JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. DUPORT

Sur les équations aux dérivées partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 41-46.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__41_0>

Sur les équations aux dérivées partielles (¹);

PAR M. H. DUPORT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

Dans un Mémoire publié dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (année 1897, Fasc. I), j'ai étudié le système suivant de deux équations de Pfaff :

$$(1) \qquad \Sigma a_i dx_i = 0, \qquad \Sigma b_i dx_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

où les quantités a_i et b_i sont des fonctions quelconques des quantités x_i.

Ce système est particulièrement intéressant dans le cas où le nombre des variables arbitraires est de deux, car il constitue un système intermédiaire entre les équations du premier et du second ordre, et il paraît bien choisi pour s'occuper de la recherche des cas où l'on peut en trouver les solutions à l'aide d'équations différentielles ordinaires.

Je me propose d'exposer dans cette Note deux nouveaux cas d'intégration. Le premier paraîtra, je pense, intéressant, si l'on remarque qu'il renferme, en particulier, l'équation de Laplace dans le cas le plus général; le second, si l'on considère que le système (1) est susceptible d'être ramené à une équation du second ordre, est celui où les deux systèmes de caractéristiques sont confondus, et fait espérer que la

(¹) Ce Mémoire a été résumé dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (29 janvier 1900).

proposition pourra être vraie dans le cas d'une équation quelconque du second ordre.

I. Je rappellerai que pour faire l'étude du système (1), j'ai posé les équations suivantes :

$$\begin{array}{l}
(\lambda a_{11}+\mu b_{11})\Delta_1+\ldots+(\lambda a_{16}+\mu b_{16})\Delta_6+\alpha a_1+\beta b_1=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
(\lambda a_{61}+\mu b_{61})\Delta_1+\ldots+(\lambda a_{66}+\mu b_{66})\Delta_6+\alpha a_6+\beta b_6=0,\\
\qquad -a_1\Delta_1 \qquad\qquad\qquad -a_6\Delta_6 \qquad\qquad\qquad =0,\\
\qquad -b_1\Delta_1 \qquad\qquad\qquad -b_6\Delta_6 \qquad\qquad\qquad =0,
\end{array}$$

où l'on a

$$a_{ij}=\frac{\partial a_i}{\partial x_j}-\frac{\partial a_j}{\partial x_i},$$

i et j désignant, comme dans la suite de cette Note, deux des six premiers nombres.

Le déterminant de ces huit équations, où $\Delta_1, \ldots, \Delta_6, \alpha, \beta$ sont les inconnues, est un déterminant symétrique gauche d'ordre pair, qui est par suite carré parfait. En écrivant qu'il est nul, on a une équation du second ordre pour déterminer le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$. Supposons d'abord que cette équation ait ses racines distinctes. La première racine fournit pour $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$ les expressions

$$\Delta_i=A_i+\omega B_i,$$

où ω est une arbitraire. La seconde fournit pour $\Delta_1, \ldots, \Delta_6$ les expressions

$$\Delta_i=C_i+\omega' D_i,$$

où ω' est une arbitraire.

Si l'on pose les équations

$$(2)\qquad \Sigma C_i\frac{\partial F}{\partial x_i}=0, \qquad \Sigma D_i\frac{\partial F}{\partial x_i}=0,$$

quand ces équations ont deux solutions communes F_1 et F_2, l'équation

$$F_2=f(F_1)$$

est une intégrale intermédiaire des équations (1); f est une fonction arbitraire d'une variable.

Je vais maintenant étudier le cas où les équations (2) ont une seule solution commune F. J'ai déjà montré que dans ce cas, en posant F = constante, on obtenait un système de solutions des équations (1) renfermant une fonction arbitraire. Mais on peut aussi obtenir, ainsi que je vais le montrer, toutes les solutions de (1), exprimées au moyen de deux fonctions arbitraires de la même variable.

Je rappellerai que si l'on pose

$$(A_1 + \omega B_1) a_{i1} + \ldots + (A_6 + \omega B_6) a_{i6} = R_i + \omega S_i,$$

l'équation

$$\Sigma (R_i + \omega S_i) dx_i = 0, \tag{3}$$

où ω est convenablement choisi, est une conséquence des équations (1). On a, de plus, les relations

$$\left\{\begin{array}{llll} \Sigma C_i a_i = 0, & \Sigma C_i b_i = 0, & \Sigma C_i R_i = 0, & \Sigma C_i S_i = 0, \\ \Sigma D_i a_i = 0, & \Sigma D_i b_i = 0, & \Sigma D_i R_i = 0, & \Sigma D_i S_i = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Si l'on joint à ces équations les formules (2), on voit que l'on peut déterminer des quantités γ, δ, ρ, σ telles que l'on ait

$$\gamma a_i + \delta b_i + \rho R_i + \sigma S_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \tag{5}$$

car sans cela les équations

$$\Sigma C_i X_i = 0, \qquad \Sigma D_i X_i = 0,$$

où les quantités X_i sont les inconnues, auraient cinq solutions communes distinctes. Le raisonnement serait en défaut, si tous les déterminants du Tableau

$$\left|\begin{array}{ccc} a_1 & \ldots & a_6 \\ b_1 & \ldots & b_6 \\ R_1 & \ldots & R_6 \\ S_1 & \ldots & S_6 \end{array}\right| \tag{6}$$

étaient nuls; mais ce cas ne peut se présenter quand l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a ses racines distinctes. Je reviendrai sur ce point tout à l'heure.

Supposons dès lors que, par suite d'un changement de variables, on ait pris la fonction F pour la variable x_1 indépendante, et soit x_2 la seconde variable indépendante. On aura en somme les équations

$$\Sigma a_i dx_i = 0, \qquad \Sigma b_i dx_i = 0, \qquad \Sigma(R_i + \omega S_i)\, dx_i = 0,$$
$$(7) \qquad \rho \Sigma R_i\, dx_i + \sigma \Sigma S_i\, dx_i = dx_1.$$

On ne peut avoir

$$\rho\omega = \sigma,$$

car il en résulterait $dx_1 = 0$; les deux dernières équations (7) peuvent s'écrire alors

$$\Sigma R_i\, dx_i = g\, dx_1,$$
$$\Sigma S_i\, dx_i = h\, dx_1.$$

On voit alors qu'en séparant les équations relatives à la variable x_1, de celles relatives à la variable x_2, les quantités g et h s'éliminent, et l'on a le système suivant :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_3 \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} + a_4 \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} + a_5 \dfrac{\partial x_5}{\partial x_2} + a_6 \dfrac{\partial x_6}{\partial x_2} + a_2 = 0, \\ b_3 \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} + b_4 \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} + b_5 \dfrac{\partial x_5}{\partial x_2} + b_6 \dfrac{\partial x_6}{\partial x_2} + b_2 = 0, \\ R_3 \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} + R_4 \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} + R_5 \dfrac{\partial x_5}{\partial x_2} + R_6 \dfrac{\partial x_6}{\partial x_2} + R_2 = 0, \\ S_3 \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2} + S_4 \dfrac{\partial x_4}{\partial x_2} + S_5 \dfrac{\partial x_5}{\partial x_2} + S_6 \dfrac{\partial x_6}{\partial x_2} + S_2 = 0, \\ a_3 \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} + a_4 \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} + a_5 \dfrac{\partial x_5}{\partial x_1} + a_6 \dfrac{\partial x_6}{\partial x_1} + a_1 = 0, \\ b_3 \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1} + b_4 \dfrac{\partial x_4}{\partial x_1} + b_5 \dfrac{\partial x_5}{\partial x_1} + b_6 \dfrac{\partial x_6}{\partial x_1} + b_1 = 0. \end{array} \right.$$

Les quatre premières s'intègrent en considérant x_1 comme une arbitraire, et l'on en tire

$$x_3 = \Phi_3(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$x_4 = \Phi_4(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$x_5 = \Phi_5(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$
$$x_6 = \Phi_6(x_2, x_1, C_1, C_2, C_3, C_4),$$

C_1, C_2, C_3, C_4 étant des fonctions de x_1. En portant ces valeurs dans les deux dernières équations (8), on est ramené à un système

$$l_1 \frac{dC_1}{dx_1} + l_2 \frac{dC_2}{dx_1} + l_3 \frac{dC_3}{dx_1} + l_4 \frac{dC_4}{dx_1} + l_5 = 0,$$
$$m_1 \frac{dC_1}{dx_1} + m_2 \frac{dC_2}{dx_1} + m_3 \frac{dC_3}{dx_1} + m_4 \frac{dC_4}{dx_1} + m_5 = 0,$$

qui ne renferme plus la variable x_2.

On sait qu'on peut exprimer C_1, C_2, C_3, C_4, x_1 en fonction d'une variable arbitraire y, de deux fonctions f et φ de cette variable, des dérivées premières et secondes de f et de la dérivée première de φ [*Mémoire sur les équations aux dérivées partielles* (*Revue bourguignonne de l'Enseignement supérieur*, Chap. V; 1895)].

La proposition que j'avais en vue est donc démontrée.

II. Je vais commencer par montrer que dans le cas où tous les déterminants du Tableau (6) sont nuls, l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a une racine double et réciproquement. J'ai démontré que l'équation

$$\Sigma A_i S_i = 0$$

est la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ ait ses racines égales. Comme on a déjà

$$(9) \quad \begin{cases} \Sigma A_i a_i = 0, & \Sigma A_i b_i = 0, & \Sigma A_i R_i = 0, & \Sigma(A_i S_i + B_i R_i) = 0, \\ \Sigma B_i a_i = 0, & \Sigma B_i b_i = 0, & \Sigma B_i S_i = 0, & \end{cases}$$

et comme, si tous les déterminants du Tableau (6) sont nuls, on peut déterminer des quantités γ, δ, ρ, σ telles que l'on ait

$$\gamma a_i + \delta b_i + \rho R_i + \sigma S_i = 0,$$

on voit que l'on a nécessairement, ρ et σ ne pouvant être nuls tous deux, l'une des équations

$$\Sigma A_i S_i = 0, \qquad \Sigma B_i R_i = 0$$

qui entraîne l'autre. L'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ a donc bien une racine double quand tous les déterminants du Tableau (6) sont nuls.

Inversement, remarquons d'abord qu'en vertu des équations

$$(10) \quad \begin{cases} \Sigma A_i a_i = 0, & \Sigma A_i b_i = 0, & \Sigma A_i R_i = 0, & \Sigma A_i S_i = 0, \\ \Sigma B_i a_i = 0, & \Sigma B_i b_i = 0, & \Sigma B_i R_i = 0, & \Sigma B_i S_i = 0, \end{cases}$$

tous les déterminants du Tableau (6) se réduisent à un seul, car il suffit de tirer de ces équations (10) deux des quantités a_i, b_i, R_i, S_i en fonction des autres.

Cela posé, supposons que, par suite d'un changement de variables, on ait ramené l'équation en $\frac{\lambda}{\mu}$ à avoir une racine nulle. Pour qu'elle ait une racine double, il faudra que le terme en $\frac{\lambda}{\mu}$ soit aussi nul. Cette condition sera du premier degré dans les binomes $a_i b_j - a_j b_i$ et ne pourra, par suite, différer de la condition obtenue en égalant à zéro l'un des déterminants du Tableau (6).

Dès lors l'équation en ω d'où dépend la solution du système (1) s'abaisse au premier ordre [voir *Mémoire sur les équations différentielles* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, Fasc. 1, p. 71 du Mémoire; 1897)].