JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNST LINDELÖF

Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 423-441.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__423_0>

Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles;

PAR M. ERNST **LINDELÖF**.

---

1. Étant donné un système d'équations différentielles ordinaires

$$(1) \qquad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

nous nous proposons d'étudier ses solutions générales,

$$(2) \qquad y_i = \varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

comme fonctions des valeurs initiales $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$. Nous nous plaçons d'abord dans le cas où les variables et les fonctions ne prennent que des valeurs *réelles*.

Pour abréger, nous conviendrons de dire, en regardant $x, y_1, \ldots, y_n$ comme les coordonnées d'un point de l'espace à $n+1$ dimensions, que les équations (2) représentent la *caractéristique* passant par le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$. Considérons en particulier la caractéristique

$$(3) \qquad \bar{y}_i = \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0) \equiv \bar{\varphi}_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui passe par un point donné $\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0$, et admettons les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions $\bar{\varphi}(x)$ sont continues dans l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leqq l$.

2° Les seconds membres des équations (1) sont des fonctions continues de $x, y_1, \ldots, y_n$ dans le domaine T de l'espace à $n+1$ dimensions défini par les inégalités

$$(4) \qquad |x - \bar{x}_0| \leqq l, \qquad |y_1 - \bar{\varphi}_1(x)| + \ldots + |y_n - \bar{\varphi}_n(x)| \leqq \rho.$$

3° De plus, ces fonctions satisfont à la *condition de Lipschitz :*

$$|f_i(x, y'_1, \ldots y'_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| < k_1 |y'_1 - y_1| + \ldots + k_n |y'_n - y_n|$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

$x, y_1, \ldots, y_n$ et $x, y'_1, \ldots, y'_n$ étant deux points quelconques du domaine T et $k_1, \ldots, k_n$ des constantes positives.

Ces conditions supposées remplies, la méthode d'intégration de Cauchy-Lipschitz ([1]) nous apprend que, par chaque point de T, passe une caractéristique et une seule ([2]), laquelle restera continue tant qu'elle ne sortira pas de ce domaine. Prenons d'abord

$$(5) \qquad x_0 = \bar{x}_0, \qquad y_1^0 = \bar{y}_1^0 + \eta_1^0, \ldots, y_n^0 = \bar{y}_n^0 + \eta_n^0$$

pour coordonnées du point initial et posons

$$\eta_i = y_i - \bar{y}_i \equiv \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0 + \eta_1^0, \ldots, \bar{y}^0 + \eta_n^0) - \varphi_i(x, \bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0).$$

Nous aurons

$$(6) \quad \frac{d\eta_i}{dx} = f_i(x, \bar{y}_1 + \eta_1, \ldots, \bar{y}_n + \eta_n) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

([1]) *Voir* E. Picard, *Traité d'Analyse,* t. II, p. 291, et *Comptes rendus,* juin 1899. — P. Painlevé, *Bulletin de la Société Mathématique,* t. XXVII, p. 149.

([2]) Pour ce dernier point, *voir* le Mémoire de l'auteur inséré dans le *Journal de Mathématiques,* t. X, p. 117; 1894.

d'où il suit, en vertu de l'hypothèse 3°,

$$\left|\frac{d\eta_i}{dx}\right| < k_1|\eta_1| + \ldots + k_n|\eta_n| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou encore, en ajoutant ces inégalités et désignant par K le plus grand des nombres k,

$$\left|\frac{d}{dx}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|)\right| \leqq \left|\frac{d\eta_1}{dx}\right| + \ldots + \left|\frac{d\eta_n}{dx}\right| < n\mathrm{K}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|),$$

et, par suite, en intégrant,

$$(7) \qquad |\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < (|\eta_1^0| + \ldots + |\eta_n^0|)\, e^{n\mathrm{K}|x-\bar{x}_0|},$$

inégalité qui subsistera certainement tant que la caractéristique passant par le point (5) restera comprise dans le domaine T, c'est-à-dire tant qu'on aura

$$|x - \bar{x}_0| \leqq l, \qquad |\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < \rho.$$

Or, si nous imposons aux quantités η^0 la condition

$$(8) \qquad |\eta_1^0| + \ldots + |\eta_n^0| < \rho e^{-n\mathrm{K}l},$$

le second membre de (7) restera inférieur à ρ dans tout l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leqq l$. Il en sera donc de même du premier membre; car celui-ci, étant inférieur à ρ pour $x = \bar{x}_0$, ne saurait atteindre la valeur ρ, pour une valeur x dans l'intervalle considéré, qu'après avoir dépassé le second membre, et, d'autre part, d'après ce que nous avons dit tout à l'heure, le premier membre de (7) ne saurait dépasser le second, pour $|x - \bar{x}_0| < l$, qu'après avoir atteint la valeur ρ. Donc, *la caractéristique passant par le point* $\bar{x}_0, \bar{y}_1^0 + \eta_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0 + \eta_n^0$ *restera comprise dans le domaine* T *et assujettie à l'inégalité* (7) *pour* $|x - \bar{x}_0| \leqq l$, *dès que la condition* (8) *sera remplie.*

Cette conclusion se généralise de suite en substituant au point

$\overline{x}_0, \overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0$ un point quelconque de la caractéristique (3). Nous arrivons ainsi au résultat suivant, dont nous aurons à faire un usage continuel:

La caractéristique passant par un point quelconque $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ du domaine T_0 défini par les inégalités

$$(9)\qquad \begin{cases} |x-\overline{x}_0| \leqq l, \\ |y_1-\overline{\varphi}_1(x)|+\ldots+|y_n-\overline{\varphi}_n(x)| < \rho e^{-nK(l+|x-\overline{x}_0|)}, \end{cases}$$

reste comprise à l'intérieur du domaine T et assujettie à la condition

$$(10)\qquad \sum_1^n |y_i-\overline{\varphi}_i(x)| < \sum_1^n |y_i^0-\overline{\varphi}_i(x_0)| e^{nK|x-x_0|}$$

pour toutes les valeurs x appartenant à l'intervalle $|x-\overline{x}_0| \leqq l$.

2. D'après cela nous pouvons affirmer que les solutions (2) sont des fonctions bien définies de $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, pour x dans l'intervalle $|x-\overline{x}_0| \leqq l$ et $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ dans le domaine T_0. Nous allons faire voir que ce sont des fonctions continues.

Considérons à cet effet la caractéristique passant par un point $\overline{x}_0+\Delta x_0, \overline{y}_1^0+\Delta y_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0+\Delta y_n^0$ compris dans le domaine T_0 et voisin du point $\overline{x}_0, \overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0$, et posons

$$\eta_i = \varphi_i(x, \overline{x}_0+\Delta x_0, \overline{y}_j^0+\Delta y_j^0) - \varphi_i(x, \overline{x}_0, \overline{y}_j^0).$$

Le théorème ci-dessus nous donne, pour $|x-\overline{x}_0| \leqq l$,

$$|\eta_1|+\ldots+|\eta_n| < \sum_1^n |\overline{y}_i^0+\Delta y_i^0-\overline{\varphi}_i(\overline{x}_0+\Delta x_0)| e^{nK|x-\overline{x}_0-\Delta x_0|}.$$

Mais, en désignant par M la plus grande valeur absolue des seconds membres des équations (1) dans le domaine T, on a

$$|\overline{y}_i^0-\overline{\varphi}_i(\overline{x}_0+\Delta x_0)| \equiv |\overline{\varphi}_i(\overline{x}_0)-\overline{\varphi}_i(\overline{x}_0+\Delta x_0)| < M|\Delta x_0|.$$

Il vient donc

$$|\eta_1|+\ldots+|\eta_n|<(|\Delta y_1^0|+\ldots+|\Delta y_n^0|+n\mathrm{M}\,|\Delta x_0|)\,e^{n\mathrm{K}(l+|\Delta x_0|)},$$

et comme on a d'ailleurs, pour $|x+\Delta x-\bar{x}_0|\leqq l$,

$$|\xi_i|\equiv|\varphi_i(x+\Delta x,\bar{x}_0+\Delta x_0,\bar{y}_j^0+\Delta y_j^0)-\varphi_i(x,\bar{x}_0+\Delta x_0,\bar{y}_j^0+\Delta y_j^0)|<\mathrm{M}\,|\Delta x|,$$

nous trouvons enfin l'inégalité

$$\begin{aligned}
&\sum_1^n|\varphi_i(x+\Delta x,\bar{x}_0+\Delta x_0,\bar{y}_j^0+\Delta y_j^0)-\varphi_i(x,\bar{x}_0,\bar{y}_j^0)|\\
&\quad\equiv\sum_1^n|\eta_i+\xi_i|\leqq\sum_1^n(|\eta_i|+|\xi_i|)\\
&\quad<(|\Delta y_1^0|+\ldots+|\Delta y_n^0|+n\mathrm{M}|\Delta x_0|)\,e^{n\mathrm{K}(l+|\Delta x_0|)}+n\mathrm{M}\,|\Delta x|,
\end{aligned}$$

qui nous montre que les solutions (2) sont des fonctions continues de x, x_0, y_1^0, ..., y_n^0 pour

$$|x-\bar{x}_0|\leqq l,\qquad x_0=\bar{x}_0,\qquad y_1^0=\bar{y}_1^0,\qquad \ldots,\qquad y_n^0=\bar{y}_n^0.$$

Mais ce résultat s'étend immédiatement à tout système de valeurs x_0, y_1^0, ..., y_n représentant un point du domaine T_0 (9). En effet, les raisonnements et les conclusions qui précèdent restent encore valables si, à la caractéristique (3), nous substituons une caractéristique quelconque passant par un point de T_0, puisque, d'après le n° **1**, une telle caractéristique reste comprise à l'*intérieur* du domaine T pour $|x-\bar{x}_0|<l$. Nous avons donc démontré ce théorème :

En admettant les hypothèses énoncées au n° **1**, *les solutions des équations* (1) *qui, pour $x=x_0$, prennent respectivement les valeurs y_1^0, ..., y_n^0, sont des fonctions continues de x, x_0, y_1^0, ..., y_n^0, tant que la variable x restera dans l'intervalle $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ et le point x_0, y_1^0, ..., y_n^0 dans le domaine* T_0.

3. Considérons en second lieu un système d'équations différentielles

$$(11)\quad \frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\ldots,y_n,\mu)\equiv f_i(x,y_j,\mu)\qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

où figure un paramètre arbitraire μ, et soient

$$(12)\qquad y_i=\varphi_i(x,\mu)\qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

les équations de la caractéristique passant par le point $\bar{x}_0, \bar{y}_1^0, \ldots, \bar{y}_n^0$. Nous allons étudier les φ comme fonctions du paramètre μ, en faisant les hypothèses suivantes :

1° Les fonctions

$$\bar{y}_i=\varphi_i(x,0)\equiv\bar{\varphi}_i(x)$$

sont continues pour $|x-\bar{x}_0|\leqq l$.

2° Les seconds membres des équations (11) sont des fonctions continues de $x, y_1, \ldots, y_n$ et μ pour les valeurs $x, y_1, \ldots, y_n$ comprises dans le domaine T, (4), et pour $|\mu|\leqq r$.

3° Ces fonctions vérifient, en outre, les inégalités

$$|f_i(x,y'_j,\mu)-f_i(x,y_j,\mu)|<k_1|y'_1-y_1|+\ldots+k_n|y'_n-y_n|,$$

$x, y_1, \ldots, y_n$ et $x, y'_1, \ldots, y'_n$ étant deux points quelconques du domaine T et μ inférieur ou égal à r, en valeur absolue.

En faisant comme plus haut

$$\eta_i=y_i-\bar{y}_i\equiv\varphi_i(x,\mu)-\varphi_i(x,0),$$

nous aurons

$$(13)\left\{\begin{aligned}\frac{d\eta_i}{dx}&=f_i(x,\bar{y}_1+\eta_1,\ldots,\bar{y}_n+\eta_n,\mu)-f_i(x,\bar{y}_1,\ldots,\bar{y}_n,0)\\ &=\quad[f_i(x,\bar{y}_j+\eta_j,\mu)-f_i(x,\bar{y}_j,\mu)]\\ &\quad+[f_i(x,\bar{y}_j,\mu)\qquad -f_i(x,\bar{y}_j,0)]\\ &\qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right.$$

Soit $m(\delta)$ la plus grande valeur absolue des expressions

$$f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \mu) - f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

pour $|x - \bar{x}_0| \leqq l$, $|\mu| \leqq \delta (\leqq r)$; l'égalité précédente nous donnera

$$\left|\frac{d\eta_i}{dx}\right| < k_1|\eta_1| + \ldots + k_n|\eta_n| + m(\delta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou en ajoutant, et désignant toujours par K le plus grand des nombres k,

$$\left|\frac{d}{dx}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|)\right| \leqq \left|\frac{d\eta_1}{dx}\right| + \ldots + \left|\frac{d\eta_n}{dx}\right|$$
$$< n\mathrm{K}(|\eta_1| + \ldots + |\eta_n|) + nm(\delta),$$

d'où l'on tire, en observant que les η s'annulent pour $x = \bar{x}_0$,

$$(14) \qquad |\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < \frac{m(\delta)}{\mathrm{K}}\left(e^{n\mathrm{K}|x - \bar{x}_0|} - 1\right),$$

inégalité qui subsistera certainement tant qu'on aura

$$|\eta_1| + \ldots + |\eta_n| < \rho, \qquad |\mu| \leqq \delta, \qquad |x - \bar{x}_0| \leqq l.$$

Or, puisque la quantité $m(\delta)$, en vertu de l'hypothèse 2°, tend vers zéro en même temps que δ, nous pouvons trouver une valeur δ_0 telle que

$$\frac{m(\delta_0)}{\mathrm{K}}\left(e^{n\mathrm{K}l} - 1\right) \leqq \rho, \qquad \delta_0 \leqq r.$$

Le second membre de (14) restera donc inférieur à ρ pour

$$|x - \bar{x}_0| < l, \qquad |\mu| \leqq \delta_0,$$

et, par suite, nous arrivons à cette conclusion que *la caractéristique* (12) *restera enfermée dans le domaine* T *et assujettie à l'inégalité* (14) *pour toutes les valeurs x comprises dans l'intervalle $|x - \bar{x}_0| \leqq l$, dès qu'on aura $|\mu| \leqq \delta_0$.*

Les quantités η tendant dès lors uniformément vers zéro dans l'intervalle $|x-\overline{x}_0|\leqq l$, lorsque μ tend vers zéro, on voit que les solutions (12) sont des fonctions continues de x et μ pour $|x-\overline{x}_0|\leqq l$, $\mu=0$. Mais, d'après les résultats ci-dessus, cette conclusion s'applique aussi bien à toute autre valeur μ telle que $|\mu|\leqq\delta_0$, et nous pouvons donc énoncer encore cet autre résultat :

Sous les conditions énumérées plus haut, les solutions (12) *du système* (11) *sont des fonctions continues de x et μ dans les intervalles* $|x-\overline{x}_0|\leqq l$, $|\mu|\leqq\delta_0$.

Remarque. — Les propositions que nous venons de démontrer s'étendent immédiatement au cas où les seconds membres des équations (11) dépendent d'un nombre quelconque de paramètres arbitraires. On pourrait en déduire aisément les résultats des nos **1** et **2**, mais pour rendre l'exposition plus claire, nous avons préféré suivre l'ordre du texte.

4. Appliquons le résultat précédent aux équations linéaires

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx}=F_{i0}(x,\mu_1,\ldots,\mu_p)+y_1F_{i1}(x,\mu_1,\ldots,\mu_p)+\ldots \\ \qquad\qquad +y_nF_{in}(x,\mu_1,\ldots,\mu_p) \\ \qquad\qquad (i=1,2,\ldots,n), \end{cases}$$

en supposant que les F sont des fonctions continues de x et des paramètres $\mu_1,\ldots,\mu_p$, tant que x restera dans l'intervalle $|x-\overline{x}_0|\leqq l$, et $\mu_1,\ldots,\mu_p$ dans certains intervalles dont nous désignerons l'ensemble par (μ). D'après la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires, laquelle est une conséquence immédiate de la méthode d'intégration de Cauchy-Lipschitz, les solutions du système (15) qui, pour $x=\overline{x}_0$, prennent des valeurs constantes quelconques $y_1^0,\ldots,y_n^0$, peuvent être présentées sous la forme

$$(16)\quad \begin{cases} y_i=\psi_{i0}(x,\mu_1,\ldots,\mu_p)+y_1^0\psi_{i1}(x,\mu_1,\ldots,\mu_p)+\ldots \\ \qquad\qquad +y_n^0\psi_{in}(x,\mu_1,\ldots,\mu_p) \\ \qquad (\psi_{ii}=1,\ \psi_{ik}=0 \text{ pour } x=\overline{x}_0\ i\neq k), \end{cases}$$

les ψ étant des fonctions continues de x pour $|x-\bar{x}_0|\leqq l$, quels que soient $\mu_1, \ldots, \mu_p$ dans les intervalles (μ). En désignant par $\mu_1^0, \ldots, \mu_p^0$ un système quelconque de valeurs comprises dans ces intervalles, on voit dès lors que les équations (15) satisfont à toutes les hypothèses énoncées au n° **3**, pour $|x-\bar{x}_0|\leqq l$, $|\mu_1-\mu_1^0|, \ldots, |\mu_p-\mu_p^0|$ inférieurs à certaines limites, et $y_1, \ldots, y_n$ compris dans des intervalles finis quelconques. Donc, d'après le résultat du numéro cité, les expressions (16), ou bien les $\psi(x, \mu_1, \ldots, \mu_p)$ sont des fonctions continues de $x, \mu_1, \ldots, \mu_p$ pour x dans l'intervalle $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ et $\mu_1, \ldots, \mu_p$ dans un certain voisinage des valeurs $\mu_1^0, \ldots, \mu_p^0$, et comme ces valeurs étaient choisies arbitrairement dans les intervalles (μ), nous obtenons par suite le théorème que voici :

Si les seconds membres des équations linéaires (15) *sont des fonctions continues de* $x, \mu_1, \ldots, \mu_p$ *pour* $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ *et pour les valeurs* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *comprises dans certains intervalles, il en est de même des solutions de ces équations qui, pour* $x=\bar{x}_0$, *prennent des valeurs constantes quelconques.*

5. Retournons aux équations (1), en adoptant la notation et les hypothèses du n° **1** mais supposant, en outre, que *les seconds membres de* (1) *admettent des dérivées partielles du premier ordre par rapport à* $y_1, \ldots, y_n$ *qui sont des fonctions continues de* $x, y_1, \ldots, y_n$ *dans le domaine* T. Dans ces conditions, nous allons démontrer que les solutions générales (2) de nos équations ont, par rapport à $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, des dérivées du premier ordre, continues pour x dans l'intervalle $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ et $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ dans le domaine T_0.

Nous partons des équations (6) que nous écrivons sous la forme [1]

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\eta_i}{dx} = \eta_1 F_{i1}(x, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0) + \ldots + \eta_n F_{in}(x, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \end{array} \right.$$

[1] *Cf.* la Note de M. HADAMARD, *Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales* (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. XXVIII, p. 64), Note dont nous n'avons eu connaissance qu'après avoir livré le manuscrit de ce Mémoire.

en posant (pour abréger, nous écrivons y_i au lieu de $\overline{y}_i + \eta_i$)

$$F_{i1} = \frac{1}{\eta_1}\left[f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, \overline{y}_1, y_2, \ldots, y_n)\right],$$

$$F_{i2} = \frac{1}{\eta_2}\left[f_i(x, \overline{y}_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, y_3, \ldots, y_n)\right],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$F_{in} = \frac{1}{\eta_n}\left[f_i(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{n-1}, y_n) - f_i(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{n-1}, \overline{y}_n)\right].$$

Ces expressions sont des fonctions continues de x, η_1^0, ..., η_n^0 pour x dans l'intervalle $|x - \overline{x}_0| \leqq l$ et pour les valeurs η_1^0, ..., η_n^0 satisfaisant à l'inégalité (8). En effet, pour ces valeurs de x et des η^0, les y et les η sont, d'après le n° **2**, des fonctions continues, et les points dont les coordonnées sont respectivement $x, y_1, \ldots, y_n$; $x, \overline{y}_1, y_2, \ldots, y_n$; ...; $x, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ restent compris à l'intérieur du domaine T. D'après les hypothèses du n° **1**, les expressions entre crochets ci-dessus seront donc aussi continues, et, par suite, la fonction F_{ik} sera certainement continue pour les valeurs x, η_1^0, ..., η_n^0 qui n'annulent pas η_k. Mais, d'autre part, le théorème des accroissements finis nous donne

$$F_{ik} = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{k-1}, \overline{y}_k + \theta\eta_k, y_{k+1}, \ldots, y_n) \qquad (0 < \theta < 1),$$

d'où nous concluons, en vertu de l'hypothèse faite au début de ce numéro, que la fonction F_{ik} est encore continue pour les valeurs x, $\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0$ annulant η_k et comprises dans les intervalles indiqués. Notre proposition est donc démontrée.

Dès lors, nous aurons, en appliquant aux équations (17) le résultat du n° **4**,

$$(18)\quad \begin{cases} \eta_i = \varphi_i(x, \overline{x}_0, \overline{y}_1^0 + \eta_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0 + \eta_n^0) - \varphi_i(x, \overline{x}_0, \overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0) \\ \quad = \eta_1^0 \psi_{i1}(x, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0) + \ldots + \eta_n^0 \psi_{in}(x, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0) \\ (\psi_{ii} = 1,\ \psi_{ik} = 0 \text{ pour } x = \overline{x}_0;\ i, k = 1, 2, \ldots, n,\ i \neq k), \end{cases}$$

les ψ étant des fonctions continues de x, $\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0$ pour $|x - \overline{x}_0| \leqq l$

et pour les valeurs $\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0$ satisfaisant à l'inégalité (8). Donc, les différences

$$\psi_{ik}(x, \eta_1^0, \ldots, \eta_n^0) - \psi_{ik}(x, 0, \ldots, 0) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

tendront (uniformément) vers zéro avec $\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0$, pour $|x - \overline{x}_0| \leqq l$, et, par suite, nous pouvons tirer des équations (18) cette conclusion que *les fonctions* $\varphi(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *ont, pour* $|x - \overline{x}_0| \leqq l$, $x_0 = \overline{x}_0$, $y_1^0 = \overline{y}_1^0, \ldots, y_n^0 = \overline{y}_n^0$, *des dérivées partielles du premier ordre par rapport à* $y_1^0, \ldots, y_n^0$, dont les valeurs sont

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k^0}(x, \overline{x}_0, \overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0) = \psi_{ik}(x, 0, \ldots, 0) \equiv \overline{\psi}_{ik}(x) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On obtient évidemment les fonctions $\overline{\psi}_{1k}, \overline{\psi}_{2k}, \ldots, \overline{\psi}_{nk}$, en intégrant les équations linéaires

$$\frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) Y_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n) Y_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

avec les conditions initiales

$$Y_k = 1, \quad Y_1 = \ldots = Y_{k-1} = Y_{k+1} = \ldots = Y_n = 0, \quad \text{pour} \quad x = \overline{x}_0.$$

Quant au paramètre x_0, nous faisons remarquer qu'on a identiquement

$$\varphi_i(x, \overline{x}_0 + \Delta x_0, \overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0) = \varphi_i(x, \overline{x}_0, \overline{y}_1^0 + \Delta y_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0 + \Delta y_n^0),$$

les Δy^0 désignant des quantités qui tendent vers zéro avec Δx_0 de telle manière que

$$\lim \frac{\Delta y_i^0}{\Delta x_0} = -f_i(\overline{x}_0, \overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Écrivons cette identité sous la forme

$$\frac{\varphi_i(x, \overline{x}_0 + \Delta x_0, \overline{y}_j^0) - \varphi_i(x, \overline{x}_0, \overline{y}_j^0)}{\Delta x_0} = \frac{\varphi_i(x, \overline{x}_0, \overline{y}_j^0 + \Delta y_j^0) - \varphi_i(x, \overline{x}_0, \overline{y}_j^0)}{\Delta x_0}.$$

Lorsque Δx_0 tendra vers zéro, le second membre aura pour limite

$$-\left[\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1^0}(x,\bar{x}_0,\bar{y}_j^0)f_1(\bar{x}_0,\bar{y}_1^0,\ldots,\bar{y}_n^0)+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n^0}(x,\bar{x}_0,\bar{y}_j^0)f_n(\bar{x}_0,\bar{y}_1^0,\ldots,\bar{y}_n^0)\right],$$

et, par suite, *cette expression représente la dérivée de la fonction* $\varphi_i(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ *par rapport à* x_0, *pour* $x_0=\bar{x}_0$, $y_1^0=\bar{y}_1^0$, $\ldots$, $y_n^0=\bar{y}_n^0$, $|x-\bar{x}_0|\leqq l$.

6. Les résultats que nous venons d'établir pour $x_0=\bar{x}_0$, $y_1^0=\bar{y}_1^0$, $\ldots$, $y_n^0=\bar{y}_n^0$, s'étendent immédiatement à un point quelconque x_0, y_1^0, $\ldots$, y_n^0 du domaine T_0. Il n'y a, en effet, qu'à recommencer la démonstration précédente en y substituant à la caractéristique (3) celle qui passe par le point x_0, y_1^0, $\ldots$, y_n^0 qu'on considère. Nous arrivons ainsi au théorème suivant, qui résume les principaux résultats acquis jusqu'à présent :

Si les seconds membres des équations (1) *ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à* y_1, $\ldots$, y_n *sont continus dans le domaine* T, *les solutions* (2) *de ces équations qui, pour* $x=x_0$, *prennent respectivement les valeurs* y_1^0, $\ldots$, y_n^0, *sont des fonctions continues de* x, x_0, y_1^0, $\ldots$, y_n^0 *et admettent, par rapport à toutes ces quantités, des dérivées du premier ordre elles-mêmes continues, tant que* x *restera dans l'intervalle* $|x-\bar{x}_0|\leqq l$ *et* $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *dans le domaine* T_0.

Les dérivées de ces solutions par rapport à y_k^0 *s'obtiennent en intégrant les équations linéaires*

$$\frac{dY_i}{dx}=\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)Y_1+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x,\varphi_1,\ldots,\varphi_n)Y_n \tag{19}$$
$$(i=1,2,\ldots,n),$$

avec les conditions initiales

$$Y_k=1,\qquad Y_1=\ldots=Y_{k-1}=Y_{k+1}=\ldots=Y_n=0,\qquad \text{pour } x=x_0.$$

Les dérivées prises par rapport à x_0 s'expriment en fonction des dérivées précédentes par les formules

$$(20)\qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0} = -\left[f_1(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1^0} + \ldots + f_n(x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n^0}\right].$$

Enfin, on aura évidemment

$$(21)\qquad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x} = f_i(x, \varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

La continuité des dérivées $\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_k^0}$ résulte immédiatement du n° **4**, si l'on observe que les équations linéaires (19) [les *équations aux variations* du système (1), suivant la terminologie de M. Poincaré] ont leurs coefficients continus pour les valeurs $x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ comprises respectivement dans l'intervalle $|x - \overline{x}_0| \leqq l$ et dans le domaine T_0. D'après l'égalité (20), on en conclut la continuité des dérivées $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}$, et celle des dérivées par rapport à x, enfin, est mise en évidence par l'expression (21).

7. Puisqu'une caractéristique est déterminée d'une manière univoque par l'un quelconque de ses points, tant que nous restons dans le domaine T, les fonctions $\varphi(x, x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ ne changent pas de valeur lorsque le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ se déplace le long d'une caractéristique. Donc, en donnant à x une valeur fixe quelconque $\overline{x}$ appartenant à l'intervalle $|x - \overline{x}_0| \leqq l$, et mettant $x, y_1, \ldots, y_n$ à la place de $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$, les fonctions

$$F_i(x, y_1, \ldots, y_n) \equiv \varphi_i(\overline{x}, x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

seront, d'après la définition même, des *intégrales* du système (1). Ces intégrales sont d'ailleurs indépendantes entre elles, puisqu'on a identiquement

$$F_i(\overline{x}, y_1, \ldots, y_n) \equiv \varphi_i(\overline{x}, \overline{x}, y_1, \ldots, y_n) = y_i,$$

et satisfont, d'après l'égalité (20), à l'équation aux dérivées partielles

$$(22)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} + f_1(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial F}{\partial y_1} + \ldots + f_n(x, y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial F}{\partial y_n} = 0.$$

Nous pouvons donc encore présenter notre résultat sous cette forme :

Si les fonctions $f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \ldots, f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$ et leurs dérivées du premier ordre par rapport à $y_1, \ldots, y_n$ sont continues dans le domaine T, *l'équation aux dérivées partielles* (22) *admet n intégrales indépendantes qui se réduisent respectivement à $y_1, \ldots, y_n$ pour $x = \overline{x}, (\overline{x}_0 - l \leqq \overline{x} \leqq \overline{x}_0 + l)$, et qui restent continues, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, pour les valeurs $x, y_1, \ldots, y_n$ comprises dans le domaine* T_0.

Les théorèmes que nous venons d'établir jouent un rôle important dans plusieurs branches de l'Analyse, notamment le Calcul des variations et l'étude *qualitative* des courbes définies par les équations différentielles, dans la voie ouverte par M. Poincaré. Pour qu'on puisse tirer parti de ces théorèmes, il est nécessaire de les démontrer, comme nous l'avons fait ci-dessus, pour tout domaine où les caractéristiques sont continues et dans lequel les équations différentielles satisfont aux conditions requises.

Les démonstrations données antérieurement par MM. Picard (1) et Bendixson (2) ne s'appliquent, directement, qu'à un domaine assez restreint. Il nous semble d'ailleurs que la méthode que nous avons suivie, tout en conduisant à des résultats plus étendus et plus précis, présente encore l'avantage d'être plus simple et plus intuitive et de se rattacher étroitement aux principes élémentaires du Calcul infinitésimal.

8. Reprenons encore les équations (11) du n° 3, en gardant les deux premières hypothèses de ce numéro, mais remplaçant l'hypothèse 3° par la suivante :

---

(1) *Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles :* Note insérée dans le Tome IV des *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, par M. G. Darboux.

(2) *Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaire* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXIV).

Les seconds membres des équations (11) *ont des dérivées partielles du premier ordre par rapport à* $y_1, \ldots, y_n$ *et* μ, *qui restent continues pour* $|\mu| \leqq r$ *et pour* $x, y_1, \ldots, y_n$ *dans* T. Soit, pour ces valeurs de $x, y_1, \ldots, y_n, \mu$,

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, \ldots, y_n, \mu)\right| \leqq \mathrm{K}, \qquad \left|\frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, \mu)\right| \leqq \mathrm{M}.$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

La quantité désignée plus haut par $m(\delta)$ pourra être remplacée par le produit $\mathrm{M}\delta$, ce qui nous permettra tout d'abord de présenter le résultat du numéro cité sous la forme plus précise que voici :

Les solutions (12) *des équations* (11) *sont des fonctions continues de* x *et* μ, *et la caractéristique qu'elles représentent reste à l'intérieur du domaine* T, *pour les valeurs de* x *et de* μ *comprises dans les intervalles*

$$(23) \qquad |x - \bar{x}_0| \leqq l, \quad |\mu| < \text{la plus petite des quantités } \frac{\mathrm{K}\rho}{\mathrm{M}(e^{n\mathrm{K}l} - 1)} \text{ et } r.$$

Revenons maintenant aux équations (13). En tenant compte de l'hypothèse ci-dessus et répétant le raisonnement donné au n° 5, nous pouvons les écrire sous cette forme

$$(24) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\eta_i}{dx} = \mu \mathrm{F}_{i0}(x, \mu) + \eta_1 \mathrm{F}_{i1}(x, \mu) + \ldots + \eta_n \mathrm{F}_{in}(x, \mu) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{array} \right.$$

$\mathrm{F}_{i0}, \mathrm{F}_{i1}, \ldots, \mathrm{F}_{in}$ étant des fonctions continues de x et μ, pour les valeurs (23), qui, pour $\mu = 0$, se réduisent respectivement à

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0),$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n, 0).$$

En appliquant à ces équations le théorème démontré au n° 4, et observant que les η s'annulent pour $x = \overline{x}_0$, nous aurons donc

$$\eta_i \equiv \varphi_i(x, \mu) - \varphi_i(x, 0) = \mu\psi_i(x, \mu),$$

les $\psi(x, \mu)$ étant des fonctions continues de x et μ dans les intervalles (23), s'annulant pour $x = \overline{x}_0$. Ces égalités nous montrent que les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ admettent des dérivées partielles par rapport à μ, pour $\mu = 0$, $|x - \overline{x}_0| \leqq l$,

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \mu}(x, 0) = \psi_i(x, 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dérivées qu'on obtient en intégrant les équations linéaires

$$\frac{dY_i}{dx} = \frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \overline{y}_j, 0) + \frac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \overline{y}_j, 0)Y_1 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \overline{y}_j, 0)Y_n$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec les conditions initiales :

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = 0,$$

pour $x = \overline{x}_0$. Mais, par un raisonnement déjà répété à plusieurs reprises, ce résultat s'étend immédiatement à toutes les valeurs x, μ appartenant aux intervalles (23), de sorte que nous pouvons énoncer le théorème suivant :

En supposant que les seconds membres des équations (11) *ainsi que leurs dérivées du premier ordre par rapport à $y_1, \ldots, y_n, \mu$ sont des fonctions continues de $x, y_1, \ldots, y_n, \mu$ pour $x, y_1, \ldots, y_n$ dans le domaine* T *et pour $|\mu| \leqq r$, les solutions* (12) *de ces équations qui, pour $x = \overline{x}_0$, prennent respectivement les valeurs $\overline{y}_1^0, \ldots, \overline{y}_n^0$, sont des fonctions continues de x et μ dans les intervalles* (23) *et admettent par rapport à μ (et à x) des dérivées partielles du premier ordre continues dans les mêmes intervalles. On obtient ces* *dérivées en intégrant les équations linéaires*

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{dY_i}{dx} = \dfrac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \varphi_j, \mu) + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1}(x, \varphi_j, \mu) Y_1 + \ldots + \dfrac{\partial f_i}{\partial y_n}(x, \varphi_j, \mu) Y_n \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

$$Y_1 = Y_2 = \ldots = Y_n = 0,$$

pour $x = \overline{x}_0$.

La continuité des dérivées résulte de ce que les seconds membres des équations linéaires (25) sont des fonctions continues de x et μ dans les intervalles (23).

9. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des quantités réelles, mais la méthode dont nous nous sommes servi pour établir les théorèmes énoncés plus haut, nous permet de les étendre immédiatement au cas où l'on a affaire à des fonctions analytiques de variables complexes. En effet, les propositions que nous avons empruntées à la méthode d'intégration de Cauchy-Lipschitz restent encore vraies dans ce cas, et, en parcourant les raisonnements qui précèdent, on verrait dès lors qu'ils subsistent encore, avec une légère modification du langage, qui, d'ailleurs, servirait à rendre l'exposition plus simple.

Ainsi, supposons que les seconds membres des équations (1) soient des fonctions continues de x et des fonctions analytiques holomorphes de $y_1, \ldots, y_n$, pour les valeurs réelles de x et les valeurs réelles ou complexes de $y_1, \ldots, y_n$ satisfaisant aux conditions (4). En suivant la même marche que plus haut, on arrive à cette conclusion que les solutions des équations (1) qui, pour $x = \overline{x}_0$, prennent respectivement les valeurs $y_1^0 = \overline{y}_1^0 + \eta_1^0, \ldots, y_n^0 = \overline{y}_n^0 + \eta_n^0$, sont des fonctions continues de $\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0$ et admettent par rapport à ces quantités des dérivées du premier ordre également continues, pour les valeurs réelles ou complexes de $\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0$ satisfaisant à la condition (8), x ayant une valeur réelle quelconque dans l'intervalle $(\overline{x}_0 - l, \overline{x}_0 + l)$. Donc, *les solutions dont il s'agit sont des fonctions analytiques de* $\eta_1^0, \ldots, \eta_n^0$ *holomorphes tant que ces quantités satisfont à l'inégalité* (8), *quel que soit* x *dans l'intervalle* $(\overline{x}_0 - l, \overline{x}_0 + l)$.

De même, les considérations des n[os] **5** et **8** nous conduisent au théorème suivant (1) :

Soit donné un système d'équations différentielles

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{26}$$

dépendant d'un paramètre arbitraire μ, *et soient*

$$\overline{y}_i = \overline{\varphi}_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations de la caractéristique passant par le point $x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0$ *et correspondant à la valeur* $\mu = 0$. *Faisons les hypothèses suivantes :*

1° *Les fonctions* $\overline{\varphi}(x)$ *sont continues pour* $x_0 \leqq x \leqq x_0 + l$;

2° *Les seconds membres des équations* (26) *sont des fonctions continues de* x *et des fonctions analytiques holomorphes de* $y_1, \ldots, y_n$ *et du paramètre* μ, *pour les valeurs réelles de* x *et les valeurs réelles ou complexes de* $y_1, \ldots, y_n$ *et de* μ *comprises respectivement dans les domaines*

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + l, \quad |y_1 - \overline{\varphi}_1(x)| + \ldots + |y_n - \overline{\varphi}_n(x)| \leqq \rho, \quad |\mu| \leqq r. \tag{27}$$

Ces conditions supposées remplies, les solutions des équations (26) *correspondant aux valeurs initiales* $x = x_0$, $y_1 = y_1^0$, $\ldots$, $y_n = y_n^0$ *sont des fonctions analytiques du paramètre* μ, *holomorphes tant qu'on aura*

$$|\mu| < \text{la plus petite des quantités } \frac{K\rho}{M(e^{nKl} - 1)} \quad \text{et} \quad r\ (^2), \tag{28}$$

quel que soit x *dans l'intervalle* $(x_0, x_0 + l)$, K *et* M *désignant les*

---

(1) *Cf.* Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. II.

(2) On est conduit à la même limite en démontrant le théorème dont il s'agit par la méthode des approximations successives (*Cf.* page 125 de notre Mémoire cité plus haut).

modules maxima des expressions

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, y_1, \ldots, y_n, \mu) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

respectivement

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mu}(x, \bar{\varphi}_1, \ldots, \bar{\varphi}_n, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour les valeurs (27).

On voit, en effet, en appliquant au cas présent les raisonnements du n° **8**, que les solutions dont il s'agit sont des fonctions continues de μ ayant des dérivées du premier ordre également continues, pour les valeurs (28) de μ et pour x quelconque dans l'intervalle $(x_0, x_0 + l)$. D'après le théorème fondamental de Cauchy, ces solutions sont donc bien des fonctions analytiques de μ holomorphes sous les conditions énoncées ci-dessus.

Citons enfin le théorème suivant, qui se déduit immédiatement des résultats des n^os^ **4** et **8** et qui, d'ailleurs, est une conséquence du théorème qui précède :

Étant donné un système d'équations différentielles linéaires

$$\frac{dy_i}{dx} = \mathrm{F}_{i0}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + y_1 \mathrm{F}_{i1}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p) + \ldots + y_n \mathrm{F}_{in}(x, \mu_1, \ldots, \mu_p)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

dépendant des paramètres arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_p$; *si les coefficients* F *sont des fonctions continues de* x *et des fonctions analytiques holomorphes de* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *pour les valeurs réelles de* x *et les valeurs réelles ou complexes de* $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *comprises dans certains domaines, il en est de même des solutions de ces équations qui, pour une valeur* x *dans l'intervalle fixé pour cette variable, prennent des valeurs constantes quelconques.*

En énonçant les théorèmes qui précèdent, nous avons constamment supposé la variable x réelle; mais il est évident que, dans le cas où les seconds membres des équations proposées sont analytiques en x, nous pourrons aussi bien attribuer à cette variable une suite continue de valeurs complexes.