

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOUGUET

Le théorème des tourbillons en thermodynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 5^e série, tome 7 (1901), p. 235-257.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__235_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Le théorème des tourbillons en Thermodynamique ;

PAR M. JOUGUET.

1. Considérons une masse fluide continue, animée d'un mouvement qui n'altère pas sa continuité. Désignons par u , v , w les composantes suivant les trois axes de la vitesse d'une molécule : ce sont des fonctions continues du temps t et des coordonnées x , y , z d'un point géométrique (variables d'Euler). Les molécules qui, au temps t_0 , sont situées sur une courbe fermée C_0 forment, à tout instant, une courbe fermée C . On peut énoncer le théorème de Helmholtz en disant que l'intégrale curviligne

$$\int_C u dx + v dy + w dz$$

conserve, à tout instant, la même valeur.

La démonstration de ce théorème, applicable aux fluides dénués de viscosité, est subordonnée en outre aux restrictions suivantes :

a. Les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur chaque élément de volume admettent un potentiel.

b. La pression est fonction de la densité seule.

M. Duhem a montré ⁽¹⁾ comment la Thermodynamique permet

(1) *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique (Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, 3^e série, t. X; 1893). Traité d'Électricité et de Magnétisme, t. II; 1892.*

d'étudier le mouvement de fluides pour lesquels ces restrictions n'ont aucun sens. Nous nous proposons de rechercher ce que devient, dans sa théorie, le théorème de Helmholtz; nous continuerons à supposer nulle la viscosité.

On apercevra facilement, à la lecture de cette Note, tout ce qu'elle doit à M. Duhem. Non seulement la méthode lui est empruntée, mais bien des pages sont consacrées à reproduire, sans grandes modifications, ses résultats. Nous prions qu'on nous en excuse, comme il l'a déjà fait lui-même. Il nous a paru que cette reproduction était utile pour bien mettre en lumière l'insuffisance des énoncés (a) et (b) en Hydrodynamique et la possibilité de leur remplacement par d'autres plus généraux.

I.

2. Dans les fluides habituellement étudiés en Hydrodynamique, l'état physique et chimique en un point est complètement défini par la densité ρ et la température absolue T . Nous supposerons ici que, pour cette définition, il faut joindre à ces deux variables un nombre fini de paramètres algébriques, un par exemple, que nous désignerons par λ , et un nombre fini de paramètres géométriques, un par exemple, le vecteur M dont les projections sur les trois axes seront A, B, C . Les variables $\rho, \lambda, A, B, C, T$ seront supposées normales. La Thermodynamique conduit alors à mettre le potentiel thermodynamique interne d'une masse fluide sous la forme

$$(1) \quad F = \int_E \varphi(\rho, \lambda, A, B, C, T) \rho d\tau + \Psi.$$

Dans cette expression, $\varphi(\rho, \lambda, A, B, C, T) \rho d\tau$ est le potentiel thermodynamique interne de l'élément de volume $d\tau$; le signe \int représente une intégrale triple étendue à tout le volume E du fluide; Ψ est un terme complémentaire, dépendant de la position relative des divers éléments du fluide et des variables fixant l'état de chacun d'eux, *abstraction faite de la température*.

L'hypothèse la plus naturelle qu'on puisse faire sur Ψ , c'est qu'il s'écrive sous la forme d'une intégrale sextuple (1)

$$(2) \quad \Psi = \frac{1}{2} \int \int \psi(\rho, \lambda, \Lambda, B, C, \rho', \lambda', \Lambda', B', C', x, y, z, x', y', z') \rho \rho' d\tau d\tau',$$

dont le champ est l'ensemble à 6 dimensions obtenu en associant successivement chaque point de E avec tous les autres points du même domaine. $\rho, \lambda, \Lambda, B, C$ se rapportent à l'élément de volume $d\tau$ de coordonnées x, y, z ; $\rho', \lambda', \Lambda', B', C'$ à l'élément $d\tau'$ de coordonnées x', y', z' .

A la vérité, un fluide étant isotrope, φ ne dépend de Λ, B, C que par l'intermédiaire de M . De même, $\Lambda, B, C, \Lambda', B', C', x, y, z, x', y', z'$ n'entrent pas d'une manière quelconque dans la fonction ψ . Celle-ci ne dépend que de la grandeur des vecteurs M et M' , de l'angle qu'ils font entre eux, de ceux qu'ils font avec la droite joignant les éléments $d\tau$ et $d\tau'$, et de la longueur de cette droite. Mais ces remarques n'ont pas d'intérêt pour ce que nous avons en vue.

Nous supposons que l'intégrale Ψ peut se calculer par deux intégrales triples successives et nous poserons

$$(3) \quad V(x, y, z, t) = \int_E \psi \rho' d\tau'.$$

Le point x, y, z peut se trouver dans E ou à l'extérieur. Par hypothèse, la fonction V existe dans l'un et dans l'autre domaine. Nous supposons en outre qu'elle est continue dans chacun de ces domaines et qu'elle y admet, par rapport à x, y, z , des dérivées partielles du premier ordre données par la règle de la dérivation sous le signe \int . Ce sont les hypothèses faites par M. Duhem dans son Mémoire sur le *Potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* que nous avons déjà cité. On trouvera dans ce Mémoire leur discussion analy-

(1) DUHEM, *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique*.

tique sur laquelle il n'y a pas à revenir. Elles permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = & \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \rho' d\tau' + \frac{\partial \rho}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \rho' d\tau' + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \rho' d\tau' \\ & + \frac{\partial A}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial A} \rho' d\tau' + \frac{\partial B}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial B} \rho' d\tau' + \frac{\partial C}{\partial x} \int \frac{\partial \psi}{\partial C} \rho' d\tau'. \end{aligned}$$

Et si nous posons

$$(4) \left\{ \begin{aligned} X_i = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial x} \rho' d\tau', & Y_i = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial y} \rho' d\tau', & Z_i = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial z} \rho' d\tau', \\ a_i = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial A} \rho' d\tau', & b_i = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial B} \rho' d\tau', & c_i = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial C} \rho' d\tau', \\ I = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \rho' d\tau', \\ L_i = & - \int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \rho' d\tau', \end{aligned} \right.$$

la valeur de $\frac{\partial V}{\partial x}$ deviendra

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = & - X_i - I \frac{\partial \rho}{\partial x} - L_i \frac{\partial \lambda}{\partial x} - a_i \frac{\partial A}{\partial x} - b_i \frac{\partial B}{\partial x} - c_i \frac{\partial C}{\partial x}. \\ \text{On aura de même} \\ \frac{\partial V}{\partial y} = & - Y_i - I \frac{\partial \rho}{\partial y} - L_i \frac{\partial \lambda}{\partial y} - a_i \frac{\partial A}{\partial y} - b_i \frac{\partial B}{\partial y} - c_i \frac{\partial C}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} = & - Z_i - I \frac{\partial \rho}{\partial z} - L_i \frac{\partial \lambda}{\partial z} - a_i \frac{\partial A}{\partial z} - b_i \frac{\partial B}{\partial z} - c_i \frac{\partial C}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Les actions que le reste de la masse exerce sur l'élément $d\tau$ se composent d'une force $\rho d\tau(\bar{X}_i + \bar{Y}_i + \bar{Z}_i)$ et d'influences $\rho d\tau I$, $\rho d\tau L_i$, $\rho d\tau a_i$, $\rho d\tau b_i$, $\rho d\tau c_i$. Les équations (5) montrent que la force ne dérive pas d'un potentiel; c'est en quoi la restriction (a) du paragraphe 1 ne saurait être énoncée ici.

On remarquera que l'existence des influences $\rho d\tau a_i$, $\rho d\tau b_i$, $\rho d\tau c_i$ suppose celle d'un couple agissant sur l'élément $d\tau$: leur travail vir-

tuel est, en effet, différent de 0 quand l'élément $d\tau$ tourne sur lui-même. On sait que de semblables couples se rencontrent dans l'étude des corps aimantés et, si l'on adopte les idées de Helmholtz, dans celle de l'action entre deux courants électriques.

3. Les actions que les corps étrangers au fluide exercent sur lui sont, les unes des pressions $P d\omega$ appliquées à chaque élément $d\omega$ de la surface extérieure, les autres des forces $\rho(\bar{X}_e + \bar{Y}_e + \bar{Z}_e) d\tau$ et des influences $\rho a_e d\tau$, $\rho b_e d\tau$, $\rho c_e d\tau$ appliquées à chaque élément de volume $d\tau$. A ces dernières il faut ajouter les forces d'inertie

$$- \rho(\bar{j}_x + \bar{j}_y + \bar{j}_z) d\tau,$$

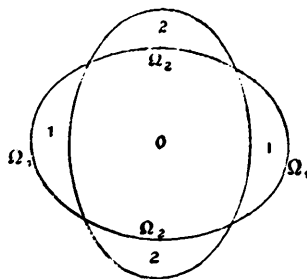
j étant l'accélération.

Exprimons le travail virtuel de ces actions. Envisageons une modification virtuelle en laquelle chaque point matériel se déplace de

$$\delta x + \delta y + \delta z.$$

Le volume occupé par le fluide est déformé. Avant la modification, il comprend la partie 0 et la partie infiniment petite 1 répartie le long de la portion Ω_1 de la surface primitive. Après la modification, il se compose de 0 et de l'espace 2 confinant à 0 le long de la portion Ω_2

Fig. 1.



de la surface primitive. Convenons de marquer, pour les paramètres ρ , λ , A , B , C , T , les variations qu'ils subissent en chaque point géométrique par la caractéristique δ , et celles qu'ils subissent en chaque point matériel par la caractéristique Δ . Le travail virtuel des actions

extérieures et des forces d'inertie est

$$\begin{aligned} \delta\bar{\epsilon}_e + \delta J = & \int_{\Omega_1 + \Omega_2} [P \cos(P, x) \delta x + P \cos(P, y) \delta y + P \cos(P, z) \delta z] d\omega \\ & + \int_{0+1} \hat{r} [(X_e - j_x) \delta x + (Y_e - j_y) \delta y \\ & + (Z_e - j_z) \delta z + L_e \Delta\lambda + a_e \Delta A + b_e \Delta B + c_e \Delta C] d\tau. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\Delta\lambda = \delta\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial x} \delta x + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \delta y + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \delta z,$$

et l'on peut écrire des relations analogues pour ΔA , ΔB , ΔC . L'expression de $\delta\bar{\epsilon}_e + \delta J$ peut donc se transformer en

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \delta\bar{\epsilon}_e + \delta J = & \int_{\Omega_1 + \Omega_2} [P \cos(P, x) \delta x + P \cos(P, y) \delta y + P \cos(P, z) \delta z] d\omega \\ & + \int_0 \hat{r} [L_e \delta\lambda + a_e \delta A + b_e \delta B + c_e \delta C] d\tau \\ & + \int_0 \hat{r} \left[X_e - j_x + L_e \frac{\partial\lambda}{\partial x} + a_e \frac{\partial A}{\partial x} + b_e \frac{\partial B}{\partial x} + c_e \frac{\partial C}{\partial x} \right] \delta x d\tau \\ & + \int_0 \hat{r} \left[Y_e - j_y + L_e \frac{\partial\lambda}{\partial y} + a_e \frac{\partial A}{\partial y} + b_e \frac{\partial B}{\partial y} + c_e \frac{\partial C}{\partial y} \right] \delta y d\tau \\ & + \int_0 \hat{r} \left[Z_e - j_z + L_e \frac{\partial\lambda}{\partial z} + a_e \frac{\partial A}{\partial z} + b_e \frac{\partial B}{\partial z} + c_e \frac{\partial C}{\partial z} \right] \delta z d\tau. \end{aligned} \right.$$

4. On obtiendra les équations du mouvement en exprimant que

$$\delta F - \delta\bar{\epsilon}_e - \delta J = 0$$

pour toute modification virtuelle en laquelle la température de chaque molécule reste constante.

Dans ce qui va suivre, les variables A, B, C joueraient, comme elles l'ont fait jusqu'ici, un rôle identique à celui de λ . On simplifiera beaucoup l'écriture en supposant dorénavant, pour faire le calcul,

qu'elles n'existent pas. Il sera facile, à la fin, de rétablir dans les formules les termes qu'elles auraient donnés, par analogie avec ceux que donnera λ .

5. Le calcul de $\delta \int \varphi \rho d\tau$ se fera en suivant la méthode développée par M. Duhem, dans son *Mémoire Sur l'équilibre et le mouvement des fluides mélangés* (1). On posera

$$(7) \quad \begin{cases} \mathbf{H} = \varphi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}, \\ \mathbf{ES} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{T}}. \end{cases}$$

S sera l'entropie de l'unité de masse du fluide censée homogène. La variation cherchée sera

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \int \varphi \rho d\tau &= \int_0^1 \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \delta \lambda d\tau \\ &+ \int_0^1 \rho \left[\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} + \mathbf{ES} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x} \right) \delta x \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial y} + \mathbf{ES} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} + \mathbf{ES} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} \right) \delta z \right] d\tau \\ &+ \mathbf{S}_{\Omega_1 + \Omega_2} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] d\omega, \end{aligned} \right.$$

n désignant la normale *intérieure* au fluide.

6. Nous insisterons davantage sur le calcul de $\delta \Psi$.

Ψ varie pour deux raisons : 1° à cause des variations $\delta \rho$, $\delta \lambda$, $\delta \rho'$, $\delta \lambda'$ en tout point géométrique du champ 0 ; 2° à cause de la disparition de la matière contenue dans 1 et de l'apparition de la matière contenue dans 2.

(1) *Travaux et Mémoires des Facultés de Lille*, t. III, Mémoire n° 11, Chap. VI, p. 91 ; 1893.

On écrira

$$(9) \left\{ \begin{aligned} 2\delta\Psi &= \int \int_{00} (\psi + \delta\psi)(\rho + \delta\rho)(\rho' + \delta\rho') d\tau d\tau' \\ &+ \int \int_{02,20} (\psi + \delta\psi)(\rho + \delta\rho)(\rho' + \delta\rho') d\tau d\tau' \\ &+ \int \int_{22} (\psi + \delta\psi)(\rho + \delta\rho)(\rho' + \delta\rho') d\tau d\tau' \\ &- \left(\int \int_{00} \psi\rho\rho' d\tau d\tau' + \int \int_{01,10} \psi\rho\rho' d\tau d\tau' + \int \int_{11} \psi\rho\rho' d\tau d\tau' \right). \end{aligned} \right.$$

Le symbole 00 représente l'ensemble à six dimensions obtenu en associant successivement à chaque point de 0 tous les autres points de 0. Le symbole 02,20 représente un ensemble formé de deux parties, la première 02 obtenue en associant successivement à chaque point de 0 tous les points de 2, la seconde 20 obtenue en associant à chaque point de 2 tous les points de 0. Les symboles 22, 11 et 01, 10 ont des significations analogues.

Considérons d'abord les deux intégrales relatives au champ 00 qui figurent dans (9) par leur différence. Par raison de symétrie, cette différence est égale à

$$2 \int \int_{00} \rho' \psi \delta\rho d\tau d\tau' + 2 \int \int_{00} \rho\rho' \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \delta\rho d\tau d\tau' + 2 \int \int_{00} \rho\rho' \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \delta\lambda d\tau d\tau',$$

ou encore

$$(9') \quad 2 \int_0 V \delta\rho d\tau - 2 \int_0 \rho I \delta\rho d\tau - 2 \int_0 \rho L_i \delta\lambda d\tau.$$

D'ailleurs, $\delta\rho$ peut s'exprimer en fonction de δx , δy , δz . En effet,

$$\delta\rho = \Delta\rho - \frac{\partial\rho}{\partial x} \delta x - \frac{\partial\rho}{\partial y} \delta y - \frac{\partial\rho}{\partial z} \delta z \quad \text{et} \quad \Delta\rho = -\rho \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} \right).$$

D'où

$$\delta\rho = - \left[\frac{\partial(\rho \delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \delta z)}{\partial z} \right].$$

Une intégration par parties transforme alors la somme (g') en

$$(g'') \left\{ \begin{aligned} & 2 \int_0 \rho \left[\frac{\partial(V - \rho I)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial(V - \rho I)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(V - \rho I)}{\partial z} \delta z \right] d\tau - 2 \int_0 \rho L_i \delta \lambda d\tau \\ & + 2 \sum_{\Omega_1 + \Omega_2} (\rho V - \rho^2 I) [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] d\omega. \end{aligned} \right.$$

Prenons maintenant dans (g) les intégrales relatives à 01, 10 et à 11. On peut les écrire

$$- \int_1 \rho d\tau \int_{1+0} \psi \rho' d\tau' - \int_1 \rho d\tau \int_0 \psi \rho' d\tau',$$

soit

$$- 2 \int_1 V \rho d\tau.$$

De même, celles qui sont prises dans 02, 20 et dans 22 donnent

$$2 \int_2 V \rho d\tau.$$

On remarquera, pour ce dernier terme, que, dans la région 2, les $\delta \rho$ et les $\delta \lambda$ ne sont pas infiniment petits. Mais les intégrales qui s'y rapportent le sont : on les calcule en donnant à ρ , λ , V les valeurs que ces quantités avaient, avant la modification, aux points de 0 infiniment voisins de la surface Ω_2 .

La différence $2 \int_1 V \rho d\tau - 2 \int_2 V \rho d\tau$ s'écrit

$$(g''') - 2 \sum_{\Omega_1 + \Omega_2} \rho V [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] d\omega.$$

On a supposé, dans ce calcul, qu'au second ordre près

$$\int_1 \rho d\tau \int_{1+0} \psi \rho' d\tau' \quad \text{et} \quad \int_1 \rho d\tau \int_0 \psi \rho' d\tau'$$

étaient égales. C'est, en effet, ce qui arrive en général avec les hypothèses énoncées par M. Duhem sur la fonction ψ . Mais cela serait faux

si l'on supposait, par exemple, comme on le fait dans la théorie de la capillarité, que cette fonction n'a une valeur sensible que lorsque les points (x, y, z) (x', y', z') sont très voisins l'un de l'autre. Nous laisserons ce cas de côté en remarquant simplement que, s'il se rencontrait, seules seraient modifiées les intégrales doubles de $\delta\Psi$, à l'exclusion des intégrales triples. Or ces dernières suffisent pour le but que nous avons en vue.

Nous écrirons donc, en vertu de (g) , (g'') , (g''') ,

$$(10) \left\{ \begin{aligned} \delta\Psi &= \int_0 \rho \left[\frac{\partial(V - \rho I)}{\partial x} \delta x + \frac{\partial(V - \rho I)}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(V - \rho I)}{\partial z} \delta z \right] d\tau - \int_0 \rho L_i \delta\lambda d\tau \\ &\quad - \int_{\Omega_1 + \Omega_2} \rho^2 I [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] d\omega. \end{aligned} \right.$$

7. Les formules (6), (8), (10) donnent $\delta F - \delta \mathcal{E}_e - \delta J$. Cette expression se compose d'une somme d'intégrales de volume et d'intégrales de surface. La considération des intégrales de volume donne les équations du mouvement pour l'intérieur de la masse fluide. Nous les écrirons en rétablissant les termes dus à A, B, C.

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} &= L_e + L_i, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial A} &= a_e + a_i, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial B} &= b_e + b_i, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial C} &= c_e + c_i, \end{aligned} \right.$$

$$(12) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} + ES \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(V - \rho I)}{\partial x} &= X_e - j_x + L_e \frac{\partial \lambda}{\partial x} + a_e \frac{\partial A}{\partial x} + b_e \frac{\partial B}{\partial x} + c_e \frac{\partial C}{\partial x}, \\ \frac{\partial H}{\partial y} + ES \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial(V - \rho I)}{\partial y} &= Y_e - j_y + L_e \frac{\partial \lambda}{\partial y} + a_e \frac{\partial A}{\partial y} + b_e \frac{\partial B}{\partial y} + c_e \frac{\partial C}{\partial y}, \\ \frac{\partial H}{\partial z} + ES \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial(V - \rho I)}{\partial z} &= Z_e - j_z + L_e \frac{\partial \lambda}{\partial z} + a_e \frac{\partial A}{\partial z} + b_e \frac{\partial B}{\partial z} + c_e \frac{\partial C}{\partial z}. \end{aligned} \right.$$

Supposons que

$$X_e dx + Y_e dy + Z_e dz + L_e d\lambda + a_e dA + b_e dB + c_e dC - ES dT$$

soit à chaque instant la différentielle exacte, par rapport à x, y, z , d'une fonction $-R(x, y, z, t)$. Les équations (12) s'écrivent

$$(12') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\Pi + V - \rho I + R)}{\partial x} = -j_x, \\ \frac{\partial(\Pi + V - \rho I + R)}{\partial y} = -j_y, \\ \frac{\partial(\Pi + V - \rho I + R)}{\partial z} = -j_z, \end{array} \right.$$

formules d'où l'on peut tirer le théorème de Helmholtz par une voie connue [voir POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, Chap. I. Les équations (12') ont la forme des équations (7), p. 10 de cet Ouvrage].

La fonction R existera, en particulier, toutes les fois que seront satisfaites les conditions suivantes :

a'. Les actions extérieures admettent un potentiel, c'est-à-dire que $X_e dx + Y_e dy + Z_e dz + L_e d\lambda + a_e dA + b_e dB + c_e dC$ est la différentielle exacte d'une fonction $-\Omega(x, y, z, \lambda, A, B, C)$;

b'. Il existe à tout instant, dans toute la masse du fluide, une relation

$$(13) \quad K(S, T) = 0$$

entre la température et l'entropie par unité de masse.

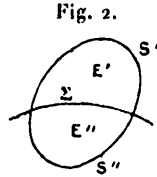
Cette dernière condition sera à son tour certainement remplie si, à partir d'un état où la relation (13) existe, chaque élément de matière ne subit que des transformations en lesquelles cette relation ne cesse pas d'être vérifiée; en particulier si, à partir d'un instant où toute la masse est homogène, chaque élément matériel ne subit que des transformations *isothermes* ou *adiabatiques*.

8. La considération des intégrales doubles de $\delta F - \delta \mathcal{E}_e - \delta J$ donne les conditions aux limites. Ce sont :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \cos(P, x) = \left[\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \rho^2 I \right] \cos(n, x), \\ P \cos(P, y) = \left[\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \rho^2 I \right] \cos(n, y), \\ P \cos(P, z) = \left[\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \rho^2 I \right] \cos(n, z). \end{array} \right.$$

Ces équations montrent d'abord que P a la direction de n (la pression doit donc être normale à la surface); ensuite que P doit avoir la valeur $\rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} - \rho^2 I$.

Pour définir la pression qui s'exerce sur un élément intérieur $d\sigma$, faisons passer par $d\sigma$ une surface Σ qui partage le fluide en deux par-



ties E' et E'' . Enlevons E' sans supprimer les actions qu'elle exerce sur les éléments de volume de E'' et qui ont pour potentiel

$$\int_{E''} \rho \, d\tau \int_{E'} \psi \rho' \, d\tau'.$$

Pour maintenir E' dans l'équilibre fictif de d'Alembert, il faudra alors appliquer à chaque élément $d\sigma$ de Σ une pression extérieure Π . Π sera, par définition, la pression à l'intérieur du fluide. Nous allons la calculer.

Le potentiel thermodynamique de E'' est

$$\int_{E''} \varphi \rho \, d\tau + \frac{1}{2} \int \int_{E'' E''} \psi \rho \rho' \, d\tau \, d\tau'.$$

Sa variation dans une modification virtuelle est, en vertu des formules (8) et (10),

$$\begin{aligned} & \int_{E''} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \delta \lambda \, d\tau + \int_{E''} \rho \left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} + ES \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right) \delta x \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} + ES \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} + ES \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \right) \delta z \right] d\tau \\ & + \sum_{S'+\Sigma} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] \, d\omega \\ & - \int_{E''} \rho L_i'' \delta \lambda \, d\tau + \int_{E''} \rho \left[\frac{\partial (V'' - \rho I'')}{\partial x} \delta x + \frac{\partial (V'' - \rho I'')}{\partial y} \delta y + \frac{\partial (V'' - \rho I'')}{\partial z} \delta z \right] d\tau. \\ & - \sum_{S'+\Sigma} \rho^2 I'' [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] \, d\omega. \end{aligned}$$

V'' , I' , L'_i sont les intégrales V , I , L_i prises dans le champ E'' seulement.

Le travail des actions exercées par E' sur E'' est, avec un signe inverse, l'expression

$$\int_{E''} \left[\Delta\rho \int_{E'} \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \rho' d\tau' + \Delta\lambda \int_{E'} \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} \rho' d\tau' + \delta x \int_{E'} \frac{\partial\psi}{\partial x} \rho' d\tau' + \delta y \int_{E'} \frac{\partial\psi}{\partial y} \rho' d\tau' + \delta z \int_{E'} \frac{\partial\psi}{\partial z} \rho' d\tau' \right] \rho d\tau,$$

soit

$$\int_{E''} \left(\frac{\partial V'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V'}{\partial y} \delta y + \frac{\partial V'}{\partial z} \delta z \right) \rho d\tau - \int_{E'} (I' \delta\rho + L'_i \delta\lambda) \rho d\tau,$$

ou enfin

$$- \int_{E''} \rho L'_i \delta\lambda d\tau + \int_{E''} \rho \left[\frac{\partial(V' - \rho I')}{\partial x} \delta x + \frac{\partial(V' - \rho I')}{\partial y} \delta y + \frac{\partial(V' - \rho I')}{\partial z} \delta z \right] d\tau - \sum_{s'+\Sigma} \rho^2 I' [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] d\omega,$$

V' , I' , L'_i étant les intégrales V , I , L_i prises dans le champ E' seulement.

Enfin le travail virtuel des autres actions extérieures est, avec un signe contraire, l'expression

$$- \int_{E''} \rho [(X_e - j_x) \delta x + (Y_e - j_y) \delta y + (Z_e - j_z) \delta z] d\tau - \sum_{s'} P [\cos(P, x) \delta x + \cos(P, y) \delta y + \cos(P, z) \delta z] d\omega - \sum_{\Sigma} \Pi [\cos(\Pi, x) \delta x + \cos(\Pi, y) \delta y + \cos(\Pi, z) \delta z] d\omega.$$

En égalant à zéro la somme des trois expressions ci-dessus, et en remarquant que

$$V = V' + V'',$$

$$I = I' + I'',$$

$$L_i = L'_i + L''_i,$$

l'on obtient les équations du mouvement de la masse E'' sous la forme (11), (12) et la valeur de Π sous la forme

$$(15) \quad \Pi = \rho^2 \frac{d\sigma}{d\rho} - \rho^2 I,$$

et l'on vérifie que Π est normal à $d\sigma$.

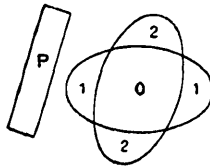
La relation (15) montre que la pression sur l'élément $d\sigma$ dépend de l'état de la masse *totale* par l'intermédiaire de I . On voit combien il serait difficile d'introduire ici la restriction (b) du n° 1.

9. Nous rappellerons qu'un exemple de fluides auxquels s'appliquent les considérations précédentes est fourni par ceux dont les éléments s'attirent suivant la loi proposée par M. Faye dans ses études sur la queue des comètes.

II.

10. Les hypothèses faites au n° 2 sur le terme complémentaire Ψ ne sont pas nécessaires. Les fluides parfaitement doux aimantés offrent un exemple où elles ne sont pas vraies. L'action d'une masse aimantée sur un élément intérieur n'est pas définie. De là l'impossibilité de mettre Ψ sous la forme (2). De là aussi l'impossibilité d'énoncer, pour ces corps, la restriction (a) du n° 1. Mais, si l'on adopte les idées de M. Duhem (¹), on peut écrire ainsi qu'il suit le

Fig. 3.



potentiel thermodynamique interne d'un système formé par des aimants permanents et immobiles P et par un fluide parfaitement doux

(¹) *Traité d'Électricité et de Magnétisme*, t. II, p. 159 et 405.

aimanté E :

$$(16) \quad F = \int_{P+E} \varphi(\rho, M, T) \rho d\tau - \frac{1}{2} \int_{P+E} (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\tau.$$

$M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ est ici le moment magnétique de l'élément $d\tau$. Quant à α, β, γ , ce sont les composantes suivant les trois axes du champ magnétique à l'intérieur de la masse aimantée.

Nous admettrons d'ailleurs que le travail virtuel des forces d'inertie et des actions extérieures qui agissent sur le fluide est de la forme

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta\bar{e}_e + \delta J &= \sum_{\Omega_1+\Omega_2} [P \cos(P, x) \delta x + P \cos(P, y) \delta y + P \cos(P, z) \delta z] d\omega \\ &+ \int_0 \rho [(X_e - j_x) \delta x + (Y_e - j_y) \delta y + (Z_e - j_z) \delta z] d\tau, \end{aligned} \right.$$

qui n'est qu'un cas particulier de la forme (6).

La variation de $\int \varphi \rho d\tau$ pourra se calculer par la formule (8) : elle sera

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \int \varphi \rho d\tau &= \int_0 \frac{\rho}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial M} (A \delta A + B \delta B + C \delta C) d\tau \\ &+ \int_0 \rho \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} + ES \frac{\partial T}{\partial x} \right) \delta x \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial H}{\partial y} + ES \frac{\partial T}{\partial y} \right) \delta y + \left(\frac{\partial H}{\partial z} + ES \frac{\partial T}{\partial z} \right) \delta z \right] d\tau \\ &+ \sum_{\Omega_1+\Omega_2} \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} [\delta x \cos(n, x) + \delta y \cos(n, y) + \delta z \cos(n, z)] d\omega, \end{aligned} \right.$$

H et S étant toujours définis par les égalités (7).

Seule, la variation de $\Psi = - \frac{1}{2} \int_{P+E} (A\alpha + B\beta + C\gamma) d\tau$ ne peut pas être obtenue par application des résultats qui précèdent. Elle se calcule toutefois par une méthode tout à fait analogue à celle que nous avons exposée plus haut. C'est M. Liénard qui en a donné le premier la valeur exacte (1). Contentons-nous d'indiquer le résultat de son

(1) *Pressions à l'intérieur des aimants et des diélectriques (Lumière électrique, t. LII, p. 7; 1894).*

calcul en renvoyant à son travail pour la marche à suivre.

$$(19) \left\{ \begin{aligned} \partial\Psi &= - \int_0^t (\alpha \partial A + \beta \partial B + \gamma \partial C) dt \\ &+ \sum_{\Omega_1 + \Omega_2} [\alpha A + \beta B + \gamma C + 2\pi M^2 \cos^2(M, n)] \\ &\quad \times [\partial x \cos(n, x) + \partial y \cos(n, y) + \partial z \cos(n, z)] d\omega. \end{aligned} \right.$$

11. L'expression $\partial F - \partial \varepsilon_e - \partial J$ est une somme d'intégrales triples et d'intégrales doubles. La considération des premières donne les équations du mouvement à l'intérieur du fluide.

$$(20) \left\{ \begin{aligned} A &= \alpha \frac{M}{\frac{\partial z}{\partial M}}, \\ B &= \beta \frac{M}{\frac{\partial z}{\partial M}}, \\ C &= \gamma \frac{M}{\frac{\partial z}{\partial M}}. \end{aligned} \right.$$

$$(21) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x} + ES \frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= X_e - j_x, \\ \frac{\partial H}{\partial y} + ES \frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= Y_e - j_y, \\ \frac{\partial H}{\partial z} + ES \frac{\partial \Gamma}{\partial z} &= Z_e - j_z. \end{aligned} \right.$$

Imaginons que $X_e dx + Y_e dy + Z_e dz - ES d\Gamma$ soit à tout instant la différentielle exacte, par rapport à x, y, z , d'une fonction $-R(x, y, z, t)$. Les équations (21) prendront alors la forme

$$(21') \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(H+R)}{\partial x} &= -j_x, \\ \frac{\partial(H+R)}{\partial y} &= -j_y, \\ \frac{\partial(H+R)}{\partial z} &= -j_z, \end{aligned} \right.$$

qui conduit au théorème de Helmholtz.

La fonction R existera en particulier toutes les fois que seront vérifiées les conditions (α') et (β') du n° 7.

12. Les conditions aux limites sont données par la considération des intégrales doubles de $\delta F - \delta \bar{\epsilon}_e - \delta J$. En tenant compte de (20) pour transformer le terme $\alpha A + \beta B + \gamma C$, et en posant

$$(22) \quad \Pi = \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} + M \rho \frac{\partial \varphi}{\partial M} + 2\pi M^2 \cos^2(M, n),$$

on aura

$$(23) \quad \begin{cases} P \cos(P, x) = \Pi \cos(n, x), \\ P \cos(P, y) = \Pi \cos(n, y), \\ P \cos(P, z) = \Pi \cos(n, z). \end{cases}$$

On verra, comme au n° 8, que la pression sur un élément $d\sigma$ intérieur au fluide est précisément Π , que cette pression est normale à $d\sigma$, mais qu'elle dépend de son orientation (¹), si bien que la pression en un point n'est pas définie et que la restriction (β) du n° 1 n'aurait ici pas plus de sens que la restriction (α).

13. A la vérité, quand un fluide aimanté est en mouvement, il se produit dans sa masse soit des courants de conduction, soit des courants de déplacement. L'étude de ce mouvement ressortit donc à l'Électrodynamique et échappe (M. Duhem a insisté sur ce point) aux méthodes ordinaires de la Thermodynamique : les méthodes de Helmholtz permettraient de l'aborder dans toute sa complexité. Le cas que nous avons traité est un cas idéal : celui d'un fluide fictif qui ne serait ni conducteur, ni susceptible de prendre la polarisation diélectrique. Il présente donc fort peu d'intérêt pour la théorie de l'Électricité. Nous nous plaçons ici au point de vue de l'Énergétique, et nous avons voulu simplement montrer, par cet exemple, la possibilité de systèmes matériels pour lesquels la forme (2) du terme Ψ n'est plus

(¹) LI ÉNARD, *loc. cit.*

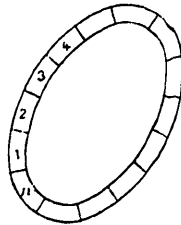
exacte, pour lesquels la notion de force intérieure, capitale en Mécanique classique, tombe complètement en défaut, mais peut être efficacement remplacée par celle d'Énergie.

III.

14. Nous avons donc donné, des restrictions (a) , (b) , auxquelles est subordonnée la démonstration du théorème de Helmholtz, un nouvel énoncé (a') , (b') qui a l'avantage de s'appliquer à des cas où l'énoncé habituel n'a pas de sens. Les conditions (a') , (b') présentent la plus grande analogie avec celles qu'a trouvées M. Duhem en cherchant dans quels cas, pour les systèmes dépendant d'un nombre fini de variables, les équations du mouvement admettaient une intégrale des forces vives ⁽¹⁾. Mieux peut-être que les développements qui précèdent, la démonstration suivante du théorème de Helmholtz met en lumière les raisons de ce parallélisme.

Pour montrer que $\int_c u dx + v dy + w dz$ est constant, il est nécessaire et suffisant de montrer que $\int_c j_x dx + j_y dy + j_z dz$ est nul (voir POINCARÉ, *Théorie des tourbillons*, p. 12). Considérons, tout le long de C , un anneau fluide, de section infiniment petite, que nous

Fig. 4.



partagerons par des sections normales à C en éléments 1, 2, ..., n infiniment petits dans leurs trois dimensions et contenant tous la même

⁽¹⁾ *L'intégrale des forces vives en Thermodynamique (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5^e série, t. IV, p. 5; 1898).*

masse dm . Un système matériel étant défini par des variables normales, on sait que, dans un déplacement virtuel quelconque, isotherme ou non, la variation du potentiel thermodynamique interne, *diminuée des termes dus à la variation de température*, est égale au travail des actions extérieures augmenté du travail des forces d'inertie. Écrivons cette égalité pour l'anneau C et pour la modification par laquelle chaque élément vient prendre la place et l'état physique et chimique du suivant, 1 remplaçant 2, ..., n remplaçant 1.

Le potentiel thermodynamique de l'anneau est de la forme

$$\sum_1^n \varphi(\rho, \lambda, T) dm + \zeta,$$

ζ ne dépendant pas de la température des éléments 1, 2, ..., n et reprenant la même valeur quand la masse totale du fluide revient au même état. Le premier membre de notre égalité sera donc

$$- \sum_1^n \frac{\partial \varphi}{\partial T} \delta T dm.$$

Les actions extérieures comprennent :

D'abord celles qui sont dues aux corps étrangers au fluide. Leur travail virtuel est, par hypothèse, de la forme

$$\sum_1^n \left[X_e \delta x + Y_e \delta y + Z_e \delta z + I_e \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \delta z \right) \right] dm.$$

Puis les actions exercées sur l'anneau par le reste du fluide. Leur travail $\delta \eta$ est nul parce que toute la masse revient au même état.

Enfin les pressions appliquées à la surface de l'anneau. Leur travail est nul parce que, le fluide étant sans viscosité, elles sont normales aux éléments pressés, c'est-à-dire au chemin parcouru.

Nous devons donc écrire

$$\begin{aligned}
 -\sum_1^n \frac{\partial \tau}{\partial T} \delta T dm &= \sum_1^n \left[X_e \delta x + Y_e \delta y \right. \\
 &\quad \left. + Z_e \delta z + L_e \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \delta z \right) \right] dm \\
 &\quad - \sum_1^n (j_x \delta x + j_y \delta y + j_z \delta z) dm.
 \end{aligned}$$

On peut évidemment, pour calculer chacun des termes de cette équation, imaginer non plus que chaque élément se substitue au suivant, mais que l'un d'entre eux, 1 par exemple, fait le tour complet de C. Il vient alors

$$\begin{aligned}
 -\int_c \frac{\partial \tau}{\partial T} dT &= \int_c (X_e dx + Y_e dy + Z_e dz + L_e d\lambda) \\
 &\quad - \int_c (j_x dx + j_y dy + j_z dz).
 \end{aligned}$$

En exprimant que $\int_c (j_x dx + j_y dy + j_z dz)$ est nul, on retrouve les conditions suffisantes (α') et (b') des nos 7 et 11. Si elles sont remplies, on peut dire qu'il existe une intégrale des forces vives dans le déplacement virtuel que nous avons considéré pour l'élément 1.

15. Cette démonstration du théorème de Helmholtz n'est que la généralisation d'une méthode indiquée par Lagrange pour trouver les conditions d'équilibre des liquides (¹). Elle présente deux inconvénients. Elle laisse dans une certaine obscurité la modification virtuelle qu'on y fait subir à l'anneau C; c'est seulement en vertu d'une notion assez confuse de la nature d'un fluide qu'on en aperçoit la possibilité. Elle suppose de plus, sans explication, que la pression est normale à l'élément pressé. A ces points de vue, elle ne saurait donc remplacer

(¹) *Mécanique analytique*, 1^{re} Partie, section VII, art. 7.

les développements des nos 1 à 12 : ceux-ci nous ont montré que la direction normale de la pression résulte du fait que le potentiel thermodynamique $\varphi \rho d\tau$ dépend de la disposition de la matière autour du point x, y, z par l'intermédiaire de la densité seule. Mais, par contre, elle a l'avantage d'être indépendante de la forme du terme Ψ du n° 2 : les hypothèses que nous y avons faites sur $\delta\zeta$ et $\delta\eta$ (qui remplacent ici $\delta\Psi$) découlent, en effet, si directement des principes de la Thermodynamique qu'il paraît difficile de les écarter.

IV.

16. Dans le mouvement des fluides mélangés, M. Duhem a montré que le théorème de Helmholtz s'applique à chaque fluide en particulier, si les actions extérieures admettent un potentiel et si, à tout instant, la température de la masse est uniforme⁽¹⁾. Sa démonstration suppose que les divers éléments de la masse fluide n'exercent aucune action l'un sur l'autre. Il est facile de s'affranchir de cette restriction. Prenons, par exemple, deux fluides que nous distinguerons par les indices 1 et 2. Soient ρ la densité du mélange, ρ_1, ρ_2 les densités particulières ($\rho = \rho_1 + \rho_2$), λ_1 et λ_2 deux paramètres quelconques, T la température absolue. Nous écrirons le potentiel thermodynamique

$$V = \int \varphi(\rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2, T) \rho d\tau \\ + \frac{1}{2} \int \int \psi(\rho_1, \rho_2, \lambda_1, \lambda_2, \rho'_1, \rho'_2, \lambda'_1, \lambda'_2, x, y, z, x', y', z') \rho \rho' d\tau d\tau'.$$

On supposera le travail virtuel des actions extérieures de la forme

$$\delta \mathfrak{E}_e = \int (X_{e1} \delta x_1 + Y_{e1} \delta y_1 + Z_{e1} \delta z_1 + L_{e1} \Delta \lambda_1) \rho_1 d\tau \\ + \int (X_{e2} \delta x_2 + Y_{e2} \delta y_2 + Z_{e2} \delta z_2 + L_{e2} \Delta \lambda_2) \rho_2 d\tau \\ + \mathfrak{S} P [\cos(n, x) \delta x + \cos(n, y) \delta y + \cos(n, z) \delta z] d\omega,$$

$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$, se rapportant au fluide 1; $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$ au fluide 2.

(1). *Équilibre et mouvement des fluides mélangés*, p. 101.

À la surface, l'expression

$$\cos(n, x)\partial x + \cos(n, y)\partial y + \cos(n, z)\partial z$$

est la même pour les deux fluides (1).

Nous poserons

$$H_1 = \varphi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_1},$$

$$H_2 = \varphi + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho_2},$$

$$I_1 = - \int \frac{\partial \psi}{\partial \rho_1} \rho' d\tau',$$

$$I_2 = - \int \frac{\partial \psi}{\partial \rho_2} \rho' d\tau',$$

$$L_{i1} = - \int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} \rho' d\tau',$$

$$L_{i2} = - \int \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_i} \rho' d\tau'.$$

Les équations du mouvement s'obtiendront par une méthode tout à fait analogue à celle que nous avons appliquée plus haut. On arrivera ainsi, pour le fluide 1, aux formules suivantes :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} = L_{e1} + L_{i1},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{\omega_1}{\rho_1} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial (V - \rho I_1)}{\partial x} = X_{e1} + L_{e1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} - j_{1x},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial y} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{\omega_1}{\rho_1} \right) \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial (V - \rho I_1)}{\partial y} = Y_{e1} + L_{e1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} - j_{1y},$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial z} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial T} + \frac{\omega_1}{\rho_1} \right) \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\partial (V - \rho I_1)}{\partial z} = Z_{e1} + L_{e1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - j_{1z},$$

et à des formules analogues pour le fluide 2. ω_1 et ω_2 y désignent des fonctions qui vérifient l'égalité $\omega_1 + \omega_2 = 0$ et que la Thermodynamique est impuissante à déterminer.

(1) DUNEM, *Équilibre et mouvement des fluides mélangés*, p. 37.

Si les actions extérieures admettent un potentiel et si, à tout instant, la température est uniforme dans la masse, le théorème de Helmholtz est vrai. Il l'est encore si, à tout instant, $\frac{dz}{dT} + \frac{w_1}{z_1}$ est fonction de T seul. Il est malheureusement difficile de voir à quelle réalité physique correspond cet énoncé. Il est, en particulier, difficile de trouver ici le cas qui correspond aux mouvements adiabatiques des fluides isolés. Il n'y a pas lieu d'ailleurs de s'en étonner, la quantité de chaleur dégagée par un élément d'un fluide 1 mélangé à un autre fluide 2 n'étant pas une grandeur définie.

