction par rapport à deux multiplicités les plus simples composées d'un nombre une fois infini de ces éléments. Donc on peut dériver toutes les notions secondaires de la Géométrie de l'espace à n dimensions par des extensions successives de ces notions primaires de l'espace ordinaire, et ces extensions sont aussi simples que les extensions du plan à l'espace ordinaire.

II. — Sur la Géométrie des quadriques de l'espace à n dimensions.

Considérons encore le groupe des mouvements euclidiens

$$(44)\quad p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ x_i p_j - x_j p_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous avons vu que la théorie de ce groupe peut donner les notions de la Géométrie euclidienne de l'espace à n dimensions. Pour montrer que cette théorie peut aussi donner les éléments de cette Géométrie, considérons la quadrique

$$(45)\quad S \equiv \sum_1^n \sum a_{ij} x_i x_j + 2 \sum_{j=1}^n a_{j,n+1} x_j + a_{n+1,n+1} = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}),$$

et cherchons les invariants de la quadrique S sous toutes les transformations infinitésimales du groupe (44).

On observe que S est une fonction linéaire et homogène des paramètres a_{mn}; donc les fonctions invariantes cherchées sont des fonctions homogènes de degré zéro et par le théorème d'Euler on a

$$(46)\qquad \sum_1^{n+1} \sum a_{ij} \frac{\partial I}{\partial a_{ij}} = 0.$$

D'ailleurs de la définition d'une fonction invariante absolue on déduit

$$(47)\qquad \delta I = \sum_1^{n+1} \sum \frac{\partial I}{\partial a_{ij}} \delta a_{ij} = 0.$$

Si l'on connaît les variations δa_{ij}, les fonctions invariantes se déterminent par l'intégration du système des équations aux dérivées partielles (47); donc il faut chercher les valeurs données aux variations δa_{ij} par les transformations (44). Pour obtenir ces formes on se rappelle que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prennent les accroissements suivants :

$$
(48)\quad \begin{cases} \delta_k x_k = 1, \qquad \delta_k x_j = 0, \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq k); \\ \delta_{kl} x_k = -x_l, \qquad \delta_{kl} x_l = x_k, \qquad \delta_{kl} x_j = 0 \\ \quad (j, k, l = 1, 2, \ldots, n;\ j \neq k, j \neq l); \end{cases}
$$

où δ_k est un symbole pour la variation donnée par la transformation p_k et δ_{kl} est la variation donnée par la transformation $x_k p_l - x_l p_k$.

En substituant les variations (48) dans la variation totale de S, on obtient :

$$
(49)\quad \begin{cases} \delta_k S = \sum_1^n {}_i \sum {}_j x_i x_j \delta_k a_{ij} + 2\sum_1^n {}_j (a_{kj} + \delta_k a_{j,n+1}) x_j \\ \qquad + 2a_{k,n+1} + \delta_k a_{n+1,n+1} = 0, \end{cases}
$$

$$
(50)\quad \begin{cases} \delta_{kl} S = \sum_1^n {}_i \sum {}_j x_i x_j \delta_{kl} a_{ij} + 2\sum_1^n {}_i (a_{il} x_i x_k - a_{ik} x_i x_l) \\ \qquad + 2\sum_1^n {}_j x_j \delta_{kl} a_{j,n+1} + 2(a_{l,n+1} x_k - a_{k,n+1} x_l) + \delta_{kl} a_{n+1,n+1} = 0. \end{cases}
$$

S'il s'agit du groupe de similitude il faut ajouter la transformation

$$
(51)\qquad \sum_1^n {}_i x_i p_i, \qquad \delta_s x_i = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),
$$

et l'équation

$$
(52)\quad \begin{cases} \delta_s S = \sum_1^n {}_i \sum {}_j (2a_{ij} + \delta_s a_{ij}) x_i x_j \\ \qquad + 2\sum_1^n {}_j (a_{jn+1} + \delta_s a_{j,n+1}) x_j + \delta_s a_{n+1,n+1} = 0. \end{cases}
$$

En comparant les équations (49), (50) et (52) avec l'équation (45) on trouve les équations suivantes pour la détermination des variations $\delta_k a_{ij}$, $\delta_{kl} a_{ij}$ et $\delta_s a_{ij}$:

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\delta_k a_{11}}{a_{11}} = \frac{\delta_k a_{12}}{a_{12}} = \ldots = \frac{\delta_k a_{1n}}{a_{1n}} = \frac{\delta_k a_{22}}{a_{22}} = \frac{\delta_k a_{23}}{a_{23}} = \ldots \\ &\quad = \frac{\delta_k a_{nn}}{a_{nn}} = \frac{\delta_k a_{1,n+1} + a_{k1}}{a_{1,n+1}} = \frac{\delta_k a_{2,n+1} + a_{k2}}{a_{2,n+1}} = \ldots \\ &\quad = \frac{\delta_k a_{n,n+1} + a_{kn}}{a_{n,n+1}} = \frac{\delta_k a_{n+1,n+1} + 2a_{k,n+1}}{a_{n+1,n+1}} = \rho_k \\ &\qquad (k = 1, 2, \ldots, n); \end{aligned}\right.$$

aussi toutes les quantités suivantes

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\delta_{kl} a_{ij}}{a_{ij}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n, j \neq k, j \neq l, ij \neq kl); \\ &\frac{\delta_{kl} a_{i,n+1}}{a_{i,n+1}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{il} - a_{ik}}{a_{il}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{ik} + a_{il}}{a_{ik}} \\ &(i = 1, 2, \ldots, n, i \neq k, i \neq l); \\ &\frac{\delta_{kl} a_{kk} + 2a_{kl}}{a_{kk}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{ll} - 2a_{kl}}{a_{ll}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{n+1,n+1}}{a_{n+1,n+1}}, \\ &\frac{\delta_{kl} a_{kl} + a_{ll} - a_{kk}}{a_{kl}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{k,n+1} - a_{l,n+1}}{a_{k,n+1}}, \quad \frac{\delta_{kl} a_{l,n+1} - a_{k,n+1}}{a_{l,n+1}}, \end{aligned}\right.$$

sont égales à

$$(55)\qquad \rho_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n);$$

et toutes les quantités suivantes

$$(56)\quad \frac{\delta_s a_{ij} + 2a_{ij}}{a_{ij}}, \quad \frac{\delta_s a_{j,n+1} + a_{j,n+1}}{a_{j,n+1}}, \quad \frac{\delta_s a_{n+1,n+1}}{a_{n+1,n+1}} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

sont égales à σ.

Donc on a les valeurs suivantes des variations cherchées :

$$(57)\quad \left\{\begin{aligned} &\delta_k a_{ij} = a_{ij}\rho_k, \quad \delta_k a_{i,n+1} = a_{i,n+1}\rho_k - a_{ki}, \\ &\qquad \delta_k a_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}\rho_k - 2a_{k,n+1} \end{aligned}\right\} \quad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n);$$

$$
(58)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
\delta_{kl} a_{ij} = a_{ij} \rho_{kl}, & \delta_{kl} a_{i,n+1} = a_{i,n+1} \rho_{kl}, \\
\delta_{kl} a_{ik} = a_{ik} \rho_{kl} - a_{il}, & \delta_{kl} a_{il} = a_{il} \rho_{kl} + a_{ik} \\
\multicolumn{2}{c}{(i, j = 1, 2, \ldots, n, i \neq k, i \neq l, ij \neq kl);} \\
\delta_{kl} a_{kk} = a_{kk} \rho_{kl} - 2a_{kl}, & \delta_{kl} a_{kl} = a_{kl} \rho_{kl} + a_{kk} - a_{ll}, \\
\delta_{kl} a_{ll} = a_{ll} \rho_{kl} + 2a_{kl}, & \delta_{kl} a_{k,n+1} = a_{k,n+1} \rho_{kl} - a_{l,n+1}, \\
\delta_{kl} a_{l,n+1} = a_{l,n+1} \rho_{kl} + a_{k,n+1}, & \delta_{kl} a_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} \rho_{kl};
\end{array}
\right.
$$

$$
(59)\quad \left\{
\begin{array}{r}
\delta_s a_{ij} = a_{ij} \sigma - 2a_{ij}, \\
\delta_s a_{j,n+1} = a_{j,n+1} \sigma - a_{j,n+1}, \\
\delta_s a_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1} \sigma
\end{array}
\right\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).
$$

En mettant les valeurs (57) dans l'équation (47) on a

$$
(60)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\sum_1^n{}_i \sum{}_j a_{ij} \rho_k \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ij}} + \sum_1^n{}_i (a_{i,n+1} \rho_k - a_{ki}) \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{i,n+1}} \\
\qquad + (a_{n+1,n+1} \rho_k - 2a_{k,n+1}) \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{n+1,n+1}} = 0;
\end{array}
\right.
$$

ce qui donne, en vertu de l'équation (46),

$$
(61)\quad \sum_1^n{}_i a_{ij} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{i,n+1}} + 2a_{j,n+1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{n+1,n+1}} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n);
$$

de la même manière on tire des équations (47), (58) et (59) :

$$
(62)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\sum_1^n{}_i \left(a_{ik} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{il}} - a_{il} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ik}} \right) - 2a_{kl} \left(\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{kk}} - \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ll}} \right) \\
\qquad + (a_{kk} - a_{ll}) \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{kl}} - a_{l,n+1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{k,n+1}} + a_{k,n+1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{l,n+1}} = 0 \\
\qquad\qquad (i \neq k, i \neq l, k, l = 1, 2, \ldots, n);
\end{array}
\right.
$$

$$
(63)\quad \sum_1^n{}_i \sum{}_j a_{ij} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ij}} + \sum_1^n{}_i \left(a_{ii} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{ii}} + a_{i,n-1} \frac{\partial \mathrm{I}}{\partial a_{i,n+1}} \right) = 0.
$$

Les équations (61), (62) et (46) forment un système de $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ équations avec $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ variables; donc le système a au moins n solutions indépendantes. On vérifie que le nombre des solutions indépendantes est exactement égal à n en construisant la matrice de tous les coefficients et en observant que, parmi tous les déterminants du $\frac{1}{2}(n^2+n+2)^{\text{ième}}$ ordre de la matrice, on trouve un déterminant au moins qui n'est pas égal à zéro, parce que le terme $a_{n+1,n+1}$ paraît une fois seulement et un de ses coefficients n'est pas égal à zéro.

En effectuant l'intégration du système on trouve que les formes suivantes

$$(64)\quad \left\{\begin{array}{l} \Delta \equiv |a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}|, \qquad D \equiv |a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, a_{n+1,n+1}|, \\ \qquad J_k \equiv \sum_1^n {}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} |a_{i_1 i_1}, a_{i_2 i_2}, \ldots, a_{i_k i_k}| \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{array}\right.$$

sont $n+1$ solutions indépendantes des équations (61) et (62); pour satisfaire à l'équation (46) il faut et il suffit de prendre les n formes indépendantes suivantes :

$$(65)\quad I_1 \equiv \frac{J_{n-1}D}{\Delta^2}, \quad I_2 \equiv \frac{J_{n-2}D^2}{\Delta^3}, \quad \ldots, \quad I_{n-1} \equiv \frac{J_1 D^{n-1}}{\Delta^n}, \quad I_n \equiv \frac{D^n}{\Delta^{n+1}}.$$

En notant que ces invariants sont des invariants absolus, on trouve l'interprétation géométrique suivante des formes. Prenons la quadrique

$$(66)\qquad \sum_1^n {}_i\, x_i^2 \,|\, \alpha_i^2 - 1 = 0;$$

on a

$$(67)\quad \left\{\begin{array}{l} \qquad D = -\Delta = \sum_1^n {}_i\, 1 \,|\, \alpha_i^2; \\ I_1 \equiv -\sum_1^n {}_i\, \alpha_i^2, \qquad I_2 \equiv \sum_1^n {}_i \sum {}_j\, \alpha_i^2 \alpha_j^2 \qquad (i \neq j), \qquad \ldots, \\ \qquad I_n = \pm\, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_n^2, \end{array}\right.$$

suivant que n est pair ou impair; c'est-à-dire que les carrés des demi-axes de la quadrique sont des racines de l'équation

$$(68) \qquad x^n + \mathrm{I}_1 x^{n-1} + \mathrm{I}_2 x^{n-2} + \ldots + \mathrm{I}_{n-1} x + \mathrm{I}_n = 0;$$

où les carrés des demi-axes de la quadrique (45) sont donnés par la résolution de l'équation du $n^{\text{ième}}$ degré :

$$(69) \qquad \mathrm{I}_{n+1}^n + \sum_1^{n-1} {}^i\, \mathrm{I}_n^i \mathrm{I}_i \mathrm{I}_{n+1} x^i + \mathrm{I}_n x^n = 0.$$

Une discussion des racines de cette équation aurait pour conséquence une classification des quadriques.

Pour construire les invariants de la quadrique S sous le groupe de similitude il faut et il suffit d'introduire les quantités (67) dans l'équation (63) comme des variables nouvelles, ce qui donne les $n-1$ intégrales

$$(70) \qquad \frac{\mathrm{I}_{n-1}^i \mathrm{I}_i}{\Delta_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On vérifie facilement que ces expressions déterminent les rapports des axes de la quadrique.

Les invariants (65) constituent les *criteria* de la congruence des quadriques et les invariants (70) contiennent la théorie de la similitude pour quadriques.

On se permet de remarquer que les axes de la quadrique (45) sont n solutions indépendantes des équations (46), (61), (62), et que les rapports des axes sont $n-1$ solutions indépendantes du système composé des équations (46), (61), (62), (63).

Les discussions qui précèdent s'occupent d'applications des groupes de mouvements et de similitude; tous les deux groupes sont projectifs; de la même façon la théorie du groupe projectif général donne la Géométrie projective de l'espace à n dimensions et en particulier la théorie des invariants projectifs de quadriques et de systèmes de quadriques. On peut généraliser l'étude de plusieurs manières dont on signale les deux suivantes : 1° en considérant les groupes de transformations ponctuelles plus générales; 2° en introduisant les transformations de contact, et étudiant en particulier les généralisations de la transformation ponctuelle projective.

Considérons ce cas particulier. On rappelle les propriétés suivantes du groupe projectif général :

1° Les formes finies de ses transformations sont

$$(71)\qquad x'_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j + \beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + \beta} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

et ses transformations infinitésimales sont

$$(72)\qquad p_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad x_i p_j, \qquad x_i \sum_{j=1}^{n} x_j p_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

2° Toutes les transformations du groupe changent les lignes droites en lignes droites;

3° La famille de tous les plans de l'espace est invariante sous toutes les transformations du groupe.

Proposons-nous de trouver les transformations de contact qui possèdent l'une ou l'autre de ces propriétés.

1° Existe-t-il des transformations de contact de la forme

$$(73)\qquad \begin{cases} x'_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=2}^{n} b_{ij} p_j + c_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j + \sum_{j=2}^{n} \beta_j p_j + \gamma} & (i = 1, 2, \ldots, n), \\[2ex] p'_j = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} e_{jk} x_k + \sum_{j=1}^{n} f_{jk} p_k + g_j}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \sum_{j=1}^{n} \beta_k p_k + \gamma} & (j = 2, 3, \ldots, n); \end{cases}$$

c'est-à-dire, existe-t-il des transformations de cette forme qui laissent invariante l'équation de Pfaff

(74) $$dx_1 - \sum_2^n {}^i p_i dx_i = 0 ?$$

On peut résoudre cette question en déterminant les transformations ponctuelles projectives de l'espace à $2n-1$ dimensions

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1})$$

qui laissent invariante l'équation de Pfaff

(75) $$\mathrm{P} \equiv dx_1 - \sum_2^n {}^i x_{n+i-1} dx_i = 0.$$

Il est plus commode d'opérer avec les transformations infinitésimales. La transformation infinitésimale la plus générale du groupe projectif de l'espace ponctuel à $2n-1$ dimensions est

(76) $$\sum_1^{2n-1} {}^i \varepsilon_i p_i + \sum_1^{2n-1} {}^i \sum {}^i \varepsilon_{ij} x_j p_j + \sum_1^{2n-1} {}^i \varepsilon'_i x_i \sum_1^{2n-1} {}^i x_j p_j$$

où

(77) $$p_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et les quantités ε_i, ε_{ij}, ε'_i sont des constantes arbitraires.

Les variations des coordonnées ponctuelles sous la transformation (76) sont

(78) $$\delta x_k = \varepsilon_k + \sum_1^{2n-1} {}^j \varepsilon_{ik} x_i + x_k \sum_1^{2n-1} {}^i \varepsilon'_i x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n-1).$$

La condition définissante est

$$\delta \mathrm{P} = \rho \mathrm{P} = 0,$$

ou

$$(79)\qquad d\,\delta x_1 - \sum_{2}^{n}{}^{i} x_{n+i-1}\, d\,\delta x_i - \sum_{2}^{n}{}^{i} \delta x_{n+i-1}\, dx_i = \rho \mathrm{P};$$

ce qui devient, en vertu des équations (78),

$$(80)\qquad \sum_{1}^{n}{}^{i} \mathrm{L}_i dx_i + \sum_{n+1}^{2n-1}{}^{i} \mathrm{M}_i dx_i = \rho\left(dx_1 - \sum_{2}^{n} x_{n+i-1} dx_i\right),$$

où

$$(81)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{L}_1 = \varepsilon_{11} + 2\varepsilon'_1 x_1 + \sum_{2}^{2n-1}{}^{i} \varepsilon'_i x_i - \sum_{2}^{n}{}^{i} \varepsilon_{1i} x_{n+i-1} - \sum_{2}^{n}{}^{i} \varepsilon'_1 x_i x_{n+i-1},\\ &\mathrm{L}_k = \varepsilon_{k1} - \varepsilon_{n+k-1} + \varepsilon'_k x_1 - \sum_{1}^{2n-1}{}^{i} \varepsilon_{i,n+k-1} x_i\\ &\qquad - \sum_{2}^{n}{}^{i} x_{n+i-1}(\varepsilon_{ki} + \varepsilon'_k x_i) - 2\varepsilon_{n+k-1} \sum_{1}^{2n-1}{}^{i} l'_i x_i\\ &\qquad\qquad (k = 2, 3, \ldots, n);\\ &\mathrm{M}_l = \varepsilon_{l1} + \varepsilon'_l x_1 - \sum_{2}^{n}{}^{i} \varepsilon_{li} x_{n+i-1} - \sum_{2}^{n}{}^{i} \varepsilon'_l x_i x_{n+i-1}\\ &\qquad\qquad (l = n+1, n+2, \ldots, 2n-1). \end{aligned}\right.$$

Donc

$$(82)\qquad \mathrm{L}_1 = \rho,\quad \mathrm{L}_2 = -x_{n+1}\rho,\quad \mathrm{L}_3 = -x_{n+2}\rho,\quad \ldots,\quad \mathrm{L}_n = -x_{2n-1}\rho,$$

et

$$(83)\qquad \mathrm{M}_{n+1} = \mathrm{M}_{n+2} = \ldots = \mathrm{M}_{2n-1} = 0.$$

Des équations (83) on déduit

$$(84)\qquad \left\{\begin{aligned} &\varepsilon_{ik} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = n+1, n+2, \ldots, 2n-1),\\ &\varepsilon'_{n+1} = \varepsilon'_{n+2} = \ldots = \varepsilon'_{2n-1} = 0; \end{aligned}\right.$$

donc la transformation ponctuelle projective (76) de l'espace à $2n-1$

dimensions $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1})$, qui laisse invariante l'équation de Pfaff (75), est aussi une transformation ponctuelle projective de l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2° Les transformations de contact de l'espace à n dimensions qui transforment les lignes droites en lignes droites sont bien connues. Elles consistent en des transformations dualistiques et projectives.

3° On trouve que les transformations de contact les plus générales de l'espace à $n+1$ dimensions qui transforment les plans en des plans sont définies par les équations

$$(85)\quad \begin{cases} x'_i = \dfrac{\sum_0^n {}_j x_j(\varphi_{i+1}, \varphi_{i+2}, \ldots, \varphi_n, \varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1})_{j+1}}{\sum_0^n {}_j x_j(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)_{j+1}} \\ (x_0 = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n), \\ p'_i = \varphi_i\left(\sum_1^n p_j x_j - z, p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = \varphi_i(\zeta_1, p_1, p_2, \ldots, p_n), \\ z' = \sum_1^n {}_j \varphi_j x'_j - \varphi_0, \end{cases}$$

où les fonctions φ_i sont arbitraires et les expressions

$$(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)_j$$

sont les mineurs de m_j dans le déterminant

$$\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial\zeta_1}, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial p_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\psi_n}{\partial p_{n-1}}, \quad m_{n+1}\right|.$$

Ces transformations sont équivalentes aux produits

DPD

où D est la transformation dualistique et P est une transformation ponctuelle arbitraire.

Donc la Géométrie de cette catégorie de transformations de contact se déduit de l'étude de la Géométrie du groupe infini des transformations ponctuelles de l'espace à $n+1$ dimensions.

III. — Sur la Géométrie différentielle de l'espace à n dimensions.

Dans un Mémoire *Sur les quantités fondamentales de la théorie générale des surfaces* (*Rozprawy* de l'Académie des Sciences de Cracovie, série II, t. VIII; *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, p. 697; 1895), M. Zorawski considère le groupe de mouvements euclidiens de l'espace x, y, z; construit les extensions de ces transformations par rapport à toutes les dérivées de x, y, z par rapport à deux variables indépendantes u, v; détermine les invariants différentiels du groupe prolongé; et établit les théorèmes suivants de la théorie des surfaces : 1° *tous les invariants différentiels sont des fonctions des quantités fondamentales* E, F, G, L, M, N *du premier et du second ordre et de leurs dérivées;* 2° *entre* E, F, G, L, M, N *et leurs dérivées existent trois relations différentes;* 3° *il n'y a pas de relation entre* E, F, G *et leurs dérivées.*

Nous avons déterminé l'invariant

$$\sqrt{\sum_1^n (x_i - x'_i)^2} \tag{86}$$

sous le groupe

$$p_1, p_2, \ldots, p_n, \quad x_i p_j - x_j p_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{87}$$

On appelle la forme différentielle correspondante

$$ds^2 = \sum_1^n dx_i^2 \tag{88}$$

l'*élément linéaire* de l'espace.

Les équations

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{89}$$

où les $n-1$ quantités $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sont des paramètres indépendants, définissent une surface de l'espace. On a

$$(90) \qquad ds^2 = \sum_1^{n-1}{}_i \sum{}_j E_{ij}\, du_i\, du_j \qquad (E_{ij} = E_{ji}),$$

où

$$(91) \qquad E_{ij} = \sum_1^n{}_k \frac{\partial x_k}{\partial u_i} \frac{\partial x_k}{\partial u_j}.$$

Ces quantités E_{ij} jouent un rôle capital dans la théorie des invariants différentiels du groupe de mouvements, et en ceci on trouve le secret du succès de ces coordonnées gaussiennes généralisées.

En comptant les variations de toutes les dérivées partielles de toutes les coordonnées par rapport aux arguments $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$, sous l'hypothèse que ces arguments ne changent pas sous les transformations, on a le système suivant d'équations linéaires aux dérivées partielles pour la détermination des invariants différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre :

$$(92) \qquad P_1^m f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \qquad P_2^m f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad P_n^m f \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

$$(93) \qquad P_{\alpha\beta}^m f \equiv S\left(x_{\alpha u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{\beta u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}}} - x_{\beta u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}} \frac{\partial f}{\partial x_{\alpha u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_{n-1}^{i_{n-1}}}} \right) = 0,$$

où

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n;$$

$$S \equiv \sum_0^m{}_{i_1} \sum_0^{m-i_1}{}_{i_2} \sum_0^{m-i_1-i_2}{}_{i_3} \cdots \sum_0^{m-i_1-\ldots-i_{n-2}}{}_{i_{n-1}}, \qquad (i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1} > 0).$$

Les équations (92) montrent que les invariants différentiels sont indépendants des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; donc on considère seulement les équations (93).

Si $m = 1$, on a $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations et $n(n-1)$ variables dans le système (93). Les équations sont indépendantes et l'on trouve sans difficulté les $\frac{1}{2}n(n-1)$ solutions indépendantes

$$(94)\qquad E_{ij} \qquad (i, j, = 1, 2, \ldots, n-1).$$

En posant $m = 2$, on a un système de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations indépendantes et $\frac{1}{2}(n-1)n(n+2)$ variables, ce que l'on vérifie facilement en notant que n fonctions de $n-1$ variables indépendantes ont

$$(95)\qquad \frac{(n-1)n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+m-3)(n+m-2)}{1.2.3\ldots m}$$

dérivées partielles du $m^{\text{ième}}$ ordre; donc on doit trouver $\frac{1}{2}n(n^2-1)$ solutions indépendantes du système (93) pour $m = 2$.

En effet on a les $\frac{1}{2}n(n-1)$ solutions (94) et $\frac{1}{2}n(n-1)^2$ solutions de la forme

$$(96)\qquad E_{ij_{u_k}} \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Considérons la matrice

$$(97)\qquad \begin{vmatrix} x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & x_{3_{u_1}} & \ldots & x_{n_{u_1}} \\ x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & x_{3_{u_2}} & \ldots & x_{n_{u_2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & x_{3_{u_{n-1}}} & \ldots & x_{n_{u_{n-1}}} \end{vmatrix}$$

et soient

$$(98)\qquad m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n$$

les déterminants formés en supprimant chaque colonne successivement; soient encore

$$(99)\qquad X_i\Delta = m_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$(100)\qquad \Delta^2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \ldots & E_{1,n-1} \\ E_{21} & E_{22} & \ldots & E_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_{n-1,1} & E_{n-1,2} & \ldots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix};$$

enfin les $\frac{1}{2}n(n-1)$ quantités

$$(101)\qquad F_{\alpha\beta}=\sum_{1}^{n}{}_{i}X_i\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\qquad (\alpha, \beta=1, 2, \ldots, n-1),$$

sont des solutions du système

$$(102)\qquad P_{\alpha\beta}^{(2)}f=0.$$

On voit que les invariants

$$(103)\qquad E_{ij_{u_k}},\quad F_{\alpha\beta}$$

sont indépendants en employant un artifice utilisé par M. Zorawski (*loc. cit.*) dans le cas des quantités fondamentales de Gauss de l'espace ordinaire. On peut arranger ces $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ fonctions de $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ variables en un tel ordre que le déterminant de leurs dérivées partielles du second ordre devient

$$D=\begin{vmatrix}
x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & \cdots & x_{n_{u_1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & \cdots & x_{n_{u_2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & \cdots & x_{n_{u_{n-1}}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
X_1 & X_2 & \cdots & X_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & \cdots & x_{n_{u_1}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & \cdots & x_{n_{u_2}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & \cdots & x_{n_{u_{n-1}}} & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & X_1 & X_2 & \cdots & X_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & x_{1_{u_1}} & x_{2_{u_1}} & \cdots & x_{n_{u_1}}\\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & x_{1_{u_2}} & x_{2_{u_2}} & \cdots & x_{n_{u_2}}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & x_{1_{u_{n-1}}} & x_{2_{u_{n-1}}} & \cdots & x_{n_{u_{n-1}}}\\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & X_1 & X_2 & \cdots & X_n
\end{vmatrix}$$

Mais on a

$$(104)\qquad D = \left| x_{1_{u_1}}, x_{2_{u_2}}, \ldots, x_{n-1_{u_{n-1}}}, X_n \right|^{\frac{1}{2}n(n-1)} = \text{multiple de } \Delta;$$

donc

$$D \neq 0;$$

c'est-à-dire toutes les dérivées $x_{j_{u_k u_l}}$ sont égales à zéro, ce qui est impossible.

Pour $m = 3$, on a un système de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations et

$$\tfrac{1}{6}n(n-1)(n^2+4n+6)$$

variables; donc il y a $\frac{1}{6}n(n-1)(n+1)(n+3)$ solutions indépendantes. On a les $\frac{1}{2}n(n-1)$ solutions (94) et les $\frac{1}{2}n^2(n-1)$ solutions (96) et (101), un ensemble de $\frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$ solutions. Il est aisé de montrer que les $\frac{1}{4}n(n-1)^2(n+2)$ expressions suivantes

$$(105)\qquad E_{ij_{u_k u_l}},\quad F_{ij_{u_m}}\qquad (i, j, k, l, m = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sont des solutions du système

$$(106)\qquad P^{(3)}_{\alpha\beta} f = 0.$$

En notant que

$$(107)\qquad E_{li_{u_j u_k}} = x_{1_{u_l}} x_{1_{u_j u_i u_k}} + \ldots,\qquad F_{ij_{u_k}} = X_1 x_{1_{u_i u_j u_k}} + \ldots,$$

on peut trouver parmi les $\frac{1}{4}n(n-1)^2(n+2)$ solutions (105) un système de $\frac{1}{6}n^2(n^2-1)$ solutions qui sont indépendantes, parce que le déterminant des coefficients des dérivées partielles $x_{l_{u_i u_j u_k}}$ dans ces $\frac{1}{6}n^2(n^2-1)$ formes est un multiple du déterminant Δ.

Ainsi, on doit avoir $\frac{1}{12}n(n-1)(n-2)(n+3)$ relations qui contiennent $\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)$ des quantités $F_{ij_{u_m}}$ et $\frac{1}{12}n(n-1)^2(n-2)$ des formes $E_{ij_{u_k u_l}}$.

Dans le cas de l'espace ordinaire, ces relations sont d'autres formes, données par M. Zorawski (*loc. cit.*), des trois équations différentielles bien connues entre les six quantités fondamentales E, F, G, L, M, N de Gauss

$$(108)\quad \begin{cases} \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = K, \\ \dfrac{\partial L}{\partial v} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} N = \dfrac{\partial M}{\partial u} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} M, \\ \dfrac{\partial N}{\partial u} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} L + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} M = \dfrac{\partial M}{\partial v} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} N. \end{cases}$$

Si $n = 4$, nous avons les solutions indépendantes suivantes :

$$(109)\quad \begin{cases} 11_{11}\ \ 11_{12}\ \ 11_{22}\ \ 11_{13}\ \ 11_{23}\ \ 12_{11}\ \ 12_{22}\ \ 12_{23}\ \ 13_{11}\ \ 13_{31} \\ 13_{23}\ \ 13_{33}\ \ 21_{13}\ \ 22_{11}\ \ 22_{12}\ \ 22_{13}\ \ 22_{22}\ \ 22_{23}\ \ 22_{33}\ \ 23_{31} \\ 23_{33}\ \ 32_{11}\ \ 32_{12}\ \ 32_{22}\ \ 32_{23}\ \ 33_{11}\ \ 33_{12}\ \ 33_{23}\ \ 33_{31}\ \ 33_{33} \\ \quad 11_1\ \ 11_2\ \ 11_3\ \ 12_2\ \ 12_3\ \ 22_2\ \ 22_3\ \ 23_3\ \ 33_1\ \ 33_3 \end{cases}$$

et les équations suivantes pour les dérivées restantes :

$$(110)\quad \begin{cases} 2(12_{12}) - 11_{22} - 22_{11} = \varphi_1, \quad 2(23_{23}) - 22_{33} - 33_{22} = \varphi_2, \quad 2(31_{31}) - 33_{11} - 11_{33} = \varphi_3, \\ \qquad 12_{13} - 13_{12} = \varphi_4, \quad 12_{23} - 13_{22} = \varphi_5, \quad 12_{33} - 13_{23} = \varphi_6, \\ 11_2 - 12_1 = \psi_1, \quad 11_3 - 31_1 = \psi_2, \quad 12_2 - 22_1 = \psi_3, \quad 12_3 - 23_1 = \psi_4, \\ 12_3 - 31_2 = \psi_5, \quad 22_3 - 23_2 = \psi_6, \quad 23_3 - 33_2 = \psi_7, \quad 33_1 - 31_3 = \psi_8, \end{cases}$$

où

$$(111)\qquad ij_{kl} \equiv E_{ij_{u_k u_l}}, \qquad ij_k \equiv F_{ij_{u_k}},$$

et les fonctions φ_i et ψ_i sont fonctions des invariants du premier et du second ordre. On peut déterminer facilement les formes explicites de ces équations; elles sont les généralisations des équations (108) de Gauss, Mainardi et Codazzi entre les quantités gaussiennes E, F, G, L, M, N.

Pour $n = 5$, il faut ajouter aux équations précédentes (110) les équations suivantes :

$$
(112)\quad \left\{
\begin{array}{llll}
2(14_{14})-11_{44}-44_{11}=\varphi_7, & 2(24_{24})-22_{44}-44_{22}=\varphi_8, & 2(34_{34})-33_{44}-44_{33}=\varphi_9, & \\
12_{14}-14_{12}=\varphi_{10}, & 12_{24}-14_{22}=\varphi_{11}, & 13_{14}-14_{13}=\varphi_{12}, & 13_{44}-14_{34}=\varphi_{13}, \\
13_{34}-14_{33}=\varphi_{14}, & 13_{24}-14_{23}=\varphi_{15}, & 14_{24}-12_{44}=\varphi_{16}, & 23_{24}-24_{23}=\varphi_{17}, \\
13_{24}-12_{34}=\varphi_{18}, & 23_{34}-24_{33}=\varphi_{19}, & 24_{34}-23_{44}=\varphi_{20}; & \\
14_1-11_4=\psi_9, & 14_2-12_4=\psi_{10}, & 14_3-13_4=\psi_{11}, & 24_1-21_4=\psi_{12}, \\
24_2-22_4=\psi_{13}, & 24_3-23_4=\psi_{14}, & 32_4-23_4=\psi_{15}, & 34_1-31_4=\psi_{16}, \\
34_2-32_4=\psi_{17}, & 34_3-33_4=\psi_{18}, & 44_2-42_4=\psi_{19}, & 44_3-43_4=\psi_{20}.
\end{array}\right.
$$

Ainsi de suite pour une valeur quelconque de n.

Considérons maintenant les invariants différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre. Il est clair qu'on peut obtenir des invariants du $m^{\text{ième}}$ ordre en différentiant les invariants du $(m-1)^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux u_1, u_2, $\ldots$, u_{n-1}, parce que, par hypothèse, ces quantités ne changent pas sous les transformations considérées.

On a dans chaque cas $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations linéaires aux dérivées partielles à intégrer; pour le cas des invariants différentiels du $m^{\text{ième}}$ ordre, le nombre de variables est égal à

$$\sum_1^m {}_j \frac{(n-1)n^2(n+1)(n+2)\ldots(n+j-3)(n+j-2)}{1.2\ldots j},$$

et le nombre des solutions indépendantes est égal à

$$\sum_1^m {}_j \frac{n(n-1)n(n+1)\ldots(n+j-2)}{1.2\ldots j}+\frac{n(n^2-1)}{2};$$

on a

$$\sum_3^{m-1} {}_j \frac{n(n-1)n(n+1)\ldots(n+j-2)}{1.2\ldots j}+\frac{n(n^2-1)}{2}$$

invariants différentiels du $(m-1)^{\text{ième}}$ ordre; donc il suffit d'en trouver

$$\frac{n(n-1)n(n+1)\ldots(n+m-2)}{1.2\ldots m}$$

du $m^{\text{ième}}$ ordre.

On obtient des invariants du $m^{\text{ième}}$ ordre en différentiant les formes E_{ij} $(m-1)$ fois et les formes F_{ij} $(m-2)$ fois; de cette différentiation on déduit

$$\frac{n^2(n-1)^2(n+1)(n+2)\ldots(n+m-4)(n+2m-4)}{1.2\ldots(m-1)}$$

invariants. Donc il y a

$$N = \frac{(m-2)n(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-4)(n-2)(n+2m-3)}{2.1.2.3\ldots m}$$

relations entre ces quantités du $m^{\text{ième}}$ ordre. Ces relations peuvent s'obtenir de la manière suivante. On a déjà trouvé, dans le cas $m=3$,

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n+3)}{2.1.2.3}$$

relations; en différentiant ces relations $(m-3)$ fois de

$$\frac{1.2.3.n(n+1)(n+2)(n+4)(n+5)\ldots(n+m-4)(n+2m-3)(m-2)}{1.2.3\ldots m}$$

manières on obtient N relations, qui sont les liaisons cherchées. D'ailleurs, l'opération est toujours possible pour toutes les valeurs de m et n, parce que le nombre des opérations est toujours moindre que

$$M-1 = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-5)}{1.2.3\ldots(m-3)} - 1,$$

où M est le nombre maximum des dérivées du $(m-3)^{\text{ième}}$ ordre d'une fonction à $(n-1)$ variables.

La Géométrie de l'espace ordinaire est unique; l'espace à trois dimensions est le seul espace pour qui ces deux nombres M et N sont égaux, si l'on ne considère pas les espaces à dimensions fractionnelles ou négatives; la valeur commune pour l'espace ordinaire est $m-3$ et les nombres sont égaux pour toutes les valeurs de m.

Nous avons prolongé le groupe de mouvements de l'espace à $n+1$ dimensions par rapport aux dérivées partielles de ses coordonnées ponctuelles par rapport à n paramètres indépendants, sous l'hypothèse que les transformations laissent ces paramètres absolument invariants. De la même manière, on peut se proposer de prolonger le groupe par rapport à q paramètres indépendants, où q peut prendre les valeurs 1, 2, ..., n. De cette façon, on construit les éléments d'une Géométrie des variétés à un nombre quelconque de dimensions dans l'espace à $n+1$ dimensions, mais, il faut le dire, avec assez de difficulté, car chaque valeur de q demande une nouvelle extension du groupe et, dans chaque cas particulier, il faut étudier l'indépendance et faire l'intégration des systèmes complets. Cependant, il est simple de généraliser la théorie de l'analyse intrinsèque des courbes, ce que l'on donnera dans une Note prochaine. Ce cas correspond à la valeur 1 de q. L'extension correspondante du groupe de mouvements devient

$$(113)\quad p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}, \quad x_i p_j - x_j p_i + \sum_1^m {}_k (x_i^{(k)} p_j^{(k)} - x_j^{(k)} p_i^{(k)})$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

où

$$(114)\qquad x_i^{(k)} = \frac{d^k x_i}{dt^k}, \qquad p_j^{(k)} = \frac{\partial f}{\partial x_j^{(k)}},$$

et t est une variable auxiliaire qui ne change pas sous les transformations du groupe de mouvements euclidiens.

Si l'on prend, en particulier,

$$n = 3, \qquad m = 3, \qquad t = s,$$

où s est l'élément d'arc, on trouvera, entre les invariants absolus, les fonctions suivantes des courbures de la courbe [*voir* le Mémoire de M. Pirondini sur les courbes à triple courbure (*Journal de Battaglini*; 1890)]:

$$(115)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right)^2, \quad \sum_1^4 {}_i \left(\frac{dX_i}{ds}\right)^2, \\ \displaystyle\sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right) \sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^3 x_i}{ds^3}\right)^2 - \left[\sum_1^4 {}_i \left(\frac{d^2 x_i}{ds^2}\right)^2\right]^3 - \left(\sum_1^4 \frac{d^2 x_i}{ds^2}\frac{d^3 x_i}{ds^3}\right)^2, \end{cases}$$

où

$$X_i = \frac{X'_i}{\sum_1^4 X'^2_i}$$

et X'_j est le mineur de x_j dans le déterminant wronskien

$$\left| x_1, \ \frac{dx_2}{ds}, \ \frac{d^2 x_3}{ds^2}, \ \frac{d^3 x_4}{ds^3} \right|.$$

IV. — Sur les invariants de déformation de l'espace à un nombre quelconque de dimensions.

Dans un Mémoire sur les invariants de déformation (*Acta Mathematica*, t. XVI), M. Zorawski a donné une belle application de la méthode de Lie à la détermination des invariants de déformation des surfaces dans l'espace ordinaire euclidien. Il s'agit de quantités qui ne changent pas lorsqu'on déforme une surface, telles que la courbure totale de Gauss, les paramètres différentiels de Beltrami, ou la courbure géodésique de Minding. De telles quantités ne doivent dépendre de la forme de la surface que par les coefficients E, F, G de l'élément linéaire. De plus, elles ne doivent pas être altérées par un changement de coordonnées curvilignes. La surface étant rapportée à des coordonnées curvilignes, effectuons, sur ces coordonnées, un changement de variables quelconque. En calculant les nouvelles valeurs de E, F, G, les transformations ainsi définies seront celles d'un certain groupe infini qu'on peut appeler le *groupe de Gauss*. Si, en même temps que les coefficients E, F, G, on exprime, en fonction des nouvelles variables, une ou plusieurs fonctions du point, on obtient des transformations dont l'ensemble sera un groupe de Beltrami, car c'est à de pareilles transformations que se rapportent les paramètres différentiels de cet auteur. Les transformations qui s'appliquent aux quantités E, F, G et à l'équation d'une courbe tracée sur la surface forment un troisième groupe, le *groupe de Minding*. Enfin, en faisant entrer en ligne de compte, à la fois, des coefficients de l'élément linéaire, des fonctions du point, et des équations de courbes, on a le groupe général.

Les quantités cherchées sont les invariants différentiels de ces groupes, et, pour les rechercher, on devra, d'après la méthode de Lie, prolonger les groupes et déterminer les invariants des groupes ainsi prolongés. Une transformation infinitésimale quelconque étant effectuée sur les coordonnées curvilignes, on calcule facilement les changements infiniment petits de E, F, G, ce qui donne la transformation infinitésimale la plus générale du groupe de Gauss. Considérant ensuite une fonction dont l'accroissement infinitésimal est connu, on détermine les accroissements de ses différentes dérivées. Ces résultats permettent de former les transformations infinitésimales des groupes de Gauss, de Beltrami, de Minding et du groupe général prolongés.

On peut, dès lors, écrire les systèmes complets auxquels doivent satisfaire les invariants différentiels des différents ordres. Pour calculer effectivement les invariants demandés, il faut procéder à l'intégration des systèmes complets. Appliquant cette méthode à la recherche des invariants les moins élevés, M. Zorawski retrouve comme invariant gaussien la courbure totale, comme invariants de Beltrami les paramètres différentiels connus, comme invariant de Minding la courbure géodésique.

Les résultats précédents sont susceptibles d'une multiple généralisation. L'objet de cette Note est de construire le mécanisme nécessaire et suffisant pour déterminer les invariants de déformation de variétés dans un espace ponctuel à un nombre quelconque de dimensions (dans les cas où une déformation est possible, on se rappelle le théorème de Beez), et, en particulier, on se propose de montrer que la théorie de déformation des surfaces de l'espace ordinaire, tous ses invariants et tous ses théorèmes s'appliquent immédiatement aux surfaces d'un espace quadratique quelconque, euclidien ou non euclidien, à trois dimensions, c'est-à-dire qu'on retrouve la théorie des formes différentielles quadratiques. Ce résultat particulier est intéressant; il constitue une contribution de la théorie des groupes continus infinis à la Géométrie des variétés à trois dimensions, et en face du fait que la théorie des groupes finis a une application limitée à la construction des Géométries des variétés à trois dimensions, ce qu'on voit par les travaux récents de M. Bianchi (*Memorie* de la Société italienne des Sciences, 3^e^ série, t. XI) et de M. Cotton (*Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris*), où l'on trouve la détermination complète de toutes les variétés à trois dimensions dont l'élément linéaire peut admettre un groupe continu de transformations.

On s'occupe ici naturellement à faire la $m^{\text{ième}}$ prolongation d'une transformation infinitésimale; ce problème peut se proposer d'une infinité de manières; il a un nombre infini de solutions. M. Zorawski a donné la solution du cas où l'on prolonge la transformation infinitésimale par rapport aux dérivées de ses fonctions (*Rozprawy* de l'Académie des Sciences de Cracovie, 2^e^ série, t. IV), et M. Levi-Civita (*Atti* de l'Académie de Venise, 7^e^ série, t. V) a prolongé la transformation par rapport aux éléments d'un système covariant ou contrevariant quelconque.

Considérons un espace quadratique à $n+1$ dimensions

$$(116)\qquad ds^2 = \sum_1^{n+1}{}_i \sum{}_j A_{ij}(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})\, dx_i\, dx_j \qquad (A_{ji} = A_{ij}).$$

L'élément linéaire d'une surface

$$(117)\qquad x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont des paramètres ou coordonnées arbitraires, peut prendre la forme

$$(118)\qquad ds^2 = \sum_1^{n}{}_i \sum{}_j E_{ij}\, du_i\, du_j \qquad (E_{ji} = E_{ij}),$$

où les quantités E_{ij} sont des fonctions A_{kl} et u_m dont les formes sont faciles à construire.

On effectue sur ces coordonnées u_i un changement de variables quelconque

$$(119)\qquad u'_i = U_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les symboles U_i dénotent des fonctions arbitraires, et l'on obtient la forme nouvelle de l'élément linéaire

$$(120) \qquad ds^2 = \sum_1^n{}_i \sum{}_j E'_{ij} du'_i du'_j;$$

ici les E'_{ij} sont fonctions de E_{ij} et u_k

$$(121) \qquad E'_{ij} = E'_{ij}(u_1, u_2, \ldots, u_n, E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{nn});$$

la construction des formes des fonctions E'_{ij} n'offre pas de difficulté.

La famille de transformations (119) et (121) constitue un groupe infini qui laisse invariant l'élément linéaire (118).

Les transformations infinitésimales de ce groupe se déterminent de la manière suivante : On suppose que les quantités $u_1, u_2, \ldots, u_n$ prennent des accroissements arbitraires

$$(122) \qquad \delta u_i = \xi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)\delta t \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les ξ_i sont des fonctions arbitraires et δt une quantité quelconque infiniment petite. La condition de l'invariance de l'élément linéaire est exprimée par l'équation

$$(123) \qquad \sum_1^n{}_i \sum{}_j [du_i du_j \delta E_{ij} + E_{ij}(du_i d\delta u_j + du_j d\delta u_i)] = 0;$$

cette équation doit être vraie pour toutes les valeurs de $du_1, du_2, \ldots, du_n$; donc

$$(124) \qquad \delta \xi_{ij} = -\sum_1^n{}_k \left(E_{ik}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_j} + E_{jk}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_i}\right)\delta t \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n);$$

et la transformation infinitésimale la plus générale du groupe est

$$(125) \qquad Df = \sum_1^n{}_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial u_i} - \sum_1^n{}_i \sum{}_j \sum{}_k \left(E_{ik}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_j} + E_{jk}\frac{\partial \xi_k}{\partial u_i}\right)\frac{\partial u}{\partial E_{ij}}.$$

En supposant maintenant que l'accroissement

$$(126)\qquad \delta\psi(u_1, u_2, \ldots, u_n)$$

d'une fonction arbitraire des variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$ est connu, il est facile de trouver les variations des dérivées partielles de la fonction ψ. En effet, on a

$$(127)\qquad d\psi - \sum_1^n {}^i \frac{\partial\psi}{\partial u_i} du_i = 0,$$

$$(128)\qquad \delta\, d\psi = d\,\delta\psi = \sum_1^n {}^i \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_i} du_i \delta t.$$

En vertu de (122), la variation de (127) devient

$$(129)\qquad \sum_1^n {}^i \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_i} du_i \delta t - \sum_1^n {}^i \delta\psi_{u_i} du_i - \sum_1^n {}^i \psi_{u_i} \sum_1^n {}^j \xi_{i_{u_j}} du_j \delta t = 0;$$

cette équation doit être vraie pour toutes les valeurs de $du_1, du_2, \ldots, du_n$; donc

$$(129\,bis)\qquad \frac{\delta\psi_{u_i}}{\delta t} = \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_i} - \sum_1^n {}^j \psi_{u_j} \xi_{j_{u_i}}.$$

De ces formules il est facile de calculer les accroissements des dérivées partielles de la fonction ψ d'un ordre quelconque au moyen de substitutions successives; cependant, par induction, il est possible d'obtenir une formule générale. Dans le cas d'une fonction de deux variables, on a

$$(130)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta\psi_{u_{i_1}^j u_{i_2}^k}}{\delta t} &= \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{u_{i_1}^j u_{i_2}^k} \\ &\quad - \sum_1^j {}^l \sum_1^k {}^m \binom{j}{l}\binom{k}{m} \Big(\psi_{u_{i_1}^{j-l+1} u_{i_2}^{k-m}} \xi_{i_2 u_{i_1}^l u_{i_2}^m} \\ &\qquad\qquad + \psi_{u_{i_1}^{j-l} u_{i_2}^{k-m+1}} \xi_{i_2 u_{i_1}^l u_{i_2}^m}\Big), \end{aligned} \right.$$

où les indices l et m ne peuvent pas être égaux à zéro simultanément; cette formule a la même forme que la formule employée par M. Zorawski dans le Mémoire déjà cité. En remplaçant ψ par $\psi_{u_2^{l}}$ dans cette formule et en faisant une substitution semblable $n-2$ fois, on obtient la formule cherchée

$$
(131)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_{u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}}}{\partial t} &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}} \\
&\quad - \sum_0^n{}^{i} \sum_0^{i_1}{}^{j_1} \sum_0^{i_2}{}^{j_2} \cdots \sum_0^{i_n}{}^{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_n}{j_n} \psi_{u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} \xi_{i u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}},
\end{aligned}\right.
$$

où

$$
(132)\qquad \lambda_k \equiv i_k - j_k, \qquad j_1 + j_2 + \ldots + j_n > 0.
$$

On peut vérifier cette formule dans chaque cas successif au moyen de l'équation

$$
(133)\qquad \binom{l+1}{m} - \binom{l}{m} - \binom{l}{m-1} = 0;
$$

mais (131) est vraie dans la forme (130), donc elle est toujours vraie.

Maintenant, on suppose la forme suivante de la variation de la fonction arbitraire ψ :

$$
(134)\qquad \delta\psi = \sum_1^n{}^{i} \sum{}^{j} \rho^{ij} \xi_{i u_j} \delta t,
$$

où les ρ^{ij} sont des fonctions arbitraires des coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

On peut écrire

$$
(135)\quad \left\{\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{u_h^j, u_i^k} = \sum_0^j{}^{l} \sum_0^k{}^{m} \binom{j}{l}\binom{k}{m} \Big(& \overset{11}{\rho}_{u_h^{j-l} u_i^{k-m}} \xi_{h u_h^{l+1} u_i^m} \\
& + \overset{12}{\rho}_{u_h^{j-l} u_i^{k-m}} \xi_{h u_h^l u_i^{m+1}} \\
& + \overset{21}{\rho}_{u_h^{j-l} u_i^{k-m}} \xi_{i u_h^{l+1} u_i^m} \\
& + \overset{22}{\rho}_{u_h^{j-l} u_i^{k-m}} \xi_{i u_h^l u_i^{m+1}} \Big),
\end{aligned}\right.
$$

et, par une induction aisée, on trouve

$$(136)\quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}} = \sum_{ijl} \sum_1^n {}^k \rho^{kl}_{u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_{l-1}^{j_{l-1}}, u_l^{j_l-1}, u_{l+1}^{j_{l+1}}, \ldots, u_n^{j_n}} \xi_{k u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}},$$

où

$$(137)\quad \sum_{ijl} \equiv \sum_1^n {}^l \sum_0^{i_1} {}^{j_1} \sum_0^{i_2} {}^{j_2} \cdots \sum_0^{i_{l-1}} {}^{j_{l-1}} \sum_0^{i_l+1} {}^{j_l} \sum_0^{i_{l+1}} {}^{j_{l+1}} \cdots \sum_0^{i_n} {}^{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_{l-1}}{j_{l-1}}\binom{i_l}{j_l-1}\binom{i_{l+1}}{j_{l+1}}\cdots\binom{i_n}{j_n}.$$

Si l'on suppose

$$(138)\qquad \binom{i_1}{k_1} = \binom{i_2}{k_2} = \ldots = \binom{i_n}{k_n} = 0$$

pour toutes les valeurs

$$k_1 \neq 0, 1, \ldots, i_1, \qquad k_2 \neq 0, 1, \ldots, i_2, \qquad k_n \neq 0, 1, 2, \ldots, i_n,$$

la formule précédente s'écrit

$$(139)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \psi_{u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}}}{\partial t} \\ & = \sum_1^n {}^l \sum_0^{i_1+1} {}^{j_1} \cdots \sum_0^{i_n+1} {}^{j_n} \Bigg[\binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_{l-1}}{j_{l-1}}\binom{i_l}{j_l-1}\binom{i_{l+1}}{j_{l+1}}\cdots\binom{i_n}{j_n} \\ & \qquad \times \sum_1^n {}^k \rho^{kl}_{u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_{l-1}^{j_{l-1}}, u_l^{j_l-1}, u_{l+1}^{j_{l+1}}, \ldots, u_n^{j_n}} \\ & \qquad - \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_n}{j_n} \psi_{u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_{l-1}^{j_{l-1}}, u_l^{j_l-1}, u_{l+1}^{j_{l+1}}, \ldots, u_n^{j_n}} \Bigg] \xi_{h u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots} \end{aligned} \right.$$

où

$$\sum_1^n {}^k j_k < 0, \qquad \binom{i_m}{k_m} = 1, \qquad \text{si} \quad i_m = k_m = 0.$$

Les résultats précédents admettent une extension immédiate au cas d'une surface de l'espace dont l'élément linéaire est défini par l'équation

$$(140)\qquad ds^\mu = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu}^{\nu} \mathrm{A}_{i_1, i_2, \ldots, i_\nu}\, dx_1^{i_1}\, dx_2^{i_2} \ldots dx_n^{i_n} \qquad \left(\sum_1^n {}^j\, i_j = \nu\right),$$

savoir

$$(141)\qquad ds^\mu = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}}^{\nu-1} \mathrm{B}_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}}\, du_1^{j_1}\, du_2^{j_2} \ldots du_{\nu-1}^{j_{\nu-1}} \qquad \left(\sum_1^{\nu-1} {}^i\, j_i = \nu - 1\right),$$

parce que l'équation

$$\delta(ds) = 0$$

donne des formes linéaires en $\xi_{l_{u_m}}$ pour les variations des coefficients $\mathrm{B}_{j_1, j_2, \ldots, j_{\nu-1}}$.

Maintenant on suppose : 1°

$$(142)\qquad \psi = \mathrm{E}_{ij};$$

des formules (124) et (139) on tire

$$(143)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathrm{E}_{kl\, u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}}}{\partial t} \\
&= -\sum_0^{i_1+1} {}^{j_1} \cdots \sum_0^{i_n+1} {}^{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2} \cdots \binom{i_k}{j_k - 1}\binom{i_{k+1}}{j_{k+1}} \cdots \binom{i_n}{j_n} \\
&\quad \times \sum_1^n {}^m \Big[\mathrm{E}_{lm\, u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_k^{\lambda_k+1}, u_{k+1}^{\lambda_{k+1}}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} \\
&\qquad\qquad + \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2} \cdots \binom{i_l}{j_l - 1}\binom{i_{l+1}}{j_{l+1}} \cdots \binom{i_n}{j_n} \\
&\qquad\qquad \times \mathrm{E}_{km\, u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_l^{\lambda_l+1}, u_{l+1}^{\lambda_{l+1}}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} + \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2} \cdots \binom{i_n}{j_n} \\
&\qquad\qquad \times \left(\mathrm{E}_{kl\, u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_k^{\lambda_k+1}, u_{k+1}^{\lambda_{k+1}}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} + \mathrm{E}_{kl\, u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_l^{\lambda_l+1}, u_{l+1}^{\lambda_{l+1}}, \ldots, u_n^{\lambda_n}}\right) \Big] \\
&\qquad\qquad \times \xi_{m\, u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}} \qquad (j_1 + j_2 + \ldots + j_n > 0).
\end{aligned}\right.$$

2° En posant ψ égale à u_1 et considérant u_1 comme une fonction des variables $u_2, u_3, \ldots, u_n$ restantes, les formules (139) révèlent les variations des dérivées partielles de u_1 par rapport aux $u_2, u_3, \ldots, u_n$.

3° Soit ψ une fonction des ρ fonctions

$$(144)\qquad \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

assujetties aux conditions

$$(145)\qquad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0;$$

les variations des dérivées de ces fonctions sont données par les formules (131)

$$(146)\quad \frac{\partial \varphi_{j\,u_1^{i_1}, u_2^{i_2}, \ldots, u_n^{i_n}}}{\partial t} = -\sum_1^n{}_i \sum_0^{i_1}{}_{j_1} \sum_0^{i_2}{}_{j_2} \cdots \sum_0^{i_n}{}_{j_n} \binom{i_1}{j_1}\binom{i_2}{j_2}\cdots\binom{i_n}{j_n} \varphi_{j\,u_1^{\lambda_1}, u_2^{\lambda_2}, \ldots, u_n^{\lambda_n}} \xi_{i\,u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}}.$$

Ces trois formes de la $m^{\text{ième}}$ prolongation du groupe $\mathrm{D}f$ fournissent les moyens de construire les groupes suivants :

$$(147)\quad \mathrm{G}^{(m)}f = \sum_1^n{}_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial u_i} + \sum_0^m{}_{l_1} \sum_0^{m-l_1}{}_{l_2} \cdots \sum_0^{m-l_1-\ldots-l_{n-1}}{}_{l_n} \sum_1^n{}_i \sum{}_j \left(\frac{\partial \mathrm{E}_{ij\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{E}_{ij\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}} \right),$$

$$(148)\quad \mathrm{B}^{(m)}f = \mathrm{G}^{(m-1)}f + \sum_1^\rho{}_i \sum_0^m{}_{l_1} \sum_0^{m-l_1}{}_{l_2} \cdots \sum_0^{m-l_1-\ldots-l_n}{}_{l_n} \frac{\partial \varphi_{i\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{i\,u_1^{l_1}, u_2^{l_2}, \ldots, u_n^{l_n}}},$$

$$(149)\quad \mathrm{M}^{(m)}f = \mathrm{G}^{(m-1)}f + \sum_0^m{}_{l_1} \sum_0^{m-l_1}{}_{l_2} \cdots \sum_0^{m-l_1-\ldots-l_{n-2}}{}_{l_{n-1}} \frac{\partial u_{1\,u_2^{l_1}, u_3^{l_2}, \ldots, u_n^{l_{n-1}}}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial u_{1\,u_2^{l_1}, u_3^{l_2}, \ldots, u_n^{l_{n-1}}}}.$$

Ces trois groupes infinis sont des généralisations pour un espace quadratique à $n+1$ dimensions des groupes étudiés par M. Zorawski dans l'espace ordinaire sous les noms respectifs de *Gauss*, *Beltrami* et *Minding*. Des formules (139) on peut donner une généralisation encore plus grande en construisant les transformations analogues pour un espace quelconque caractérisé par la propriété qu'une puissance de son élément linéaire est une fonction homogène des différentielles des coordonnées ponctuelles.

Les formes (147), (148), (149) fournissent les systèmes complets des équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre auxquelles doivent satisfaire les invariants différentiels des différents ordres et classes; on les obtient en égalant à zéro les coefficients des fonctions arbitraires ξ_i, $\xi_{i u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}}$.

On a d'abord

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial u_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial u_n} = 0;$$

donc les invariants différentiels ne contiennent pas les variables u_1, u_2, ..., u_n sous forme explicite; ainsi il faut considérer seulement les équations qui ont écrit des coefficients des fonctions $\xi_{i u_1^{j_1}, u_2^{j_2}, \ldots, u_n^{j_n}}$.

Il importe de savoir combien d'équations sont indépendantes dans un quelconque de ces systèmes; cette question offre beaucoup de difficulté. Un seul cas montre bien ce fait. On peut écrire les systèmes correspondants aux $m^{\text{ièmes}}$ et $(m+1)^{\text{ièmes}}$ prolongations du groupe de Gauss généralisé de la manière suivante :

$$G^{(m)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} f \equiv \sum_{j_1-1}^{m} {}^{i_1} \sum_{j_2-1}^{m-i_1} {}^{i_2} \cdots \sum_{j_n-1}^{m-i_1-\ldots-i_{n-1}} {}^{i_n} A_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = 0,$$

$$G^{(m+1)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} f \equiv G^{(m)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} + \sum_{j_1-1}^{m+1} {}^{i_1} \sum_{j_2-1}^{m+1} {}^{i_2} \cdots \sum_{j_{n-1}-1}^{m+1} {}^{i_{n-1}} A_{i_1 i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n = m+1-i_{n-1}} = 0$$

$$\left(\sum_{1}^{n} {}^{i} j_i > 0, \qquad \sum_{1}^{n} {}^{i} i_j = m+1 \right);$$

en étudiant le système particulier correspondant aux indices

$$j_1, j_2, \ldots, j_{n-1}, \quad m+1-j_1-j_2-\ldots-j_{n-1},$$

on voit que le maximum de la limite supérieure de la sommation $\sum_{j_n-1}^{m-j_1-\ldots-j_{n-1}} {}^{i_n}$ dans $G^{(m)}_{\xi_i j_1, j_2, \ldots, j_n} f$ est $m+n-1-\sum_{1}^{n-1} {}^{i} j_i$, et que la limite inférieure est $m+1-\sum_{1}^{n-1} {}^{i} j_i$; le signe de sommation dans ces limites disparaît avec $G^{(m)} f$ dans le cas $n+1=3$, ainsi la simplicité comparative du problème pour l'espace ordinaire est apparente.

Nous nous contentons ici de l'observation qu'en formant les systèmes des ordres les moins élevés on trouve que la forme bien connue

$$K = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \left| f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{nn} \right|$$

est un invariant de Gauss, où

$$s_0 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad s^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2;$$

que la forme connue

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{A}} \sum_1^n {}_i \frac{\partial u_i}{\partial\left(\sqrt{A}\,\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\right)}$$

est un invariant de Beltrami; et enfin que la forme

$$\frac{1}{\rho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{M_\varphi}} \sum_1^n {}_i \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{M_i}{\sum_1^n {}_j M_j \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}},$$

où M_φ, M_1, M_2, ..., M_n sont les mineurs correspondants respectivement aux 1re, 2e, ..., $n^{\text{ième}}$ colonnes de la matrice

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad E_{21}, \quad E_{32}, \quad \ldots, \quad E_{nn} \right|,$$

est un invariant de Minding.

En construisant les systèmes correspondants aux espaces biquadratiques, on obtient les paramètres différentiels introduits par M. Somigliana dans ses travaux sur la transformation des équations aux dérivées partielles (*Annali di Matematica*, t. XVIII).

Enfin, si l'on particularise les groupes (147), (148), (149) pour un espace quadratique quelconque à trois dimensions, on trouve que ces groupes particuliers sont de la même forme que les groupes de Gauss, Beltrami et Minding de l'espace ordinaire; donc tous les invariants et tous les théorèmes de déformation de l'espace ordinaire

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = E\,du_1^2 + 2F\,du_1\,du_2 + G\,du_2^2$$

peuvent être traduits immédiatement en invariants et théorèmes correspondants pour le cas d'un espace quadratique quelconque à trois dimensions

$$ds^2 = \sum_1^3{}^i \sum{}^j A_{ij}(x_1, x_2, x_3)\, dx_i dx_j + \Phi\, du_1^2 + 2\Phi\, du_1 du_2 + X\, du_2^2.$$

D'ailleurs, l'extension aux formes différentielles quadratiques à n variables est immédiate, mais, en face du théorème de Beez, il n'est pas permis de parler de déformation dans tous les cas.