JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CYPARISSOS STÉPHANOS

Sur une extension du calcul des substitutions linéaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 73-128.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__73_0>

Sur une extension du calcul des substitutions linéaires;

PAR M. CYPARISSOS STÉPHANOS.

La théorie des substitutions linéaires, appliquée à l'étude des formes bilinéaires et quadratiques, a conduit, par les travaux de Cayley, Borchardt, Hesse, Laguerre et autres, à un calcul symbolique à multiplication associative, qui offre de grands avantages dans l'étude de ces théories.

On doit à M. Frobenius d'avoir présenté ce calcul sous une forme très convenable, par l'adoption de la notion de la *composition* des formes bilinéaires.

C'est de ce calcul que nous présentons une double extension dans le présent travail, en introduisant, à côté de la composition (ordinaire) des formes bilinéaires, deux autres opérations que nous désignons sous les noms de *conjonction* et de *composition bialternée* des formes bilinéaires.

La première de ces opérations, d'une définition très simple, correspond, dans le cas de deux formes bilinéaires, à un mode de composition de deux déterminants, considéré d'abord par M. Kronecker. D'après cette opération, en partant des deux formes bilinéaires

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl} y_k v_l$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, m; \; k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on est conduit à une nouvelle forme bilinéaire

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}.$$

En particulier, si l'on pose $E = \Sigma x_i u_i$, $F = \Sigma y_k v_k$, on a

$$E \times F = \Sigma X_{ik} U_{ik}.$$

Notre attention, sur cette opération, a été attirée par ce fait, que *si l'on considère les déterminants*

$$|A - \lambda E|, \quad |B - \lambda F|, \quad |A \times B - \lambda E \times F|,$$

obtenus en retranchant λ *des éléments de la diagonale principale des déterminants des trois formes bilinéaires* A, B *et* $A \times B$, *l'équation* $|A \times B - \lambda E \times F| = 0$ *a pour racines les* mn *produits des racines de* $|A - \lambda E| = 0$ *par les racines de* $|B - \lambda F| = 0$. Comme corollaire de cette propriété, que nous avons réussi à généraliser d'une manière toute naturelle, on retrouve la formule

$$|A \times B| = |A|^n |B|^m,$$

due à M. Kronecker.

La seconde opération, rappelant la multiplication alternée de Grassmann, a une relation intime avec la théorie des transformations linéaires des coordonnées pluckériennes des diverses variétés linéaires (droites, plans, etc.) contenues dans un espace à plusieurs dimensions, ou encore, si l'on veut, avec la théorie des adjointes successives d'une forme bilinéaire, obtenues en bordant le déterminant de cette forme par plusieurs séries de variables. Ainsi le produit bialterné de s formes égales à A est une forme bilinéaire A^s dont le déterminant a pour éléments les mineurs d'ordre s du déterminant de A.

Nous avons eu occasion de nous occuper de cette opération en partant de cette propriété [1], que *le déterminant* $|A^s - \lambda E^s|$, *obtenu en retranchant* λ *de tous les éléments de la diagonale principale du*

[1] Obtenue aussi par M. G. Rados, dans son article *Zur Theorie der adjungirten Substitutionen* (*Math. Annalen*, t. XLVIII, p. 417; 1896).

déterminant $|A^s|$, *a pour racines les produits des racines de l'équation* $|A - \lambda E| = 0$ *prises s à s*. Cette propriété, qui comprend comme cas particulier le fait connu, dû à M. Franke, que le déterminant $|A^s|$ est égal à la puissance $\binom{m}{s}$ de $|A|$, est également susceptible d'une généralisation intéressante.

Nous procédons à l'étude de ces opérations par une méthode uniforme, basée sur les *relations fondamentales*, très simples, qui lient ces opérations à la composition ordinaire des formes bilinéaires. Ces relations sont, du reste, équivalentes aux lois fondamentales

$$(A_1 \times B_1 \times \ldots \times P_1)(A_2 \times B_2 \times \ldots \times P_2)$$
$$= A_1 A_2 \times B_1 B_2 \times \ldots \times P_1 P_2$$

et

$$(A_1^s)(A_2^s) = (A_1 A_2)^s$$

de certains *groupes* de transformations linéaires, importants dans la théorie des invariants (¹).

Parmi les résultats du présent Travail, on voudra bien remarquer ceux touchant à la théorie de l'élimination et qui sont obtenus avec une extrême facilité. Nous donnons, entre autres, la solution générale des deux problèmes suivants :

I. *Étant données deux équations*

$$f_1(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0,$$
$$f_2(\eta) = \eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\eta + b_n = 0,$$

et une fonction entière $\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma}\xi^\rho \eta^\sigma$, *représenter par un déter-*

(¹) *Voir* le Mémoire de M. Hurwitz *Zur Invariantentheorie* (*Math. Annalen*, t. XLV, p. 381; 1894), qui offre certains points de contact avec la présente Étude et dont nous n'avons eu connaissance qu'après l'achèvement de notre Travail. Les substitutions que M. Hurwitz appelle *Potenztransformationen*, et qui correspondent aux puissances algébriques, à exposants entiers positifs, des formes bilinéaires, peuvent conduire à des résultats analogues à ceux exposés dans le présent Travail, quoique moins simples sous certains égards.

minant d'ordre mn le résultat de l'élimination de ξ et η entre les trois équations

$$f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\eta) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0.$$

II. *Étant donnée une équation*

$$f(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + . \ . + a_{m-1}\xi + a_m = 0$$

et une fonction entière symétrique des variables ξ_1 ξ_2, ..., ξ_s $(s \leqq m)$,

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} \xi_1^{\rho_1} \xi_2^{\rho_2} \ldots \xi_s^{\rho_s},$$

trouver l'équation, de degré $\binom{m}{s}$, ayant pour racines les $\binom{m}{s}$ valeurs que prend $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ pour les diverses combinaisons des racines de $f(\xi) = 0$ prises s à s.

La solution de ces problèmes et d'autres analogues est donnée par des déterminants ne contenant l'inconnue λ que dans la diagonale principale, dont les éléments sont tous de la forme $a_{ii} - \lambda$.

Enfin nous obtenons la solution du problème suivant :

Trouver toutes les substitutions linéaires entre les mn éléments X_{ik} d'un tableau à m lignes et à n colonnes, qui établissent des substitutions linéaires entre les mineurs de même ordre de ce tableau.

Nous avons cru devoir faire précéder le présent exposé par un aperçu sommaire des propriétés élémentaires de la composition des formes bilinéaires, dans le but de rendre facile l'intelligence des développements ultérieurs [1].

---

(1) *P. S.* Un aperçu des résultats du présent Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences de Paris dans la séance du 6 mars 1899 (*Comptes rendus,* t. CXXVIII, p. 593-596).

I. — Composition ordinaire des formes bilinéaires [1].

1. Étant données deux formes bilinéaires

$$A_1 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij} x_i u_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m),$$

on représente par $A_1 A_2$ la forme

$$A_1 A_2 = \Sigma a'_{ig} a''_{gj} x_i u_j \qquad (g, i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

qu'on appelle *produit de la composition* des deux formes A_1 et A_2.

En particulier, si

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad E = \Sigma x_i u_i,$$

on a

$$AE = EA = A.$$

Le déterminant $|A_1 A_2|$ de la forme $A_1 A_2$ est égal au produit des déterminants

$$|A_1| = \Sigma \pm a'_{11} a'_{22} \ldots a'_{mm}, \qquad |A_2| = \Sigma \pm a''_{11} a''_{22} \ldots a''_{mm}$$

des deux formes A_1 et A_2.

Les deux formes $A_1 A_2$ et $A_2 A_1$ sont en général différentes. Mais si $A_1 A_2 = A_2 A_1$, on dit que les deux formes A_1 et A_2 sont *échangeables* entre elles.

La composition des formes bilinéaires jouit pourtant des propriétés

(1) L'exposé suivant est conforme aux notations de M. Frobenius [*Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (*Journal de Crelle*, t. 84; 1878)], sauf quelques détails. On trouvera dans ce Mémoire de M. Frobenius des citations intéressantes, ainsi que dans l'article de M. Study, sur la théorie des quantités complexes, inséré dans le second fascicule de l'*Encyklopädie der Math. Wissenschaften*, Leipzig, p. 169 et suivantes; 1899.

distributive et *associative*, puisqu'on a

$$(A_1 + A_2)A_3 = A_1A_3 + A_2A_3, \qquad A_1(A_2 + A_3) = A_1A_2 + A_1A_3$$

et

$$(A_1A_2)A_3 = A_1(A_2A_3) = A_1A_2A_3.$$

En partant d'une forme A on peut considérer ses puissances successives $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, ... qui sont telles que

$$A^\rho A^\sigma = A^\sigma A^\rho = A^{\rho+\sigma}.$$

Dans le cas où $|A| \neq 0$, on représente par A^{-1} la forme

$$A^{-1} = -\frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} = \Sigma\alpha_{ij}x_iu_j.$$

Cette forme, qu'on appelle *inverse* de A, satisfait aux relations

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

On remarquera que

$$(A_1A_2\dots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

2. A toute forme bilinéaire

$$A = \Sigma a_{ij}x_iu_j \qquad (i, j = 1, 2, \dots, m)$$

correspond une transformation linéaire des variables x, celle qui remplace x_j par $\Sigma a_{ij}x_i$. Cette transformation linéaire peut être représentée également par le symbole A. A la forme $E = \Sigma x_iu_i$ correspond, en particulier, la substitution *identique*, qui remplace x_j par x_j.

A la composition de deux formes bilinéaires A_1 et A_2 correspond la *composition* des substitutions linéaires correspondantes. Ainsi, tandis que A_1 remplace x_j par $\Sigma a'_{ij} x_i$ et que A_2 remplace x_j par $\Sigma a''_{ij} x_i$, la substitution $A_1 A_2$ remplace x_j par $\Sigma a'_{ig} a''_{gj} x_i = \Sigma[a''_{gj}(\Sigma a'_{ig} x_i)]$, de sorte qu'elle a le même effet que les deux substitutions A_1, A_2 effectuées successivement dans l'ordre A_2, A_1.

Dans le cas où $|A| \neq 0$, la transformation A a pour *inverse* la transformation correspondant à la forme A^{-1}.

3. De même que la forme bilinéaire

$$A = A(x, u) = \Sigma a_{ij} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m)$$

définit une transformation linéaire A, qui fait remplacer x_j par $\Sigma a_{ij} x_i$, de même la forme

$$A' = A'(u, x) = \Sigma a_{ij} u_j x_i,$$

qu'on appelle *transposée* de A et qui ne diffère de A que par l'*ordre* des variables x et u, définit une transformation linéaire A', qui fait remplacer u_i par $\Sigma a_{ij} u_j$, et qu'on appelle *transposée* de A.

Le produit de la composition de deux formes A'_1 et A'_2, transposées de A_1 et A_2, est donné par la formule

$$A'_1 A'_2 = \Sigma a'_{gj} a''_{ig} u_j x_i,$$

de sorte qu'on a

$$A'_1 A'_2 = (A_2 A_1)'.$$

On a, de même, en particulier,

$$A'E' = E'A' = A'.$$

Au produit $A'_1 A'_2$ des formes bilinéaires A'_1 et A'_2 correspond également le produit de la composition des transformations A'_1 et A'_2 correspondantes, effectuée dans l'ordre A'_1, A'_2. La transformation identique de ce groupe correspond à la forme E'.

L'inverse de A' coïncide avec la transposée de $A^{-1} = \Sigma \alpha_{ij} x_i u_j$, c'est-à-dire que l'on a

$$(A')^{-1} = (A^{-1})' = \Sigma \alpha_{ij} u_j x_i.$$

La transformation $A'^{-1} = (A^{-1})'$ est appelée substitution *contragrédiente* (ou *contraire*) de A. La substitution A^{-1} est évidemment la contragrédiente de A' et $A_1'^{-1} A_2'^{-1}$ la contragrédiente de $A_1 A_2$.

4. Si dans la forme $A = A(x, u)$ on soumet les variables x à une substitution A_1 et les variables u à une substitution A_2' on obtient comme résultat la forme $A_1 A A_2$. Par les mêmes substitutions la forme A' devient

$$A_2' A' A_1' = (A_1 A A_2)'.$$

Pour que deux substitutions A_1 et A_2' transforment en elle-même la forme E, il faut et il suffit qu'elles soient contragrédientes.

En effet, de la relation

$$A_1 E A_2 = E,$$

soit

$$A_1 A_2 = E,$$

on déduit que

$$|A_1||A_2| \neq 0$$

et que

$$A_2 = A_1^{-1},$$

d'où

$$A_2' = A_1'^{-1} = (A^{-1})'.$$

5. Si l'on soumet les variables x et u de deux formes A_1 et A_2 à deux transformations A_3 et A_4', on obtient deux nouvelles formes

$$A_3 A_1 A_4 \quad \text{et} \quad A_3 A_2 A_4$$

dont le produit $A_3 A_1 A_4 A_3 A_2 A_4$ ne coïncide pas, en général, avec la forme $A_3 A_1 A_2 A_4$, obtenue en soumettant $A_1 A_2$ aux mêmes transformations A_3 et A_4'.

Pourtant si $|A_3||A_4| \neq 0$ et que l'on veuille avoir

$$A_3 A_1 A_4 A_3 A_2 A_4 = A_3 A_1 A_2 A_4$$

quelles que soient les formes A_1 et A_2, on doit avoir $A_4 A_3 = E$, c'est-à-dire que les deux transformations A_3 et A'_1 doivent être contragrédientes.

On voit par là que le produit $A_1 A_2$ de deux formes bilinéaires A_1 et A_2 quelconques ne constitue un *covariant* de ces formes que dans le cas où l'on considère dans ces formes les u comme des variables contragrédientes aux variables x.

6. L'équation $|A - \lambda E| = 0$ est appelée *équation caractéristique* de la forme A.

Toute forme $A_1 A A_1^{-1}$, transformée de A par des substitutions contragrédientes A_1 et $A_1'^{-1}$, a la même équation caractéristique que A. On a, en effet,

$$\begin{aligned}|A_1 A A_1^{-1} - \lambda E| &= |A_1 A A_1^{-1} - \lambda A_1 E A_1^{-1}|\\ &= |A_1(A - \lambda E)A_1^{-1}| = |A_1||A_1|^{-1}|A - \lambda E| = |A - \lambda E|.\end{aligned}$$

On voit par là que tous les coefficients de l'équation $|A - \lambda E|$ sont des invariants de la forme A, si l'on y considère les u comme des variables contragrédientes aux variables x.

Soit $\omega(\lambda)$ le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $m - 1$ du déterminant $|A - \lambda E|$ et posons

$$\psi(\lambda) = \frac{|A - \lambda E|}{\omega(\lambda)}.$$

Dans le cas où l'équation $\psi(\lambda) = 0$ n'a que des racines simples, la forme A peut être mise, au moyen de substitutions A_1 et $A_1'^{-1}$ convenables, sous la forme canonique

$$A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_i x_i u_i.$$

(Il en est ainsi, en particulier, dans le cas où l'équation $|A - \lambda E| = 0$ a toutes ses racines inégales.)

Au moyen de cette expression canonique on voit que, si l'on considère une fonction entière quelconque

$$\varphi(A) = \Sigma c_\rho A^\rho$$

de la forme A, on aura

$$A_1\,\varphi(A)A_1^{-1} = \Sigma\,\varphi(\xi_i)x_i u_i,$$

d'où l'on déduit que l'équation caractéristique $|\varphi(A) - \lambda E| = 0$ de la forme $\varphi(A)$ a pour racines les m valeurs de $\varphi(\xi_i)$.

Cette conclusion subsiste pourtant dans tous les cas, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ désignant les racines de $|A - \lambda E| = 0$.

II. — Conjonction des formes bilinéaires.

7. Étant données deux formes bilinéaires

$$A = \Sigma a_{ij}\, x_i\, u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B = \Sigma b_{kl}\, y_k\, v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut en déduire une nouvelle forme bilinéaire

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\; k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

en remplaçant, dans le produit algébrique

$$(\Sigma a_{ij} x_i u_j)(\Sigma b_{kl} y_k v_l) = \Sigma a_{ij} b_{kl} x_i y_k u_j v_l$$

de ces formes, les expressions $x_i y_k$, $u_j v_l$ par les variables X_{ik}, U_{jl}.

En posant

$$E = \Sigma x_i u_i, \qquad F = \Sigma y_k v_k$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\; k = 1, 2, \ldots, n),$$

on aura, de même,

$$A \times F = \Sigma a_{ij}(X_{i1} U_{j1} + X_{i2} U_{j2} + \ldots + X_{in} U_{jn}),$$
$$E \times B = \Sigma b_{kl}(X_{1k} U_{1l} + X_{2k} U_{2l} + \ldots + X_{mk} U_{ml}),$$
$$E \times F = \Sigma X_{ik} U_{ik}.$$

La forme bilinéaire $A \times B$ peut être considérée comme une sorte de produit de la composition des deux formes A et B.

Pour distinguer cette nouvelle sorte de composition des formes bilinéaires de la composition ordinaire, nous l'appellerons *conjonction* des formes bilinéaires.

A cette composition des formes A et B correspond une sorte de composition de leurs déterminants $|A|$ et $|B|$, par laquelle on est conduit au nouveau déterminant à mn lignes

$$|A \times B| = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \cdots & a_{11}b_{1n} & a_{12}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \cdots & a_{11}b_{2n} & a_{12}b_{21} & \cdots & a_{1m}b_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{11}b_{n1} & a_{11}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{nn} & a_{12}b_{n1} & \cdots & a_{1m}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \cdots & a_{21}b_{1n} & a_{22}b_{11} & \cdots & a_{2m}b_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1}b_{n1} & a_{m1}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{nn} & a_{m2}b_{n1} & \cdots & a_{mm}b_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant l'élément appartenant à la ligne $(i-1)n+k$ et à la colonne $(j-1)n+l$ est égal à $a_{ij}b_{kl}$.

8. Si l'on pose

$$A_1 = \Sigma a'_{ij}x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij}x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B_1 = \Sigma b'_{kl}y_k v_l, \qquad B_2 = \Sigma b''_{kl}y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

les produits A_1A_2, B_1B_2, obtenus par la composition ordinaire des formes bilinéaires, dont il a été question dans le Chapitre précédent, seront

$$A_1A_2 = \Sigma a'_{ig}a''_{gj}x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B_1B_2 = \Sigma b'_{kh}b''_{hl}y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

et l'on aura

$$A_1A_2 \times B_1B_2 = \Sigma a'_{ig}a''_{jg}b'_{kh}b''_{hl}X_{ik}U_{jl}.$$

De même, le produit ordinaire des deux formes bilinéaires

$$A_1 \times B_1 = \Sigma a'_{ij} b'_{kl} X_{ik} U_{jl},$$
$$A_2 \times B_2 = \Sigma a''_{ij} b''_{kl} X_{ik} U_{jl}$$

sera

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = \Sigma a'_{ig} b'_{kh} a''_{gj} b''_{hl} X_{ik} U_{jl}.$$

On voit par là que la conjonction des formes bilinéaires est liée à la composition ordinaire de ces formes par la relation

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2.$$

Cette relation joue un rôle fondamental dans la théorie qui nous occupe, puisqu'elle conduit à toutes les propriétés de la conjonction des formes bilinéaires.

Et d'abord signalons, parmi les cas particuliers de cette *relation fondamentale*, les suivants :

$$(A \times F)(E \times B) = (E \times B)(A \times F) = A \times B,$$
$$(A_1 \times F)(A_2 \times F) = A_1 A_2 \times F,$$
$$(E \times B_1)(E \times B_2) = E \times B_1 B_2,$$

dont on peut déduire réciproquement la relation fondamentale.

Remarquons aussi que l'on a

$$(A \times B)(E \times F) = (E \times F)(A \times B) = A \times B.$$

Du reste, il est clair que l'on a aussi la *propriété distributive*

$$(A_1 + A_2) \times B = A_1 \times B + A_2 \times B,$$
$$A \times (B_1 + B_2) = A \times B_1 + A \times B_2.$$

9. La relation

$$(A \times F)(E \times B) = A \times B$$

fait voir que

$$|A \times F|\,|E \times B| = |A \times B|.$$

Mais comme on a évidemment

$$|A \times F| = |A|^n,$$
$$|E \times B| = |B|^m,$$

on obtient la formule connue, due à M. Kronecker [1],

$$|A \times B| = |A|^n |B|^m.$$

10. La relation fondamentale

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2$$

conduit aussi aux formules

$$\begin{aligned}
(A \times B)^\rho &= A^\rho \times B^\rho,\\
(A \times F)^\rho &= A^\rho \times F,\\
(E \times B)^\sigma &= E \times B^\sigma,\\
(A \times F)^\rho (E \times B)^\sigma &= A^\rho \times B^\sigma.
\end{aligned}$$

Ces formules ont lieu pour toutes les valeurs positives entières des exposants ρ et σ, quelles que soient les formes A et B. Pourtant la première de ces relations a lieu, même pour des valeurs négatives de ρ, dans le cas où $|A| \neq 0$ et $|B| \neq 0$, tandis que les trois dernières subsistent pour $\rho < 0$, si $|A| \neq 0$, et pour $\sigma < 0$, si $|B| \neq 0$.

Ainsi, par exemple, dans le cas où $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, on a

$$(A \times B)^{-1} = A^{-1} \times B^{-1},$$

puisque

$$(A \times B)(A^{-1} \times B^{-1}) = (A^{-1} \times B^{-1})(A \times B) = E \times F.$$

Si l'on donne une fonction entière de ξ et η

$$\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma} \xi^\rho \eta^\sigma,$$

---

(1) *Voir* l'article *Kombinatorik,* par M. Netto, dans le premier fascicule de l'*Encyklopädie der Math. Wissenschaften,* p. 40.

on aura

$$\varphi(A \times F, E \times B) = \Sigma c_{\rho\sigma}(A \times F)^\rho (E \times B)^\sigma$$
$$= \Sigma c_{\rho\sigma} A^\rho \times B^\sigma.$$

La forme bilinéaire $\varphi(A \times F, E \times B)$ peut donc être représentée plus simplement par le symbole

$$\varphi(A; B) = \Sigma c_{\rho\sigma} A^\rho \times B^\sigma.$$

Toutes les formes $\varphi(A; B)$, correspondant à deux formes A et B données, sont échangeables entre elles, c'est-à-dire que l'on a

$$\varphi_1(A; B)\varphi_2(A; B) = \varphi_2(A; B)\varphi_1(A; B).$$

Cette propriété résulte de la relation

$$(A^{\rho_1} \times B^{\sigma_1})(A^{\rho_2} \times B^{\sigma_2}) = (A^{\rho_2} \times B^{\sigma_2})(A^{\rho_1} \times B^{\sigma_1}) = A^{\rho_1+\rho_2} \times B^{\sigma_1+\sigma_2}.$$

11. Si, en partant de deux formes

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl} y_k v_l$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

telles que $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, et ayant pour inverses

$$A^{-1} = \Sigma \alpha_{ij} x_i u_j, \qquad B^{-1} = \Sigma \beta_{kl} y_k v_l,$$

on considère les deux formes

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}$$

et

$$A^{-1} \times B^{-1} = \Sigma \alpha_{ij} \beta_{kl} X_{ik} U_{jl},$$

on remarque, qu'en vertu de la relation

$$A^{-1} \times B^{-1} = (A \times B)^{-1},$$

la forme $A^{-1} \times B^{-1}$ coïncide avec l'inverse de $A \times B$.

Ainsi, tandis que les deux substitutions A et B remplacent x_j par $\Sigma a_{ij} x_i$ et y_l par $\Sigma b_{kl} y_k$, et que leurs inverses A^{-1} et B^{-1} remplacent x_j par $\Sigma \alpha_{ij} x_i$ et y_l par $\Sigma \beta_{kl} y_k$, la substitution $A \times B$ remplace X_{jl} par $\Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik}$ (et en particulier $x_j y_l$ par $\Sigma a_{ij} x_i \Sigma b_{kl} y_k$) et son inverse $A^{-1} \times B^{-1}$ remplace X_{jl} par $\Sigma \alpha_{ij} \beta_{kl} X_{ik}$ (et $x_j y_l$ par $\Sigma \alpha_{ij} x_i \Sigma \beta_{kl} y_k$).

De même, tandis que les transformations contragrédientes A'^{-1} et B'^{-1} de A et B remplacent respectivement u_i par $\Sigma \alpha_{ij} u_j$ et v_k par $\Sigma \beta_{kl} v_l$, la transformation contragrédiente $(A \times B)'^{-1} = A'^{-1} \times B'^{-1}$ de $A \times B$ remplace U_{ik} par $\Sigma \alpha_{ij} \beta_{kl} U_{jl}$ (et $u_i v_k$ par $\Sigma \alpha_{ij} u_i \Sigma \beta_{kl} v_l$).

12. Si, étant données deux formes

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{kl} y_k v_l,$$

on y soumet les variables x et u à deux substitutions contragrédientes A_1 et $A_1'^{-1}$, et les variables y et v à deux autres substitutions contragrédientes B_1 et $B_1'^{-1}$, on obtient deux nouvelles formes bilinéaires $A_1 A A_1^{-1}$, $B_1 B B_1^{-1}$ dont le produit

$$A_1 A A_1^{-1} \times B_1 B B_1^{-1}$$

coïncide avec la forme

$$(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_1 \times B_1)^{-1},$$

obtenue en soumettant la forme $A \times B$ aux deux substitutions contragrédientes $A_1 \times B_1$ et $(A_1 \times B_1)'^{-1}$, opérées sur les variables X et U.

On a, en effet,

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_1 \times B_1)^{-1} \\ = (A_1 A \times B_1 B)(A_1^{-1} \times B_1^{-1}) \\ = A_1 A A_1^{-1} \times B_1 B B_1^{-1}.\end{aligned}$$

La proposition précédente n'est qu'un cas particulier de celle-ci :

Si dans les formes A *et* B *on soumet les variables x, u, y, v respectivement aux substitutions* A_1, A_2', B_1, B_2', *on obtient deux nou-*

velles formes bilinéaires $A_1 A A_2$, $B_1 B B_2$ *dont le produit*

$$A_1 A A_2 \times B_1 B B_2$$

coïncide avec la forme

$$(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_2 \times B_2),$$

obtenue en soumettant la forme $A \times B$ *aux substitutions* $A_1 \times B_1$ *et* $(A_2 \times B_2)' = A'_2 \times B'_2$, *opérées respectivement sur les variables* X *et* U.

13. Si les substitutions A_1, $A_1'^{-1}$ et B_1, $B_1'^{-1}$ transforment A et B respectivement en

$$A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_i x_i u_i,$$
$$B_1 B B_1^{-1} = \Sigma \eta_k y_k v_k,$$

les substitutions $A_1 \times B_1$ et $(A_1 \times B_1)'^{-1}$, qui sont contragrédientes entre elles, transforment $A \times B$ et $A^\rho \times B^\sigma$ respectivement en

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)(A \times B)(A_1 \times B_1)^{-1} &= A_1 A A_1^{-1} \times B_1 B B_1^{-1} \\ &= \Sigma \xi_i \eta_k X_{ik} U_{ik}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)(A^\rho \times B^\sigma)(A_1 \times B_1)^{-1} &= A_1 A^\rho A_1^{-1} \times B_1 B^\rho B_1^{-1} \\ &= \Sigma \xi_i^\rho \eta_k^\sigma X_{ik} U_{ik},\end{aligned}$$

et plus généralement la forme

$$\varphi(A; B) = \Sigma c_{\rho\sigma} A^\rho \times B^\sigma$$

en

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)\varphi(A; B)(A_1 \times B_1)^{-1} &= \Sigma c_{\rho\sigma} A_1 A^\rho A_1^{-1} \times B_1 B^\sigma B_1^{-1} \\ &= \Sigma c_{\rho\sigma} \xi_i^\rho \eta_k^\sigma X_{ik} U_{ik} \\ &= \Sigma \varphi(\xi_i, \eta_k) X_{ik} U_{ik}.\end{aligned}$$

On déduit de là que, de même que (n° **6**),

$$|A - \lambda E| = |A_1 A A_1^{-1} - \lambda E| = \Pi(\xi_i - \lambda),$$
$$|B - \lambda E| = |B_1 B B_1^{-1} - \lambda E| = \Pi(\eta_k - \lambda),$$

on a

$$|A^\rho \times B^\sigma - \lambda E \times F| = |(A_1 \times B_1)(A^\rho \times B^\sigma)(A_1 \times B_1)^{-1} - \lambda E \times F)|$$
$$= \Pi(\xi_i^\rho \eta_k^\sigma - \lambda)$$

et, en général,

$$|\varphi(A;B) - \lambda E \times F| = \Pi[\varphi(\xi_i, \eta_k) - \lambda].$$

Ces propriétés, démontrées ici pour le cas où les formes A et B peuvent prendre la forme canonique $\Sigma \xi_i x_i u_i$ et $\Sigma \eta_k y_k v_k$, subsistent dans tous les cas, pour des raisons de continuité.

On parvient ainsi au résultat important suivant :

Si l'on pose

$$\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma} \xi^\rho \eta^\sigma, \qquad \varphi(A;B) = \Sigma c_{\rho\sigma} A^\rho \times B^\sigma,$$

l'équation caractéristique

$$|\varphi(A;B) - \lambda E_1 \times F| = 0$$

de la forme $\varphi(A;B)$ *a pour racines les mn valeurs que prend* $\varphi(\xi_i, \eta_k)$ *pour les divers couples de racines* ξ_i *et* η_k *des équations*

$$|A - \lambda E| = 0 \qquad \text{et} \qquad |B - \lambda E| = 0.$$

En d'autres termes :

Le résultant de l'élimination de ξ *et* η *entre les trois équations*

$$|A - \xi E| = 0, \qquad |B - \eta F| = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0,$$

est représenté par le déterminant d'ordre mn

$$|\varphi(A;B) - \lambda E \times F|.$$

En dehors des cas particuliers de ces propositions correspondant à $\varphi(\xi, \eta)$ égal à $\xi\eta$ ou à $\xi^\rho \eta^\sigma$, remarquons aussi ceux où l'expression

$\varphi(\xi, \eta)$ devient égale à $\xi + \eta$ ou à $\xi - \eta$. On a alors [1]

$$|A \times B - \lambda E \times F| = \Pi(\xi_i \eta_k - \lambda),$$
$$|A \times F + E \times B - \lambda E \times F| = \Pi(\xi_i + \eta_k - \lambda),$$
$$|A \times F - E \times B - \lambda E \times F| = \Pi(\xi_i - \eta_k - \lambda).$$

Le fait que

$$|A \times B| = |A|^n |B|^m$$

peut être considéré comme un corollaire de la première de ces formules.

Remarquons enfin que, *de même que le résultant de l'élimination de* λ *entre* $|A - \lambda E| = 0$ *et* $|B - \lambda F| = 0$ *est* $|A \times F - E \times B|$, *de même le résultant de l'élimination de* λ *entre* $|A_1 - \lambda A_2| = 0$ *et* $|B_1 - \lambda B_2| = 0$ *est* $|A_1 \times B_2 - A_2 \times B_1|$.

14. La théorie précédente peut servir, si l'on veut, à la résolution du problème suivant :

Étant donnés deux polynômes

$$f_1(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1} \xi + a_m,$$
$$f_2(\eta) = \eta^n + b_1 \eta^{n-1} + \ldots + b_{n-1} \eta + b_n$$

et une fonction entière quelconque

$$\varphi(\xi, \eta) = \Sigma c_{\rho\sigma} \xi^\rho \eta^\sigma,$$

trouver le résultant de l'élimination de ξ *et* η *entre les trois équations*

$$f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\eta) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0.$$

---

(1) Nous avons donné la première de ces formules dans une Note *Sur un mode de composition des déterminants et des formes bilinéaires* parue dans le *Giornale di Matematiche di Battaglini* (vol. **36**; 1899).

En effet, si l'on représente par A et B les deux formes bilinéaires

$$
\begin{aligned}
A = & -a_1 x_1 u_1 - a_2 x_1 u_2 - \ldots - a_{m-1} x_1 u_{m-1} - a_m x_1 u_m \\
& + x_2 u_1 + x_3 u_2 + \ldots + x_m u_{m-1}, \\
B = & -b_1 y_1 v_1 - b_2 y_2 v_1 - \ldots - b_{n-1} y_{n-1} v_1 - b_n y_n v_1 \\
& + y_1 v_2 + y_2 v_3 + \ldots + y_{n-1} v_n,
\end{aligned}
$$

on aura

$$|A - \xi E| = (-1)^m f_1(\xi), \qquad |B - \eta F| = (-1)^n f_2(\eta).$$

On voit par là que

Le résultant de l'élimination de ξ *et* η *entre les trois équations*

$$f_1(\xi) = 0, \qquad f_2(\eta) = 0, \qquad \varphi(\xi, \eta) - \lambda = 0$$

sera donné sous la forme

$$|\varphi(A; B) - \lambda E \times F|.$$

En particulier, le résultant des deux polynômes $f_1(\lambda)$ et $f_2(\lambda)$ sera $|A \times F - E \times B|$.

Au lieu de la valeur précédente de B, on peut prendre

$$
\begin{aligned}
B = & -b_1 y_1 v_1 - b_2 y_1 v_2 - \ldots - b_{n-1} y_1 v_{n-1} - b_n y_1 v_n \\
& + y_2 v_1 + y_3 v_2 + \ldots + y_n v_{n-1};
\end{aligned}
$$

pourtant les résultats auxquels on arrive ainsi présentent moins de symétrie.

15. La relation fondamentale

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2$$

exprime ce fait important que *les substitutions* $A \times B$ *forment un groupe*, le produit de la composition de deux transformations $A_2 \times B_2$,

$A_1 \times B_1$ de ce groupe coïncidant avec la transformation

$$A_1 A_2 \times B_1 B_2 \ (^1).$$

La transformation identique de ce groupe correspond à la forme $E \times F$.

Ce groupe comprend deux sous-groupes remarquables : celui des substitutions $A \times F$ et celui des substitutions $E \times B$. Les substitutions de chacun de ces sous-groupes sont échangeables aux substitutions de l'autre. Toute transformation $A \times B$ est le produit des deux substitutions $A \times F$, $E \times B$, appartenant à ces deux sous-groupes.

16. Les substitutions du groupe $A \times B$ ont la propriété d'opérer des transformations linéaires entre les déterminants et les sous-déterminants du Tableau

$$\begin{matrix} X_{11}, & X_{12}, & \ldots, & X_{1n}, \\ X_{21}, & X_{22}, & \ldots, & X_{2n}, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ X_{m1}, & X_{m2}, & \ldots, & X_{mn}. \end{matrix}$$

Ainsi, par exemple, la substitution $A \times F$ remplace le déterminant d'ordre s

$$\begin{vmatrix} X_{j_1 l_1} & X_{j_1 l_2} & \ldots & X_{j_1 l_s} \\ X_{j_2 l_1} & X_{j_2 l_2} & \ldots & X_{j_2 l_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{j_s l_1} & X_{j_s l_2} & \ldots & X_{j_s l_s} \end{vmatrix} = X^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{l_1 l_2 \ldots l_s},$$

par l'expression

$$\begin{vmatrix} \Sigma a_{ij_1} X_{il_1} & \Sigma a_{ij_1} X_{il_2} & \ldots & \Sigma a_{ij_1} X_{il_s} \\ \Sigma a_{ij_2} X_{il_1} & \Sigma a_{ij_2} X_{il_2} & \ldots & \Sigma a_{ij_2} X_{il_s} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \Sigma a_{ij_s} X_{il_1} & \Sigma a_{ij_s} X_{il_2} & \ldots & \Sigma a_{ij_s} X_{il_s} \end{vmatrix}$$

(¹) Cette propriété a déjà été remarquée par M. Hurwitz (*Math. Annalen* t. XLV, p. 389).

qui est égale à la somme des produits des déterminants correspondants des deux Tableaux

$$\left\|\begin{matrix} a_{1j_1} & a_{2j_1} & \ldots & a_{mj_1} \\ a_{1j_2} & a_{2j_2} & \ldots & a_{mj_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1j_s} & a_{2j_s} & \ldots & a_{mj_s} \end{matrix}\right\| \quad \text{et} \quad \left\|\begin{matrix} X_{1l_1} & X_{2l_1} & \ldots & X_{ml_1} \\ X_{1l_2} & X_{2l_2} & \ldots & X_{ml_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{1l_s} & X_{2l_s} & \ldots & X_{ml_s} \end{matrix}\right\|,$$

c'est-à-dire égale à

$$\Sigma a^{i_1i_2\ldots i_s}_{j_1j_2\ldots j_s} X^{i_1i_2\ldots i_s}_{l_1l_2\ldots l_s} \qquad (\text{où } i_1 < i_2 < \ldots < i_s).$$

De même, la substitution $E \times B$ remplace le déterminant

$$X^{j_1j_2\ldots j_s}_{l_1l_2\ldots l_s}$$

par l'expression

$$\left|\begin{matrix} \Sigma b_{kl_1} X_{j_1k} & \Sigma b_{kl_2} X_{j_1k} & \ldots & \Sigma b_{kl_s} X_{j_1k} \\ \Sigma b_{kl_1} X_{j_2k} & \Sigma b_{kl_2} X_{j_2k} & \ldots & \Sigma b_{kl_s} X_{j_2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma b_{kl_1} X_{j_sk} & \Sigma b_{kl_2} X_{j_sk} & \ldots & \Sigma b_{kl_s} X_{j_sk} \end{matrix}\right|,$$

qui est égale à la somme des produits des déterminants correspondants des deux Tableaux

$$\left\|\begin{matrix} b_{1l_1} & b_{2l_1} & \ldots & b_{nl_1} \\ b_{1l_2} & b_{2l_2} & \ldots & b_{nl_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1l_s} & b_{2l_s} & \ldots & b_{nl_s} \end{matrix}\right\| \quad \text{et} \quad \left\|\begin{matrix} X_{j_11} & X_{j_12} & \ldots & X_{j_1n} \\ X_{j_21} & X_{j_22} & \ldots & X_{j_2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{j_s1} & X_{j_s2} & \ldots & X_{j_sn} \end{matrix}\right\|,$$

c'est-à-dire égale à

$$\Sigma b^{k_1k_2\ldots k_s}_{l_1l_2\ldots l_s} X^{j_1j_2\ldots j_s}_{k_1k_2\ldots k_s} \qquad (\text{où } k_1 < k_2 < \ldots < k_s).$$

Quant à la substitution $A \times B$, comme elle est le produit de la composition des substitutions $A \times F$ et $E \times B$, elle fait remplacer $X^{j_1j_2\ldots j_s}_{l_1l_2\ldots l_s}$

par l'expression

$$\Sigma a_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} b_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{k_1 k_2 \ldots k_s} \mathrm{X}_{k_1 k_2 \ldots k_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} \qquad (\text{où } i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ k_1 < k_2 < \ldots < k_s).$$

En particulier, dans le cas où $m = n$, la transformation $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ remplace le déterminant $|\mathrm{X}| = \Sigma \pm \mathrm{X}_{11}\mathrm{X}_{22}\ldots\mathrm{X}_{mm}$ par le produit

$$|\mathrm{A}||\mathrm{B}||\mathrm{X}|.$$

17. En partant des deux formes

$$\mathrm{A} = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad \mathrm{B} = \Sigma b_{kl} y_k v_l$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on aurait pu aussi poser

$$\mathrm{A}' \times \mathrm{B} = \Sigma a_{ij} b_{kl} \mathrm{Y}_{jk} \mathrm{V}_{il}.$$

On aurait alors la relation fondamentale

$$(\mathrm{A}'_1 \times \mathrm{B}_1)(\mathrm{A}'_2 \times \mathrm{B}_2) = \mathrm{A}'_1 \mathrm{A}'_2 \times \mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2,$$

où

$$\mathrm{A}'_1 \mathrm{A}'_2 = (\mathrm{A}_2 \mathrm{A}_1)'.$$

Les résultats auxquels on arrive ainsi sont tout à fait analogues à ceux relatifs à l'opération de conjonction entre formes bilinéaires, déjà examinée. L'analogie parfaite des propriétés de ces deux genres d'opérations provient de ce que, d'après le n° **12**, la forme $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ peut être considérée comme un covariant des formes A et B, quelles que soient les substitutions linéaires auxquelles on veut soumettre les variables x, y, u, v.

Voici, par exemple, une des propriétés de l'opération actuelle :

Si l'on soumet les formes A' et B aux substitutions A'_1, A_2, B_2, B'_2, opérées respectivement sur les variables u, x, y, v, on obtient deux nouvelles formes

$$\mathrm{A}'_1 \mathrm{A}' \mathrm{A}'_2, \quad \mathrm{B}_1 \mathrm{B} \mathrm{B}_2$$

dont le produit $\mathrm{A}'_1 \mathrm{A}' \mathrm{A}'_2 \times \mathrm{B}_1 \mathrm{B} \mathrm{B}_2$ coïncide avec la forme

$$(\mathrm{A}'_1 \times \mathrm{B}_1)(\mathrm{A}' \times \mathrm{B})(\mathrm{A}'_2 \times \mathrm{B}_2),$$

obtenue en soumettant les variables Y et V de la forme $A' \times B$ aux transformations $A'_1 \times B_1$ et $A_2 \times B'_2$.

Dans le cas où les substitutions A'_1 et A_2, B_1 et B'_2 sont contragrédientes, il en est de même pour les substitutions $A'_1 \times B_1$ et $A_2 \times B'_2$.

Les opérations $A' \times B$ forment également un groupe dont les propriétés sont tout à fait analogues à celles du groupe $A \times B$.

Du reste, il est à remarquer que l'on a

$$|A \times B - \lambda E \times F| = |A' \times B - \lambda E' \times F|,$$
$$|A^\rho \times B^\sigma - \lambda E \times F| = |A'^\rho \times B^\sigma - \lambda E' \times F|,$$

et, en général,

$$|\varphi(A; B) - \lambda E \times F| = |\varphi(A'; B) - \lambda E' \times F|.$$

18. La théorie précédente peut aussi être étendue, sans difficulté, à des produits $A \times B \times C \times \ldots$ de plusieurs formes

$$\begin{aligned} A &= \Sigma a_{ij} x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m), \\ B &= \Sigma b_{kl} y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n), \\ C &= \Sigma_{pq} z_p w_q \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, r), \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nous nous bornerons ici à indiquer sommairement les principaux résultats relatifs aux cas du produit de la conjonction de trois formes

$$A \times B \times C = \Sigma a_{ij} b_{kl} c_{pq} X_{ikp} U_{jlq}$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n;\ p, q = 1, 2, \ldots, r).$$

Si l'on pose

$$E = \Sigma x_i u_i, \qquad F = \Sigma y_k v_k, \qquad G = \Sigma x_p w_p,$$

on a

$$E \times F \times G = \Sigma X_{ikp} U_{ikp}.$$

Ici encore on a les relations fondamentales

$$(A_1 \times B_1 \times C_1)(A_2 \times B_2 \times C_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2 \times C_1 C_2,$$

d'où l'on déduit

$$(A \times B \times C)(E \times F \times G) = (E \times F \times G)(A \times B \times C) = A \times B \times C,$$
$$(A \times F \times G)(E \times B \times G)(E \times F \times C) = \ldots = A \times B \times C,$$
$$(A_1 \times B_1 \times G)(A_2 \times B_2 \times G) = A_1 A_2 \times B_1 B_2 \times G, \ldots,$$
$$(A_1 \times F \times G)(A_2 \times F \times G) = A_1 A_2 \times F \times G, \ldots,$$

et aussi

$$(A \times B \times C)^\rho = A^\rho \times B^\rho \times C^\rho,$$
$$(A \times B \times G)^\rho = A^\rho \times B^\rho \times G, \ldots,$$
$$(A \times F \times G)^\rho = A^\rho \times F \times G, \ldots,$$
$$(A \times F \times G)^\rho (E \times B \times G)^\sigma (E \times F \times C)^\tau = A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau.$$

Si l'on donne une fonction entière de ξ, η, ζ,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} \xi^\rho \eta^\sigma \zeta^\tau,$$

on aura

$$\begin{aligned} &\varphi(A \times F \times G, E \times B \times G, E \times F \times C) \\ &\quad = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} (A \times F \times G)^\rho (E \times B \times G)^\sigma (E \times F \times C)^\tau \\ &\quad = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau, \end{aligned}$$

et l'on pourra poser, plus simplement,

$$\varphi(A; B; C) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau.$$

Les formes $\varphi(A; B; C)$, correspondant à des formes A, B, C données, sont échangeables entre elles.

On a dans le cas actuel

$$|A \times B \times C| = |A|^{nr} |B|^{mr} |C|^{mn}.$$

Étant données trois formes A, B, C, si l'on y soumet les variables x, u, y, v, z, w respectivement aux transformations A_1, A'_2, B_1, B'_2,

C_1, C'_2, on obtient trois nouvelles formes dont le produit

$$A_1 A A_2 \times B_1 B B_2 \times C_1 C C_2$$

coïncide avec la forme

$$(A_1 \times B_1 \times C_1)(A \times B \times C)(A_2 \times B_2 \times C_2),$$

obtenue en soumettant la forme $A \times B \times C$ aux substitutions

$$A_1 \times B_1 \times C_1 \quad \text{et} \quad (A_2 \times B_2 \times C_2)' = A'_2 \times B'_2 \times C'_2$$

opérées respectivement sur les variables X et U.

Dans le cas où les substitutions A'_2, B'_2, C'_2 sont les contragrédientes de A_1, B_1, C_1 respectivement, la substitution $A'_2 \times B'_2 \times C'_2$ est la contragrédiente de $A_1 \times B_1 \times C_1$.

Si l'on pose

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} \xi^\rho \eta^\sigma \zeta^\tau,$$
$$\varphi(A; B; C) = \Sigma c_{\rho\sigma\tau} A^\rho \times B^\sigma \times C^\tau,$$

l'équation caractéristique de la forme $\varphi(A; B; C)$ *a pour racines les mnr valeurs de* $\varphi(\xi_i, \eta_k, \zeta_p)$, *correspondant aux divers triples de racines* ξ_i, η_k, ζ_p *des trois équations*

$$|A - \lambda E| = \Pi(\xi_i - \lambda) = 0,$$
$$|B - \lambda F| = \Pi(\eta_k - \lambda) = 0,$$
$$|C - \lambda G| = \Pi(\zeta_p - \lambda) = 0,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$|\varphi(A; B; C) - \lambda E \times F \times G| = \Pi[\varphi(\xi_i, \eta_k, \zeta_p) - \lambda].$$

En d'autres termes :

Le résultant de l'élimination de ξ, η, ζ *entre les quatre équations*

$$|A - \xi E| = 0, \qquad |B - \eta F| = 0, \qquad |C - \zeta G| = 0,$$
$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) - \lambda = 0,$$

est représenté par le déterminant d'ordre mnr

$$|\varphi(A;B;C)-\lambda E\times F\times G|.$$

On a, en particulier,

$$|A\times B\times C-\lambda E\times F\times G|=\Pi(\xi_i\eta_k\zeta_p-\lambda),$$
$$|A\times B\times G+A\times F\times C+E\times B\times C-\lambda E\times F\times G|$$
$$=\Pi(\xi_i\eta_k+\xi_i\zeta_p+\eta_k\zeta_p-\lambda),$$
$$|A\times F\times G+E\times B\times G+E\times F\times C-\lambda E\times F\times G|$$
$$=\Pi(\xi_i+\eta_k+\zeta_p-\lambda).$$

La relation fondamentale

$$(A_1\times B_1\times C_1)(A_2\times B_2\times C_2)=A_1A_2\times B_1B_2\times C_1C_2$$

exprime que les transformations $A\times B\times C$ forment un groupe.

III. — Composition bialternée des formes bilinéaires.

19. Étant données deux formes bilinéaires

$$A_1=\Sigma a'_{ij}x_iu_j,\qquad A_2=\Sigma a''_{ij}x_iu_j$$
$$(i,j=1,2,\ldots,m),$$

représentons par le symbole $A_1.A_2$ la forme

$$A_1.A_2=\tfrac{1}{2}\Sigma a'_{i_1j_1}a''_{i_2j_2}x_{i_1i_2}u_{j_1j_2},$$

étant posé

$$x_{i_1i_2}=x'_{i_1}x''_{i_2}-x'_{i_2}x''_{i_1},\qquad u_{j_1j_2}=u'_{j_1}u''_{j_2}-u'_{j_2}u''_{j_1}.$$

On aura, de même,

$$A.A=\tfrac{1}{2}\Sigma a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}x_{i_1i_2}u_{j_1j_2},$$
$$A.E=\tfrac{1}{2}\Sigma a_{ij}(x_{i1}u_{j1}+x_{i2}u_{j2}+\ldots+x_{im}u_{jm}),$$
$$E.E=\tfrac{1}{2}\Sigma x_{i_1i_2}u_{i_1i_2},$$

où

$$A = \Sigma a_{ij} x_i u_j, \qquad E = \Sigma x_i u_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

En posant

$$A = f(x, u), \qquad A_1 = f_1(x, u), \qquad A_2 = f_2(x, u)$$

on a

$$\begin{aligned} A_1.A_2 = \tfrac{1}{2}[&f_1(x', u')f_2(x'', u'') - f_1(x', u'')f_2(x'', u') \\ &- f_1(x'', u')f_2(x', u'') + f_1(x'', u'')f_2(x', u')] \end{aligned}$$

et

$$A.A = f(x', u')f(x'', u'') - f(x', u'')f(x'', u').$$

Il est par là clair que l'on a la propriété distributive

$$(A_1 + A_2).A_3 = A_1.A_3 + A_2.A_3, \quad A_1.(A_2 + A_3) = A_1.A_2 + A_1.A_3,$$

ainsi que la propriété commutative

$$A_1.A_2 = A_2.A_1.$$

La forme $A_1.A_2$, comme changeant de signe par la permutation de x' et x'', ainsi que de u' et u'', peut être appelée *produit bialterné* des formes A_1 et A_2. On peut aussi appeler *composition bialternée* l'opération correspondante.

20. Si, dans le cas où $i_1 < i_2$, $j_1 < j_2$, on pose

$$\bar{x}_{i_1 i_2} = x_{i_1 i_2} = -x_{i_2 i_1}, \qquad \bar{u}_{j_1 j_2} = u_{j_1 j_2} = -u_{j_2 j_1}$$
$$(i_1 i_2,\ j_1 j_2 = 12, 13, \ldots, 1m, 23, \ldots, 2m, \ldots),$$

la forme $A_1.A_2$ sera linéaire par rapport aux $\frac{1}{2}m(m-1)$ variables $\bar{x}_{12}, \bar{x}_{13}, \ldots, \bar{x}_{1m}, \bar{x}_{23}, \ldots, \bar{x}_{2m}, \ldots$, ainsi que par rapport aux $\frac{1}{2}m(m-1)$ variables $\bar{u}_{12}, \bar{u}_{13}, \ldots, \bar{u}_{1m}, \bar{u}_{23}, \ldots, \bar{u}_{2m}, \ldots$.

On aura ainsi

$$\begin{aligned} A_1.A_2 &= \tfrac{1}{2}\Sigma(a'_{i_1 j_1} a''_{i_2 j_2} - a'_{i_1 j_2} a''_{i_2 j_1} - a'_{i_2 j_1} a''_{i_1 j_2} + a'_{i_2 j_2} a''_{i_1 j_1})\bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{j_1 j_2}, \\ A.A &= \Sigma(a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1})\bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{j_1 j_2}, \\ E.E &= \Sigma \bar{x}_{i_1 i_2} \bar{u}_{i_1 i_2}. \end{aligned}$$

Le déterminant $|A.A|$ a pour éléments les différents mineurs de second ordre $a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1}$ du déterminant $|A|$, de sorte que l'on a, comme on sait,

$$|A.A| = |A|^{\frac{1}{2}m(m-1)}.$$

Lorsqu'on soumet les variables x à la substitution A, les expressions $\overline{x}$ se transforment par la substitution A.A ($\overline{x}_{j_1 j_2}$ étant remplacé par $\Sigma a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \overline{x}_{i_1 i_2}$). De même, si l'on soumet les variables u à la substitution A′, les expressions $\overline{u}$ se transforment par la substitution $(A.A)' = A'.A'$ ($\overline{u}_{i_1 i_2}$ étant remplacé par $\Sigma a_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \overline{u}_{j_1 j_2}$).

21. Si dans les formes $A, A_1, A_2, \ldots$ on remplace, comme d'habitude, les coefficients $a_{ij}, a'_{ij}, \ldots$ par des produits symboliques $a_i \alpha_j$, $a'_i \alpha'_j, \ldots$, on obtient

$$A = a_x u_\alpha, \qquad A_1 = a'_{x'} u_{\alpha'}, \qquad \ldots,$$

étant posé

$$a_x = \Sigma a_i x_i, \qquad a'_{x'} = \Sigma a'_i x_i, \qquad \ldots,$$
$$u_\alpha = \Sigma \alpha_j u_j, \qquad u_{\alpha'} = \Sigma \alpha'_j u_j, \qquad \ldots.$$

Les produits $A_1.A_2$, $A_3.A_4$ sont alors exprimés symboliquement comme il suit :

$$A_1.A_2 = \tfrac{1}{2}(a'_{x'} a''_{x''} - a'_{x''} a''_{x'})(u'_{\alpha'} u''_{\alpha''} - u'_{\alpha''} u''_{\alpha'}),$$
$$A_3.A_4 = \tfrac{1}{2}(a'''_{x'''} a^{\mathrm{iv}}_{x^{\mathrm{iv}}} - a'''_{x^{\mathrm{iv}}} a^{\mathrm{iv}}_{x'''})(u'_{\alpha'''} u''_{\alpha^{\mathrm{iv}}} - u'_{\alpha^{\mathrm{iv}}} u''_{\alpha'''}),$$

soit

$$A_1.A_2 = \tfrac{1}{2}\Sigma(a'_{i_1} a''_{i_2} - a'_{i_2} a''_{i_1})(\alpha'_{j_1} \alpha''_{j_2} - \alpha'_{j_2} \alpha''_{j_1}) \overline{x}_{i_1 i_2} \overline{u}_{j_1 j_2},$$
$$A_3.A_4 = \tfrac{1}{2}\Sigma(a'''_{i_1} a^{\mathrm{iv}}_{i_2} - a'''_{i_2} a^{\mathrm{iv}}_{i_1})(\alpha'''_{j_1} \alpha^{\mathrm{iv}}_{j_2} - \alpha'''_{j_2} \alpha^{\mathrm{iv}}_{j_1}) \overline{x}_{i_1 i_2} \overline{u}_{j_1 j_2}.$$

On a ainsi, pour le produit de la composition ordinaire des deux formes $A_1.A_2$ et $A_3.A_4$,

$$\begin{aligned}(A_1.A_2)(A_3.A_4) \\ = \tfrac{1}{4}(a'_{x'} a''_{x''} - a_{x''} a_{x'})(a'''_{\alpha'} a^{\mathrm{iv}}_{\alpha''} - a'''_{x''} a^{\mathrm{iv}}_{x'})(u'_{\alpha'''} u''_{\alpha^{\mathrm{iv}}} - u'_{\alpha^{\mathrm{iv}}} u''_{\alpha'''}).\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$A_1 A_3 = a'_x a'''_{\alpha'} u_{\alpha'''}, \qquad A_1 A_4 = a'_x a^{\text{IV}}_{\alpha'} u_{\alpha^{\text{IV}}}, \qquad \ldots$$

et

$$A_1 A_3 . A_2 A_4 = \tfrac{1}{2} a'''_{\alpha'} a^{\text{IV}}_{\alpha''} (a'_{x'} a''_{x''} - a'_{x''} a''_{x'})(u'_{\alpha'''} u''_{\alpha^{\text{IV}}} - u'_{\alpha^{\text{IV}}} u''_{\alpha'''}),$$
$$A_1 A_4 . A_2 A_3 = \tfrac{1}{2} a'''_{\alpha''} a^{\text{IV}}_{\alpha'} (a'_{x'} a''_{x''} - a'_{x''} a''_{x''})(u'_{\alpha'''} u''_{\alpha^{\text{IV}}} - u'_{\alpha^{\text{IV}}} u''_{\alpha'''}).$$

On voit par là que la composition bialternée des formes bilinéaires est liée à la composition ordinaire de ces formes par la relation

$$2(A_1 . A_2)(A_3 . A_4) = A_1 A_3 . A_2 A_4 + A_1 A_4 . A_2 A_3,$$

qui est *fondamentale* pour la théorie qui nous occupe.

De cette relation nous déduisons les suivantes :

$$(A_1 . A_2)(A\ . A\ ) = A_1 A\ . A_2 A\ ,$$
$$(A\ . A\ )(A_1 . A_2) = A\ A_1 . A\ A_2,$$
$$(A_1 . A_1)(A_3 . A_3) = A_1 A_3 . A_1 A_3,$$

dont la dernière exprime que les substitutions A.A forment un groupe. Du reste, on peut déduire réciproquement de cette dernière relation la propriété fondamentale au moyen des opérations $A_2 \dfrac{\partial}{\partial A_1}$, $A_1 \dfrac{\partial}{\partial A_3}$.

On a, de même,

$$(A_1 . E)(A.A) = A_1 A.A,$$
$$(A.A)(A_1 . E) = AA_1 . A,$$
$$2(A_1 . E)(A_2 . E) = A_1 A_2 . E + A_1 . A_2,$$
$$(A.A)^\rho = A^\rho . A^\rho,$$

et en particulier

$$(A.A)^{-1} = A^{-1} . A^{-1},$$

dans le cas où $|A| \neq 0$.

Étant donnée une fonction entière de ξ' et ξ''

$$\varphi(\xi', \xi'') = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2} \xi'^{\rho_1} \xi''^{\rho_2},$$

on peut poser

$$\varphi(A;A)=\Sigma c_{\rho_1\rho_2}A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.$$

Les diverses formes $\varphi(A;A)$, correspondant à une même forme A, sont toutes échangeables entre elles, et cela par suite de la relation

$$\begin{aligned}&2(A^{\rho_1}.A^{\rho_2})(A^{\rho_3}.A^{\rho_4})\\&\quad=2(A^{\rho_3}.A^{\rho_4})(A^{\rho_1}.A^{\rho_2})=A^{\rho_1+\rho_3}.A^{\rho_2+\rho_4}+A^{\rho_1+\rho_4}A^{\rho_2+\rho_3}.\end{aligned}$$

22. La forme

$$\begin{aligned}A_1.A_2=\tfrac{1}{2}[f_1(x',u')f_2(x'',u'')-f_1(x',u'')f_2(x'',u')\\-f_1(x'',u')f_2(x',u'')+f_1(x'',u'')f_2(x',u')]\end{aligned}$$

est évidemment un concomitant des deux formes A_1, A_2, lorsqu'on considère les x'', u'' comme des variables cogrédientes aux variables x', u' respectivement.

La relation

$$A_3A_1A_4.A_3A_2A_4=(A_3.A_3)(A_1.A_2)(A_4.A_4)$$

montre que, si l'on soumet dans les formes A_1 et A_2 les variables x et u respectivement aux substitutions A_3 et A_4', on obtient deux nouvelles formes $A_3A_1A_4$, $A_3A_2A_4$ dont le produit

$$A_3A_1A_4.A_3A_2A_4$$

coïncide avec le résultat qu'on obtient en soumettant dans la forme $A_1.A_2$ les variables $\overline{x}$ et $\overline{u}$ aux substitutions $A_3.A_3$ et $A_4'.A_4'$.

La relation $(A.A)^{-1}=A^{-1}.A^{-1}$ montre, d'autre part, que si les deux transformations A_3 et A_4' sont contragrédientes, il en est de même pour les transformations $A_3.A_3$ et $A_4'.A_4'$.

23. Soit

$$A=\Sigma a_{ij}x_iu_j\qquad(i,j=1,2,\ldots,m)$$

une forme pouvant être mise, au moyen de deux substitutions contragrédientes convenables A_1 et $A_1'^{-1}$, sous la forme canonique

$$A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_i x_i u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

La forme $A.A$ devient alors, par les substitutions contragrédientes correspondantes $A_1.A_1$ et $A_1'^{-1}.A_1'^{-1}$,

$$A_1 A A_1^{-1}.A_1 A A_1^{-1} = \Sigma \xi_{i_1} \xi_{i_2} \overline{x}_{i_1 i_2} \overline{u}_{i_1 i_2} \qquad (i_1 i_2 = 12, 13, \ldots, 23, \ldots).$$

De même les formes $A.E$ et $A^{\rho_1}.A^{\rho_2}$ deviennent respectivement

$$A_1 A A_1^{-1}.E = \tfrac{1}{2}\Sigma(\xi_{i_1} + \xi_{i_2})\overline{x}_{i_1 i_2} \overline{u}_{i_1 i_2},$$
$$A_1 A^{\rho_1} A_1^{-1}.A_1 A^{\rho_2} A_1^{-1} = \tfrac{1}{2}\Sigma(\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2} + \xi_{i_1}^{\rho_2}\xi_{i_2}^{\rho_1})\overline{x}_{i_1 i_2} \overline{u}_{i_1 i_2},$$

et, en général, la forme

$$\varphi(A; A) = \Sigma c_{\rho_1\rho_2} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}$$

devient

$$(A_1.A_1)\varphi(A; A)(A_1.A_1)'^{-1} = \tfrac{1}{2}\Sigma[\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \varphi(\xi_{i_2}, \xi_{i_1})]\overline{x}_{i_1 i_2} \overline{u}_{i_1 i_2}.$$

On déduit de là la conclusion importante suivante :

Si $\varphi(\xi', \xi'') = \Sigma c_{\rho_1\rho_2} \xi'^{\rho_1} \xi''^{\rho_2}$, *l'équation caractéristique*

$$|\varphi(A; A) - \lambda E.E| = 0$$

de la forme

$$\varphi(A; A) = \Sigma c_{\rho_1\rho_2} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}$$

a pour racines les $\frac{1}{2}m(m-1)$ *valeurs que prend l'expression*

$$\tfrac{1}{2}[\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}) + \varphi(\xi_{i_2}, \xi_{i_1})]$$

pour les divers couples de racines ξ_{i_1}, ξ_{i_2} *de l'équation*

$$|A - \lambda E| = \Pi(\xi_i - \lambda) = 0.$$

Parmi les cas particuliers de cette proposition signalons les suivants :

$$|A.E - \lambda E.E| = \Pi[\tfrac{1}{2}(\xi_{i_1} + \xi_{i_2}) - \lambda],$$
$$|A.A - \lambda E.E| = \Pi[\xi_{i_1}\xi_{i_2} - \lambda],$$
$$|A^{\rho_1}.A^{\rho_2} - \lambda E.E| = \Pi[\tfrac{1}{2}(\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2} + \xi_{i_2}^{\rho_1}\xi_{i_1}^{\rho_2}) - \lambda],$$
$$|2A^2.E - 2A.A - \lambda E.E| = \Pi[(\xi_{i_2} - \xi_{i_1})^2 - \lambda].$$

On voit par là que

$$|2A^2.E - 2A.A - \lambda E.E| = 0$$

est l'équation aux carrés des différences des racines de l'équation $|A - \lambda E| = 0$, et que

$$|A^2.E - A.A|$$

est le discriminant de $|A - \lambda E|$.

La relation connue

$$|A.A| = |A|^{\frac{1}{2}m(m-1)}$$

se présente ici comme corollaire de la formule

$$|A.A - \lambda E.E| = \Pi(\xi_{i_1}\xi_{i_2} - \lambda).$$

Ces résultats subsistent aussi dans le cas où la forme A ne peut pas être mise sous la forme canonique $\Sigma\xi_i x_i u_i$.

La théorie qui précède peut être appliquée à la résolution du problème suivant :

Étant donnée une équation

$$f(\xi) = \xi^m + a_1\xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0$$

et une fonction entière $\varphi(\xi', \xi'')$, symétrique par rapport aux ξ', ξ'', former l'équation ayant pour racines les $\frac{1}{2}m(m-1)$ valeurs de $\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2})$ correspondant aux divers couples de racines ξ_{i_1}, ξ_{i_2} de l'équation $f(\xi) = 0$.

L'équation demandée sera

$$|\varphi(A; A) - \lambda E_1.E|,$$

étant posé, comme au n° **14**,

$$A = -a_1 x_1 u_1 - a_2 x_1 u_2 - \ldots - a_{m-1} x_1 u_{m-1} - a_m x_1 u_m \\ + x_2 u_1 + x_3 u_2 + \ldots + x_m u_{m-1}.$$

24. La théorie précédente peut être étendue sans difficulté à la composition bialternée de $s \leq m$ formes bilinéaires

$$A_1 = \Sigma a'_{ij} x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij} x_i u_j, \qquad \ldots, \qquad A_s = \Sigma a^{(s)}_{ij} x_i u_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Ici nous nous bornerons à exposer quelques-uns des résultats relatifs au cas où $s = 3$.

Et d'abord on a, comme définition,

$$A_1.A_2.A_3 = \frac{1}{3!} \Sigma a'_{i_1 j_1} a''_{i_2 j_2} a'''_{i_3 j_3} x_{i_1 i_2 i_3} u_{j_1 j_2 j_3},$$

étant posé

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} x'_{i_1} & x'_{i_2} & x'_{i_3} \\ x''_{i_1} & x''_{i_2} & x''_{i_3} \\ x'''_{i_1} & x'''_{i_2} & x'''_{i_3} \end{vmatrix}, \qquad u_{j_1 j_2 j_3} = \begin{vmatrix} u'_{j_1} & u'_{j_2} & u'_{j_3} \\ u''_{j_1} & u''_{j_2} & u''_{j_3} \\ u'''_{j_1} & u'''_{j_2} & u'''_{j_3} \end{vmatrix}$$
$$(i_1, i_2, i_3; j_1, j_2, j_3 = 1, 2, \ldots, m).$$

Pourtant, si l'on pose

$$\overline{x}_{i_1 i_2 i_3} = x_{i_1 i_2 i_3} = -x_{i_1 i_3 i_2} = \ldots,$$
$$\overline{u}_{j_1 j_2 j_3} = u_{j_1 j_2 j_3} = -u_{j_1 j_3 j_2} = \ldots,$$

dans le cas où $i_1 < i_2 < i_3$, $j_1 < j_2 < j_3$, et si l'on écrit symboliquement (comme au n° **21**)

$$A_1 = a'_x u_{\alpha'}, \qquad A_2 = a''_x u_{\alpha''}, \qquad A_3 = a'''_x u_{\alpha'''},$$

on aura

$$A_1.A_2.A_3 = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} a'_{x'} & a'_{x''} & a'_{x'''} \\ a''_{x'} & a''_{x''} & a''_{x'''} \\ a'''_{x'} & a'''_{x''} & a'''_{x'''} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u'_{\alpha'} & u'_{\alpha''} & u'_{\alpha'''} \\ u''_{\alpha'} & u''_{\alpha''} & u''_{\alpha'''} \\ u'''_{\alpha'} & u'''_{\alpha''} & u'''_{\alpha'''} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{3!}\Sigma\begin{vmatrix} a'_{i_1} & a'_{i_2} & a'_{i_3} \\ a''_{i_1} & a''_{i_2} & a''_{i_3} \\ a'''_{i_1} & a'''_{i_2} & a'''_{i_3} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha'_{j_1} & \alpha'_{j_2} & \alpha'_{j_3} \\ \alpha''_{j_1} & \alpha''_{j_2} & \alpha''_{j_3} \\ \alpha'''_{j_1} & \alpha'''_{j_2} & \alpha'''_{j_3} \end{vmatrix}\overline{x}_{i_1 i_2 i_3}\overline{u}_{j_1 j_2 j_3}.$$

La forme $A_1.A_2.A_3$ est donc linéaire par rapport aux $\binom{m}{3}$ variables $\overline{x}_{123}, \overline{x}_{124}, \ldots, \overline{x}_{234}, \ldots$, et aussi par rapport aux $\binom{m}{3}$ variables $\overline{u}_{123}$, $\overline{u}_{124}, \ldots, \overline{u}_{234}, \ldots$.

On remarquera que le produit $A_1.A_2.A_3$ ne change pas quand on permute entre eux les trois facteurs A_1, A_2, A_3.

On a en particulier

$$A.A.A = \Sigma\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & a_{i_1 j_3} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & a_{i_2 j_3} \\ a_{i_3 j_1} & a_{i_3 j_2} & a_{i_3 j_3} \end{vmatrix}\overline{x}_{i_1 i_2 i_3}\overline{u}_{j_1 j_2 j_3},$$

et aussi

$$E.E.E = \Sigma\overline{x}_{i_1 i_2 i_3}\overline{u}_{i_1 i_2 i_3}.$$

Le déterminant $|A.A.A|$ a pour éléments les divers mineurs du troisième ordre du déterminant $|A|$, de sorte que l'on a, d'après ce qu'on sait,

$$|A.A.A| = |A|^{\binom{m}{3}}.$$

25. Dans le cas actuel on a la relation fondamentale

$$3!(A_1.A_2.A_3)(A_4.A_5.A_6) = S(A_1A_4.A_2A_5.A_3A_6)$$

en désignant par $S(A_1A_4.A_2A_5.A_3A_6)$ la somme des $3!$ expressions qu'on peut déduire de $A_1A_4.A_2A_5.A_3A_6$ par la permutation des trois indices 4, 5, 6.

Parmi les conséquences de cette relation notons les formules suivantes

$$(A_1.A_2.A_3)(A.A.A) = A_1A.A_2A.A_3A,$$
$$(A.A.A)(A_1.A_2.A_3) = AA_1.AA_2.AA_3,$$
$$(A_1.A_1.A_1)(A_2.A_2.A_2) = A_1A_2.A_1A_2.A_1A_2,$$

dont la dernière exprime que les substitutions A.A.A forment un groupe.

On a aussi

$$(A.A.A)^\rho = A^\rho.A^\rho.A^\rho$$

et, en particulier, dans le cas où $|A| \neq 0$,

$$(A.A.A)^{-1} = A^{-1}.A^{-1}.A^{-1}.$$

Si l'on a

$$\varphi(\xi', \xi'', \xi''') = \Sigma c_{\rho_1\rho_2\rho_3}\xi'^{\rho_1}\xi''^{\rho_2}\xi'''^{\rho_3},$$

et que l'on représente par $S\varphi(\xi', \xi'', \xi''')$ *la somme des* $3!$ *expressions qu'on déduit de* $\varphi(\xi', \xi'', \xi''')$ *par la permutation des lettres* ξ', ξ'', ξ''', *l'équation caractéristique*

$$|\varphi(A; A; A) - \lambda E.E.E| = 0$$

de la forme

$$\varphi(A; A; A) = \Sigma c_{\rho_1\rho_2\rho_3}A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3},$$

aura pour racines les $\binom{m}{3}$ *valeurs que prend l'expression*

$$\frac{1}{3!}S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3})$$

pour les diverses combinaisons par trois des racines de l'équation $|A - \lambda E| = 0$.

Parmi les cas particuliers de ce résultat notons les suivants :

$$|A.E.E - \lambda E.E.E| = \Pi[\tfrac{1}{3}(\xi_{i_1} + \xi_{i_2} + \xi_{i_3}) - \lambda],$$
$$|A.A.E - \lambda E.E.E| = \Pi[\tfrac{1}{3}(\xi_{i_1}\xi_{i_2} + \xi_{i_1}\xi_{i_3} + \xi_{i_2}\xi_{i_3}) - \lambda],$$
$$|A.A.A - \lambda E.E.E| = \Pi[\xi_{i_1}\xi_{i_2}\xi_{i_3} - \lambda].$$

26. On se rend aisément compte comment les propriétés précédentes peuvent être généralisées pour le cas du produit alterné d'un nombre quelconque $s \leqq m$ de formes bilinéaires.

Remarquons pourtant que l'on a, en général, pour le produit bialterné A^s, de s formes égales à $A = f(x, u)$,

$$A^s = \begin{vmatrix} f(x', u') & f(x', u'') & \dots & f(x', u^{(s)}) \\ f(x'', u') & f(x'', u'') & \dots & f(x'', u^{(s)}) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ f(x^{(s)}, u') & f(x^{(s)}, u'') & \dots & f(x^{(s)}, u^{(s)}) \end{vmatrix}.$$

Cette forme conduit, en remplaçant les déterminants des tableaux

$$\begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & \dots & x'_m \\ x''_1 & x''_2 & \dots & x''_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(s)}_1 & x^{(s)}_2 & \dots & x^{(s)}_m \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & \dots & u'_m \\ u''_1 & u''_2 & \dots & u''_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{(s)}_1 & u^{(s)}_2 & \dots & u^{(s)}_m \end{vmatrix}$$

par les déterminants complémentaires des tableaux

$$\begin{vmatrix} u^{(s+1)}_1 & u^{(s+1)}_2 & \dots & u^{(s+1)}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{(m)}_1 & u^{(m)}_2 & \dots & u^{(m)}_m \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x^{(s+1)}_1 & x^{(s+1)}_2 & \dots & x^{(s+1)}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(m)}_1 & x^{(m)}_2 & \dots & x^{(m)}_m \end{vmatrix}.$$

à l'adjointe d'ordre $m - s$ de la forme A

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & x^{(s+1)}_1 & x^{(s+1)}_2 & \dots & x^{(s+1)}_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & x^{(m)}_1 & x^{(m)}_2 & \dots & x^{(m)}_m \\ u^{(s+1)}_1 & \dots & u^{(m)}_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ u^{(s+1)}_2 & \dots & u^{(m)}_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^{(s+1)}_m & \dots & u^{(m)}_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix},$$

multipliée par $(-1)^{m^2-s^2}$.

De même que, dans le cas où $s=2$, la relation fondamentale

$$2(A_1.A_2)(A_3.A_4) = A_1 A_3.A_2 A_4 + A_1 A_4.A_2 A_3$$

peut être déduite de la relation

$$(A_1.A_1)(A_3.A_3) = A_1 A_3.A_1 A_3,$$

au moyen des opérations $A_2 \frac{\partial}{\partial A_1}$, $A_4 \frac{\partial}{\partial A_3}$, de même, dans le cas général, la relation

$$(A_1^s)(A_2^s) = (A_1 A_2)^s,$$

qui exprime que les substitutions A^s forment un groupe, peut conduire, par des procédés analogues et en remarquant que le produit

$$A_1.A_2 \ldots A_s$$

est indépendant de l'ordre des facteurs, à la relation fondamentale

$$s!(A_1.A_2 \ldots A_s)(A_{s+1}.A_{s+2} \ldots A_{2s}) = S(A_1 A_{s+1}.A_2 A_{s+2} \ldots A_s A_{2s}),$$

le symbole de sommation S se rapportant à toutes les expressions analogues à $A_1 A_{s+1}.A_2 A_{s+2} \ldots A_s A_{2s}$, obtenues en permutant dans cette expression les indices $s+1$, $s+2$, ..., $2s$.

Si l'on pose

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} \xi_1^{\rho_1} \xi_2^{\rho_2} \ldots \xi_s^{\rho_s}$$

et

$$\varphi(A; A; \ldots; A) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} A^{\rho_1}.A^{\rho_2} \ldots A^{\rho_s},$$

on aura, de même qu'aux nos **23** et **24**,

$$|\varphi(A; A; \ldots; A) - \lambda E^s| = \Pi[S\,\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \ldots, \xi_{i_s}) - \lambda],$$

et, en particulier,

$$|A^s - \lambda E^s| = \Pi(\xi_{i_1} \xi_{i_2} \ldots \xi_{i_s} - \lambda).$$

Cette dernière formule fait voir que *si l'on retranche* λ *de tous les* *éléments de la diagonale principale du déterminant* $|\Lambda^s|$ *on obtient un nouveau déterminant qui a pour racines les produits des racines de l'équation* $|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = 0$ *prises s à s* (¹).

De là on déduit la propriété connue (²) que le déterminant ayant pour éléments les divers mineurs d'ordre $s \leqq m$ du déterminant $|\mathrm{A}|$ est égal à la puissance $\binom{m}{s}$ du déterminant $|\mathrm{A}|$.

Il est également aisé de voir comment on peut obtenir la solution du problème suivant :

Étant donnée une équation

$$f(\xi) = \xi^m + a_1 \xi^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\xi + a_m = 0$$

et une fonction entière symétrique

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s) = \Sigma c_{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_s} \xi_1^{\rho_1} \xi_2^{\rho_2} \ldots \xi_s^{\rho_s},$$

des variables

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_s \qquad (s \leqq m)$$

trouver l'équation d'ordre $\binom{m}{s}$ *ayant pour racines les* $\binom{m}{s}$ *valeurs que prend* $\varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s)$ *pour les diverses combinaisons des racines de* $f(\xi) = 0$ *prises s à s.*

En effet, si l'on représente par A la même forme bilinéaire qu'au nº **14**, l'équation cherchée sera

$$|\varphi(\mathrm{A}; \mathrm{A}; \ldots; \mathrm{A}) - \lambda \mathrm{E}^s| = 0.$$

Remarquons enfin que l'on a

$$\mathrm{A}_1.\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_m = |\mathrm{A}_1.\mathrm{A}_2 \ldots \mathrm{A}_m| x_{12\ldots m} u_{12\ldots m}.$$

27. En partant des propriétés de la composition bialternée des

(¹) G. Rados, *Mathem. Annalen*, t. XLVIII, p. 417; 1896.

(²) Franke, *Crelle's J.*, t. **61**, p. 350; 1863. Pour des renvois relatifs *voir* l'Article de M. Netto, cité plus haut (p. 85).

formes bilinéaires, on peut retrouver celles de leur conjonction, examinées dans le précédent Chapitre (II).

En effet, si l'on a les formes

$$A = \Sigma a_{ij}\, x_i u_j \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m),$$
$$B = \Sigma b_{kl}\, y_k v_l \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut considérer le produit bialterné

$$(A + B).(A + B) = A.A + 2A.B + B.B,$$

où

$$A.A = \Sigma(a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1})\, \overline{x}_{i_1 i_2}\, \overline{u}_{j_1 j_2} \qquad (i_1 < i_2,\ j_1 < j_2),$$
$$B.B = \Sigma(b_{k_1 l_1} b_{k_2 l_2} - b_{k_1 l_2} b_{k_2 l_1})\, \overline{y}_{k_1 k_2}\, \overline{v}_{l_1 l_2} \qquad (k_1 < k_2,\ l_1 < l_2)$$

et

$$2A.B = \Sigma a_{ij} b_{kl} (x'_i y''_k - x''_i y'_k)(u'_j v''_l - u''_j v'_l).$$

Ainsi donc la forme $2A.B$ ne diffère de

$$A \times B = \Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik} U_{jl}$$

que par la désignation des variables, qui sont du reste respectivement cogrédientes aux variables $x'_i y''_k - x''_i y'_k$, $u''_j v''_l - u''_j v'_l$, puisque les unes et les autres sont soumises aux mêmes substitutions lorsqu'on soumet les x, u, y, v respectivement aux substitutions A_1, A'_2, B_1, B'_2.

Si maintenant on pose

$$A_1 = \Sigma a'_{ij}\, x_i u_j, \qquad A_2 = \Sigma a''_{ij}\, x_i u_j,$$
$$B_1 = \Sigma b'_{kl}\, y_k v_l, \qquad B_2 = \Sigma b''_{kl}\, y_k v_l,$$

on aura, d'après la loi fondamentale de la composition bialternée,

$$2(A_1.B_1)(A_2.B_2) = A_1 A_2 . B_1 B_2 + A_1 B_2 . B_1 A_2,$$

mais comme $A_1 B_2 = B_1 A_2 = 0$, on aura

$$2(A_1.B_1)(A_2.B_2) = A_1 A_2 . B_1 B_2.$$

On obtient de là, en remplaçant $2(A.B)$ par $A \times B$, etc., la relation

$$(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) = A_1 A_2 \times B_1 B_2,$$

qui constitue la loi fondamentale de la conjonction des formes bilinéaires.

Remarquons aussi que le déterminant

$$|(A+B).(A+B) - \lambda(E+F).(E+F)|$$

est le produit des trois déterminants

$$|A.A - \lambda E.E|, \qquad |B.B - \lambda F.F|$$

et

$$|2A.B - 2\lambda E.F|,$$

dont le dernier coïncide avec le déterminant

$$|A \times B - \lambda E \times F|.$$

La composition bialternée des formes bilinéaires, étendue à un plus grand nombre de telles formes, conduit également à la composition mixte de ces formes, dont il sera question dans le Chapitre qui suit.

IV. — Composition mixte des formes bilinéaires.

28. Étant donnés plusieurs produits bialternés de formes bilinéaires

$$A_1.A_2\ldots A_s, \quad B_1.B_2\ldots B_t, \quad \ldots,$$

on peut considérer le produit de leur conjonction

$$(A_1.A_2\ldots A_s) \times (B_1.B_2\ldots B_t) \times \ldots$$

(qui subsiste même dans le cas où s ou t... devient égal à *zéro*).

Les propriétés de ces produits mixtes peuvent se déduire aisément de ceux des produits conjonctifs et bialternés.

Nous allons exposer quelques-unes de ces propriétés pour le cas du produit

$$A_1 . A_2 . A_3 \times B_1 . B_2 .$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned}
A_1 &= a'_x u_{\alpha'} = \Sigma a'_{ij}\, x_i u_j,\\
A_2 &= a''_x u_{\alpha''} = \Sigma a''_{ij}\, x_i u_j,\\
A_3 &= a'''_x u_{\alpha'''} = \Sigma a'''_{ij}\, x_i u_j,\\
B_1 &= b'_x u_{\beta'} = \Sigma b'_{kl} y_k v_l,\\
B_2 &= b''_x u_{\beta''} = \Sigma b''_{kl} y_k v_l
\end{aligned}$$

$$(\text{où } i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on a

$$A_1 . A_2 . A_3 = \frac{1}{3!} \begin{vmatrix} a'_{x'} & a'_{x''} & a'_{x'''} \\ a''_{x'} & a''_{x''} & a''_{x'''} \\ a'''_{x'} & a'''_{x''} & a'''_{x'''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u'_{\alpha'} & u''_{\alpha'} & u'''_{\alpha'} \\ u'_{\alpha''} & u''_{\alpha''} & u'''_{\alpha''} \\ u'_{\alpha'''} & u''_{\alpha'''} & u'''_{\alpha'''} \end{vmatrix}$$

et

$$B_1 . B_2 = \frac{1}{2!} \begin{vmatrix} b'_{y'} & b'_{y''} \\ b''_{y'} & b''_{y''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v'_{\beta'} & v''_{\beta'} \\ v'_{\beta''} & v''_{\beta''} \end{vmatrix},$$

soit

$$A_1 . A_2 . A_3 = \frac{1}{3!} \Sigma a_{i_1 i_2 i_3} \alpha_{j_1 j_2 j_3} \overline{x}_{i_1 i_2 i_3} \overline{u}_{j_1 j_2 j_3},$$

$$B_1 . B_2 = \frac{1}{2!} \Sigma b_{k_1 k_2} \beta_{l_1 l_2} \overline{y}_{k_1 k_2} \overline{v}_{l_1 l_2},$$

étant posé

$$a_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} a'_{i_1} & a'_{i_2} & a'_{i_3} \\ a''_{i_1} & a''_{i_2} & a''_{i_3} \\ a'''_{i_1} & a'''_{i_2} & a'''_{i_3} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \overline{x}_{i_1 i_2 i_3} = \begin{vmatrix} x'_{i_1} & x'_{i_2} & x'_{i_3} \\ x''_{i_1} & x''_{i_2} & x''_{i_3} \\ x'''_{i_1} & x'''_{i_2} & x'''_{i_3} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

$$b_{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} b'_{k_1} & b'_{k_2} \\ b''_{k_1} & b''_{k_2} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \overline{y}_{k_1 k_2} = \begin{vmatrix} y'_{k_1} & y_{k_2} \\ y''_{k_1} & y''_{k_2} \end{vmatrix}, \quad \ldots,$$

et en supposant que

$$i_1 < i_2 < i_3, \qquad j_1 < j_2 < j_3, \qquad k_1 < k_2, \qquad l_1 < l_2.$$

On aura ainsi

$$A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2 = \frac{1}{2!\,3!}\Sigma a_{i_1i_2i_3}\alpha_{j_1j_2j_3}b_{k_1k_2}\beta_{l_1l_2}\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{j_1j_2j_3}_{l_1l_2},$$

résultat obtenu en remplaçant, dans le produit algébrique des deux formes $A_1.A_2.A_3$ et $B_1.B_2$, les produits

$$\overline{x}_{i_1i_2i_3}\overline{y}_{k_1k_2},\quad \overline{u}_{j_1j_2j_3}\overline{v}_{l_1l_2}\qquad (\text{où } i_1<i_2<i_3,\ j_1<j_2<j_3,\ k_1<k_2,\ l_1<l_2)$$

par les variables

$$\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2},\quad \overline{u}^{j_1j_2j_3}_{l_1l_2}.$$

Si l'on pose

$$A=\Sigma a_{ij}x_iu_j,\qquad E=\Sigma x_iu_i,\qquad B=\Sigma b_{kl}y_kv_l,\qquad F=\Sigma y_kv_k$$

et

$$a^{i_1i_2i_3}_{j_1j_2j_3}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & a_{i_1j_3}\\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & a_{i_2j_3}\\ a_{i_3j_1} & a_{i_3j_2} & a_{i_3j_3}\end{vmatrix},\qquad b^{k_1k_2}_{l_1l_2}=\begin{vmatrix} b_{k_1l_1} & b_{k_1l_2}\\ b_{k_2l_1} & b_{k_2l_2}\end{vmatrix},$$

on aura

$$A.A.A\times B.B=\Sigma a^{i_1i_2i_3}_{j_1j_2j_3}b^{k_1k_2}_{l_1l_2}\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{j_1j_2j_3}_{l_1l_2},$$

$$A.A.A\times F.F=\Sigma a^{i_1i_2i_3}_{j_1j_2j_3}\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{j_1j_2j_3}_{k_1k_2},$$

$$E.E.E\times B.B=\Sigma b^{k_1k_2}_{l_1l_2}\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{i_1i_2i_3}_{l_1l_2},$$

$$E.E.E\times F.F=\Sigma \overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}\overline{u}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}.$$

29. Si l'on soumet les variables $x(x', x'', \ldots)$ et $y(y', y'', \ldots)$ aux substitutions A_1 et B_1, les expressions

$$\overline{x}_{i_1i_2i_3}=\Sigma\pm x'_{i_1}x''_{i_2}x'''_{i_3},\qquad \overline{y}_{k_1k_2}=\Sigma\pm y'_{k_1}y''_{k_2}$$

sont soumises respectivement aux substitutions A.A.A et B.B (n° **20**), et les expressions

$$\overline{x}^{i_1i_2i_3}_{k_1k_2}=\overline{x}_{i_1i_2i_3}\overline{y}_{k_1k_2}$$

à la substitution

$$A_1.A_1.A_1\times B_1.B_1.$$

De même, lorsqu'on soumet les variables u et v aux substitutions A'_2 et B'_2, les expressions $\overline{u}_{j_1j_2j_3}$ et $\overline{v}_{l_1l_2}$ sont soumises respectivement aux transformations $A'_2.A'_2.A'_2$ et $B'_2.B'_2$, et les expressions

$$\overline{w}^{j_1j_2j_3}_{l_1l_2} = \overline{u}_{j_1j_2j_3}\overline{v}_{l_1l_2}$$

à la transformation

$$A'_2.A'_2.A'_2 \times B'_2.B'_2.$$

30. D'après les propriétés de l'opération de conjonction, on aura la relation fondamentale

$$\begin{aligned}(A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2)&(A_4.A_5.A_6 \times B_3.B_4)\\ &= (A_1.A_2.A_3)(A_4.A_5.A_6) \times (B_1.B_2)(B_3.B_4),\end{aligned}$$

où (d'après les nos **21**, **25**)

$$3!(A_1.A_2.A_3)(A_4.A_5.A_6) = S(A_1A_4.A_2A_5.A_3A_6),$$
$$2!(B_1.B_2)(B_3.B_4) = B_1B_3.B_2B_4 + B_1B_4.B_2B_3.$$

On aura en particulier :

$$(A.A.A \times B.B)(A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2) = AA_1.AA_2.AA_3 \times BB_1.BB_2,$$
$$(A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2)(A.A.A \times B.B) = A_1A.A_2A.A_3A \times B_1B.B_2B,$$
$$\begin{aligned}(A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2)&(E.E.E \times F.F)\\ &= (E.E.E \times F.F)(A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2) = A_1.A_2.A_3 \times B_1.B_2,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}(A_1.A_1.A_1 \times B_1.B_1)&(A_2.A_2.A_2 \times B_2.B_2)\\ &= A_1A_2.A_1A_2.A_1A_2 \times B_1B_2.B_1B_2.\end{aligned}$$

Cette dernière formule fait voir que les substitutions $A.A.A \times B.B$ constituent un groupe. La substitution identique de ce groupe correspond à la forme $E.E.E \times F.F$.

Comme on a, de plus,

$$\begin{aligned}(A.A.A \times F.F)&(E.E.E \times B.B)\\ &= (E.E.E \times B.B)(A.A.A \times F.F) = A.A.A \times B.B,\end{aligned}$$
$$(A_1.A_1.A_1 \times F.F)(A_2.A_2.A_2 \times F.F) = A_1A_2.A_1A_2.A_1A_2 \times F.F,$$
$$(E.E.E \times B_1.B_1)(E.E.E \times B_2.B_2) = E.E.E \times B_1B_2.B_1B_2,$$

on voit que le groupe des substitutions $A.A.A \times B.B$ comprend les deux sous-groupes $A.A.A \times F.F$ et $E.E.E \times B.B$, dont chacun comprend des substitutions échangeables aux substitutions de l'autre. On voit aussi que toute substitution $A.A.A \times B.B$ est le produit d'une substitution du premier groupe par une substitution du second.

On a également

$$(A.A.A \times B.B)^\rho = A^\rho.A^\rho.A^\rho \times B^\rho.B^\rho, \qquad \ldots,$$

et, en particulier,

$$(A.A.A \times B.B)^{-1} = A^{-1}.A^{-1}.A^{-1} \times B^{-1}.B^{-1},$$

dans le cas où $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$.

Étant donnée une fonction entière quelconque de $\xi', \xi'', \xi''', \eta', \eta''$,

$$\varphi(\xi', \xi'', \xi'''; \eta', \eta'') = \Sigma c_{(\rho)(\sigma)} \xi'^{\rho_1} \xi''^{\rho_2} \xi'''^{\rho_3} \eta'^{\sigma_1} \eta''^{\sigma_2},$$

on peut poser

$$\ddot{\varphi}(A, A, A; B, B) = \Sigma c_{(\rho)(\sigma)} A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3} \times B^{\sigma_1}.B^{\sigma_2}.$$

A la même forme $\ddot{\varphi}$ conduisent évidemment toutes les fonctions déduites de φ par la permutation des ξ', ξ'', ξ''' ou des η', η'' et aussi la moyenne

$$\frac{1}{3!\,2!} S\varphi(\xi', \xi'', \xi'''; \eta', \eta'')$$

de ces $3!\,2!$ fonctions, qui est symétrique aussi bien par rapport aux ξ', ξ'', ξ''', que par rapport aux η', η''.

Les diverses formes $\ddot{\varphi}$, correspondant à deux formes A et B données, sont échangeables entre elles.

31. Si dans les formes A_3, A_4, A_5 on soumet les variables x et u aux substitutions A_1, A'_2, et que, de même, dans les formes B_3, B_4 on soumet les variables y et v aux substitutions B_1, B'_2, on obtient cinq nouvelles formes

$$A_1A_3A_2,\quad A_1A_4A_2,\quad A_1A_5A_2,\quad B_1B_3B_2,\quad B_1B_4B_2,$$

dont le produit mixte

$$A_1A_3A_2.A_1A_4A_2.A_1A_5A_2\times B_1B_3B_2.B_1B_4B_2$$

coïncide avec le résultat

$$(A_1.A_1.A_1\times B_1.B_1)(A_3.A_4.A_5\times B_3.B_4)(A_2.A_2.A_2\times B_2.B_2)$$

qu'on obtient en soumettant la forme $A_3.A_4.A_5\times B_3.B_4$ aux substitutions $A_1.A_1.A_1\times B_1.B_1$ et $A'_2.A'_2.A'_2\times B'_2.B'_2$, opérées respectivement sur les deux séries de variables $\overline{x}$ et $\overline{u}$.

Dans le cas où les substitutions A'_2 et B'_2 sont respectivement contragrédientes aux transformations A_1 et B_1, la transformation

$$A'_2.A'_2.A'_2\times B'_2.B'_2$$

est la contragrédiente de $A_1.A_1.A_1\times B_1.B_1$.

32. Si les substitutions A_1, A'^{-1}_1 et B_1, B'^{-1}_1 transforment A et B respectivement en

$$A_1AA_1^{-1}=\Sigma\xi_i x_i u_i \qquad (i=1, 2, \ldots, m),$$
$$B_1BB_1^{-1}=\Sigma\eta_k y_k v_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

on aura

$$(A_1.A_1.A_1)(A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3})(A_1.A_1.A_1)^{-1}=\frac{1}{3!}\Sigma(S\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3})\overline{x}_{i_1i_2i_3}\overline{u}_{i_1i_2i_3},$$

$$(B_1.B_1)(B^{\sigma_1}.B^{\sigma_2})(B_1.B_1)^{-1}=\frac{1}{2!}\Sigma(S\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2})\overline{y}_{k_1k_2}\overline{v}_{k_1k_2},$$

et

$$(A_1.A_1.A_1\times B_1.B_1)(A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3}\times B^{\sigma_1}.B^{\sigma_2})(A_1.A_1.A_1\times B_1.B_1)^{-1}$$
$$=\frac{1}{3!\,2!}\Sigma(S\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3})(S\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2})\overline{x}_{k_1k_2}^{i_1i_2i_3}\overline{u}_{k_1k_2}^{i_1i_2i_3},$$

en désignant par $S\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3}$ la somme des 3! expressions qu'on obtient en permutant dans $\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3}$ les i_1, i_2, i_3 ($i_1 < i_2 < i_3$), et de même par $S\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2}$ la somme $\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2} + \eta_{k_1}^{\sigma_2}\eta_{k_2}^{\sigma_1}$ (où $k_1 < k_2$).

On a aussi, en général,

$$\begin{aligned}(A_1.A_1.A_1 \times B_1.B_1)\ddot{\varphi}(A, A, A; B, B)(A_1.A_1.A_1 \times B_1.B_1)^{-1}\\ = \frac{1}{3!\,2!}\Sigma[S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2})]\overline{x}_{k_1k_2}^{i_1i_2i_3}\overline{u}_{k_1k_2}^{i_1i_2i_3},\end{aligned}$$

où nous avons désigné par $S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2})$ la somme des 3! 2! valeurs que prend

$$\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2}) = \Sigma c_{(\rho)(\sigma)}\xi_{i_1}^{\rho_1}\xi_{i_2}^{\rho_2}\xi_{i_3}^{\rho_3}\eta_{k_1}^{\sigma_1}\eta_{k_2}^{\sigma_2}$$

lorsqu'on y permute entre eux les i_1, i_2, i_3 et aussi les k_1, k_2.

Nous déduisons de là que *l'équation caractéristique*

$$|\ddot{\varphi}(A, A, A;\ B, B) - \lambda E.E.E \times F.F| = 0$$

de la forme

$$\ddot{\varphi}(A, A, A; B, B) = \Sigma c_{\rho_1\rho_2\rho_3\sigma_1\sigma_2}A^{\rho_1}.A^{\rho_2}.A^{\rho_3} \times B^{\sigma_1}.B^{\sigma_2}$$

a pour racines les $\binom{m}{3}\binom{n}{2}$ *valeurs que prend l'expression*

$$S\varphi(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \xi_{i_3}; \eta_{k_1}, \eta_{k_2})$$

(*qui est symétrique aussi bien par rapport aux* ξ_{i_1}, ξ_{i_2}, ξ_{i_3} *que par rapport aux* η_{k_1}, η_{k_2}), *pour les divers triples de racines* ξ_{i_1}, ξ_{i_2}, ξ_{i_3} *de l'équation* $|A - \lambda E| = 0$ *et les divers couples de racines* η_{k_1}, η_{k_2} *de l'équation* $|B - \lambda F| = 0$.

V. — Transformations linéaires des mineurs d'un Tableau.

33. Nous savons déjà (nº **16**) que lorsqu'on soumet les éléments X_{ik} d'un Tableau à m lignes et à n colonnes :

$$\begin{array}{llll} X_{11}, & X_{12}, & \ldots, & X_{1n}, \\ X_{21}, & X_{22}, & \ldots, & X_{2n}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ X_{m1}, & X_{m2}, & \ldots, & X_{mn}, \end{array}$$

à une substitution linéaire $A \times B$, qui fait remplacer X_{jl} par $\Sigma a_{ij} b_{kl} X_{ik}$, tous les mineurs

$$X_{(l)}^{(j)} = X_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{j_1 j_2 \ldots j_s} = \Sigma \pm X_{j_1 l_1} X_{j_2 l_2} \ldots X_{j_s l_s}$$

de même ordre s de ce Tableau sont aussi remplacés par des combinaisons linéaires de ces mineurs.

Ainsi, tandis que la substitution $A \times F$ fait remplacer $X_{(l)}^{(j)}$ par

$$\Sigma a_{(j)}^{(i)} X_{(l)}^{(i)} = \Sigma a_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} X_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} \qquad (\text{où } i_1 < i_2 \ldots < i_s)$$

et que la substitution $E \times B$ fait remplacer $X_{(l)}^{(j)}$ par

$$\Sigma b_{(l)}^{(k)} X_{(k)}^{(j)} = \Sigma b_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{k_1 k_2 \ldots k_s} X_{k_1 k_2 \ldots k_s}^{j_1 j_2 \ldots j_s} \qquad (\text{où } k_1 < k_2 < \ldots < k_s),$$

la substitution $A \times B = (A \times F)(E \times B) = (E \times B)(A \times F)$ fait remplacer $X_{(l)}^{(j)}$ par

$$\Sigma a_{(j)}^{(i)} b_{(l)}^{(k)} X_{(k)}^{(i)} = \Sigma a_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} b_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{k_1 k_2 \ldots k_s} X_{k_1 k_2 \ldots k_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s}$$
$$(\text{où } i_1 < i_2 < \ldots < i_s,\ k_1 < k_2 < \ldots < k_s).$$

Maintenant, si l'on représente par A^s et B^s les produits bialternés $A.A\ldots A$, $B.B\ldots B$, de s facteurs égaux à A ou à B, on aura

$$A^s \times B^s = \Sigma a_{(j)}^{(i)} b_{(l)}^{(k)} \overline{x}_{(k)}^{(i)} \overline{u}_{(l)}^{(j)}.$$

On voit par là que *lorsqu'on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $A \times B$, *les expressions* $X_{(l)}^{(j)}$ *sont soumises à la substitution* $A^s \times B^s$.

34. Ce résultat peut être généralisé de la manière suivante :

Si, en partant de s formes

$$X_1 = \Sigma X'_{jl} u_j v_l, \qquad X_2 = \Sigma X''_{jl} u_j v_l, \qquad \ldots,$$

on considère leur produit bialterné

$$X_1 . X_2 . \ldots . X_s = \Sigma X_{(l)}^{(j)} \overline{u_{(j)} v_{(l)}},$$

les coefficients $X_{(l)}^{(j)}$ *de ce produit ont la propriété que, lorsqu'on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $A \times B$, *ils sont soumis à la substitution* $A^s \times B^s$, *c'est-à-dire que* $X_{(l)}^{(j)}$ *est remplacé par*

$$\Sigma a_{(j)}^{(i)} b_{(l)}^{(k)} X_{(k)}^{(i)}.$$

En effet, si l'on représente les formes $X_1, X_2, \ldots$ symboliquement par

$$X_1 = u_{x'} v_{y'}, \qquad X_2 = u_{x''} v_{y''}, \qquad \ldots$$

(étant posé $X'_{jl} = x'_j y'_l, \ldots$), on aura, comme au n° **28**,

$$X_{(l)}^{(j)} = \frac{1}{s!} \begin{vmatrix} x'_{j_1} & x'_{j_2} & \ldots & x'_{j_s} \\ x''_{j_1} & x''_{j_2} & \ldots & x''_{j_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^{(s)}_{j_1} & x^{(s)}_{j_2} & \ldots & x^{(s)}_{j_s} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y'_{l_1} & y'_{l_2} & \ldots & y'_{l_s} \\ y''_{l_1} & y''_{l_2} & \ldots & y''_{l_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(s)}_{l_1} & y^{(s)}_{l_2} & \ldots & y^{(s)}_{l_s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s!} x_{(j)} y_{(l)}.$$

Or, soumettre les X_{jl} à la substitution $A \times B$, c'est soumettre les x_j à la substitution A et les y_l à la substitution B, ce qui a pour résultat de soumettre les $\overline{x_{(j)}}$ à la substitution A^s, les $\overline{y_{(l)}}$ à la substitution B^s et les $X_{(l)}^{(j)}$ à la substitution $A^s \times B^s$ (*voir* n° **29**).

On peut aussi démontrer la propriété dont il s'agit en remarquant que

Lorsqu'on soumet les formes $X_1, X_2, \ldots, X_s$ *aux substitutions* A', B' *opérées respectivement sur les variables* u *et* v, *on obtient* s *nouvelles formes* $A'X_1B$, $A'X_2B$, ... *dont le produit bialterné*

$$A'X_1B.A'X_2B\ldots A'x_sB$$

coïncide avec la forme

$$(A'^s)(X_1.X_2\ldots X_s)(B^s),$$

qu'on obtient en soumettant la forme $X_1.X_2\ldots X_s$ *aux substitutions*

$$A'^s=(A^s)', \qquad B'^s=(B^s)',$$

opérées respectivement sur les variables $\overline{u}_{(j)}$ et $\overline{v}_{(l)}$.

On remarquera que, en particulier, dans le cas où $m=n$ et $s=m$, *si, dans l'expression* $X_{1\,2\ldots m}^{1\,2\ldots m}=|X_1.X_2\ldots X_m|$, *on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $A\times B$, *cette expression se reproduit multipliée par*

$$|A|\,|B|.$$

35. Examinons maintenant si, en dehors des substitutions linéaires $A\times B$, il y a d'autres substitutions linéaires qui, effectuées sur les éléments X_{jl} d'un Tableau à m lignes et à n colonnes, opèrent des substitutions linéaires entre les mineurs $X_{l_1 l_2\ldots l_s}^{j_1 j_2\ldots j_s}$ d'ordre s de ce Tableau, et cela quel que soit s ($s=2, 3, \ldots, s\leqq m, s\leqq n$).

Et d'abord examinons quelles sont les transformations linéaires des éléments X_{jl} qui opèrent des transformations linéaires entre les mineurs du second ordre $X_{l_1 l_2}^{j_1 j_2}$.

Comme toute transformation pareille doit remplacer chaque mineur du second ordre par une combinaison linéaire des mineurs du même ordre, elle doit substituer à tout système de valeurs des X_{jl} tel que

$X_{jl} = x_j y_l$ et dont tous les mineurs du second ordre sont nuls, un autre système dont tous les mineurs du second ordre soient aussi nuls.

Si donc une pareille transformation remplace X_{jl} par

$$\Sigma a_{ik,jl} X_{ik}$$

et $x_j\, y_l$ par

$$\Sigma a_{ik,jl} x_i y_k = f_{jl}(x, y),$$

on aura

$$\begin{vmatrix} f_{j_1 l_1}(x,y), & f_{j_1 l_2}(x,y) \\ f_{j_2 l_1}(x,y), & f_{j_2 l_2}(x,y) \end{vmatrix} = 0.$$

Or cela ne peut arriver que dans trois cas seulement :

1° Lorsqu'il y a m formes a'_x, a''_x, ..., $a^{(m)}_x$, linéaires par rapport aux x, et n formes b'_y, b''_y, ..., $b^{(n)}_y$, linéaires par rapport aux y, qui soient telles que l'on ait

$$f_{jl}(x, y) = a^{(j)}_x b^{(l)}_y = \Sigma a_{ij} b_{kl} x_i y_k;$$

2° S'il y a n formes linéaires γ'_x, γ''_x, ..., $\gamma^{(m)}_x$ et m formes linéaires δ'_y, δ''_y, ..., $\delta^{(m)}_y$, telles que l'on ait

$$f_{jl}(x, u) = \gamma^{(l)}_x \delta^{(j)}_y = \Sigma \gamma_{il} \delta_{kj} x_i y_j;$$

3° Si les formes $f_{jl}(x, u)$ sont toutes des multiples $\mu_j \nu_l\, f(x, y)$ d'une même forme $f(x, y)$.

Le dernier de ces trois cas ne donne pas de solution de notre problème, puisque alors la substitution à laquelle on soumet les X_{jl} remplace tous les mineurs $X^{j_1 j_2}_{l_1 l_2}$ par zéro.

D'autre part le premier de ces cas, où X_{jl} est remplacée par

$$\Sigma a_{ij} b_{kl} X_{il},$$

fournit précisément les transformations $A \times B$ examinées dans ce qui précède.

Il n'y a donc que le second cas, celui où X_{jl} est remplacée par

$$\Sigma \gamma_{il} \delta_{kj} X_{ik},$$

qui peut conduire à des transformations nouvelles.

Si l'on pose

$$\Gamma = \Sigma\gamma_{il}x_i v_l, \qquad \Delta = \Sigma\delta_{kj}y_k u_j$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

et que l'on considère le produit *conjonctif*

$$\Gamma \times \Delta = \Sigma\gamma_{il}\delta_{kj}X_{ik}U_{jl}$$

des formes bilinéaires Γ et Δ, on peut dire que, dans le second cas, les éléments X_{jl} sont soumis aux transformations $\Gamma \times \Delta$.

Nous allons maintenant examiner les propriétés des transformations $\Gamma \times \Delta$, qui établissent, comme nous verrons, des substitutions linéaires entre les mineurs de même ordre s du Tableau des X_{jl}, quel que soit s ($s \leqq m$, $s \leqq n$).

36. Étant posé

$$A = \Sigma a_{ij}x_i u_j, \qquad B = \Sigma b_{hl}y_k v_l,$$
$$\Gamma = \Sigma\gamma_{il}x_i v_l, \qquad \Delta = \Sigma\delta_{kj}y_k u_j,$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

on a, conformément à la composition ordinaire,

$$A\Gamma = \Sigma a_{ig}\gamma_{gl}x_i v_l, \qquad B\Delta = \Sigma b_{kh}\delta_{hj}y_k u_j,$$
$$\Gamma B = \Sigma\gamma_{ih}b_{hl}x_i v_l, \qquad \Delta A = \Sigma\delta_{kg}a_{gj}y_k u_j,$$
$$\Gamma\Delta = \Sigma\gamma_{ih}\delta_{hj}x_i u_j, \qquad \Delta\Gamma = \Sigma\delta_{kg}\gamma_{gl}y_k v_l$$
$$(i, j, g = 1, 2, \ldots, m;\ k, l, h = 1, 2, \ldots, n).$$

On voit par là que les formes $A\Gamma$ et ΓB appartiennent au système de formes Γ et les formes $B\Delta$ et ΔA au système de formes Δ, et que, de même, les formes $\Gamma\Delta$ et $\Delta\Gamma$ appartiennent respectivement aux deux groupes de formes A et B.

En utilisant les expressions précédentes on voit aisément que :

Les opérations $A \times B$ *et* $\Gamma \times \Delta$ *sont liées entre elles et à la com-*

position ordinaire des formes bilinéaires par les relations fondamentales suivantes :

$$\begin{aligned}(A_1 \times B_1)(A_2 \times B_2) &= A_1 A_2 \times B_1 B_2,\\ (A \times B)(\Gamma \times \Delta) &= A\Gamma \times B\Delta,\\ (\Gamma \times \Delta)(A \times B) &= \Gamma B \times \Delta A,\\ (\Gamma_1 \times \Delta_1)(\Gamma_2 \times \Delta_2) &= \Gamma_1 \Delta_2 \times \Delta_1 \Gamma_2.\end{aligned}$$

La signification de la première de ces relations est déjà connue. Quant aux autres, elles font voir que le produit d'une substitution $A \times B$ par une substitution $\Gamma \times \Delta$, soit d'une substitution $\Gamma \times \Delta$ par une substitution $A \times B$, est encore une substitution du système $\Gamma \times \Delta$, et que le produit de deux substitutions $\Gamma \times \Delta$ est une substitution du groupe $A \times B$.

On remarquera aussi que l'on a

$$(E \times F)(\Gamma \times \Delta) = (\Gamma \times \Delta)(E \times F) = \Gamma \times \Delta.$$

Du reste les substitutions $\Gamma \times \Delta$ n'appartiennent pas, en général, au groupe $A \times B$. On ne peut avoir, en effet, la relation

$$A \times B = \Gamma \times \Delta,$$

qui équivaut à l'identité algébrique

$$(\Sigma a_{ij} x_i u_j)(\Sigma b_{kl} y_k v_l) \equiv (\Sigma \gamma_{il} x_i v_l)(\Sigma \delta_{kj} y_k u_j),$$

que dans le cas où il y a quatre formes linéaires a_x, b_y, u_α, v_β telles que l'on ait

$$A = a_x u_\alpha, \qquad B = b_y v_\beta, \qquad \Gamma = a_x v_\beta, \qquad \Delta = b_y u_\alpha.$$

37. Dans le cas où $m \neq n$ l'un des deux déterminants $|\Gamma\Delta|$, $|\Delta\Gamma|$ est identiquement nul. En particulier, si $m > n$, on a

$$|\Gamma\Delta| \equiv 0, \qquad |\Delta\Gamma| \not\equiv 0,$$

tandis que, si $m < n$, on a

$$|\Gamma\Delta| \not\equiv 0, \qquad |\Delta\Gamma| \equiv 0.$$

Il suit de là que, lorsque $m \neq n$, on a

$$|\Gamma \times \Delta| \equiv 0.$$

En effet, comme

$$(\Gamma \times \Delta)^2 = \Gamma\Delta \times \Delta\Gamma$$

on doit avoir (d'après le n° 9),

$$|\Gamma \times \Delta|^2 \equiv |\Gamma\Delta|^n |\Delta\Gamma|^m \equiv 0.$$

D'autre part, lorsque $m = n$, on a

$$|\Gamma\Delta| = |\Delta\Gamma| = |\Gamma||\Delta|$$

et

$$|\Gamma \times \Delta| = |\Gamma|^m |\Delta|^m.$$

38. Si l'on part des formes

$$\Gamma = \Sigma\gamma_{il} x_i v_l \qquad \text{et} \qquad \Delta = \Sigma\delta_{kj}\, y_k u_j,$$

on peut considérer les produits bialternés Γ^s et Δ^s, de s formes égales à Γ ou à Δ.

On aura ainsi

$$\Gamma^s = \Sigma\gamma_{(l)}^{(i)} \overline{x}_{(i)} \overline{u}_{(l)},$$

où

$$\gamma_{(l)}^{(i)} = \gamma_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{i_1 i_2 \ldots i_s} = \Sigma \pm \gamma_{i_1 l_1}\gamma_{i_2 l_2} \cdots \gamma_{i_s l_s}$$

et

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_s, \qquad l_1 < l_2 < \ldots < l_s.$$

On aura, de même,

$$\Delta^s = \Sigma\, \delta_{(j)}^{(k)} \overline{y}_{(k)} \overline{u}_{(j)},$$

où

$$\delta_{(j)}^{(k)} = \delta_{j_1 j_2 \ldots j_s}^{k_1 k_2 \ldots k_s} = \Sigma \pm \delta_{k_1 j_1} \delta_{k_2 j_2} \ldots \delta_{k_s j_s}$$

et

$$j_1 < j_2 < \ldots < j_s, \qquad k_1 < k_2 < \ldots < k_s.$$

On aura donc pour le produit mixte $\Gamma^s \times \Delta^s$

$$\Gamma^s \times \Delta^s = \Sigma \gamma_{(l)}^{(i)} \delta_{(j)}^{(k)} \overline{x}_{(k)}^{(i)} \overline{u}_{(l)}^{(j)}.$$

Il se trouve maintenant que *si l'on applique aux* X_{jl} *la substitution* $\Gamma \times \Delta$, *qui remplace* X_{jl} *par* $\Sigma \gamma_{il} \delta_{kj} X_{ik}$, *les expressions*

$$X_{(l)}^{(j)} = X_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{j_1 j_2 \ldots j_s} = \Sigma \pm X_{j_1 l_1} X_{j_2 l_2} \ldots X_{j_s l_s}$$

sont soumises à la substitution $\Gamma^s \times \Delta^s$, *qui remplace* $X_{(l)}^{(j)}$ *par*

$$\Sigma \gamma_{(l)}^{(i)} \delta_{(j)}^{(k)} X_{(k)}^{(i)}.$$

Et, plus généralement :

Si en partant de s formes

$$X_1 = \Sigma X'_{jl} u_j v_l, \qquad X_2 = \Sigma X'_{jl} u_j v_l, \qquad \ldots$$

on considère leur produit bialterné

$$X_1 . X_2 \ldots X_s = \Sigma X_{(l)}^{(j)} \overline{u}_{(j)} \overline{v}_{(l)},$$

les coefficients $X_{(l)}^{(j)}$ *de cette forme ont la propriété d'être soumis à la substitution* $\Gamma^s \times \Delta^s$, *lorsqu'on soumet les* X_{jl} *à la substitution* $\Gamma \times \Delta$.

On peut démontrer cette propriété en remarquant que :

Lorsqu'on soumet les formes $X_1, X_2, \ldots, X_s$ *aux substitutions* Γ', Δ', *opérées respectivement sur les variables u et v, dont* Γ' *remplace* u_i *par* $\Sigma \gamma_{il} v_l$ *et* Δ' *remplace* v_k *par* $\Sigma \delta_{kj} u_j$, *on obtient s nou-*

celles formes $\Gamma' X_1 \Delta$, $\Gamma' X_2 \Delta$, $\ldots$, $\Gamma' X_3 \Delta$ *dont le produit bialterné*

$$\Gamma' X_1 \Delta . \Gamma' X_2 \Delta \ldots \Gamma' X_s \Delta$$

coïncide avec la forme

$$(\Gamma'^{\dot{s}})(X_1 . X_2 \ldots X_s) \Delta^{\dot{s}},$$

qu'on obtient en soumettant, dans la forme $X_1 . X_2 \ldots X_s$, *les variables* $\overline{u}_{(i)}$ *et* $\overline{v}_{(k)}$ *aux substitutions* $\Gamma'^{\dot{s}} = (\Gamma^{\dot{s}})'$ *et* $(\Delta'^{\dot{s}}) = (\Delta^{\dot{s}})'$.

Il est à remarquer que, dans le cas où $m < n$, la forme $\Gamma^{\dot{m}} \times \Delta^{\dot{m}}$ devient le produit de deux facteurs linéaires puisqu'on a

$$\begin{aligned}\Gamma^{\dot{m}} \times \Delta^{\dot{m}} &= \Sigma \gamma^{(i)}_{(l)} \delta^{(k)}_{(j)} \overline{x}^{(i)}_{(k)} \overline{u}^{(j)}_{(l)} \\ &= \left(\Sigma \gamma^{12\ldots m}_{l_1 l_2 \ldots l_m} \overline{u}^{12\ldots m}_{l_1 l_2 \ldots l_m}\right)\left(\Sigma \delta^{k_1 k_2 \ldots k_m}_{12\ldots m} \overline{x}^{12\ldots m}_{k_1 k_2 \ldots k_m}\right).\end{aligned}$$

Il en est de même pour la forme $\Gamma^{\dot{n}} \times \Delta^{\dot{n}}$ dans le cas où $m > n$.

39. Le cas le plus intéressant pour les substitutions $\Gamma \times \Delta$ est celui où l'on a $m = n$, car alors le déterminant $|\Gamma \times \Delta|$ n'est pas identiquement nul.

Si, dans ce cas, on représente par Θ et H les deux formes

$$\Theta = \Sigma x_i v_i, \qquad H = \Sigma y_k u_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

on a

$$\Theta \times H = \Sigma X_{ik} U_{ki}.$$

On voit par là que *la substitution* $\Theta \times H$ *a pour effet de remplacer* X_{ik} *par* X_{ki}, c'est-à-dire de faire retourner le déterminant $|A|$ autour de sa diagonale principale.

On a également

$$\begin{gathered}(\Theta \times H)^2 = \Theta H \times H \Theta = E \times F, \\ (\Gamma \times \Delta)(\Theta \times H) = \Gamma H \times \Delta \Theta, \\ (\Theta \times H)(\Gamma \times \Delta) = \Theta \Delta \times H \Gamma\end{gathered}$$

et aussi

$$\Gamma \times \Delta = (\Gamma \mathrm{H} \times \Delta\Theta)(\Theta \times \mathrm{H}) = (\Theta \times \mathrm{H})(\Theta\Delta \times \mathrm{H}\Gamma)$$

On voit ainsi que *la substitution* $\Gamma \times \Delta$ *peut être obtenue, soit en composant la transformation* $\Gamma\mathrm{H} \times \Delta\Theta$ (*qui appartient au groupe* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$) *avec* $\Theta \times \mathrm{H}$, *soit en combinant* $\Theta \times \mathrm{H}$ *avec la transformation* $\Theta\Delta \times \mathrm{H}\Gamma$ (*qui appartient également au groupe* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$).

Dans le cas actuel, où l'on a

$$\Gamma^{\dot m} \times \Delta^{\dot m} = |\Gamma||\Delta| \overline{x}^{12\ldots m}_{12\ldots m} \overline{u}^{12\ldots m}_{12\ldots m},$$

il se trouve que *si dans le déterminant* $|\mathrm{X}|$ *on soumet les* X_{jl} *à la transformation* $\Gamma \times \Delta$, *ce déterminant se reproduit multiplié par* $\Gamma||\Delta|$. *Il en est de même pour l'expression*

$$|\mathrm{X}_1.\mathrm{X}_2\ldots\mathrm{X}_m| = \mathrm{X}^{12\ldots m}_{12\ldots m}.$$

40. En résumant les résultats précédents pour le cas où $m = n$, on voit que

Les seules transformations linéaires des éléments X_{jl} *d'un déterminant qui établissent des substitutions linéaires entre les mineurs de même ordre de ce déterminant, sont : 1° les transformations du groupe* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$; *2° la transformation* $\Theta \times \mathrm{H}$, *qui remplace* X_{jl} *par* X_{lj}; *3° les transformations qu'on obtient en composant les transformations* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ *avec* $\Theta \times \mathrm{H}$, *soit* $\Theta \times \mathrm{H}$ *avec les transformations* $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$. *Ce troisième système est constitué par les transformations* $\Gamma \times \Delta$, *au nombre desquelles appartient aussi la transformation* $\Theta \times \mathrm{H}$.

Dans le cas où $m = n = 2$, les transformations $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ constituent un groupe identique à celui des homographies de l'espace qui laissent invariable une surface du second degré, à discriminant différent de zéro, en transformant en lui-même chacun de ses deux systèmes de droites, tandis que les transformations $\Gamma \times \Delta$ correspondent aux homographies de l'espace qui échangent entre eux ces deux systèmes de droites.