JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

S. ZAREMBA

Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 47-72.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__47_0>

Sur le développement d'une fonction arbitraire en une série procédant suivant les fonctions harmoniques;

PAR M. S. ZAREMBA.

I. — Introduction.

1. M. Poincaré a obtenu, dans son beau Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1894), entre autres les résultats suivants :

1° Tout domaine (D) limité par une surface fermée (S) donne lieu à une suite infinie de fonctions

$$U_1, \quad U_2, \quad U_3, \quad \ldots$$

jouissant des propriétés que voici : elles s'annulent toutes sur la frontière du domaine (D) et vérifient dans toute l'étendue de ce domaine les équations

$$\Delta U_p + k_p U_p = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

où

$$\Delta U_p = \frac{\partial^2 U_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_p}{\partial z^2},$$

les nombres

$$(1) \qquad k_1, \quad k_2, \quad k_3, \quad \ldots$$

étant des constantes positives; on a

$$k_p \leqq k_{p+1}$$

et la suite (1) ne contient jamais qu'un nombre fini de termes ayant une même valeur; enfin l'intégrale

$$\int_{(D)} U_p U_{p'}\, d\tau, \tag{2}$$

où $d\tau$ représente un élément de volume et où l'indice (D) indique que l'intégration doit être étendue à tout le volume (D), est égale à l'unité ou à zéro selon que $p = p'$ ou que $p \neq p'$.

Nous dirons, avec M. Poincaré, que U_p est une fonction harmonique ayant le nombre k_p pour nombre caractéristique.

2° Soit u la fonction qui s'annule sur la surface (S) et qui satisfait dans toute l'étendue du domaine (D) à l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u + \xi u + f = 0, \tag{3}$$

où f est une fonction donnée de x, y, z. Cette fonction u considérée comme fonction du paramètre ξ est une fonction méromorphe dont tous les pôles sont simples et font partie de la suite (1). En outre, le résidu correspondant à un pôle k_p est une combinaison linéaire et homogène des fonctions harmoniques admettant le nombre k_p pour nombre caractéristique.

3° Lorsqu'une fonction $f(x, y, z)$ s'annule sur la frontière (S) du domaine (D) ainsi que les quantités Δf et $\Delta\Delta f$, supposées exister dans toute l'étendue du domaine (D), elle est développable en une série procédant suivant les fonctions harmoniques. J'ajoute que, d'après M. Leroy (*Thèse de Doctorat*), il en sera encore ainsi si $\Delta\Delta f$ existe, mais ne s'annule pas sur (S), les autres conditions précédentes étant satisfaites.

Voici maintenant l'objet principal du présent Travail :

Je me propose de démontrer, en supposant que la surface (S), qui peut se composer de plusieurs nappes séparées, admette en chacun de ses points des rayons de courbure principaux non inférieurs à une longueur fixe, que toute fonction $f(x, y, z)$, si elle s'annule sur (S) et si Δf existe, sera développable en une série uniformément convergente dans toute l'étendue du domaine (D), procédant suivant des fonctions dont chacune est une combinaison linéaire et homogène à coefficients constants d'un nombre fini de fonctions harmoniques.

Je m'appuierai sur une remarque faite par M. Poincaré dans le Mémoire cité et que l'on peut, en la généralisant un peu, énoncer ainsi : La fonction $f(x, y, z)$ pourra certainement être représentée par le développement qui nous occupe s'il est possible de définir, dans le plan de la variable complexe ξ, une suite infinie de contours fermés (C_1), (C_2), (C_3), ... enveloppant chacun l'origine, tels que la plus courte distance de l'origine au contour (C_p) croisse indéfiniment en même temps que l'indice p et tels enfin que l'intégrale curviligne

$$\int u\,d\xi,$$

prise suivant le contour (C_p), ait $-2\pi i f$ pour limite, lorsque l'indice p croît indéfiniment.

II. — Sur l'intégration de l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0.$$

2. Soient :

(S) une surface fermée admettant en chacun de ses points des rayons de courbure principaux non inférieurs à une longueur fixe différente de zéro;

(D) le domaine limité par cette surface, qui peut d'ailleurs se composer de plusieurs nappes entièrement séparées;

$\Theta(x', y', z')$ une fonction continue des coordonnées d'un point (x', y', z') variable sur la surface (S);

ds l'élément de la surface (S) relatif au point (x', y', z');

r la distance de ce point à un point quelconque (x, y, z) de l'espace;

N la normale intérieure à la surface (S) au point (x', y', z');

soit enfin μ celle des déterminations de l'expression $\sqrt{-\xi}$ dont la partie réelle est positive.

Posons

$$(4)\qquad \psi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_S \Theta(x', y', z')\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds,$$

considérons un point (x_0, y_0, z_0) situé sur la surface (S) et désignons par r_0 la distance de ce point au point (x', y', z'). La fonction

$$\psi(x, y, z)$$

tendra vers une limite déterminée lorsque le point (x, y, z) tendra vers le point (x_0, y_0, z_0) en restant constamment à l'intérieur de la surface (S) ou en restant constamment à l'extérieur de cette surface.

Désignons cette limite par $(\psi)_i$ dans le premier cas et par $(\psi)_e$ dans le second. On aura

$$(5)\qquad (\psi)_i = \frac{1}{2}\Theta(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\int_S \Theta\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\,ds,$$

$$(6)\qquad (\psi)_e = -\frac{1}{2}\Theta(x_0, y_0, z_0) + \frac{1}{4\pi}\int_S \Theta\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r_0}}{r_0}\,ds,$$

d'où

$$(7)\qquad (\psi)_i - (\psi)_e = \Theta(x_0, y_0, z_0).$$

Cela posé, désignons par ϖ une fonction continue donnée des coordonnées du point (x', y', z') et posons

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4\pi}\int_S \varpi\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds,\\ v_{n+1} &= -\frac{1}{4\pi}\int_S (v_n)_e\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}\,ds \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).\end{aligned}\right.$$

Je dis que lorsque l'argument de ξ ne se réduit pas à un multiple de 2π, la série

$$(9)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

sera convergente pourvu que le module de ce paramètre soit assez grand; en outre, la somme v de la série précédente satisfera dans le domaine (D) à l'équation

$$(10) \qquad \Delta v + \xi v = 0$$

et se réduira sur (S) à la fonction donnée ϖ.

5. Envisageons, pour démontrer l'assertion précédente, les formules (5) et (6), désignons par C le maximum du module de la fonction Θ, par m le module de μ et par a la partie réelle de cette quantité, On s'assurera aisément qu'il est possible de trouver deux constantes positives A et B telles que l'on ait, quelle que soit la position du point (x_0, y_0, z_0) sur la surface (S),

$$|(\psi)_i| < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{a} + \frac{Bm}{a^2}\right)C,$$
$$|(\psi)_e| < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{A}{a} + \frac{Bm}{a^2}\right)C.$$

Par conséquent, l'argument du paramètre ξ ayant une valeur fixe ne se réduisant pas à un multiple de 2π, on aura pour toutes les valeurs assez grandes du module

$$|(\psi)_i| < \tfrac{1}{2}(1 + \eta)C,$$
$$|(\psi)_e| < \tfrac{1}{2}(1 + \eta)C,$$

où η représente une constante positive inférieure à l'unité. On déduit de là et des équations (8) que l'on aura

$$|(v_n)_i| < \left(\frac{1+\eta}{2}\right)^n \Omega,$$

$$|(v_n)_e| < \left(\frac{1+\eta}{2}\right)^n \Omega,$$

où Ω représente le maximum du module de la fonction ϖ. Cela prouve que les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_e$$

sont convergentes. Il s'ensuit d'abord que la série (9) sera convergente. On en déduit, en tenant compte des relations

$$(v_1)_i-(v_1)_e=\varpi,$$
$$(v_n)_i-(v_n)_e=-(v_{n-1})_e \qquad (n=2,3,4,\ldots);$$

relations qui résultent du théorème exprimé par l'équation (7), que l'on aura

$$\varpi=\sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_i.$$

Il est donc certain que la fonction v, somme de la série (9), se réduit bien à la fonction donnée ϖ sur la surface (S). Or, la fonction v peut être regardée comme donnée par la formule

$$(11) \qquad v=\frac{1}{4\pi}\int_S\left[\varpi-\sum_{n=1}^{\infty}(v_n)_e\right]\frac{d}{dN}\frac{e^{-\mu r}}{r}ds;$$

elle satisfera donc dans toute l'étendue du domaine (D) à l'équation (10). La proposition qu'il s'agissait d'établir est donc démontrée.

La formule (11) et l'ensemble des considérations qui nous ont servi à l'établir conduisent aisément à la proposition suivante qui nous sera utile dans la suite : Soient, comme plus haut, m le module de μ, a la partie réelle de cette quantité et Ω le maximum du module de la fonction ϖ; soient, en outre, d la plus courte distance du point (x, y, z) à la surface (S) et ε un nombre positif assez petit dépendant uniquement de la surface (S), l'inégalité

$$(12) \qquad \frac{m}{a^2}\leqq\varepsilon$$

entraînera, si d est inférieur à une certaine longueur assez petite, l'inégalité

$$(13)\qquad |v(x, y, z)| < E\frac{me^{-ad}}{a}\Omega,$$

où E représente un nombre positif ne dépendant que de la nature de la surface (S).

4. Considérons deux points (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0) situés à l'intérieur du domaine (D), désignons par r leur distance et appelons $G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)$ la fonction qui jouit des propriétés suivantes : elle s'annule sur (S) et satisfait à l'équation

$$(14)\qquad \Delta G + \xi G = 0$$

dans tout le domaine (D), exception faite du point (x_0, y_0, z_0) où elle devient infinie, mais de façon que la différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

reste finie et continue. A l'exemple de M. Poincaré, nous donnerons le nom de *fonction de Green généralisée* à la fonction précédente.

Désignons par $d\tau$ l'élément de volume relatif au point (x, y, z) et proposons-nous d'évaluer l'intégrale

$$(15)\qquad I = \int_D |G(x_0, y_0, z_0, x, y, z)|^2 d\tau.$$

Je mets à cet effet en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction G et du paramètre ξ; soient

$$G = G_1(x_0, y_0, z_0, x, y, z) + iG_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$
$$\xi = \alpha + i\beta.$$

L'équation (14) nous donnera

$$\Delta G_1 + \alpha G_1 - \beta G_2 = 0,$$
$$\Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 = 0,$$

d'où

$$(16)\qquad G_2\Delta G_1 - G_1\Delta G_2 = \beta(G_1^2 + G_2^2).$$

Désignons par (D′) la partie du domaine (D) qui est extérieure à une petite sphère (Σ) de rayon ρ et de centre (x_0, y_0, z_0), multiplions l'équation (16) par l'élément de volume $d\tau$ et intégrons en étendant l'intégration à tout le domaine (D′). Il viendra, en appliquant le théorème de Green et en tenant compte de ce que les fonctions G_1 et G_2 s'évanouissent sur la surface (S),

$$(17)\qquad \beta\int_{D'}(G_1^2 + G_2^2)\,d\tau = \int_{\Sigma}\left(G_1\frac{dG_2}{dN} - G_2\frac{dG_1}{dN}\right)d\sigma,$$

où $d\sigma$ représente un élément de la surface de la sphère (Σ). J'observe que la fonction

$$g = G - \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

sera une fonction finie et continue des variables (x, y, z) et qu'elle satisfera dans toute l'étendue du domaine (D) à l'équation

$$(18)\qquad \Delta g + \xi g = 0.$$

Posons, en mettant en évidence les parties réelle et imaginaire de la fonction g,

$$g = g_1(x_0, y_0, z_0, x, y, z) + i g_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z),$$

et faisons tendre le rayon ρ de la sphère (Σ) vers zéro; l'équation (17) nous donnera

$$\beta I = -\frac{b}{4\pi} + g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0),$$

où b est le coefficient de l'unité imaginaire dans μ.

Or nous avons

$$\mu^2 = (a + ib)^2 = -\xi = -\alpha - i\beta,$$

d'où

$$\beta = -2ab;$$

il viendra donc

$$(19) \qquad I = \frac{1}{8\pi a} + \frac{g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)}{\beta}.$$

5. Je me propose de démontrer maintenant que lorsque l'inégalité (12) est vérifiée, on peut trouver une constante positive H telle que l'on ait

$$(20) \qquad I < \frac{H}{a},$$

quelle que soit la position du point (x_0, y_0, z_0) dans le domaine (D). Je m'appuierai pour cela sur ce fait que g vérifie l'équation (18) et que, dans les conditions où nous nous sommes placés, cette fonction pourra être déterminée par la méthode d'intégration exposée dans les premiers numéros de la présente Section. Soit d'abord

$$(21) \qquad |b| \geqq \frac{a}{2}.$$

Désignons par O le point de la surface (S) le plus voisin du point (x_0, y_0, z_0), par d la distance de ces deux points et par R une longueur constante dépendant uniquement de la surface (S) choisie de façon que, sous la condition $d \leqq R$, le symétrique (x_1, y_1, z_1) du point (x_0, y_0, z_0) par rapport au point O soit extérieur au domaine (D) et que, de plus, le point O soit le point de la surface (S) le plus voisin du point (x_1, y_1, z_1). L'existence de la longueur R est une conséquence immédiate de l'hypothèse faite au sujet de la surface (S). Soit d'abord $d > R$. On conclura immédiatement de la formule (11) que, dans ce cas, le module de g et, à plus forte raison, la valeur absolue de $g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)$ ne dépasseront pas une limite assignable. D'ailleurs, l'inégalité (21) nous donne, en tenant compte de la relation $\beta = -2ab$, $|\beta| > a^2$. Il suffit maintenant de se reporter à l'équation (19) pour être assuré de l'existence de la constante H qui figure dans l'inégalité (20). Supposons toujours que l'inégalité (21) ait lieu, mais soit maintenant $d \leqq R$. Désignons par r_1 la distance du point (x, y, z) au point (x_1, y_1, z_1) et posons

$$g = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} + \varphi(x, y, z). \tag{22}$$

La fonction φ vérifiera l'équation

$$\Delta\varphi + \xi\varphi = 0,$$

et le module de cette fonction sur la surface (S) ne dépassera pas la quantité $H' + H''md$, où H' et H'' sont des constantes positives, dépendant uniquement de la surface (S). En supposant, ce qui est permis, que R soit assez petit pour que, sous la condition $d \leqq R$, l'inégalité (13) ait lieu, on déduira de là et de l'équation (22) que l'on aura

$$|g(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0)| < \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-2ad}|\sin 2bd|}{2d} + \frac{me^{-ad}}{a}E(H' + H''md).$$

Par conséquent, l'équation (19) nous donnera

$$1 < \frac{A'}{a} + B'\frac{me^{-ad}}{a|\beta|} + C'\frac{m^2de^{-ad}}{a|\beta|}, \tag{23}$$

où A', B' et C' sont des constantes ne dépendant que de la surface (S). D'ailleurs,

$$\frac{m^2de^{-ad}}{a\beta} = \frac{m^2ade^{-ad}}{a^2\beta} \tag{24}$$

et

$$\frac{m^2}{a^2\beta} = -\frac{a^2 + b^2}{2a^3b} = -\frac{1}{2ab} - \frac{b}{2a^2}\frac{1}{a}. \tag{25}$$

Or, l'inégalité (12) nous donne

$$\frac{m^2}{a^4} = \frac{a^2 + b^2}{a^4} < \varepsilon^2,$$

d'où

$$\left|\frac{b}{a^2}\right| < \varepsilon;$$

l'équation (25) nous donnera, par conséquent, en tenant compte de l'inégalité (21),

$$\left|\frac{m^2}{a^2\beta}\right| < \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{\varepsilon}{2}\right);$$

donc, en vertu de l'équation (24),

$$\left|\frac{m^2 de^{-ad}}{a\beta}\right| < \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

et comme $m > a$, l'inégalité (21) nous donne

$$\frac{1}{a} < \varepsilon;$$

il vient, par conséquent,

$$\left|\frac{m^2 de^{-ad}}{a\beta}\right| < \frac{1}{a}\,\frac{3\varepsilon}{2}. \tag{26}$$

L'inégalité (21) entraîne la conséquence $|\beta| \geqq a^2$; on aura à cause de cela

$$\left|\frac{m}{a\beta}\right| < \frac{1}{a}\,\frac{m}{a^2},$$

d'où, à cause de l'inégalité (12),

$$\left|\frac{m}{a\beta}\right| < \frac{\varepsilon}{a}.$$

Il résulte immédiatement de cette inégalité et des inégalités (26) et (23) que la constante H qui figure dans l'inégalité (20) existera dans le cas que nous venons d'examiner.

Il nous faut maintenant envisager le cas où, au lieu d'avoir l'inégalité (21), on a

$$|b| < \frac{a}{2}.$$

La relation

$$-\alpha = a^2 - b^2$$

nous montre que α sera négatif et que, si t est un nombre positif tel que l'on ait $t^2 = -\alpha$, on aura

$$(27) \qquad t > a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Désignons par G′ la fonction à laquelle se réduit la fonction G lorsque ξ se réduit à $-t^2$; on aura, comme l'a remarqué M. Poincaré dans le Mémoire déjà plusieurs fois cité,

$$0 < G' < \frac{e^{-tr}}{4\pi r},$$

d'où

$$(28) \qquad \int_D G'^2\, d\tau < \frac{1}{8\pi t}.$$

Le coefficient G_2 de l'unité imaginaire dans la fonction G vérifie, comme nous avons déjà eu l'occasion de le remarquer, l'équation

$$\Delta G_2 + \alpha G_2 + \beta G_1 = 0,$$

où G_1 est la partie réelle de G, dans toute l'étendue du domaine D, exception faite du point (x_0, y_0, z_0) où cette équation n'a pas de sens. Nous aurons donc, puisque $\alpha = -t^2$,

$$\Delta G_2 - t^2 G_2 + \beta G_1 = 0.$$

On sait que la fonction G_2 reste finie, même au point (x_0, y_0, z_0), et que ses dérivées du premier ordre par rapport à (x, y, z) sont, dans le voisinage du point (x_0, y_0, z_0), de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$, r étant la distance des points (x, y, z) et (x_0, y_0, z_0). Or, il est aisé de s'assurer qu'une fonction $\psi(x, y, z)$ qui s'annule sur la frontière du domaine (D), qui reste finie et continue au point (x_0, y_0, z_0), dont les dérivées premières dans le voisinage du point (x_0, y_0, z_0) sont de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{r}$ et qui satisfait à l'équation

$$\Delta\psi - t^2\psi + \beta G_1 = 0$$

dans toute l'étendue du domaine (D), sauf au point (x_0, y_0, z_0), doit forcément se confondre avec la fonction G_2. Nous aurons donc, en désignant comme plus haut par G' la fonction de Green pour $\xi = -t^2$,

$$\begin{aligned}
&G_2(x_0, y_0, z_0, x, y, z)\\
&\quad = \beta \int_D G_1(x_0, y_0, z_0, x', y', z') G'(x, y, z, x', y', z')\, d\tau,
\end{aligned}$$

où $d\tau$ est l'élément de volume relatif au point (x', y', z'). On déduit de là, en tenant compte de l'inégalité évidente,

$$\int_D G_1^2\, d\tau < \int_D (G_1^2 + G_2^2)\, d\tau = I,$$

et en s'appuyant sur l'inégalité (28),

$$|G_2| < |\beta| \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{8\pi t}};$$

on aura donc, en désignant par η une fonction dont le module est inférieur à 1,

$$G_2 = \frac{\beta\sqrt{I}}{\sqrt{8\pi t}}\,\eta.$$

D'ailleurs,

$$G_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = -\frac{b}{4\pi} + g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0).$$

Il viendra donc, en désignant par η_0 la valeur de la fonction η au point (x_0, y_0, z_0),

$$g_2(x_0, y_0, z_0, x_0, y_0, z_0) = \frac{b}{4\pi} + \beta \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{8\pi t}}\,\eta_0.$$

On trouve, en portant cette valeur de g_2 dans l'équation (19) et en se rappelant que $\beta = -2ab$,

$$I = \frac{\sqrt{I}}{\sqrt{8\pi t}}\,\eta_0,$$

d'où

$$I < \frac{1}{8\pi t},$$

d'où enfin, à l'aide de l'inégalité (27),

$$I < \frac{2}{8\pi\sqrt{3}a},$$

ce qui prouve que dans ce cas encore l'inégalité (20) sera vérifiée si H est convenablement choisi.

III. — Intégrales analogues à celles de M. Schwarz.

6. Changeons dans l'équation (3) ξ en $\xi + h$ et développons la fonction u suivant les puissances entières et positives de h, soit

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j h^j. \tag{29}$$

Les résultats établis par M. Poincaré rendent certaine la possibilité de ce développement, développement qui nous servira à trouver une limite supérieure du module de u.

J'observe que les fonctions u_0, u_1, u_2, ... s'annulent toutes sur la surface (S) et qu'elles satisfont dans toute l'étendue du domaine (D) que limite la surface (S) aux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta u_0 + \xi u_0 + f = 0, & \\ \Delta u_j + \xi u_j + u_{j-1} = 0 & (j = 1, 2, 3, \ldots). \end{array}\right. \tag{30}$$

Mettons en évidence les parties réelle et imaginaire de chacune des quantités que nous avons à considérer et posons à cet effet

$$\xi = \alpha + i\,\beta,$$
$$f = f_1 + i\,f_2,$$
$$u_j = P_j + iQ_j.$$

Les fonctions P_j et Q_j s'annuleront toutes sur la surface (S) et satisferont à l'intérieur de cette surface aux équations suivantes :

$$
(31)\quad \left\{\begin{array}{l}
\Delta P_0 + \alpha P_0 - \beta Q_0 + f_1 = 0,\\
\Delta Q_0 + \alpha Q_0 + \beta P_0 + f_2 = 0,\\
\left.\begin{array}{l}\Delta P_j + \alpha P_j - \beta Q_j + P_{j-1} = 0\\
\Delta Q_j + \alpha Q_j + \beta P_j + Q_{j-1} = 0\end{array}\right\} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).
\end{array}\right.
$$

Désignons par $d\tau$ un élément de volume et posons

$$
(32)\qquad J_j = \int_D (P_j^2 + Q_j^2)\, d\tau.
$$

On déduit des équations (31) et de la relation

$$
\int_D (Q_j \Delta P_j - P_j \Delta Q_j)\, d\tau = 0,
$$

l'équation

$$
(33)\qquad \beta J_j = \int_D (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau.
$$

On trouve d'une façon analogue, en faisant usage des relations

$$
\int_D (P_{j-1} \Delta P_j - P_j \Delta P_{j-1})\, d\tau = 0
$$

et

$$
\int_D (Q_{j-1} \Delta Q_j - Q_j \Delta Q_{j-1})\, d\tau = 0,
$$

$$
\int_D P_{j-1}^2\, d\tau = \beta \int_D (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau + \int_D P_j P_{j-2}\, d\tau,
$$

$$
\int_D Q_{j-1}^2\, d\tau = \beta \int_D (Q_j P_{j-1} - Q_{j-1} P_j)\, d\tau + \int_D Q_j Q_{j-2}\, d\tau;
$$

il vient, en ajoutant ces équations membre à membre,

$$
(34)\quad J_{j-1} = \int_D [P_j (P_{j-2} - 2\beta Q_{j-1}) + Q_j (Q_{j-2} + 2\beta P_{j-1})]\, d\tau.
$$

7. Considérons pour un instant quatre fonctions quelconques φ, φ', ψ, ψ' des variables x, y, z et posons

$$L = \int_D (\varphi^2 + \psi^2)\, d\tau,$$

$$M = \int_D (\varphi\varphi' + \psi\psi')\, d\tau,$$

$$N = \int_D (\varphi'^2 + \psi'^2)\, d\tau.$$

L'intégrale suivante, où λ et λ' sont deux paramètres réels variables, ne deviendra jamais négative :

$$\int_D [(\lambda\varphi + \lambda'\varphi')^2 + (\lambda\psi + \lambda'\psi')^2]\, d\tau = \lambda^2 L + 2\lambda\lambda' M + \lambda'^2 N;$$

on aura donc

$$M^2 \leqq LN. \tag{35}$$

Soient d'abord

$$\varphi = P_j, \qquad \psi = Q_j,$$
$$\varphi' = P_{j-2} - 2\beta Q_{j-1} \qquad \text{et} \qquad \psi' = Q_{j-2} + 2\beta P_{j-1};$$

l'équation (34) et l'inégalité (35) nous donneront

$$J_{j-1}^2 < J_j \left[J_{j-2} - 4\beta \int_D (Q_{j-1} P_{j-2} - Q_{j-2} P_{j-1})\, d\tau + 4\beta^2 J_{j-1} \right],$$

d'où, en tenant compte de l'équation qui se déduit de l'équation (33) en y changeant j en $j - 1$,

$$J_{j-1}^2 < J_j J_{j-2}. \tag{36}$$

Soient, en second lieu,

$$\varphi = P_j, \qquad \psi = Q_j, \qquad \varphi' = -Q_{j-1}, \qquad \psi' = P_{j-1};$$

il viendra, à cause de l'équation (33),

$$\beta^2 J_j^2 < J_j J_{j-1},$$

d'où

(37) $$\beta^2 J_j < J_{j-1}.$$

Posons

$$J_{-1} = \int_D (f_1^2 + f_2^2)\, d\tau;$$

on verra aisément que les inégalités (36) et (37) auront lieu, même si l'on fait $j = 1$ dans la première et $j = 0$ dans la seconde. Il résulte, par conséquent, de ces inégalités que la suite

(38) $$\frac{J_0}{J_{-1}},\quad \frac{J_1}{J_0},\quad \frac{J_2}{J_1},\quad \ldots$$

sera croissante et convergente et qu'elle aura pour limite un nombre au plus égal à $\frac{1}{\beta^2}$; représentons ce nombre par $\frac{1}{l^2}$, où l est un nombre positif.

Je dis que l est précisément égal au rayon de convergence de la série (29). En effet, on a

$$u_0 = \int_D f\ \mathrm{G}\, d\tau,$$

$$u_j = \int u_{j-1} \mathrm{G}\, d\tau,$$

d'où il est très aisé de conclure que le rayon de convergence l' de la série (29) est au moins égal à l, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine (D). Soit l_1 un nombre positif aussi voisin de l' que l'on voudra, mais plus petit que ce nombre-là. On pourra trouver une constante positive A telle que l'on ait, quelle que soit la position du point (x, y, z) dans le domaine (D),

$$|u_j| < \frac{A}{l_1^j},$$

où l_2 est un nombre vérifiant les inégalités

$$l_1 < l_2 < l',$$

mais d'ailleurs quelconque. Si donc l'on désigne par T le volume du domaine (D), on aura

$$J_j < \frac{A^2 T}{l_2^{2j}}.$$

Cela prouve que le rayon de convergence de la série

$$\sum_{j=0}^{\infty} h^j \sqrt{J_j}$$

est au moins égal à l_2 et que, par suite, il est plus grand que l_1. D'ailleurs, ce rayon de convergence est évidemment égal à l, donc l'inégalité

$$l_1 < l'$$

entraîne l'inégalité

$$l_1 < l,$$

et cela, si petite que soit la différence $l' - l_1$. On en conclut

$$l' \leqq l.$$

Or, nous avons déjà vu que

$$l \leqq l',$$

donc

$$l = l'. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV. — Possibilité du développement.

8. Considérons la suite (1) définie dans l'Introduction et proposons-nous d'estimer la valeur de la différence

$$k_{j+1} - k_j.$$

M. Poincaré a montré que l'on peut trouver une constante positive M telle que l'on ait

$$k_j > \mathrm{M} j^{\frac{2}{3}}.$$

Cette inégalité ne permet pas d'affirmer que l'on ait, quel que soit j,

$$k_{j+1}^{\frac{3}{2}} - k_j^{\frac{3}{2}} > \mathrm{M}^{\frac{3}{2}},$$

mais il existera certainement une suite infinie de nombres entiers et positifs croissants

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \ldots$$

telle que l'inégalité précédente soit vérifiée sous la condition

$$j = p_\nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Il est aisé de conclure de là que l'on aura

$$(39) \qquad k_{p_\nu+1} - k_{p_\nu} > \frac{\mathrm{M}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2(k_{p_\nu+1} + k_{p_\nu})}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Cela posé, je passe à la définition des contours (C_1), (C_2), (C_3), ... considérés dans l'Introduction. Soit $\mathrm{O}\alpha$ l'axe des quantités réelles et $\mathrm{O}\beta$ celui des quantités imaginaires dans le plan de la variable imaginaire ξ. J'appelle K_ν et K'_ν les points situés sur l'axe $\mathrm{O}\alpha$ qui ont pour abscisses respectives k_{p_ν} et $k_{p_\nu+1}$, je désigne par B_ν le milieu du segment $\mathrm{K}_\nu\mathrm{K}'_\nu$ et je construis le point B'_ν qui a OB_ν pour abscisse et dont l'ordonnée, supposée positive, est déterminée par l'équation

$$(40) \qquad \overline{\mathrm{B}_\nu\mathrm{B}'_\nu} = \overline{\mathrm{OB}}_\nu^{\frac{7}{8}}.$$

Désignons par B''_ν le symétrique du point B'_ν par rapport à l'axe $\mathrm{O}\alpha$ et décrivons, en prenant le point O pour centre, un arc de cercle $\mathrm{B}'_\nu\mathrm{M}_\nu\mathrm{B}''_\nu$ rencontrant la partie négative de l'axe des quantités réelles en un point M_ν. Le contour $\mathrm{B}'_\nu\mathrm{M}_\nu\mathrm{B}''_\nu\mathrm{B}_\nu\mathrm{B}'_\nu$ sera le contour (C_ν).

9. Considérons dans le plan de la variable imaginaire ξ la branche réelle de la courbe qui a pour équation

$$\beta^8 = \alpha^7; \tag{41}$$

elle partage le plan en deux régions (R) et (R′), dont l'une (R) contient tous les arcs $B'_\nu M_\nu B''_\nu$. Je dis que lorsque le module de ξ croît indéfiniment et lorsqu'en même temps le point qui a le paramètre ξ pour affixe ne sort pas de la région (R), la valeur asymptotique de la fonction u, intégrale de l'équation (3), est $-\frac{f}{\xi}$. En d'autres termes, dans les conditions qui viennent d'être dites, l'expression $\xi u + f$ a zéro pour limite. En effet, nous avons

$$u = \int_D f\mathrm{G}\,d\tau,$$

d'où, puisque f s'annule sur la surface (S),

$$u = -\frac{f}{\xi} - \frac{1}{\xi}\int_D \Delta f\mathrm{G}\,d\tau,$$

ou bien

$$u\xi + f = -\int_D \Delta f\mathrm{G}\,d\tau;$$

par conséquent,

$$|u\xi + f| < \int_D |\Delta f|\,|\mathrm{G}|\,d\tau,$$

ce qui donne

$$|u\xi + f|^2 < \mathrm{I}\int |\Delta f|^2\,d\tau, \tag{42}$$

où I représente la quantité définie par l'équation (15).

On verra aisément que, dans les conditions où nous nous sommes placés, l'inégalité (20) sera applicable à partir d'une certaine valeur assez grande du module de ξ; l'inégalité (42) nous montre donc que la quantité $u\xi + f$ tend uniformément vers zéro comme il s'agissait de l'établir.

Il résulte de ce qui vient d'être démontré que l'intégrale curviligne

$$(43)\qquad \int_{\overset{\frown}{B'_\nu M_\nu B''_\nu}} u\, d\xi,$$

prise suivant l'arc de cercle $\overset{\frown}{B'_\nu M_\nu B''_\nu}$, a $-2\pi i f$ pour limite.

10. Il faut prouver maintenant que l'intégrale rectiligne

$$(44)\qquad \int_{\overline{B''_\nu B_\nu B'_\nu}} u\, d\xi$$

a zéro pour limite lorsque ν croît indéfiniment, et pour cela il suffira évidemment de montrer qu'il en est ainsi de l'intégrale

$$(45)\qquad \int_{\overline{B_\nu B'_\nu}} u\, d\xi.$$

Désignons par β_ν la longueur arithmétique du segment $\overline{B_\nu B'_\nu}$ et soit λ la distance du point B'_ν à un point variable situé sur $\overline{B_\nu B'_\nu}$. On aura

$$(46)\qquad \left|\int_{\overline{B_\nu B'_\nu}} u\, d\xi\right| < \int_0^{\beta_\nu} |u|\, d\lambda.$$

Cherchons à déterminer une limite supérieure du module de u. La série (29) nous donne, en y remplaçant h par $-\lambda i$ et en faisant coïncider le point qui a ξ pour affixe avec le point B'_ν,

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(-\lambda i)^j,$$

d'où

$$(47)\qquad |u| < \sum_{j=0}^{\infty} |u_j|\, \lambda^j.$$

D'ailleurs,

$$u_j = \int_D u_{j-1} G \, d\tau,$$

d'où

(48)
$$u_j = -\frac{u_{j-1}}{\xi} - \frac{1}{\xi}\int_D \Delta u_{j-1} G \, d\tau.$$

Posons

$$F = \Delta f,$$
$$w_j = \Delta u_j.$$

Il résulte des hypothèses faites au sujet de la fonction f que w_0 prendra la valeur zéro sur (S), que la quantité Δw_0 existera et que l'on aura

(49)
$$\Delta w_0 + \xi w_0 + F = 0.$$

D'ailleurs, les quantités w_1, w_2, w_3, ... s'annuleront toutes sur la surface (S) et vérifieront à l'intérieur de cette surface les équations

(50)
$$\Delta w_j + \xi w_j + w_{j-1} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots).$$

On voit de suite que les considérations développées dans la Section III au sujet des intégrales J_j sont applicables aux intégrales

$$L_{-1} = \int_D |F|^2 \, d\tau,$$
$$L_j = \int_D |w_j|^2 \, d\tau,$$

La suite

(51)
$$\frac{L_0}{L_{-1}}, \quad \frac{L_1}{L_0}, \quad \frac{L_2}{L_1}, \quad \ldots$$

sera, par conséquent, croissante et convergente. On s'assurera d'ailleurs avec la plus grande facilité que la limite de cette suite sera égale à la limite de la suite (38) en supposant, bien entendu, que ces deux suites se rapportent à une même valeur de ξ.

Reportons-nous aux notations définies au n° **8** et posons

$$l_\nu = \overline{B'_\nu K_\nu}. \tag{52}$$

Le rayon de convergence de la série (47) sera égal à l_ν; donc, en vertu de ce qui a été établi à la fin du n° **7**, la limite commune des suites (38) et (51) sera égale à $\frac{1}{l_\nu^2}$. On aura donc

$$L_j < \frac{L_{-1}}{l_\nu^{2(j+1)}}.$$

Nous concluons de là et de l'équation (48), en désignant par ρ_ν le module de ξ et en conservant à la lettre I la signification que lui assigne l'équation (15),

$$|u_j| < \frac{|u_{j-1}|}{\rho_\nu} + \frac{\sqrt{\mathrm{I}L_{-1}}}{\rho_\nu l_\nu^j} \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots). \tag{53}$$

Posons

$$\alpha_\nu = \overline{OB_\nu} = \frac{k_{p_\nu+1} + k_{p_\nu}}{2}.$$

Il résulte de l'inégalité (39) qu'il existera une constante positive C, telle que l'on ait

$$l_\nu^2 - \beta_\nu^2 > \frac{C}{\alpha_\nu}.$$

Si donc l'on pose

$$\lambda_\nu^2 = \beta_\nu^2 + \frac{C}{\alpha_\nu}, \tag{54}$$

l'on aura

$$l_\nu > \lambda_\nu$$

et l'inégalité (53) nous donnera

$$|u_j| < \frac{|u_{j-1}|}{\rho_\nu} + \frac{\sqrt{\mathrm{I}L_{-1}}}{\rho_\nu \lambda_\nu^j}. \tag{55}$$

Or, d'après ce qui a été établi au numéro précédent, il existera certainement une constante positive A, telle que l'on ait

$$|u_0| < \frac{A}{\rho_\nu},$$

il résulte de là, de l'inégalité (55) et de ce que les quantités

$$\frac{\lambda_\nu}{\rho_\nu} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}$$

tendent vers zéro lorsque ν croît indéfiniment, que l'on aura

$$|u_j| < \frac{A}{\rho_\nu \lambda_\nu^j}, \tag{55}$$

sous la seule condition

$$\nu > n, \tag{56}$$

n étant un entier positif assez grand.

On conclut des inégalités (47) et (55) que sous la condition (56), l'on aura

$$|u| < \frac{A\lambda_\nu}{\rho_\nu}\,\frac{1}{\lambda_\nu - \lambda}.$$

Donc, à cause de l'inégalité (46),

$$\left|\int_{\overline{B_\nu B'_\nu}} u\,d\xi\right| < \frac{A\lambda_\nu}{\rho_\nu}\log\frac{\lambda_\nu}{\lambda_\nu - \beta_\nu},$$

d'où, en tenant compte de l'équation (54),

$$\left|\int_{\overline{B_\nu B'_\nu}} u\,d\xi\right| < \frac{A\lambda_\nu}{\rho_\nu}\log\frac{\lambda_\nu(\lambda_\nu + \beta_\nu)\alpha_\nu}{C}. \tag{57}$$

Or les quantités λ_ν et β_ν sont de l'ordre de grandeur de $\alpha_\nu^{\frac{7}{8}}$ et ρ_ν est du même ordre de grandeur que α_ν. Il suit de là que le second membre de l'inégalité (57) tend vers zéro lorsque ν croît indéfiniment. Donc lorsque ν croît indéfiniment le module de l'intégrale (45) et, par suite, celui de l'intégrale (44) tendent vers zéro.

11. Les propositions établies dans les deux numéros précédents conduisent à cette conséquence que l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu} u\,d\xi,$$

a $-f(x, y, z)$ pour limite lorsque l'indice ν croît indéfiniment. Cela posé, il suffit de se reporter au § XI du Mémoire, déjà si souvent cité, de M. Poincaré, pour reconnaître que, si l'on désigne par

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\quad \ldots \tag{58}$$

des constantes convenablement déterminées et que si l'on pose

$$W_\nu = \sum_{t=p_{\nu-1}+1}^{p_\nu} A_t U_t,$$

en convenant de faire $p_0 = 0$, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} W_\nu \tag{59}$$

sera uniformément convergente dans tout le domaine (D) et aura $f(x, y, z)$ pour somme. C'est le théorème énoncé dans l'Introduction. J'ajoute qu'il est aisé de conclure de la convergence uniforme de la série (59) et des propriétés de l'intégrale (2) que l'on aura

$$A_t = \int_D f\,U_t\,d\tau.$$

V. — Sur le problème de Dirichlet.

12. Je désire faire remarquer, en terminant ce travail, que l'on peut déduire de la méthode que j'ai donnée pour intégrer l'équation

$$\Delta v + \xi v = 0 \tag{60}$$

une démonstration très simple et très générale du principe de Dirichlet.

En effet, désignons par t un nombre positif assez grand, posons $\xi = - t^2 + h$ et développons v suivant les puissances entières et positives de h. Soit

$$v = \sum_{j=0}^{\infty} v_j h^j, \tag{61}$$

on verra facilement que les fonctions v_j pourront toutes être calculées par les méthodes que j'ai exposées et que le rayon de convergence de la série (61) sera plus grand que t^2. Il suffira donc de faire, dans la série précédente, $h = t^2$ pour que la somme v de cette série représente la solution du problème de Dirichlet.