

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

C. SAUTREAUX

**Mouvement d'un liquide parfait soumis à la pesanteur.  
Détermination des lignes de courant**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5<sup>e</sup> série*, tome 7 (1901), p. 125-159.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1901\\_5\\_7\\_\\_125\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1901_5_7__125_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Mouvement d'un liquide parfait soumis à la pesanteur.  
Détermination des lignes de courant;*

PAR M. C. SAUTREAU.

I.

*Introduction. Rappel de quelques résultats.* — Nous avons établi, dans un travail précédent (<sup>1</sup>), qu'un point de la surface libre d'un liquide soumis à l'action de la pesanteur a des coordonnées  $(x, y)$  exprimées par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} 2x &= S(\omega), \\ 2y &= \int \sqrt{\frac{g^2 S(\omega)^2}{2} + K} - S'^2(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Dans ces formules,  $S(\omega)$  désigne une fonction arbitraire de la quantité complexe  $\omega = \zeta + i\psi$ ;  $g$  est l'accélération de la pesanteur; enfin  $K$  désigne une constante dont la valeur est  $K = \frac{p_0}{\rho} + C = gx_0 + \frac{1}{2}V_0^2$ ;  $x_0$  désigne l'abscisse du point où la paroi cesse et où commence la sur-

---

(<sup>1</sup>) *Annales de l'Enseignement supérieur de Grenoble*, t. VI, n° 1.

face libre,  $p_0$  la pression,  $V_0$  la vitesse en ce point,  $\mu$  la densité du liquide.

Si l'on pose

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad \zeta = \frac{dz}{dw} = \xi + i\eta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

nous avons également établi que  $\zeta$  est racine de l'équation fondamentale suivante :

$$\zeta^2 - S'(w)\zeta + \frac{2}{\frac{d}{2}S(w) + K} = 0.$$

Dans le Mémoire auquel nous faisons allusion, nous nous occupons spécialement de la *détermination de la surface libre*.

Dans le travail actuel nous nous proposons un but différent : l'étude des trajectoires que parcourent les molécules fluides. Nous allons faire cette étude sur un exemple, en donnant à la fonction  $S(w)$  une forme déterminée. Les résultats trouvés dans cet exemple feront comprendre la marche générale à suivre dans un pareil problème et montreront que des méthodes relativement faciles conduisent aux conclusions cherchées.

## II.

*Équations du problème.* — Prenons pour  $S(w)$  la fonction  $e^{-w} + \alpha$  ( $\alpha$  constante arbitraire). L'équation fondamentale devient

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{2}{\frac{d}{2}e^{-w} + \frac{d}{2}\alpha + K}.$$

Pour simplifier l'écriture supposons que la force constante qui agit parallèlement à  $Ox$ , au lieu d'être la pesanteur même, soit une force constante d'accélération  $g = 16$  (au lieu de  $g, 8$ ) et supposons que la constante arbitraire  $\alpha$  soit telle que  $8\alpha + K = 0$ . Il reste

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{(1)}{e^{-w}} = 0.$$

On en tire

$$2\zeta = 2\xi + 2i\eta = -e^{-w} \pm \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}}$$

d'où

$$2z = 2x + 2iy = \int \left( -e^{-w} \pm \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}} \right) dw.$$

### III.

*Champ  $w$  d'intégration.* — La première question qui se pose maintenant est de déterminer, d'une manière précise, le chemin le long duquel doit être prise cette intégrale. Rendons-nous compte de la position dans le plan  $w$  des points critiques du radical  $\sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}}$ , car le champ de l'intégration en dépend, ainsi que la valeur de l'intégrale.

Les zéros du radical sont les racines de l'équation

$$e^{-3w} = 1;$$

d'où

$$\varphi = 0$$

et

$$\psi = 0 \quad (w_0),$$

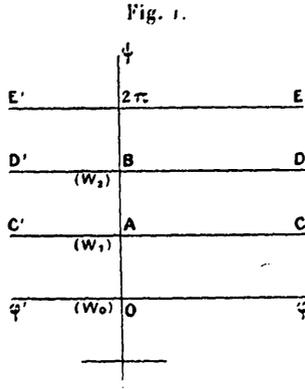
$$\psi = \frac{2\pi}{3} \quad (w_1),$$

$$\psi = \frac{4\pi}{3} \quad (w_2).$$

On a ainsi les points O, A, B, ..., sur l'axe des  $\psi$  dans le plan  $w$  (*fig. 1*).

Or, nous considérons une aire  $z$  limitée par deux lignes de courant  $\psi = \text{const.}$ ; il lui correspond donc dans le plan  $w$  une bande limitée par deux parallèles à l'axe O $\varphi$ . Pour que ces aires se correspondent d'une façon uniforme il faut que cette bande ne renferme aucun point critique du radical à son intérieur. Nous prendrons donc successivement chacune des bandes  $\varphi\varphi'CC'$ ,  $CC'DD'$ ,  $DD'EE'$  pour domaine de  $w$ .

Ce qui nous conduira à trois cas différents. Nous considérerons d'abord le cas où le domaine de  $w$  est la bande  $CC'DD'$ ; puis celui où ce



domaine est la bande  $z\zeta'CC'$ ; enfin celui où ce domaine est  $DD'EE'$ .

Il faudra de plus, pour que la représentation puisse être conforme, que, dans le champ de l'intégration, la dérivée  $\frac{dz}{dw}$ , c'est-à-dire  $\zeta$ , ne puisse devenir nulle. Nous pourrions satisfaire à cette condition en choisissant convenablement la détermination de  $z$  de façon que, si le point critique  $w = -\infty$ , pour lequel  $\zeta = 0$ , est dans le champ d'intégration, il soit seulement sur la limite extrême de ce champ et, par suite, puisse être considéré comme extérieur.

#### IV.

*Domaine  $\zeta$  correspondant à la bande  $CC'DD'$ .* — Rendons-nous compte des propriétés du domaine  $\zeta$  répondant à la bande  $CC'DD'$  que nous avons découpée dans le plan  $w$ . Cherchons en particulier dans le plan  $\zeta$  la représentation des trajectoires  $\psi = \text{const.}$  comprises dans cette bande.

Remarquons à ce sujet que l'on a

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} - i \frac{\partial z}{\partial y};$$

d'où

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x} + i \frac{\partial z}{\partial y}}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}[v_x + i v_y]}{\frac{1}{2}V^2},$$

en désignant par  $V$  la vitesse du point considéré  $(x, y)$  du fluide et par  $v_x$  et  $v_y$  les projections de cette vitesse sur les axes  $Ox$  et  $Oy$ . Or nous avons posé  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ; il vient donc

$$\xi = \rho \cos \theta = \frac{2v_x}{V^2}, \quad \eta = \rho \sin \theta = \frac{2v_y}{V^2};$$

d'où

$$\rho = \frac{2}{V}, \quad \text{tang} \theta = \frac{v_y}{v_x}.$$

On voit que si l'on mène une droite du point  $\zeta = 0$  au point courant  $\zeta$ , l'inverse du rayon vecteur ainsi obtenu sera la moitié de la vitesse  $V$  au point  $(x, y)$  répondant à  $\zeta$ , et ce rayon vecteur sera parallèle à la tangente à la trajectoire au point  $(x, y)$ . L'étude des courbes du plan  $\zeta$  donnera donc déjà de précieuses indications sur les trajectoires véritables du fluide en mouvement.

*Étude des courbes  $\zeta$ .* — Pour trouver ces courbes du plan  $\zeta$ , partons de l'équation fondamentale

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{(\frac{1}{2})}{e^{-w}} = 0;$$

où  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ; il vient

$$\rho^2 e^{2i\theta} + \rho e^{-\varphi - i\psi + i\theta} + \lambda e^{\varphi + i\psi} = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2};$$

d'où

$$\rho^2 \cos 2\theta + \rho e^{-\varphi} \cos(\psi - \theta) + \lambda e^{+\varphi} \cos \psi = 0,$$

$$\rho^2 \sin 2\theta - \rho e^{-\varphi} \sin(\psi - \theta) + \lambda e^{+\varphi} \sin \psi = 0.$$

Éliminons  $\varphi$  pour avoir le faisceau des courbes du plan  $\zeta$  répondant aux diverses trajectoires  $\psi = \text{const.}$  Nous tirons de là

$$e^{-\varphi} = -\rho \frac{\sin(2\theta - \psi)}{\sin(\theta - 2\psi)},$$

$$e^{\varphi} = \frac{\rho^2}{\lambda} \times \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin(\theta - 2\psi)};$$

d'où l'équation du faisceau

$$\rho^2 = - \frac{\lambda \sin^2(\theta - 2\psi)}{\sin(\theta + \psi) \sin(2\theta - \psi)}$$

Nous avons indiqué dans des figures la forme de ces courbes,  $\psi$  prenant les valeurs les plus remarquables de  $\frac{2\pi}{3}$  à  $\frac{4\pi}{3}$  (fig. 2 à 6).

Fig. 2.

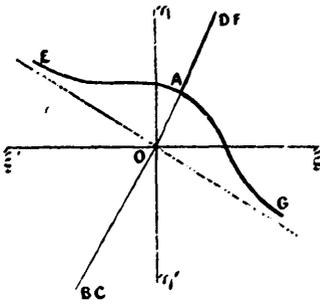
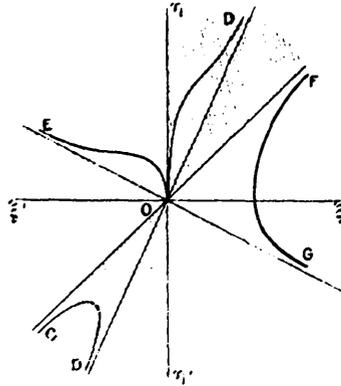
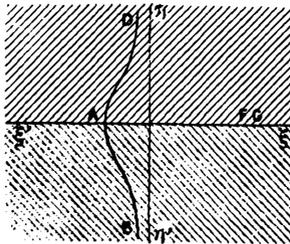


Fig. 3.



Nous avons marqué en trait fort les seules parties utiles de ces courbes. On doit supprimer en effet, comme ne convenant pas à la

Fig. 4.



question, certaines branches des courbes : 1° Car  $\varphi$  devant être réel,  $e^\varphi$  doit être positif; or  $e^\varphi = \frac{\rho^2}{\lambda} \times \frac{\sin(\theta + \psi)}{\sin(\theta - 2\psi)}$ . On ne doit donc prendre que les parties de ces courbes pour lesquelles l'inégalité

$$\sin(\theta + \psi) \sin(\theta - 2\psi) > 0$$

est satisfaite. Nous avons couvert de hachures les parties du plan où cette inégalité n'est pas vérifiée.

Fig. 5.

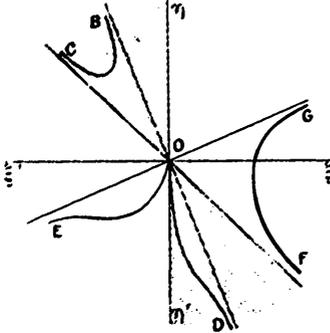
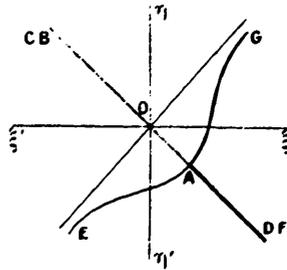


Fig. 6.



2° Et l'on doit laisser de côté la courbe qui passe par l'origine ( $\zeta = 0$  devant être évité).

On voit que c'est la seule branche FG qui correspond à la trajectoire cherchée. Dans le cas de  $\psi = 135^\circ$  (fig. 3), par exemple, c'est bien évident; pour les cas limites, tels que  $\psi = 120^\circ$ ,  $\psi = 240^\circ$ , on cherchera la branche utile sur la figure correspondant à une valeur de  $\psi$  voisine de  $120^\circ$  ou de  $240^\circ$  et l'on en conclura, par continuité, les fig. 2 et 6.

Remarquons que les courbes répondant à  $\psi = \psi_0$  et à  $\psi = 2\pi - \psi_0$  sont symétriques par rapport à l'axe O $\zeta$ . Cette symétrie fait présager une symétrie analogue des trajectoires par rapport à l'axe de la pesanteur.

On saisit ainsi la déformation continue des trajectoires et grâce à cette continuité nous pouvons limiter sans embarras le domaine  $\zeta$ , qui répond à la bande CC'DD' que nous envisageons dans le plan  $w$ .

Passons à la détermination analytique de ce domaine  $\zeta$ .

## V.

*Limites exactes de ce domaine. I. Première limite.* — Prenons la racine ou la détermination

$$2\zeta = -e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}},$$

qui pour  $\omega = -\infty$  ne donne pas  $\zeta = 0$ , tandis que la seconde racine le donnerait.

Pour  $\psi = \frac{2\pi}{3}$  on a

$$2\zeta = 2\xi + 2i\eta = -e^{-\varphi} e^{-\frac{2i\pi}{3}} - \sqrt{e^{-2\varphi - \frac{4i\pi}{3}} - e^{-\varphi + \frac{2i\pi}{3}}}.$$

Or

$$e^{\frac{2i\pi}{3}} = e^{i(2\pi - \frac{2\pi}{3})} = e^{-\frac{2i\pi}{3}},$$

d'où

$$(1) \quad 2\xi + 2i\eta = \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}\right) \left(-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\right).$$

Le radical sera réel si l'on a

$$e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}} > 0 \quad \text{ou} \quad e^{-3\varphi} > 1 \quad \text{ou} \quad \varphi < 0.$$

Nous aurons donc deux cas à distinguer :

*Premier cas* :  $\varphi < 0$ . — L'égalité (1) donne alors

$$2\xi = \cos \frac{2\pi}{3} \left(-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\right),$$

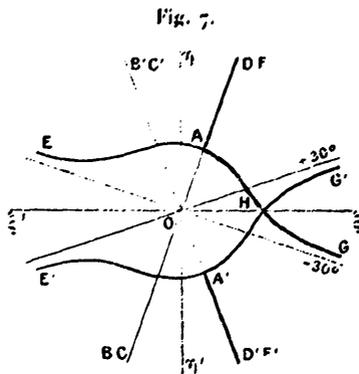
$$2\eta = -\sin \frac{2\pi}{3} \left(-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}\right).$$

On en déduit

$$\frac{\eta}{\xi} = -\operatorname{tang} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tang} 60^\circ,$$

ce qui indique que la portion correspondante de la trajectoire fluide sera une droite. D'ailleurs, le facteur  $-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}}$  est négatif, donc  $\xi$  et  $\eta$  sont positifs; pour  $\varphi = -\infty$ ,  $\xi$  et  $\eta$  sont infinis. On voit que cette portion de limite du domaine  $\zeta$  est la portion de droite DFA de la figure faite pour  $\psi = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$  et que nous reproduisons ici assemblée avec la figure répondant à  $\psi = \frac{4\pi}{3} = 240^\circ$  (fig. 7).

Deuxième cas :  $\varphi > 0$ . — L'égalité (1) se transforme, car le radical passe du réel à l'imaginaire en s'annulant et en changeant de signe.



Cette égalité devient

$$(2) \quad 2\xi + 2i\eta = \left( \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \left( -e^{-\varphi} + i \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}} \right),$$

d'où

$$2\xi = -e^{-\varphi} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}},$$

$$2\eta = e^{-\varphi} \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}}.$$

On en déduit

$$4(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{e^{-\varphi}}, \quad \text{ou} \quad 4\varphi^2 = \frac{1}{e^{-\varphi}} = \frac{16}{\sqrt{2}}.$$

Pour  $\varphi = +\infty$ , on a  $\xi = +\infty$ ,  $\eta = -\infty$  et

$$\frac{\eta}{\xi} = \cot \frac{2\pi}{3} = -\tan 30^\circ.$$

La limite correspondante du domaine  $\zeta$  est donc l'arc de courbe AG.

II. *Seconde limite.* — Des considérations toutes semblables nous donneront la limite du domaine  $\zeta$  pour  $\psi = \frac{4\pi}{3}$ . Pour abrégé, remarquons qu'on passe de la première limite à la seconde en changeant  $i$

en  $-i$ , car

$$e^{-\frac{\lambda i \pi}{2}} = e^{-i\left(2\pi - \frac{2\pi}{2}\right)} = e^{\frac{\lambda i \pi}{2}}.$$

On aura donc une limite  $F'A'G'$  symétrique de la précédente par rapport à l'axe  $O\xi$ .

*Remarques.* — On voit que les courbes  $FG$  et  $F'G'$ , qui limitent en partie le domaine  $\zeta$  à considérer, se coupent en  $H$  sur l'axe des  $\xi$ . Les trajectoires correspondantes du fluide auront des tangentes parallèles à  $Ox$  aux points répondant à  $H$ . Ce fait est évidemment général. Chaque fois que les représentations dans le plan  $\zeta$  de deux trajectoires se couperont en un point  $H$ , les trajectoires véritables auront aux points  $H$ , et  $H'$ , répondant à  $H$  sur chacune des lignes de courant, des tangentes parallèles entre elles.

Pour que les deux trajectoires ne se traversent pas, il faut que, en chacun des points de l'une quelconque des deux trajectoires, la direction de la vitesse soit unique; et c'est suffisant, car, s'il en est ainsi, les deux trajectoires se touchent tout au plus sans se traverser. Il faut donc que, à chaque valeur de  $\varphi$ , pour  $\psi = \psi_0$ , réponde une seule valeur de  $\tan\theta$  ou de  $\theta$  à  $\pi$  près. Il faut donc que le long de la courbe dont l'équation est

$$\rho^3 = -\frac{\lambda \sin^2(\theta - 2\psi_0)}{\sin(\theta + \psi_0) \sin(2\theta - \psi_0)},$$

il y ait une seule valeur de  $\theta$  (à  $\pi$  près) répondant à chaque point, c'est-à-dire que la portion utile de cette courbe n'ait pas l'origine pour point multiple. C'est ce qui a lieu pour la courbe conservée  $FG$ . Nous retrouvons ainsi, par des considérations purement mécaniques, la condition donnée par la représentation conforme, à savoir que le point  $\zeta = 0$  doit être évité.

Si, dans le mouvement d'un fluide on était amené à prendre pour les courbes à conserver dans le plan  $\zeta$  des arcs ayant  $\zeta = 0$  pour point multiple, plusieurs trajectoires du fluide viendraient se couper en un même point  $Z$  répondant à  $\zeta = 0$ . En ce point  $Z$  la vitesse  $V$  serait infinie, car  $\rho = \frac{2}{V}$ . Si ce point  $Z$  pouvait être à distance finie, on devrait le considérer comme un *gouffre* ou comme une *source*.

En général, l'équation fondamentale

$$\zeta^2 - S'(w)\zeta + \frac{\frac{K}{2}S(w) + K}{\frac{K}{2}S(w) + K} = 0,$$

n'admet la racine  $\zeta = 0$  que pour  $\frac{K}{2}S(w) + K = \infty$ , c'est-à-dire pour un pôle  $w$  de  $S(w)$  et, par suite, de  $S'(w)$ . Il peut n'y avoir de pôle de la fonction  $S(w)$  qu'à distance infinie, comme pour  $S(w) = e^{-w} + z$ . Si le pôle est à distance finie, le point correspondant à ce pôle est une source ou un gouffre.

Une seule des déterminations de  $\zeta$  devient nulle en ce pôle de  $S(w)$ , la somme  $S'(w)$  des racines n'étant pas nulle, mais infinie : la deuxième détermination est infinie et répond à  $V = 0$ , *région stagnante*. Ce point peut, dans cette seconde détermination, répondre à une région finie ou même infinie du plan  $z$ , car module  $\frac{dz}{dw}$ , c'est-à-dire

$$\rho = \frac{dz}{dw} = \infty,$$

$\frac{dz}{dw}$  étant le rapport de similitude des plans  $z$  et  $w$ .

## VI.

*Domaine  $z$  correspondant : Première trajectoire limite.* — Faisons correspondre l'origine ( $x = 0, y = 0$ ) au point  $w$ ,

$$\left(\zeta = 0, \psi = \frac{2\pi}{3}\right).$$

Nous aurons, pour représenter la fonction  $z$  le long de la limite CC' de la bande CDC'D', la formule

$$2z = 2x + 2iy = \int_{w_1}^{w'} \left(-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - \frac{1}{e^{-w}}}\right) dw.$$

1° Sur  $w, C'$  où  $\varphi < 0$ ,  $\psi = \frac{2\pi}{3}$ , nous aurons donc

$$2z = 2x + 2iy = \int_0^{\varphi} \left( -e^{-\varphi - \frac{2i\pi}{3}} - \sqrt{e^{-2\varphi - \frac{4i\pi}{3}} - \frac{1}{e^{-\varphi - \frac{2i\pi}{3}}}} \right) d\varphi,$$

ou, en nous aidant de réductions faciles déjà indiquées dans le paragraphe précédent,

$$2x = \cos \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \left( -e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}} \right) d\varphi,$$

$$2y = -\sin \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \left( -e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}} \right) d\varphi.$$

représentant la droite

$$y = x \operatorname{tang} 60^\circ.$$

Pour  $\varphi = -\infty$ , en quel point de cette droite est le mobile? Les coordonnées sont

$$2x' = -\frac{1}{2} \left( e^{-\varphi} - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}} d\varphi \right),$$

$$2y' = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left( e^{-\varphi} - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - \frac{1}{e^{-\varphi}}} d\varphi \right),$$

et prennent la forme  $\infty - \infty$  pour  $\varphi = -\infty$ . On peut écrire ces expressions, par exemple, la première

$$-4x' = e^{-\varphi} \left( 1 - \frac{\int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}} d\varphi}{e^{-\varphi}} \right).$$

Or

$$\left( \frac{\int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}} d\varphi}{e^{-\varphi}} \right)_{\varphi=-\infty} = \left( \frac{\sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}}}{-e^{-\varphi}} \right)_{\varphi=-\infty} = -(\sqrt{1 - e^{3\varphi}})_{\varphi=-\infty} = -1.$$

d'où

$$-4x' = 2(e^{-\varphi})_{\varphi} - x = +x.$$

On a donc, pour  $\varphi = -\infty$ ,  $x' = -x$ .

On verra de la même façon que  $y' = -y$  pour  $\varphi = -\infty$ . Le mobile apparaît donc dans le troisième quadrant; ses vitesses  $v_x$  et  $v_y$  sont positives; le mobile s'avance jusqu'à l'origine sur la droite dont l'équation est  $y = x\sqrt{3}$ . Cette première partie de la trajectoire peut être assimilée à une paroi plane; pour la distinguer, nous dirons que le reste de la trajectoire est la portion libre; cherchons-la.

2° Sur  $\omega, C$  où  $\varphi > 0$ ,  $\psi = \frac{2\pi}{3}$  nous aurons

$$2z = 2x + 2iy = \left( \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \int_0^{\varphi} \left( -e^{-\varphi} + i \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}} \right) d\varphi,$$

ou, en se servant de réductions déjà indiquées plus haut

$$2x = -\cos \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} e^{-\varphi} d\varphi + \sin \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}} d\varphi,$$

$$2y = \sin \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} e^{-\varphi} d\varphi + \cos \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}} d\varphi,$$

ou

$$2x = (e^{-\varphi} - 1) \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}} d\varphi,$$

$$2y = -(e^{-\varphi} - 1) \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{e^{-\varphi}} - e^{-2\varphi}} d\varphi.$$

Cette portion libre de la trajectoire part du point (0, 0) tangente à la droite  $y = x \operatorname{tang} 60^\circ$ , au-dessus de l'axe des  $x$ . C'est ce qu'on vérifie sur la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} = \frac{e^{-\varphi} \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}}{-e^{-\varphi} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}}.$$

Il serait aisé, comme nous l'indiquons brièvement dans une Note, à

la fin de ce travail, de ramener aux quadratures l'équation entre  $x$  et  $y$  de cette portion libre de la trajectoire,  $\varphi$  étant éliminé. Mais ce calcul n'est pas nécessaire et nous allons chercher directement, à l'aide des expressions précédemment écrites de  $x$  et de  $y$  en fonction de  $\varphi$ , la forme générale de cette trajectoire.

On a

$$2 \frac{dx}{d\varphi} = -e^{-\varphi} \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} = \frac{1}{2} e^{-\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

$$2 \frac{dy}{d\varphi} = +e^{-\varphi} \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\varphi} - \frac{1}{2} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}.$$

On voit que  $\frac{dy}{d\varphi}$  peut s'annuler pour une valeur de  $\varphi$ , tandis qu'il ne peut en être de même de  $\frac{dx}{d\varphi}$ . La valeur de  $\varphi$  qui annule  $\frac{dy}{d\varphi}$  est racine de l'équation

$$\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\varphi} = \frac{1}{2} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

d'où l'on tire

$$e^{-3\varphi} = \frac{1}{3},$$

d'où

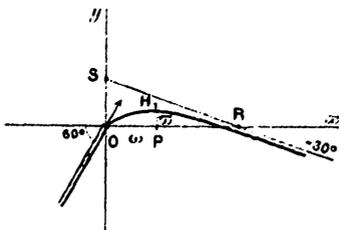
$$\varphi = \frac{1}{3} \log 3.$$

Cette valeur de  $\varphi$  est bien dans le champ que nous parcourons pour la trajectoire libre.  $\frac{dx}{d\varphi}$  est toujours positif. On voit donc que, lorsque  $x$  croît de 0 à  $+\infty$ ,  $\varphi$  croît constamment dans le même sens; il croît d'ailleurs jusqu'à  $+\infty$ . Au point de vue du sens de la variation, on peut donc remplacer la variable  $\varphi$  par  $x$ , qui varie dans le même sens, et l'on obtient le Tableau suivant

$x$ .	$\frac{dy}{dx}$ .	$y$ .
0	$\sqrt{3}$	0
	+	croît
$\omega$	0	$\pi$ maximum
	-	décroît
$+\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\infty$

où  $\omega$  désigne la valeur de  $x$  répondant à  $\zeta = \frac{1}{3} \log 4$  et  $\varpi$  la valeur correspondante de  $y$ . De là on déduit la forme générale de la trajectoire (fig. 8).

Fig. 8.



Cherchons l'équation de l'asymptote SR à cette trajectoire. Le coefficient angulaire est la valeur de  $\frac{dy}{dx}$  pour  $\zeta = +\infty$ , ce qui donne  $\cot \frac{2\pi}{3}$ . L'angle ORS est donc de  $30^\circ$ . L'ordonnée à l'origine OS est

$$OS = \lim_{\zeta \rightarrow +\infty} \left( \frac{1 - e^{-\zeta}}{2 \sin \frac{2\pi}{3}} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Dans une Note, à la fin de ce travail, nous ferons le calcul numérique des longueurs  $\omega$  et  $\varpi$ . Nous trouverons

$$\omega = 0,238854, \quad \varpi = 0,075771.$$

## VII.

*Seconde trajectoire limite. Veine liquide. Pression.* — Cherchons la fonction  $z$  le long de la seconde limite DD' de la bande CC'DD'.

Nous partagerons l'intégrale  $z$  en deux; la première répondra à  $\int_{w_1}^{w_2}$  le long de l'axe des  $\psi$ , la seconde sera  $\int_{w_2}^{w_1}$  le long de DD'. Nous aurons ainsi pour la nouvelle limite

$$2z = 2x + 2iy \\ = \int_{w_1}^{w_2} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w'}}) dw + \int_{w_2}^{w_1} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^{w'}}) dw.$$

Un calcul que nous indiquerons à la fin de ce Mémoire donne

$$\int_{w_1}^{w_2} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^w}) dw = i \times 3,982.$$

Il vient donc, le long de DD',

$$\begin{aligned} 2z &= 2x + 2iy \\ &= i \times 3,982 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( -e^{-z} e^{-i\frac{\pi}{3}} - \sqrt{e^{-2z} e^{-\frac{2i\pi}{3}} - e^z e^{i\frac{\pi}{3}}} \right) dz \end{aligned}$$

ou, après réduction,

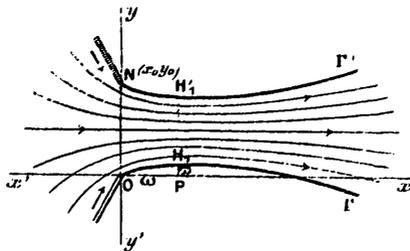
$$2z = i \times 3,982 + \left( \cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-e^{-z} - \sqrt{e^{-2z} - e^z}) dz$$

ou

$$2z = i \times 3,982 + \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \int_0^{\frac{\pi}{3}} (-e^{-z} - \sqrt{e^{-2z} - e^z}) dz,$$

on voit donc que, en laissant pour un instant de côté le terme constant  $i \times 3,982$ , cette expression de  $2z$  ne diffère de celle de la première

Fig. 9.



limite que parce que  $i$  est changé en  $-i$ . On obtiendra donc une trajectoire symétrique de la première. Pour  $\varphi = 0$ , on a

$$2x_0 = 0, \quad 2y_0 = 3,982;$$

c'est le point N où la partie rectiligne de cette trajectoire se raccorde avec la partie courbe. Ce point étant ainsi bien déterminé, nous pou-

vous tracer la trajectoire qui y passe et nous obtenons la *fig. 9*.

On a donc une espèce d'ajutage convergent dont l'angle au sommet vaut  $120^\circ$  : le fluide sort de cet ajutage, éprouve une contraction maxima en  $H, H'$ , puis se dilate;  $H, H'$ , est la *section contractée*.

D'ailleurs le long de ces trajectoires  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  la pression n'est pas constante. Ce ne sont donc pas des surfaces libres au sens étroit que nous avons attaché à ce mot dans nos Mémoires précédents; et, en effet, les équations de la surface libre dans ce fluide sont bien différentes de celles de ces trajectoires, ainsi que le montrent les équations rappelées au début de ce travail. Il faudrait donc imaginer que cette veine fluide débouche dans un autre fluide et que les parties extérieures à la veine appartiennent à cet autre fluide. Ce fluide extérieur n'est pas en équilibre, car la pression le long de  $\Gamma$  ni de  $\Gamma'$  n'est la pression hydrostatique; il est donc animé, par contact avec la veine, d'un mouvement qui, par continuité, doit se raccorder (au sens de la vitesse près) avec celui de la veine; nous disons au sens de la vitesse près, car la pression ne dépend que du carré de la vitesse; de pareilles discontinuités de vitesse sont fréquentes dans les courants tranquilles découpés par des obstacles en deux ou trois zones contiguës de vitesses contraires.

*Pression.* — Voici le calcul de la pression le long de  $\Gamma$ . Pour plus de généralité, faisons ce calcul en supposant que l'équation en  $\zeta$  qui définit le mouvement du fluide soit

$$\zeta^2 + e^{-m\zeta} + \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{e^{-m}} = 0.$$

• Ensuite nous ferons  $m = 1$ . D'ailleurs  $m = \frac{16}{g}$  en réalité.

Le long de la partie libre de la trajectoire  $\Gamma$  on a

$$\rho(\zeta^2 + \eta^2) = \rho^2 = \frac{16}{V^2} = \frac{m}{e^{-\zeta}} \quad [\text{Voir } \S \text{ V}];$$

d'où

$$V^2 = \frac{16}{m} e^{-\zeta} \quad \text{et} \quad V_0^2 = \frac{16}{m} (e^{-\zeta})_{\zeta=0} = \frac{16}{m},$$

$V_0$  étant la vitesse au point  $x = 0, y = 0$ ; en ce point la pression est  $p_0$ .

L'équation de la pression est d'ailleurs

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} V^2 - gx = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} V_0^2$$

( $\rho$  densité du liquide). Cette équation devient donc

$$\frac{p}{\rho} + \frac{16}{2m} e^{-2z} - gx = \frac{p_0}{\rho} + \frac{16}{2m}$$

ou, en remplaçant  $m$  par  $\frac{16}{g}$ ,

$$\frac{p - p_0}{\rho} + \frac{1}{2} g(e^{-2z} - 1) - gx = 0$$

ou, en divisant par  $g$  et remplaçant  $x$  par sa valeur en fonction de  $z$ ,

$$\text{à savoir } 2x = -\frac{1}{2}(e^{-2z} - e^{-2z_0}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{m}{e^{-2z}} - e^{-2z}} dz,$$

$$\frac{p - p_0}{2g} = -\frac{3}{4}(e^{-2z} - e^{-2z_0}) + \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{z_0}^z \sqrt{\frac{m}{e^{-2z}} - e^{-2z}} dz.$$

Pour  $m = 1$ , c'est-à-dire pour  $g = 16$ ,  $z_0 = 0$ , on a

$$\frac{p - p_0}{4g} = -3(e^{-2z} - 1) + \sqrt{3} \int_0^z \sqrt{\frac{1}{e^{-2z}} - e^{-2z}} dz.$$

On peut encore exprimer  $p$  en fonction de  $x$  et  $y$ , en éliminant  $z$ : ce qui donne

$$\frac{p - p_0}{2g} = x - \frac{1}{2}(e^{-2z} - e^{-2z_0}) = x + \frac{1}{2}(x + y\sqrt{3})$$

ou

$$\frac{p - p_0}{2g} = \frac{3x + y\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(x\sqrt{3} + y).$$

Pour  $m = 1$ , c'est-à-dire  $g = 16$ , on a

$$\frac{p - p_0}{8g} = 3x + y\sqrt{3}.$$

La variation de  $p$  le long de la partie libre de la trajectoire  $\Gamma$  résulte des calculs précédents. On a, en effet,

$$\frac{1}{\mu g} \frac{dp}{dz} = \frac{3}{4} e^{-z} + \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{m}{e^{-z}} - e^{-z}}.$$

Cette formule montre que  $\frac{dp}{dz}$  est positif constamment lorsque  $z$  croît de 0 à  $+\infty$ , c'est-à-dire tout le long de la trajectoire libre  $\Gamma$ . Pour  $z = +\infty$ , on a d'ailleurs  $p = +\infty$ . On vérifie ces résultats en remarquant que la droite  $\frac{3x + y\sqrt{3}}{2} = -\frac{p_0}{\mu g}$  (répondant à  $p = 0$ ) ne coupe pas la partie libre de la trajectoire  $\Gamma$ .

Le long de la paroi on a

$$4(\zeta^2 + \tau_1^2) = 4\zeta^2 = \frac{16}{\sqrt{3}} = (e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - e^{\frac{2z}{\sqrt{3}}}})^2;$$

d'où

$$\frac{p - p_0}{\mu} + \frac{8}{(e^{-z} + \sqrt{e^{-2z} - e^{\frac{2z}{\sqrt{3}}}})^2} = 8 + 4 \left[ e^{-z} - 1 - \int_0^z \sqrt{e^{-2z} - e^{\frac{2z}{\sqrt{3}}}} dz \right] = 0;$$

or, pour  $x = -\infty$ , on a  $V = 0$ , d'où  $p = -\infty$ . Ainsi la pression diminue de  $p_0$  à 0 à mesure qu'on s'avance sur la paroi du côté des  $x$  négatifs, puis la pression devient négative et se change en traction ou succion; mais de ce côté la rupture n'est pas facile à cause des parois qui tiennent les parties assemblées.

### VIII.

*Mouvement répondant à la bande  $z\zeta'CC'$ .* — Étudions de même le mouvement du fluide répondant à la bande  $z\zeta'CC'$  du plan  $\omega$ . Grâce aux considérations précédentes nous pourrons abrégier beaucoup les explications de ce nouveau problème.

1° Pour la limite inférieure nous avons  $\psi = 0$ , d'où

$$2\zeta = -e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^w}$$

donne

De là si  $\zeta < 0$

$$2\zeta = -e^{-\zeta} - \sqrt{e^{-2\zeta} - e^{\zeta}},$$

$$2\zeta = -e^{-\zeta} - \sqrt{e^{-2\zeta} - e^{\zeta}},$$

$$2\zeta = 0,$$

qui représentent  $O\zeta$  et doivent correspondre à une paroi verticale le long de laquelle la vitesse est parallèle à  $Ox$  et négative.

Si  $\zeta > 0$ , on a

$$2\zeta = -e^{-\zeta},$$

$$2\zeta = +\sqrt{e^{\zeta} - e^{-2\zeta}}.$$

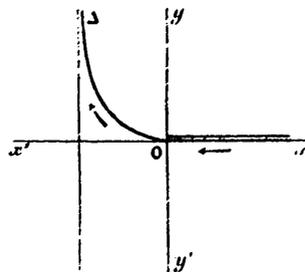
A cette limite de  $\zeta$  répondra une *surface libre* du domaine de  $z$ , la pression le long de cette surface étant constante. On en tire

$$2x = e^{-\zeta} - 1,$$

$$2y = \int_0^{\zeta} \sqrt{\frac{1}{e^{\zeta}} - e^{-2\zeta}} d\zeta,$$

en faisant correspondre le point  $x = 0$ ,  $y = 0$  à  $\zeta = 0$ . Cette surface

Fig. 10.



libre et la paroi sont représentées *fig. 10*. L'équation différentielle de la surface libre est

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{1 - (2x + 1)^2}{(2x + 1)^2}}.$$

Pour  $\zeta = +\infty$ , on a  $2x = -1$ ,  $y = +\infty$ , d'où l'asymptote  $x = -\frac{1}{2}$ .

La pression le long de cette surface libre est donnée par la formule

$$\frac{p}{\mu} + \frac{1}{2} V^2 - gx = \frac{p_0}{\mu} + 8;$$

or

$$4(\xi^2 + \eta^2) = 4\rho^2 = \frac{16}{\sqrt{z}} = \frac{1}{e^{-\varphi}};$$

d'où

$$V^2 = 16e^{-\varphi}$$

et ici  $2x = e^{-\varphi} - 1$ , d'où

$$\frac{p}{\mu} + 8e^{-\varphi} - 8(e^{-\varphi} - 1) = \frac{p_0}{\mu} + 8;$$

d'où  $p = p_0$  tout le long de la partie courbe de cette trajectoire.

2° Pour la limite supérieure CC' du domaine de  $w$  nous avons

$$2\xi + 2i\eta = \left( \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) (-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi}} - e^{\varphi}).$$

Pour  $\varphi < 0$ , nous en tirons

$$2\xi = \cos \frac{2\pi}{3} [-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi}} - e^{\varphi}],$$

$$2\eta = -\sin \frac{2\pi}{3} [-e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi}} - e^{\varphi}],$$

qui correspondent à une paroi inclinée à  $60^\circ$  sur l'axe  $Ox$ ;  $\xi$  et  $\eta$  pour  $\varphi = -\infty$  sont infinis positifs. L'équation d'une parallèle menée à cette paroi par l'origine des coordonnées est

$$\frac{y}{x} = -\operatorname{tang} \frac{2\pi}{3} = \operatorname{tang} 60^\circ.$$

C'est la paroi déjà trouvée pour la trajectoire  $\Gamma$  mais transportée, comme nous allons voir, parallèlement à elle-même. Pour avoir l'intégrale  $2z$  relative à cette paroi, il nous faut en effet former la somme suivante

$$\int_{w_0}^{w_1} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w}} - e^w) dw + \int_{w_1}^w (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w}} - e^w) dw.$$

Un calcul que nous indiquerons en Note, à la fin de ce travail (voir Note II, p. 153), donne

$$\int_{w_0}^{w_1} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^w}) dw = -3,45 - i \times 1,9918.$$

On a donc, pour un point de cette paroi

$$2x = \cos \frac{2\pi}{3} \left[ e^{-\varphi} - 1 - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}} d\varphi \right] - 3,45,$$

$$2y = -\sin \frac{2\pi}{3} \left[ e^{-\varphi} - 1 - \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{-2\varphi} - e^{\varphi}} d\varphi \right] - 1,9918.$$

Elle se termine donc au point  $2x_0 = -3,45$ ,  $2y_0 = -1,9918$ .

Pour  $\varphi > 0$ , on a

$$2\xi = -\cos \frac{2\pi}{3} e^{-\varphi} - \sin \frac{2\pi}{3} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

$$2\eta = \sin \frac{2\pi}{3} e^{-\varphi} - \cos \frac{2\pi}{3} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}$$

ou bien

$$2\xi = \frac{1}{2} e^{-\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}},$$

$$2\eta = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-\varphi} + \frac{1}{2} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}.$$

On voit que  $\eta$  est constamment positif tandis que  $\xi$  change de signe en s'annulant pour  $\varphi = \frac{1}{3} \log \frac{4}{3} > 0$ ; positif pour  $\varphi = 0$ ,  $\xi$  s'annule, devient négatif et est égal à  $-\infty$  pour  $\varphi = +\infty$ . On en déduit

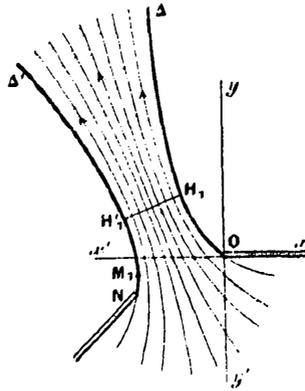
$$2x = -3,45 + \cos \frac{2\pi}{3} (e^{-\varphi} - 1) - \sin \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi,$$

$$2y = -1,9918 - \sin \frac{2\pi}{3} (e^{-\varphi} - 1) - \cos \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi.$$

De là la trajectoire  $\Delta'$  représentée *fig. 11* qui, avec la courbe  $\Delta$  déjà construite, limite le fluide.

La trajectoire répondant à  $\psi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$  est rectiligne et est axe de symétrie de la veine liquide. On voit que c'est, en définitive, la figure

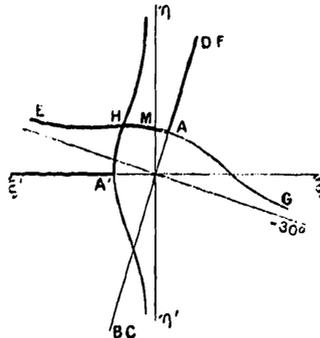
Fig. 11.



correspondant à la bande  $CC'DD'$  après rotation de  $120^\circ$  autour du point O.

C'est ce que faisait prévoir la construction du domaine  $\zeta$  répondant à la bande  $\varphi\varphi'CC'$ . Ce domaine est représenté *fig. 12* (trait fort). On

Fig. 12.



l'obtient facilement en assemblant la figure déjà construite pour  $\psi = 120^\circ$  et la figure analogue qui répond à  $\psi = 0$ , et en tenant compte des signes trouvés pour  $\xi$  et  $\eta$  lorsque  $\varphi = \pm \infty$ . Aux points A et A' répondent les points O et N de la figure précédente, points où se terminent les parois; au point H répondent les points  $H_1, H'_1$ , où les

tangentes sont parallèles et inclinées à  $120^\circ$  sur l'axe des  $x$ ; enfin au point M, où la branche AE' perce l'axe des  $\xi$ , répond le point M, de la trajectoire  $\Delta'$ , où la tangente est parallèle à l'axe des  $y$ , c'est-à-dire horizontale; à cause de la symétrie générale, II, et H', sont symétriques par rapport à l'axe de la veine et II, H', constitue la section contractée.

Le long de  $\Delta'$  on a  $4(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{e^{-\varphi}}$ , d'où  $V^2 = 16e^{-\varphi}$ . La pression le long de  $\Delta'$  n'est pas constante comme le long de  $\Delta$ ; elle est donnée par l'équation

$$\frac{p}{\mu} + 12e^{-\varphi} + 4\sqrt{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi = \frac{p_0}{\mu} = 15,6.$$

Pour  $\varphi = +\infty$ ,  $p = -\infty$ ; la pression à une certaine distance de N se change donc en traction.

*Mouvement répondant à la bande DD'EE'.* — Il est clair que le mouvement du fluide répondant à la bande DD'EE' s'obtiendra de la même manière et donnera une figure analogue où  $y$  sera changé en  $-y$ .

*Coefficient de contraction de la veine.* — Le coefficient de contraction, dans le premier exemple que nous venons d'étudier, est

$$\frac{II, H'}{ON} = c = 0,92.$$

Il en est de même dans les deux autres cas. D'après le calcul de la Note III (p. 156), ce coefficient de contraction est indépendant de l'intensité  $g$  de la force constante qui agit sur le liquide; dans le cas de  $g = 9,808$  on a donc encore  $c = 0,92$ ; la forme de la veine fluide reste la même, quel que soit  $g$ ; on doit seulement en multiplier toutes les dimensions par  $\sqrt[3]{m}$  ou  $\sqrt[3]{\frac{16}{g}}$ .

NOTE I.

CALCUL DE  $\omega$  ET DE  $\pi$ .

Nous allons d'abord calculer

$$Z = \int_0^{\varphi_1} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi, \quad \text{ou} \quad \varphi_1 = \frac{1}{3} \log 4.$$

Posons

$$e^{-\varphi} = u,$$

d'où

$$\varphi = -\log u, \quad d\varphi = -\frac{du}{u}, \quad \varphi > 0, \quad \text{donc} \quad u < 1.$$

Il vient

$$-Z = \int_1^{u_1} \sqrt{\frac{1}{u} - u^2} \frac{du}{u} = \int_1^{u_1} \frac{\sqrt{1-u^3}}{\sqrt{u^3}} du.$$

Développons  $\sqrt{1-u^3}$  (module  $u < 1$ ) en série. On a

$$(1-u^3)^{\frac{1}{2}} = 1 - C_1 u^3 - \dots - C_n u^{3n} - \dots,$$

où

$$C_q = -\left(1 - \frac{3}{1}\right)\left(1 - \frac{3}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{3}{q}\right) > 0;$$

on aura donc

$$\frac{(1-u^3)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} = u^{-\frac{3}{2}} - C_1 u^{3-\frac{3}{2}} - \dots - C_n u^{3n-\frac{3}{2}} - \dots,$$

d'où

$$F(u) = \int \frac{(1-u^3)^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}} du = C + \frac{u^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} - \dots - C_n \frac{u^{3n-\frac{3}{2}+1}}{3n-\frac{3}{2}+1} - \dots$$

Pour  $\varphi = \frac{1}{3} \log 4 = \log 4^{\frac{1}{3}}$ , on a

$$u = u_1 = 4^{-\frac{1}{3}},$$

d'où

$$F(u_1) = C - 4^{\frac{1}{6}} D,$$

en posant

$$D = \frac{1}{\binom{1}{2}} + C_1 \frac{4^{-1}}{3 - \frac{1}{2}} + \dots + C_n \frac{4^{-n}}{3n - \frac{1}{2}} + \dots$$

On a d'ailleurs

$$F(1) = C + \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} - \dots - C_n \frac{1}{3n - \frac{1}{2}} = C - E,$$

en posant

$$E = \frac{1}{\binom{1}{2}} + \frac{C_1}{3 - \frac{1}{2}} + \dots + \frac{C_n}{3n - \frac{1}{2}} + \dots$$

On aura donc

$$(1) \quad -Z = \int_1^{u_1} = F(u_1) - F(1) = C - 4^{\frac{1}{6}} D - C + E = E - 4^{\frac{1}{6}} D,$$

d'où

$$Z = \frac{4^{\frac{1}{6}} - 1}{\binom{1}{2}} + \frac{C_1}{3 - \frac{1}{2}} \left( 4^{-1 + \frac{1}{6}} - 1 \right) + \dots + C_n \frac{4^{-n + \frac{1}{6}} - 1}{3n - \frac{1}{2}} + \dots$$

Nous utiliserons la formule (1) en calculant d'abord D, puis E.

*Calcul de D.* — Un calcul simple donne pour les coefficients  $C_n$

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{2^3}, \quad C_3 = \frac{1}{2^5}, \quad C_4 = \frac{5}{2^7}, \quad C_5 = \frac{7}{2^8},$$

$$C_6 = \frac{21}{2^{10}}, \quad C_7 = \frac{33}{2^{11}}, \quad C_8 = \frac{33 \times 13}{2^{13}}, \quad \dots;$$

on a donc

$$D = \frac{1}{\binom{1}{2}} + \frac{\binom{1}{2}}{3 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2^3} \frac{1}{4^2} - \frac{1}{6 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^5} \frac{1}{4^3} - \frac{1}{9 - \frac{1}{2}} + \dots,$$

ou

$$D = 2 + \frac{1}{20} + \frac{1}{2^3 \cdot 4^2} \times \frac{2}{11} + \frac{2}{2^5 \cdot 4^3 \cdot 17} + \dots,$$

ou

$$D = 2 + 0,05 + 0,0015 + R = 2,0515 + R.$$

Je dis que l'on a

$$R < 0,001.$$

En effet,

$$R_q^p = \frac{C_q}{4^q \left(3q - \frac{1}{2}\right)} + \dots < \frac{C_q}{3q - \frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{4^q} + \frac{1}{4^{q+1}} + \dots \right],$$

ou

$$\frac{C_q}{3q - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{4^q} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}},$$

ou

$$R_q^p < \frac{8C_q}{(6q-1)4^q \times 3}.$$

Pour  $q = 1$ , on a donc

$$R < \frac{8C_1}{23 \cdot 4^1 \cdot 3} \quad \text{ou} \quad \frac{8 \cdot 5}{2^5 \cdot 23 \cdot 3^2 \cdot 3} \quad \text{ou} \quad \frac{10}{2^{13} \cdot 23^2 \cdot 3} < \frac{1}{10^3},$$

comme on le voit en prenant les logarithmes des deux membres. On a donc

$$D = 2,052,$$

à moins de  $\frac{1}{10000}$  près.

*Calcul de E.* — On a

$$E = \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^3} \times \frac{1}{6 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{9 - \frac{1}{2}} + \frac{2}{2^7} \times \frac{1}{12 - \frac{1}{2}} + R'.$$

ou

$$E = 2 + 0,2 + 0,022727 + 0,00735 + 0,00067 + R' = 2,230747 + R'.$$

Calculons une limite supérieure de  $R'$ . On a, en général,

$$R' = R_5^E = \frac{C_5}{3.5 - \frac{1}{2}} + \frac{C_6}{3.6 - \frac{1}{2}} + \dots < \frac{1}{3.5 - \frac{1}{2}} [C_5 + C_6 + \dots].$$

ou

$$\frac{2}{29} (1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4);$$

car, si dans le développement de  $(1 - u^2)^{\frac{1}{2}}$  nous faisons  $u = 1$ , il vient

$$0 = 1 - C_1 - C_2 - \dots - C_n - \dots,$$

d'où

$$C_5 + C_6 + \dots = 1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4.$$

On a donc

$$R' < \frac{2}{29} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} \right) \right]$$

ou

$$\frac{2 \times 0,2734}{29} < 0,018.$$

On a donc

$$E = 2,245,$$

à moins de  $\frac{2}{10^2}$  près et probablement à moins de  $\frac{1}{10^2}$  près.

*Calcul de Z.* — On a encore à calculer  $4^{\frac{1}{6}}$ , ce qui donne 1,26 (par excès). On a donc enfin

$$4^{\frac{1}{6}} D = 2,5830,$$

et

$$Z = 2,5830 - 2,245 = 0,338.$$

$$Z = 0,338.$$

*Calcul de  $\omega$  et de  $\sigma$ .* — On a

$$\begin{cases} 2\omega = (e^{-\varphi_1} - 1) \left( -\frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} Z, \\ 2\sigma = (e^{-\varphi_1} - 1) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} Z, \end{cases}$$

où

$$e^{-\varphi_1} = 4^{-\frac{1}{2}} = 0,63,$$

d'où

$$e^{-\varphi_1} + 1 = 0,37;$$

on a donc

$$\begin{cases} 2\omega = 0,47770, \\ 2\varpi = 0,1514, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \omega = 0,23885, \\ \varpi = 0,0757. \end{cases}$$

*Coefficient de contraction.* — C'est le rapport de la section contractée à l'orifice, c'est-à-dire

$$\frac{II, II_1}{ON} = \frac{ON - 2\varpi}{ON} = 1 - \frac{2\varpi}{ON} = c.$$

Or (voir Note II)

$$ON = \frac{3,982}{2} = 1,991,$$

d'où

$$c = \frac{1,991 - 0,151}{1,991} = \frac{1,84}{1,99} = 0,92.$$

NOTE II.

CALCUL DE  $\int_{w_1}^{w_2} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^w}) dw$ , ET  $\int_{w_1}^{w_2} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^w}) dw$ .

A. Calculons d'abord

$$I_p^q = \int_p^q \sqrt{e^{-2w} - e^w} dw.$$

En faisant le changement de variable  $e^{-w} = u$ , il vient

$$I_p^q = - \int_{p'}^q \sqrt{1 - \frac{1}{u^3}} du, \quad p' = e^{-p}, \quad q' = e^{-q}.$$

Or

$$\left(1 - \frac{1}{u^3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{\frac{3}{2}}{1} - 1\right) u^{-3} - \dots - C_n u^{-3n} - \dots$$

d'où

$$\int \left(1 - \frac{1}{u^3}\right)^{\frac{1}{2}} du = \text{const.}$$

$$+ u - \left(\frac{\frac{3}{2}}{1} - 1\right) \frac{u^{-2+1}}{-3+1} - \dots - C_n \frac{u^{-3n+1}}{-3n+1} - \dots,$$

d'où

$$\begin{aligned} -I'_p &= (q' - p') + \left(\frac{\frac{3}{2}}{1} - 1\right) \frac{q'^{-2+1} - p'^{-2+1}}{3-1} + \dots \\ &+ \frac{C_n}{3n-1} (q'^{-3n+1} - p'^{-3n+1}) + \dots \end{aligned}$$

Cela posé :

$I'''_{\omega_1} = (\alpha - \beta)P$ . — 1° Supposons d'abord  $p = \omega_1$ , et  $q = \omega_2$ , d'où

$$q' = \beta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad p' = \alpha = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Il viendra

$$-I'''_{\omega_1} = \beta - \alpha + \frac{\frac{3}{2} - 1}{3-1} (\beta - \alpha) + \dots + \frac{C_n}{3n-1} (\beta - \alpha) + \dots$$

car

$$\beta^{-3n} = \alpha^{-3n} = 1,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant les racines cubiques imaginaires de l'unité. D'où

$$I'''_{\omega_1} = (\alpha - \beta)P,$$

en posant

$$P = 1 + \frac{\frac{3}{2} - 1}{3-1} + \dots + \frac{C_n}{3n-1} + \dots$$

Calculons une valeur approchée de  $P$ . D'après les valeurs déjà

MOUVEMENT D'UN LIQUIDE PARFAIT SOUMIS A LA PESANTEUR. 155  
 calculées des coefficients  $C_q$ , on a

$$P = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{5} + \frac{1}{2^2} \frac{1}{8} + \frac{5}{2^2} \frac{1}{10} + R_1,$$

où

$$R_1 = \frac{C_3}{3 \cdot 5 - 1} + \dots + \frac{C_n}{3n - 1} + \dots \leq (C_3 + C_6 + \dots + C_n + \dots) \frac{1}{14}.$$

Or nous savons que l'on a

$$0 = 1 - C_1 - C_2 - \dots - C_n - \dots;$$

d'où

$$C_3 + C_6 + \dots + C_n + \dots = 1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4;$$

d'où

$$R_1 \leq \frac{1}{14} [1 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{14} \times 0,27344;$$

d'où

$$R_1 \leq 0,019.$$

On a donc

$$P = 1 + 0,25 + 0,025 + 0,00781 + 0,0035 \\ + 0,015 \text{ environ} = 1,3.$$

Ainsi

$$P = 1,3.$$

On en déduit

$$I_{\infty}^{\omega_1} = (\alpha - \beta) 1,3 = -i\sqrt{3} \times 1,3 = -i \times 2,25.$$

$I_{\infty}^{\omega_2} = (1 - \alpha)P$ . — 2<sup>o</sup> Supposons ensuite

$$q = \omega_1, \quad p = \omega_0,$$

d'où

$$q' = \alpha, \quad p' = 1.$$

On aura

$$-I_{\infty}^{\omega_2} = (\alpha - 1) + \frac{\frac{3}{2} - 1}{1} \frac{\alpha - 1}{3 - 1} + \dots + \frac{C_n}{3n - 1} (\alpha - 1) + \dots,$$

car  $z^{-2n} = 1$ , comme nous l'avons déjà remarqué. On a donc

$$I_{w_0}^{w_1} = (1 - \alpha) \left[ 1 + \dots + \frac{Cn}{3n-1} + \dots \right] = (1 - \alpha)P,$$

$$I_{w_0}^{w_1} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \times 1,3.$$

B. Ceci posé, on a d'ailleurs

$$\int_{w_1}^{w_2} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^w}) dw = (e^{-w})_{w_1}^{w_2} - I_{w_1}^{w_2};$$

or

$$(e^{-w})_{w_1}^{w_2} = \beta - \alpha, \quad I_{w_1}^{w_2} = (\alpha - \beta)P.$$

On a donc

$$\int_{w_1}^{w_2} = (\beta - \alpha) - (\alpha - \beta)P = (\beta - \alpha)(P + 1) = i\sqrt{3} \times 2,3$$

$$= i \times 3,982.$$

On a, de même,

$$\int_{w_0}^{w_1} (-e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - e^w}) dw = (e^{-w})_{w_0}^{w_1} - I_{w_0}^{w_1}.$$

Or

$$(e^{-w})_{w_0}^{w_1} = \alpha - 1, \quad I_{w_0}^{w_1} = (1 - \alpha)P;$$

d'où

$$\int_{w_0}^{w_1} = (\alpha - 1) - (1 - \alpha)P = (\alpha - 1)(P + 1)$$

$$= -\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \times 2,3 = -3,45 - i \times 1,9918.$$

### NOTE III.

#### GÉNÉRALISATION DES CALCULS DES NOTES I ET II.

Considérons l'équation

$$\zeta^2 + e^{-w}\zeta + \frac{\left(\frac{m}{4}\right)}{e^{-w}} = 0$$

plus générale que celle étudiée précédemment et qui s'y réduit pour  $m = 1$ . D'ailleurs  $m = \frac{16}{g}$ . Nous avons déjà fait cette généralisation dans le calcul de la pression (p. 141). Calculons dans la nouvelle hypothèse les quantités  $\omega$ ,  $\varpi$ ,  $\int_{w_0}^{w_1}$ ,  $\int_{w_0}^{w_1}$ .

On a

$$2\zeta = -e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - me^w}.$$

Les racines du radical sont celles de l'équation  $e^{-3w} = m$ , c'est-à-dire qu'on tire de là pour  $e^{-w}$  ou  $u$  les racines du cas de  $m = 1$  multipliées par  $\sqrt[3]{m}$ .

Posons

$$e^{-w} = u = v\sqrt[3]{m}, \quad T = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{me^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi.$$

Ce radical deviendra

$$\begin{aligned} T &= \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{me^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi = - \int_{\sqrt[3]{\frac{m}{u}}}^{\sqrt[3]{\frac{m}{u}}} \sqrt{\frac{m}{u} - u^2} \frac{du}{u} \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{m}{u}}}}^1 \sqrt{\frac{m - mv^3}{mv^3}} \sqrt[3]{m} dv = Z \times \sqrt[3]{m} = 0,338 \times \sqrt[3]{m}. \end{aligned}$$

On aura donc, dans notre nouvelle hypothèse,

$$\begin{cases} 2\omega_1 = (e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi_0}) \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} T = \left(\sqrt[3]{\frac{m}{4}} - \sqrt[3]{m}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} T, \\ 2\varpi_1 = -(e^{-\varphi_1} - e^{-\varphi_0}) \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} T = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{m}{4}} - \sqrt[3]{m}\right) - \frac{1}{2} T, \end{cases}$$

$\omega$ , et  $\varpi$ , désignant les nouvelles valeurs de  $\omega$  et de  $\varpi$ . On a bien

$$\begin{cases} 2\omega_1 = 2\omega \times \sqrt[3]{m}, \\ 2\varpi_1 = 2\varpi \times \sqrt[3]{m}. \end{cases}$$

Le calcul de  $\int_{w_0}^{w_1}$  ou de  $\int_{w_0}^{w_1}$  conduit à des résultats analogues.

On a

$$J_p^q = - \int_x^{\beta \sqrt[3]{m}} \sqrt{1 - \frac{m}{u^2}} du = - \int_x^{\beta} \sqrt{1 - \frac{1}{v^2} \sqrt[3]{m}} dv = \sqrt[3]{m} \times 17.$$

On voit donc que toutes les dimensions de la nouvelle veine liquide se déduiront de celle étudiée dans ce Mémoire après multiplication des dimensions par  $\sqrt[3]{m}$ , où  $m = \frac{16}{g}$ .

En particulier, le coefficient de contraction étant un rapport de deux de ces dimensions sera le même que pour  $m = 1$ . Ce qui justifie ce que nous disons page 148.

#### NOTE IV.

Nous avons trouvé pour les équations de la trajectoire  $\Gamma$  en fonction du paramètre arbitraire  $\varphi$  les équations suivantes

$$\begin{cases} 2x = (e^{-\varphi} - 1) \cos \frac{2\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi, \\ 2y = -(e^{-\varphi} - 1) \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3} \int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi. \end{cases}$$

Nous avons d'ailleurs

$$\begin{cases} 2\xi = 2 \frac{dx}{d\varphi} = \frac{e^{-\varphi}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}, \\ 2\eta = 2 \frac{dy}{d\varphi} = e^{-\varphi} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}}. \end{cases}$$

Combinons les équations qui donnent  $2x$  et  $2y$  de façon à éliminer

$$\int_0^{\varphi} \sqrt{e^{\varphi} - e^{-2\varphi}} d\varphi$$

entre elles deux. Nous aurons

$$2x \cos \frac{2\pi}{3} - 2y \sin \frac{2\pi}{3} = e^{-\varphi} - 1$$

ou

$$e^{-\varphi} = 1 - x - y\sqrt{3} = X.$$

Éliminons  $e^{-\varphi}$  entre cette dernière équation et les valeurs écrites plus haut de  $\frac{dx}{d\varphi}$  et  $\frac{dy}{d\varphi}$  et divisons ces dernières l'une par l'autre pour éliminer  $d\varphi$ ; il viendra

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{X\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{X} - X^2}}{X + \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{X} - X^2}};$$

telle est la relation entre  $x, y, dx, dy$ .

On peut la ramener aux quadratures. Pour cela il suffit de prendre  $X$  pour fonction à la place de  $y$ .

On en déduit, en effet,

$$dX = -dx - \sqrt{3} dy$$

ou

$$dy = -\frac{dx + dX}{\sqrt{3}};$$

d'où, en posant

$$f(X) = \frac{X\sqrt{3} - \sqrt{\frac{1}{X} - X^2}}{X\sqrt{3} + \sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{X} - X^2}},$$

l'équation différentielle (1) devient

$$(2) \quad \frac{dx}{dX} = \frac{1}{\sqrt{3}f(X) - 1};$$

d'où

$$(3) \quad x = \int \frac{dX}{\sqrt{3}f(X) - 1} + \text{const.}$$

On voit ainsi que, par une quadrature, on aura la relation qui lie  $x$  et  $y$ .