JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. DUHEM

Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 215-259.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__215_0>

Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch;

PAR M. P. DUHEM.

Introduction.

Tout le monde connaît les équations des petits mouvements d'un solide isotrope, équations qui régissent aussi, comme l'a démontré Helmholtz, la propagation des flux de déplacement dans les milieux diélectriques. On sait également que Clebsch ([1]) a donné aux intégrales de ces équations une forme extrêmement utile en ce qu'elle décompose le petit mouvement le plus général d'un solide isotrope en un petit mouvement *longitudinal*, dénué de *rotation*, et un petit mouvement *transversal*, dénué de *dilatation*, chacun de ces petits mouvements dépendant de la classique équation du son. Malheureusement, la démonstration sommaire donnée par Clebsch laisse peut-être quelque place au doute.

Dans notre enseignement de la Faculté des Sciences de Bordeaux, nous avons donné du Théorème de Clebsch une démonstration très élémentaire ([2]) qui nous semble rigoureuse.

Cette démonstration s'étend sans peine et permet d'appliquer le Théorème de Clebsch à un type très général d'équations aux dérivées

---

([1]) CLEBSCH, *Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXI; 1863).

([2]) P. DUHEM, *Sur l'intégrale des équations des petits mouvements d'un solide isotrope* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5e série, t. III; 1898).

partielles simultanées. Ce type comprend, comme cas particuliers, non seulement les équations des petits mouvements des solides isotropes, mais encore les équations des petits mouvements adiabatiques des fluides compressibles visqueux; d'ailleurs, ces deux catégories d'équations sont d'un intérêt très général en Physique; la première catégorie régit, hors du domaine de l'Électricité, la propagation d'une perturbation électrique dans un milieu diélectrique; la seconde n'a pas cours seulement en Hydrodynamique; c'est d'elle que dépend le flux électrique au sein d'un conducteur immobile. Enfin, ces deux catégories peuvent être regardées comme deux cas particuliers d'une catégorie plus générale, dont dépend le champ électrique dans un corps à la fois conducteur et diélectrique; à cette catégorie s'appliquent également les considérations suivantes.

CHAPITRE I.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMATION DE STOKES ET DE HELMHOLTZ.

1. Soient u, v, w trois fonctions de x, y, z, qui peuvent, en outre, dépendre d'autres variables, de t par exemple; soit A le vecteur dont u, v, w sont les composantes.

Deux combinaisons de ces fonctions se présentent fréquemment en Physique :

En premier lieu, la combinaison

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{1}$$

que les géomètres anglais nomment

Div. A.

Si A représente un *déplacement* d'un milieu, Θ est la *dilatation cubique* au point (x, y, z) de ce milieu.

En second lieu, les trois combinaisons

$$(2)\qquad \begin{cases} \Omega_x = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \Omega_y = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \Omega_z = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Si A représente un *déplacement* d'un milieu, $\frac{1}{2}\Omega_x$, $\frac{1}{2}\Omega_y$, $\frac{1}{2}\Omega_z$ sont les trois composantes de la *rotation instantanée* au point (x, y, z) de ce milieu; Ω_x, Ω_y, Ω_z sont les trois composantes d'un vecteur que les géomètres anglais désignent par

$$\text{Curl A},$$

et que les physiciens allemands nomment *Vortex* ou *Wirbel* de A.

2. Soient u, v, w trois fonctions continues de x, y, z, en un certain espace; prenons trois fonctions U, V, W définies, dans ce même espace, par les égalités

$$(3)\qquad \Delta U = u, \qquad \Delta V = v, \qquad \Delta W = w.$$

Chacune de ces fonctions est déterminée, dans l'espace considéré, à une fonction harmonique près; la théorie de la fonction potentielle nous enseigne, d'ailleurs, à exprimer ces fonctions sous forme d'intégrales triples.

On a identiquement

$$\Delta U = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

Si donc on pose

$$(4)\qquad \Phi = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z},$$

$$(5)\qquad \begin{cases} P = -\left(\dfrac{\partial W}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial z}\right), \\ Q = -\left(\dfrac{\partial U}{\partial z} - \dfrac{\partial W}{\partial x}\right), \\ R = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial U}{\partial y}\right), \end{cases}$$

ce qui nous donne visiblement

$$(6) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

la première des égalités (3) devient la première des égalités

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Les deux autres égalités (7) s'obtiennent d'une manière analogue. Dès lors, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Étant données trois fonctions u, v, w des variables x, y, z, continues dans un certain espace, on peut, d'une infinité de manières, mettre ces fonctions sous la forme (7), *les trois fonctions* P, Q, R *vérifiant, en outre, l'égalité* (6).

Cette proposition, employée en premier lieu par M. Stokes et par Helmholtz, va nous servir de point de départ.

3. *Remarque.* — Si les trois fonctions u, v, w ont été, d'une manière quelconque, mises sous la forme (7), la relation (6) étant d'ailleurs vérifiée, les égalités (1) et (2) deviennent

$$(8) \qquad \Theta = \Delta\Phi,$$

$$(9) \qquad \Omega_x = -\Delta P, \qquad \Omega_y = -\Delta Q, \qquad \Omega_z = -\Delta R.$$

4. Supposons que l'on ait pu mettre trois fonctions u, v, w sous la forme (7), la relation (6) étant d'ailleurs vérifiée et les fonctions Φ, P, Q, R étant quatre fonctions harmoniques. Les égalités (1), (2), (8) et (9) donnent alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{10}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

Les égalités (11) nous enseignent qu'il existe une fonction $\varphi(x, y, z)$, uniforme si l'espace considéré est simplement connexe, telle que l'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{12}$$

et l'égalité (10) devient alors

$$\Delta \varphi = 0.$$

Réciproquement, les égalités (12) sont une forme particulière des égalités (6) et (7). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Pour que trois fonctions u, v, w soient respectivement les trois dérivées partielles d'une même fonction harmonique, il faut et il suffit qu'on puisse les mettre sous la forme (7), *où* Φ, P, Q, R *sont quatre fonctions harmoniques et où les trois fonctions* P, Q, R *vérifient la relation* (6).

5. *Pour que les trois expressions*

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y},$$

où P, Q, R *vérifient la relation* (6), *soient les trois dérivées partielles d'une même fonction* V, *il faut et il suffit que les trois fonctions* P, Q, R *soient harmoniques; la fonction* V *est, elle aussi, harmonique.*

Pour démontrer la première partie de l'énoncé, il suffit de remarquer qu'en vertu de la relation (6), les conditions

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) = 0$$

peuvent s'écrire

$$\Delta P = 0, \qquad \Delta Q = 0, \qquad \Delta R = 0,$$

et que les fonctions P, Q, R sont harmoniques.

Si ces conditions sont remplies, il existe une fonction V telle que l'on ait

$$(13) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \end{aligned} \right.$$

Il suffit de différentier la première de ces égalités par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et d'ajouter membre à membre les résultats obtenus pour obtenir l'égalité

$$\Delta V = 0,$$

qui démontre la seconde partie de l'énoncé.

6. *Réciproquement, si* V *est une fonction harmonique dans un certain espace* E, *ses dérivées partielles peuvent se mettre sous la forme* (13), *les fonctions* P, Q, R *étant harmoniques dans l'espace* E *et y vérifiant la relation* (6).

Soient :

(x, y, z) un point de l'espace E,

S la surface qui limite cet espace, surface que nous supposons convexe et sans point singulier,

dS un élément de la surface S,
(ξ, η, ζ) un point de l'élément dS,
n la demi-normale en ce point à la surface S, cette demi-normale étant dirigée vers l'intérieur de l'espace E.

Avec M. Carl Neumann, posons

$$(14) \quad \begin{cases} U(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int V(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS, \\ U'(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int U(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS, \\ U''(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int U'(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Les propositions suivantes sont connues :

Les fonctions

$$V(\xi, \eta, \zeta), \quad U(\xi, \eta, \zeta), \quad U'(\xi, \eta, \zeta), \quad U''(\xi, \eta, \zeta), \quad \dots$$

sont toutes continues sur la surface S.

Lorsque l'indice i croît au delà de toute limite, la fonction

$$U^{(i)}(\xi, \eta, \zeta)$$

tend vers une limite C qui a la même valeur sur toute la surface S.

La série

$$(15) \quad [V(\xi, \eta, \zeta) - U(\xi, \eta, \zeta)] + [U'(\xi, \eta, \zeta) - U''(\xi, \eta, \zeta)] + \dots$$

converge uniformément sur la surface S et représente une fonction $\sigma(\xi, \eta, \zeta)$, continue sur cette surface.

La fonction $V(x, y, z)$ est, dans l'espace E, donnée par la série uniformément convergente

$$(16) \quad \begin{cases} V(x, y, z) = C + \frac{1}{2\pi} \{[U(x, y, z) - U'(x, y, z)] \\ \qquad + [U''(x, y, z) - U'''(x, y, z)] + \dots\}. \end{cases}$$

Or la série (15) étant uniformément convergente, il en est visiblement de même de la série

$$[V(\xi, \eta, \zeta) - U(\xi, \eta, \zeta)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + [U'(\xi, \eta, \zeta) - U'''(\xi, \eta, \zeta)] \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \ldots$$
$$= \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n},$$

r étant la distance du point (ξ, η, ζ), variable sur la surface S à un point déterminé (x, y, z) du domaine E.

On peut alors intégrer cette série pour la surface S en intégrant chacun de ses termes, ce qui donne, en vertu des égalités (14) et (15),

$$(17) \qquad V(x, y, z) = C + \frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dS.$$

Cette égalité donne, à son tour,

$$(18) \qquad \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial n\, \partial x} dS.$$

Mais l'égalité

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

donne

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^3} [(x - \xi) \cos(n, x) + (y - \eta) \cos(n, y) + (z - \zeta) \cos(n, z)],$$

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\, \partial n} = \frac{3(x - \xi)^2 - r^2}{r^5} \cos(n, x) + \frac{3(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \cos(n, y) + \frac{3(x - \xi)(z - \zeta)}{r^5} \cos(n, z)$$
$$= \frac{3(x - \xi)(y - \eta)}{r^5} \cos(n, y) - \frac{3(y - \eta)^2 - r^2}{r^5} \cos(n, x) - \left[\frac{3(z - \zeta)^2 - r^2}{r^5} \cos(n, x) - \frac{3(x - \xi)(z - \zeta)}{r^5} \cos(n, z)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y-\eta}{r^3}\cos(n,x) - \frac{x-\xi}{r^3}\cos(n,y)\right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x-\xi}{r^3}\cos(n,z) - \frac{z-\zeta}{r^3}\cos(n,x)\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,y) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,x)\right] \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,x) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,z)\right].
\end{aligned}
$$

Si donc on pose

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
P(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int \sigma(\xi,\eta,\zeta)\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,z) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,y)\right]dS, \\
Q(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int \sigma(\xi,\eta,\zeta)\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\cos(n,x) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,z)\right]dS, \\
R(x,y,z) &= \frac{1}{2\pi}\int \sigma(\xi,\eta,\zeta)\left[\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\cos(n,y) - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\cos(n,x)\right]dS,
\end{aligned}
\right.
$$

l'égalité (18) devient la première des égalités

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\
\frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\
\frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

D'ailleurs, les égalités (19) montrent immédiatement que les trois fonctions P, Q, R sont trois fonctions harmoniques qui vérifient l'égalité (6).

7. Le lemme démontré aux n^{os} **5** et **6** nous donne, en premier lieu, la solution de la question suivante :

De combien de manières différentes peut-on mettre trois fonctions données u, v, w sous la forme

$$
(7) \quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\
v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\
w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},
\end{aligned}
\right.
$$

les trois fonctions P, Q, R *étant liées par la relation*

$$
(6) \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0 ?
$$

Soit

$$
(7\ bis) \quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \frac{\partial(\Phi + \Phi')}{\partial x} + \frac{\partial(R + R')}{\partial z} - \frac{\partial(Q + Q')}{\partial z}, \\
v &= \frac{\partial(\Phi + \Phi')}{\partial y} + \frac{\partial(R + R')}{\partial z} - \frac{\partial(R + R')}{\partial x}, \\
w &= \frac{\partial(\Phi + \Phi')}{\partial z} + \frac{\partial(Q + Q')}{\partial x} - \frac{\partial(P + P')}{\partial y},
\end{aligned}
\right.
$$

où

$$
(6\ bis) \quad \frac{\partial(P + P')}{\partial x} + \frac{\partial(Q + Q')}{\partial y} + \frac{\partial(R + R')}{\partial z} = 0,
$$

une deuxième solution du problème. Évidemment, pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les fonctions Φ', P', Q', R' vérifient les conditions

$$
(20) \quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial R'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial z}, \\
0 &= \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial x}, \\
0 &= \frac{\partial \Phi'}{\partial z} + \frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y};
\end{aligned}
\right.
$$

avec

$$
(21) \quad \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} = 0.
$$

D'après le lemme démontré au n° **5**, pour qu'il existe une fonction Φ', vérifiant les égalités (20), lorsque l'égalité (21) est supposée vérifiée, il faut et il suffit que les trois fonctions P', Q', R' soient trois fonctions harmoniques; la fonction Φ' est déterminée par la connaissance des fonctions P', Q', R' à une quantité additive près, indépendante de x, y, z.

D'où la proposition suivante :

Ayant, d'une première manière, mis trois fonctions données u, v, w *sous la forme* (7), *où les fonctions* P, Q, R *vérifient l'égalité* (6), *et cherchant à les mettre d'une seconde manière sous la même forme, on peut, mais on peut seulement, ajouter respectivement aux trois fonctions* P, Q, R, *trois fonctions harmoniques qui vérifient aussi l'égalité* (6); *on doit, en même temps, ajouter à la fonction* Φ *une fonction harmonique déterminée à une quantité additive près, indépendante de* x, y, z.

8. *On peut, si l'on préfère, choisir arbitrairement la fonction harmonique* Φ' *que l'on veut ajouter à la fonction* Φ.

En effet, selon ce qui a été démontré au n° **6**, quelle que soit cette fonction Φ', on peut trouver trois fonctions harmoniques ϖ, χ, ρ vérifiant l'égalité

$$\frac{\partial\varpi}{\partial x}+\frac{\partial\chi}{\partial y}+\frac{\partial\rho}{\partial z}=0$$

et les égalités

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial y}-\frac{\partial\chi}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial y}=\frac{\partial\varpi}{\partial z}-\frac{\partial\rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\Phi'}{\partial z}=\frac{\partial\chi}{\partial x}-\frac{\partial\varpi}{\partial y}.$$

Il suffira alors de prendre

$$P'=-\varpi,\qquad Q'=-\chi,\qquad R'=-\rho.$$

9. *Étant données trois fonctions* P, Q, R *qui vérifient l'éga-*

lité (6), *on peut trouver* [1] *trois autres fonctions* A, B, C, *telles que l'on ait*

$$(22)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\partial C}{\partial y} - \dfrac{\partial B}{\partial z}, \\ Q = \dfrac{\partial A}{\partial z} - \dfrac{\partial C}{\partial x}, \\ R = \dfrac{\partial B}{\partial x} - \dfrac{\partial A}{\partial y}, \end{cases}$$

$$(23)\quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

En effet, d'après ce qui a été démontré au n° **2**, quelles que soient les fonctions P, Q, R, il existe quatre fonctions φ, p, q, r, telles que l'on ait

$$(24)\quad \begin{cases} P = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial r}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial z}, \\ Q = \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\partial r}{\partial x}, \\ R = \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial q}{\partial y} + \dfrac{\partial r}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Pour que les fonctions P, Q, R vérifient l'égalité (6), il faut et il suffit visiblement que la fonction φ soit harmonique; mais alors, selon ce qui a été démontré au n° **6**, on peut trouver trois fonctions p', q', r' vérifiant les égalités

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial r'}{\partial y} - \dfrac{\partial q'}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{\partial p'}{\partial z} - \dfrac{\partial r'}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \dfrac{\partial q'}{\partial x} - \dfrac{\partial p'}{\partial y}; \\ \dfrac{\partial p'}{\partial x} + \dfrac{\partial q'}{\partial y} + \dfrac{\partial r'}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

---

[1] Cette proposition a été démontrée par E. Betti (*Lehrbuch der Potentialtheorie*, p. 342), en s'appuyant sur un lemme, dû à Jacobi, et tiré de la théorie du dernier multiplicateur.

La comparaison des égalités (24) et (25) montre que les fonctions

$$A = p - p',$$
$$B = q - q',$$
$$R = r - r'$$

vérifieront la proposition énoncée.

Réciproquement, il est clair que, *si l'on prend trois fonctions quelconques* A, B, C *et si l'on définit les fonctions* P, Q, R *par les égalités* (22), *ces fonctions* P, Q, R *vérifieront l'égalité* (6).

10. Les fonctions P, Q, R, qui vérifient l'égalité (6), étant données, supposons qu'on ait trouvé un système de fonctions A, B, C, qui vérifient les égalités (22) et (23); peut-on trouver un second système de fonctions

$$A + A', \qquad B + B', \qquad C + C'$$

qui vérifient les mêmes égalités?

Il faut et il suffit pour cela que les fonctions A′, B′, C′ vérifient les égalités

$$\frac{\partial C'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial A'}{\partial z} - \frac{\partial C'}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial B'}{\partial x} - \frac{\partial A'}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial C'}{\partial z} = 0.$$

D'après ce qui a été démontré aux nos **5** et **6**, il faut et il suffit pour cela que les trois fonctions A′, B′, C′ soient les trois dérivées partielles d'une même fonction harmonique.

D'où la proposition suivante :

Ayant, d'une première manière, mis trois fonctions données P, Q, R *sous la forme* (22), *où les fonctions* A, B, C *vérifient la relation* (23), *et voulant les mettre d'une seconde manière sous la même*

*

forme, on peut, mais on peut seulement, ajouter aux trois fonctions A, B, C, *les trois dérivées partielles d'une même fonction harmonique.*

CHAPITRE II.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE CLEBSCH.

---

11. Supposons que les trois fonctions

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

vérifient les trois équations aux dérivées partielles simultanées que voici :

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} & A_0 u + A_1 \frac{\partial u}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n u}{\partial t^n} \\ & + B_0 \Delta u + B_1 \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \Delta u}{\partial z} + B_4 \frac{\partial \Delta u}{\partial t} \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots} \frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots \\ & + C_0 \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + C_4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ & + C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \ldots + C_{\eta\theta\lambda\ldots} \frac{\partial^{\varpi+\chi+\rho+\sigma}}{\partial x^\varpi \partial y^\chi \partial z^\rho \partial t^\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \ldots\ldots = 0, \\ & A_0 v + A_1 \frac{\partial v}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n v}{\partial t^n} \\ & + B_0 \Delta v + B_1 \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \Delta v}{\partial z} + B_4 \frac{\partial \Delta v}{\partial t} \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \Delta v}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots} \frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta v}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots \\ & + C_0 \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + C_4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \\ & + C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \ldots + C_{\eta\theta\lambda\ldots} \frac{\partial^{\varpi+\chi+\rho+\sigma}}{\partial x^\varpi \partial y^\chi \partial z^\rho \partial t^\sigma} \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \ldots\ldots = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} & A_0 w + A_1 \frac{\partial w}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n w}{\partial t^n} \\ & + B_0 \Delta w + B_1 \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + B_3 \frac{\partial \Delta w}{\partial z} + B_4 \frac{\partial \Delta w}{\partial t} \\ & + B_{11} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots} \frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta w}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots \\ & + C_0 \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_3 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + C_4 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \Theta}{\partial z} \\ & + C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \ldots + C_{\eta\theta\lambda\ldots} \frac{\partial^{\varpi+\varkappa+\rho+\sigma}}{\partial x^{\varpi} \partial y^{\varkappa} \partial z^{\rho} \partial t^{\sigma}} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \ldots\ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations, Θ a la signification donnée par l'égalité (1); les A, B, C sont des constantes.

En différentiant la première des équations (26) par rapport à x, la deuxième par rapport à y, la troisième par rapport à z et ajoutant membre à membre les résultats obtenus, nous trouvons que Θ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} & A_0 \Theta + A_1 \frac{\partial \Theta}{\partial t} + A_2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^n \Theta}{\partial t^n} \\ & + (B_0 + C_0)\Delta\Theta + (B_1 + C_1)\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial x} + (B_2 + C_2)\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial y} \\ & + (B_3 + C_3)\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial z} + (B_4 + C_4)\frac{\partial \Delta\Theta}{\partial t} + (B_{11} + C_{11})\frac{\partial^2 \Delta\Theta}{\partial x^2} + \ldots \\ & + (B_{ijk\ldots} + C_{ijk\ldots})\frac{\partial^{p+q+r+s} \Delta\Theta}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r \partial t^s} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Nous représenterons symboliquement le premier membre de cette équation par

$$\omega(\Theta),$$

et nous nommerons cette équation l'*équation aux dilatations*.

Différentions la troisième égalité (26) par rapport à y, la seconde par rapport à z et retranchons le second résultat du premier en tenant compte de la première égalité (2). Nous trouverons que Ω_x vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} & A_0\Omega + A_1\frac{\partial\Omega}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Omega}{\partial t^n} \\ & \quad + B_0\Delta\Omega + B_1\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial x} + B_2\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial y} + B_3\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial z} + B_4\frac{\partial\Delta\Omega}{\partial t} \\ & \quad + B_{11}\frac{\partial^2\Delta\Omega}{\partial x^2} + \ldots + B_{ijk\ldots}\frac{\partial^{p+q+r+s}\Delta\Omega}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r\,\partial t^s} + \ldots\ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

Les quantités Ω_y et Ω_z vérifient la même équation, que nous nommerons *équation aux rotations*. Nous représenterons symboliquement le premier membre de cette équation par

$$\mathfrak{R}(\Omega).$$

12. Prenons trois fonctions quelconques u, v, w des variables x, y, z, t et mettons-les sous la forme (7), les fonctions P, Q, R n'étant pas nécessairement assujetties à vérifier la relation (6).

Substituons ces expressions de u, v, w dans les premiers membres des égalités (26); nous constatons aisément que ces premiers membres prennent la forme suivante :

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{D}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{R}(R) - \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{R}(Q), \\ & \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{D}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{R}(P) - \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{R}(R), \\ & \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{D}(\Phi) + \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{R}(Q) - \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{R}(P). \end{aligned}\right.$$

Évidemment, ces trois quantités sont nulles si l'on a, en tout point de l'espace considéré,

$$\mathfrak{D}(\Phi) = 0,$$

$$\mathfrak{R}(P) = 0, \qquad \mathfrak{R}(Q) = 0, \qquad \mathfrak{R}(R) = 0.$$

D'où le théorème suivant :

Si Φ *désigne une intégrale quelconque de l'équation aux dilatations et* P, Q, R *trois intégrales quelconques de l'équation aux* *rotations, les expressions* (7) *fournissent une intégrale du système* (26).

13. *Réciproquement, si*

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

est une intégrale du système (26), *on peut toujours trouver une intégrale* Φ *de l'équation aux dilatations et trois intégrales* P, Q, R *de l'équation aux rotations, ces dernières liées en outre par l'égalité* (6), *de telle manière que les égalités* (7) *se trouvent vérifiées par les sept fonctions*

$$u, \quad v, \quad w, \quad \Phi, \quad P, \quad Q, \quad R.$$

La démonstration de cette réciproque est le principal objet du présent écrit.

Comme nous l'avons vu au n° **3**, on pourra toujours trouver quatre fonctions Φ_0, P_0, Q_0, R_0, les trois dernières liées par l'égalité

$$\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z} = 0, \tag{30}$$

telles que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + \frac{\partial R_0}{\partial y} - \frac{\partial Q_0}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + \frac{\partial P_0}{\partial z} - \frac{\partial R_0}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} + \frac{\partial Q_0}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial y}. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Ces expressions, transportées dans les équations (26), doivent les vérifier identiquement, en sorte que nous avons les identités

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{D}(\Phi_0)}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{R}(R_0)}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}(Q_0)}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \mathfrak{D}(\Phi_0)}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{R}(P_0)}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}(R_0)}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \mathfrak{D}(\Phi_0)}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{R}(Q_0)}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}(P_0)}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

Différentions la première de ces identités par rapport à x, la seconde par rapport à y, la troisième par rapport à z, et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la nouvelle identité

$$\Delta\mathfrak{O}(\Phi_0) = 0.$$

Différentions la troisième identité (32) par rapport à y, la seconde par rapport à z, et retranchons membre à membre le premier résultat du second, en tenant compte de la relation (30); nous trouvons la première des identités

$$\Delta\mathfrak{R}(P_0) = 0, \qquad \Delta\mathfrak{R}(Q_0) = 0, \qquad \Delta\mathfrak{R}(R_0) = 0.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue. En d'autres termes, on a

$$(33)\qquad \begin{cases} \mathfrak{O}(\Phi_0) = \varphi, \\ \mathfrak{R}(P_0) = p, \qquad \mathfrak{R}(Q_0) = q, \qquad \mathfrak{R}(R_0) = r, \end{cases}$$

φ, p, q, r étant quatre fonctions harmoniques.

L'égalité (30) entraîne visiblement l'égalité

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{R}(P_0) + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{R}(Q_0) + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{R}(R_0 =$$

ou bien, en vertu des égalités (33),

$$(34)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z} = 0.$$

Les identités (32) et (33) donnent

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial r}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{\partial r}{\partial x} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} + \dfrac{\partial q}{\partial x} - \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Considérons l'équation

$$(36)\qquad A_0\Phi_1 + A_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Phi_1}{\partial t^n} + \varphi = 0.$$

Pour chaque système de valeurs de x, y, z, c'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants; nous pouvons donc, à l'instant $t = 0$, prendre pour

$$\Phi_1,\quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial t},\quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2},\quad \ldots,\quad \frac{\partial^{n-1}\Phi_1}{\partial t^{n-1}},$$

n fonctions arbitraires de x, y, z; prenons n fonctions harmoniques; nous aurons alors, pour $t = 0$,

$$(37)\qquad \Delta\Phi_1 = 0,\qquad \frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi_1 = 0,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta\Phi_1 = 0.$$

D'autre part, φ étant une fonction harmonique, l'égalité (36) donne, quel que soit t, l'égalité

$$A_0\Delta\Phi_1 + A_1\Delta\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \ldots + A_n\Delta\frac{\partial^n\Phi_1}{\partial t^n} = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$A_0\Delta\Phi_1 + A_1\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi_1 + \ldots + A_n\frac{\partial^n}{\partial t^n}\Delta\Phi_1 = 0.$$

Les égalités (37) étant vérifiées pour $t = 0$, l'équation précédente nous montre que l'on a, quel que soit t,

$$(38)\qquad \Delta\Phi_1 = 0.$$

On peut donc trouver une fonction Φ_1 qui vérifie à la fois les égalités (36) et (38). Dès lors, il est facile de voir que cette fonction harmonique Φ_1 vérifie l'équation

$$(39)\qquad \varpi(\Phi_1) + \varphi = 0.$$

Prenons maintenant trois fonctions P_1, Q_1, R_1 vérifiant respectivement les équations

$$(40)\quad \begin{cases} A_0 P_1 + A_1 \dfrac{\partial P_1}{\partial t} + A_2 \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n \dfrac{\partial^n P_1}{\partial t^n} + p = 0, \\ A_0 Q_1 + A_1 \dfrac{\partial Q_1}{\partial t} + A_2 \dfrac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n \dfrac{\partial^n Q_1}{\partial t^n} + q = 0, \\ A_0 R_1 + A_1 \dfrac{\partial R_1}{\partial t} + A_2 \dfrac{\partial^2 R_1}{\partial t^2} + \ldots + A_n \dfrac{\partial^n R_1}{\partial t^n} + r = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons prendre en outre, pour $t = 0$,

$$(41)\quad \begin{cases} P_1 = \dfrac{\partial \chi_0}{\partial z} - \dfrac{\partial \rho_0}{\partial y}, & \dfrac{\partial P_1}{\partial t} = \dfrac{\partial \chi_1}{\partial z} - \dfrac{\partial \rho_1}{\partial y}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} P_1}{\partial t^{n-1}} = \dfrac{\partial \chi_{n-1}}{\partial z} - \dfrac{\partial \rho_{n-1}}{\partial y}, \\ Q_1 = \dfrac{\partial \rho_0}{\partial x} - \dfrac{\partial \varpi_0}{\partial z}, & \dfrac{\partial Q_1}{\partial t} = \dfrac{\partial \rho_1}{\partial x} - \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial z}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} Q_1}{\partial t^{n-1}} = \dfrac{\partial \rho_{n-1}}{\partial x} - \dfrac{\partial \varpi_{n-1}}{\partial z}, \\ R_1 = \dfrac{\partial \varpi_0}{\partial y} - \dfrac{\partial \chi_0}{\partial x}, & \dfrac{\partial R_1}{\partial t} = \dfrac{\partial \varpi_1}{\partial y} - \dfrac{\partial \chi_1}{\partial x}, & \ldots, & \dfrac{\partial^{n-1} R_1}{\partial t^{n-1}} = \dfrac{\partial \varpi_{n-1}}{\partial y} - \dfrac{\partial \chi_{n-1}}{\partial x}, \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \varpi_0, & \varpi_1, & \ldots, & \varpi_{n-1}, \\ \chi_0, & \chi_1, & \ldots, & \chi_{n-1}, \\ \rho_0, & \rho_1, & \ldots, & \rho_{n-1} \end{matrix}$$

étant $3n$ fonctions harmoniques de x, y, z.

Ces égalités (41) entraînent les égalités suivantes, vraies également pour $t = 0$,

$$(42)\quad \begin{cases} \Delta P_1 = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta P_1 = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta P_1 = 0, \\ \Delta Q_1 = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta Q_1 = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta Q_1 = 0, \\ \Delta R_1 = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}\Delta R_1 = 0, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\Delta R_1 = 0, \\ \dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial R_1}{\partial z} = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial R_1}{\partial z}\right) = 0, \quad \ldots, \\ \dfrac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial R_1}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

D'autre part, les fonctions p, q, r étant harmoniques et vérifiant l'égalité (34), les égalités (40) donnent les égalités suivantes, vraies quel que soit t,

$$(43)\quad \begin{cases} A_0\Delta P_1 + A_1\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta P_1 + \ldots + A_n\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\Delta P_1 = 0, \\ A_0\Delta Q_1 + A_1\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta Q_1 + \ldots + A_n\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\Delta Q_1 = 0, \\ A_0\Delta R_1 + A_1\dfrac{\partial}{\partial t}\Delta R_1 + \ldots + A_n\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\Delta R_1 = 0, \\ A_0\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial R_1}{\partial z}\right) + A_1\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\partial P_1}{\partial x} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial y} + \dfrac{\partial R_1}{\partial z}\right) + \ldots \\ \qquad + A_n\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Les conditions (43), vraies quel que soit t, jointes aux conditions (42), vraies pour $t = 0$, montrent que l'on a, quel que soit t,

$$(44)\qquad \Delta P_1 = 0, \qquad \Delta Q_1 = 0, \qquad \Delta R_1 = 0,$$

$$(45)\qquad \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} = 0.$$

La première équation (40) et la première condition (44) donnent sans peine la première des égalités

$$(46)\qquad \begin{cases} \mathfrak{R}(P_1) + p = 0, \\ \mathfrak{R}(Q_1) + q = 0, \\ \mathfrak{R}(R_1) + r = 0. \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Posons

$$(47)\qquad \begin{cases} u' = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \dfrac{\partial R_1}{\partial y} - \dfrac{\partial Q_1}{\partial z}, \\ v' = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \dfrac{\partial P_1}{\partial z} - \dfrac{\partial R_1}{\partial x}, \\ w' = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \dfrac{\partial Q_1}{\partial x} - \dfrac{\partial P_1}{\partial y}. \end{cases}$$

D'après les égalités (38), (44) et (45) et le lemme démontré au n° 4, il existe une fonction harmonique Ψ :

$$\Delta\Psi = 0, \tag{48}$$

telle que l'on ait

$$u' = \frac{\partial\Psi}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial\Psi}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial\Psi}{\partial z},$$

ce qui donne identiquement, à la place des égalités (47),

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial(\Phi_1 - \Psi)}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial(\Phi_1 - \Psi)}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial(\Phi_1 - \Psi)}{\partial z} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{49}$$

Si, dans les égalités (26), on substitue à u, v, w, les quantités identiquement nulles qui forment les premiers membres des égalités (49), on doit obtenir trois identités. Si l'on tient compte de l'identité (48), ces identités deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{G}(\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{R}(R_1) - \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{R}(Q_1) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial x}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{G}(\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{R}(P_1) - \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{R}(R_1) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0, \\ &\frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{G}(\Phi_1) + \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{R}(Q_1) - \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{R}(P_1) \\ &\qquad - \frac{\partial}{\partial z}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0. \end{aligned}\right. \tag{50}$$

Les égalités (39), (46) et (35) transforment ces identités en

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n}\right) = 0.$$

En d'autres termes, il existe une fonction $f(t)$ telle que l'on ait

$$(51) \qquad A_0\Psi + A_1\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Psi}{\partial t^n} = f(t).$$

Soit $F(t)$ une intégrale quelconque de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$(52) \qquad A_0F(t) + A_1\frac{dF(t)}{dt} + \ldots + A_n\frac{d^nF(t)}{dt^n} = f(t)$$

et posons

$$(53) \qquad \Psi - F(t) = -\Phi_2.$$

Les égalités (51) et (52) nous donneront l'égalité

$$A_0\Phi_2 + A_1\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \ldots + A_n\frac{\partial^n\Phi_2}{\partial t^n} = 0.$$

L'égalité (48) donnera l'égalité

$$\Delta\Phi_2 = 0$$

et ces deux dernières égalités donnent

$$(54) \qquad \mathfrak{D}(\Phi_2) = 0.$$

Enfin, les identités (49) peuvent évidemment s'écrire

$$(55) \qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial x} + \frac{\partial R_1}{\partial y} - \frac{\partial Q_1}{\partial z_1} = 0,\\
&\frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial y} + \frac{\partial P_1}{\partial z} - \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial(\Phi_1+\Phi_2)}{\partial z} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} - \frac{\partial P_1}{\partial y} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2,\\
P &= P_0 + P_1,\\
Q &= Q_0 + Q_1,\\
R &= R_0 + R_1.
\end{aligned}$$

Nous aurons

$$\omega(\Phi) = \omega(\Phi_0) + \omega(\Phi_1) + \omega(\Phi_2)$$

ou bien, en vertu des égalités (33), (39) et (54),

$$(56) \qquad \omega(\Phi) = 0.$$

Nous aurons aussi

$$\mathfrak{A}(P) = \mathfrak{A}(P_0) + \mathfrak{A}(P_1),$$
$$\mathfrak{A}(Q) = \mathfrak{A}(Q_0) + \mathfrak{A}(Q_1),$$
$$\mathfrak{A}(R) = \mathfrak{A}(R_0) + \mathfrak{A}(R_1)$$

ou bien, en vertu des égalités (33) et (46),

$$(57) \qquad \mathfrak{A}(P) = 0, \qquad \mathfrak{A}(Q) = 0, \qquad \mathfrak{A}(R) = 0.$$

Enfin, nous aurons

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial y} + \frac{\partial R_0}{\partial z} + \frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}$$

ou bien, en vertu des égalités (30) et (45),

$$(58) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Comme les égalités (31) et (55) permettent d'écrire

$$(59) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ w = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}, \end{cases}$$

on peut regarder le théorème énoncé comme démontré.

14. Cherchons maintenant de combien de manières différentes on peut mettre une même intégrale u, v, w des équations (26), sous la forme (7), Φ étant une intégrale de l'équation aux dilatations et P, Q, R trois intégrales de l'équation aux rotations, liées en outre par l'égalité (6).

Si Φ, P, Q, R constituent une première détermination des quatre fonctions dont il s'agit, pour que $(\Phi + \Phi')$, $(P + P')$, $(Q + Q')$, $(R + R')$ en soient une seconde détermination, il faut et il suffit :

1° Que Φ' soit une intégrale de l'équation aux dilatations;

2° Que P', Q', R' soient trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par la relation

$$\frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial Q'}{\partial y} + \frac{\partial R'}{\partial z} = 0; \tag{60}$$

3° Que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Phi'}{\partial x} + \frac{\partial R'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi'}{\partial y} + \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \Phi'}{\partial z} + \frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right. \tag{61}$$

Les égalités (60) et (61) exigent, comme nous l'avons vu au n° 4, que les quatre fonctions Φ', P', Q', R' soient quatre fonctions harmoniques; dès lors, au lieu d'exprimer que la première vérifie l'équation aux dilatations et les trois dernières l'équation aux rotations, il revient au même de dire que ces quatre fonctions vérifient les équations

$$A_0\Phi' + A_1\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n \Phi'}{\partial t^n} = 0, \tag{62}$$

$$\left\{\begin{aligned} &A_0P' + A_1\frac{\partial P'}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n P'}{\partial t^n} = 0, \\ &A_0Q' + A_1\frac{\partial Q'}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2 Q'}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n Q'}{\partial t^n} = 0, \\ &A_0R' + A_1\frac{\partial R'}{\partial t} + A_2\frac{\partial^2 R'}{\partial t^2} + \ldots + A_n\frac{\partial^n R'}{\partial t^n} = 0. \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Prenons trois fonctions harmoniques P', Q', R', qui vérifient les égalités (60) et (63); nous avons vu au numéro précédent comment on pouvait constituer de semblables fonctions; d'après ce que nous avons vu au n° 5, il existe une fonction harmonique V, déterminée à une fonction près de t, telle que l'on ait

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial R'}{\partial y} - \frac{\partial Q'}{\partial z} = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial P'}{\partial z} - \frac{\partial R'}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial Q'}{\partial x} - \frac{\partial P'}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right.$$

Prenons une de ces fonctions V. Des égalités (63) et (64) nous tirons sans peine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n}\right) = 0$$

ou bien

$$(65)\quad A_0 V + A_1 \frac{\partial V}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n V}{\partial t^n} = f(t).$$

D'autre part, la comparaison des égalités (61) et (64) donne

$$\Phi' = V + F(t),$$

tandis que les égalités (62) et (65) donnent

$$(66)\quad A_0 F(t) + A_1 \frac{dF(t)}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n F(t)}{dt^n} = f(t).$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Une intégrale u, v, w des équations (26) *a été mise sous la forme* (7), *où* Φ *est une intégrale de l'équation aux dilatations et où* P, Q, R *sont trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par l'égalité* (6). *Si l'on veut, d'une seconde manière, mettre cette intégrale sous cette même forme, on peut, mais on peut seulement,* *ajouter aux fonctions P, Q, R trois fonctions harmoniques P′, Q′, R′ vérifiant les égalités* (61) *et* (63). *On a alors à ajouter à la fonction Φ une fonction Φ′ déterminée à une fonction près de t, intégrale de l'équation*

$$A_0 F(t) + A_1 \frac{dF(t)}{dt} + \ldots + A_n \frac{d^n F(t)}{dt^n} = 0.$$

15. *On peut, si l'on préfère, choisir, pour l'ajouter à la fonction Φ, une quelconque des fonctions harmoniques Φ′ qui intègrent l'équation* (62).

Appliquons, en effet, à cette fonction Φ′ la méthode de M. Carl Neumann. La fonction $\Phi'(x, y, z, t)$ intégrant l'équation (66), il en sera, en particulier, de même de la fonction $\Phi'(\xi, \eta, \zeta, t)$; dès lors, il en sera de même de la fonction $U(x, y, z, t)$, liée à $\Phi'(\xi, \eta, \zeta, t)$ comme, d'après la première égalité (14), $U(x, y, z)$ est lié à $V(\xi, \eta, \zeta)$; la fonction $U(\xi, \eta, \zeta, t)$ intégrera donc l'équation (66); en continuant ainsi de proche en proche, on trouvera que toutes les fonctions

$$U^{(i)}(\xi, \eta, \zeta, t)$$

vérifient l'équation

$$A_0 U^{(i)}(\xi, \eta, \zeta, t) + A_1 \frac{\partial U^{(i)}(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n U^{(i)}(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^n} = 0.$$

D'autre part, la méthode de M. Carl Neumann montre sans peine que, quel que soit l'indice p, la série

$$\left[\frac{\partial^p \Phi'(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p U(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p}\right] + \left[\frac{\partial^p U'(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p} - \frac{\partial^p U''(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^p}\right] + \ldots$$

est uniformément convergente sur la surface S.

Dès lors, la série

$$[\Phi'(\xi, \eta, \zeta, t) - U(\xi, \eta, \zeta, t)] + [U'(\xi, \eta, \zeta, t) - U''(\xi, \eta, \xi, t)] + \ldots$$

converge uniformément sur la surface S et y définit une fonction $\sigma(\xi, \eta, \zeta, t)$ qui vérifie l'équation

$$A_0 \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) + A_1 \frac{\partial \sigma(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n \sigma(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial t^n} = 0.$$

Cela posé, il suffira de joindre à la fonction Φ' les déterminations suivantes de P′, Q′, R′,

$$P'(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(n, z) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(n, y) \right] dS,$$

$$Q'(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos(n, x) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, z) \right] dS,$$

$$R'(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \int \sigma(\xi, \eta, \zeta, t) \left[\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos(n, y) - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos(n, x) \right] dS,$$

car ces déterminations vérifient les conditions (60), (61), (63).

16. On peut donner une autre forme générale de l'intégrale des équations (26).

Soient u, v, w trois fonctions qui intègrent ces équations. Nous savons que nous pouvons les mettre sous la forme (7), Φ étant une intégrale de l'équation aux dilatations

$$(67) \qquad \mathfrak{D}(\Phi) = 0$$

et P, Q, R trois intégrales de l'équation aux rotations

$$(68) \qquad \mathfrak{R}(P) = 0, \qquad \mathfrak{R}(Q) = 0, \qquad \mathfrak{R}(R) = 0,$$

liées par la condition (6).

La condition (6), jointe à la proposition démontrée au n° **9**, nous enseigne qu'il existe trois fonctions A, B, C telles que l'on puisse écrire

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \\ Q &= \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \\ R &= \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}, \end{aligned}\right.$$

$$(23)\qquad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0.$$

Substituons dans les égalités (68) les expressions (22) des fonctions P, Q, R. Nous trouvons les trois égalités que voici :

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(C)}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{R}(B)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(A)}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{R}(C)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{R}(B)}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{R}(A)}{\partial y} = 0.$$

Ces égalités équivalent à la proposition suivante :

Il existe une fonction $f(x, y, z, t)$ telle que l'on puisse écrire

$$(69)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{R}(A) &= \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x}, \\ \mathfrak{R}(B) &= \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial y}, \\ \mathfrak{R}(C) &= \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Ces égalités nous donnent

$$\Delta f(x, y, z, t) = \mathfrak{R}\left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)$$

ou bien, en vertu de l'égalité (23),

$$(70)\qquad \Delta f = 0.$$

La fonction f est donc harmonique.

Considérons l'équation

$$(71)\qquad A_0 F + A_1 \frac{\partial F}{\partial t} + \ldots + A_n \frac{\partial^n F}{\partial t^n} + f = 0$$

et prenons, pour $t = 0$,

$$\Delta F = 0, \qquad \Delta \frac{\partial F}{\partial t} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta \frac{\partial^{n-1} F}{\partial t^{n-1}} = 0.$$

Nous aurons alors, quel que soit t,

$$(72)\qquad \Delta F = 0$$

et la comparaison des égalités (71) et (72) nous donnera l'égalité

$$\mathfrak{A}(F) + f = 0,$$

d'où découlent les suivantes :

$$(73)\qquad \begin{cases} \mathfrak{A}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \\ \mathfrak{A}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0, \\ \mathfrak{A}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Si nous posons

$$(74)\qquad \begin{cases} \alpha = A + \dfrac{\partial F}{\partial x}, \\ \beta = B + \dfrac{\partial F}{\partial y}, \\ \gamma = C + \dfrac{\partial F}{\partial z}, \end{cases}$$

la comparaison des égalités (69) et (73) nous donnera

$$(75)\qquad \mathfrak{A}(\alpha) = 0, \qquad \mathfrak{A}(\beta) = 0, \qquad \mathfrak{A}(\gamma) = 0.$$

La comparaison des égalités (23), (72) et (74) nous donne, d'ailleurs,

$$(76)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = 0,$$

tandis que la comparaison des égalités (22) et (74) nous donne

$$(77)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z},\\ Q &= \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x},\\ R &= \frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Une intégrale quelconque u, v, w des équations (26) *peut se mettre sous la forme*

$$(78)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right),\\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right),\\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\partial\gamma}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right), \end{aligned}\right.$$

où Φ est une intégrale de l'équation aux dilatations et où α, β, γ sont trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par l'égalité (76).

Réciproquement, si, dans les égalités (78), *on substitue à Φ une intégrale quelconque de l'équation aux dilatations et à α, β, γ trois intégrales quelconques de l'équation aux rotations, on obtient visiblement une intégrale des équations* (26).

Remarque. — En vertu de l'égalité (76), les égalités (78) peuvent également s'écrire

$$(79)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \Delta\alpha,\\ v &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} - \Delta\beta,\\ w &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} - \Delta\gamma. \end{aligned}\right.$$

CHAPITRE III.

FLUX LONGITUDINAL ET FLUX TRANSVERSAL.

17. Supposons que les trois fonctions

$$u(x, y, z, t), \qquad v(x, y, z, t), \qquad w(x, y, z, t)$$

intègrent les équations (26). Nous pourrons regarder ces trois fonctions comme les trois composantes d'un certain vecteur, variable d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre.

Mettons ces trois fonctions, selon ce que nous enseigne le Chapitre précédent, sous la forme

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned} \right.$$

où Φ est une intégrale de l'équation aux dilatations et où P, Q, R sont trois intégrales de l'équation aux rotations, liées par la relation

$$(6) \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Ce vecteur, que nous nommerons le *flux total*, peut se former par composition de deux autres, dont l'un a pour composantes

$$(80) \qquad u' = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \qquad w' = \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

tandis que l'autre a pour composantes

$$(81)\qquad \begin{cases} u'' = \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \\ v'' = \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, \\ w'' = \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}. \end{cases}$$

Étudions quelques propriétés de ces flux.

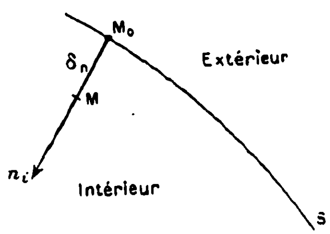
Le premier, donné par les égalités (80), dépend de l'équation aux dilatations

$$\mathfrak{D}(\Phi) = 0.$$

Supposons que cette équation soit du second ordre et appartienne à la catégorie d'équations aux dérivées partielles dont l'équation du son est le type; qu'elle admette des intégrales continues dans tout l'espace, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, mais pouvant présenter, de part et d'autre d'une surface variable avec le temps, deux déterminations analytiques différentes.

Imaginons, par exemple, que S (*fig.* 1) soit, à l'instant t, une sem-

Fig. 1.



blable surface. Elle divise l'espace en deux régions; en l'une de ces régions, que nous nommerons l'*extérieur*, la fonction Φ est identiquement nulle; en l'autre région, que nous nommerons l'*intérieur*, la fonction Φ admet une détermination analytique différente de o. S est le *front de l'onde*.

La fonction Φ devant être continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, on aura, sur le front de l'onde,

$$(82)\qquad \begin{cases} \Phi = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Le flux, identiquement nul à l'extérieur et sur le front de l'onde, est infiniment petit en un point intérieur infiniment voisin du front de l'onde. Nous allons calculer ses composantes en un tel point.

Soient $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de la surface S et $M(x, y, z)$ un point intérieur et infiniment voisin du point M_0. Posons

$$x = x_0 + \delta x, \qquad y = y_0 + \delta y, \qquad z = z_0 + \delta z.$$

Les égalités (82) étant vérifiées au point M_0, si l'on pose

$$\Phi_0 = \Phi(x_0, y_0, z_0, t), \qquad \Phi = \Phi(x, y, z, t),$$

on aura

$$(83)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\delta x + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0\,\partial x_0}\delta y + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\delta z.$$

Supposons que le point M se trouve, comme le point M_0, sur la surface S; la direction M_0M sera celle d'une tangente θ en M_0 à la surface S, en sorte que l'on aura

$$\delta x = \overline{M_0M}\cos(\theta, x), \quad \delta y = \overline{M_0M}\cos(\theta, y), \quad \delta z = \overline{M_0M}\cos(\theta, z).$$

D'autre part, en vertu des égalités (82), on aura, au point M,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0.$$

L'égalité (83) deviendra donc la première des égalités

$$(84)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(\theta, x) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0\,\partial x_0}\cos(\theta, y) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\cos(\theta, z) = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta, x) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0^2}\cos(\theta, y) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0\,\partial y_0}\cos(\theta, z) = 0, \\ \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(\theta, x) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0\,\partial z_0}\cos(\theta, y) + \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0^2}\cos(\theta, z) = 0. \end{cases}$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue.

Ces égalités sont vraies, quelle que soit la tangente θ menée par le point M_0 à la surface S.

Par le point M_0, menons une demi-normale n_i vers l'*intérieur;* prenons le point M sur cette demi-normale à une distance $\overline{MM_0} = \delta n$ du point M_0; nous aurons alors

$$\delta x = \delta n \cos(n_i, x), \qquad \delta y = \delta n \cos(n_i, y), \qquad \delta z = \delta n \cos(n_i, z).$$

Calculons les valeurs de u', v', w' au point M. En vertu des égalités (80) et (83), nous aurons

$$(85)\quad \begin{cases} u' = \left[\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_0^2} \cos(n_i, x) + \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_0 \partial x_0} \cos(n_i, y) - \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_0 \partial x_0} \cos(n_i, z)\right] \delta n, \\ v' = \left[\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_0 \partial y_0} \cos(n_i, x) + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial y_0^2} \cos(n_i, y) + \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_0 \partial y_0} \cos(n_i, z)\right] \delta n, \\ w' = \left[\dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_0 \partial z_0} \cos(n_i, x) + \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y_0 \partial z_0} \cos(n_i, y) + \dfrac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z_0^2} \cos(n_i, z)\right] \delta n. \end{cases}$$

Multiplions respectivement les deux membres des équations (85) par $\cos(\theta, x)$, $\cos(\theta, y)$, $\cos(\theta, z)$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus, en tenant compte des égalités (84); nous trouvons l'égalité

$$u' \cos(\theta, x) + v' \cos(\theta, y) + w' \cos(\theta, z) = 0,$$

qui équivaut à la proposition suivante :

En un point intérieur et infiniment voisin du front de l'onde, le flux représenté par les équations (80) *est infiniment petit et dirigé suivant la normale au front de l'onde.*

Il est aisé de trouver la grandeur de ce flux, qui est

$$(86)\qquad N = u' \cos(n_i, x) + v' \cos(n_i, y) + w' \cos(n_i, z).$$

Par le point M_0 menons à la surface S deux tangentes θ, θ', rectangulaires entre elles. Nous aurons

$$(87)\quad \begin{cases} \cos^2(n_i, x) + \cos^2(\theta, x) + \cos^2(\theta', x) = 1, \\ \cos(n_i, y)\cos(n_i, x) + \cos(\theta, y)\cos(\theta, x) + \cos(\theta', y)\cos(\theta', x) = 0, \\ \cos(n_i, z)\cos(n_i, x) + \cos(\theta, z)\cos(\theta, x) + \cos(\theta', z)\cos(\theta', x) = 0. \end{cases}$$

En vertu des égalités (78) et (79), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(n_i, x) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(n_i, y) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(n_i, z)\right]\delta n = u', \\ &\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(\theta, x) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta, y) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(\theta, z) = 0, \\ &\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\cos(\theta', x) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta', y) + \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0\,\partial z_0}\cos(\theta', z) = 0. \end{aligned}$$

Multiplions respectivement les deux membres de ces égalités par $\cos(n_i, x)$, $\delta n\cos(\theta, x)$, $\delta n\cos(\theta', x)$ et ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (87); nous trouvons la première des égalités

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial x_0^2}\,\delta n = u'\cos(n_i, x), \\ \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial y_0^2}\,\delta n = v'\cos(n_i, y), \\ \dfrac{\partial^2\Phi_0}{\partial z_0^2}\,\delta n = w'\cos(n_i, z). \end{cases}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Ajoutons membre à membre les égalités (88), en tenant compte de l'égalité (86), et nous trouvons

$$(89)\qquad \mathrm{N} = \Delta\Phi_0\,\delta n.$$

La proposition précédemment démontrée est la raison pour laquelle le flux représenté par les relations (80) se nomme, *en toutes circonstances*, le *flux longitudinal*.

18. Occupons-nous maintenant du vecteur représenté par les équations (81); les trois fonctions P, Q, R, qui servent à déterminer ce vecteur, sont trois intégrales de l'équation aux rotations

$$\mathcal{R}(\Omega) = 0.$$

Imaginons que cette équation soit du second ordre et qu'elle puisse admettre pour intégrales des fonctions qui soient continues ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, mais qui admettent, de part et d'autre d'une surface, des expressions analytiques différentes.

Soit, à l'instant t, S le *front de l'onde*. A l'*extérieur*, les trois fonctions P, Q, R sont identiquement nulles; elles sont différentes de o à l'intérieur.

En tout point de la surface S, la continuité de la fonction P et de ses dérivées partielles du premier ordre exige que l'on ait

$$(90)\qquad \left\{\begin{array}{c} P = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0, \qquad \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0, \qquad \dfrac{\partial P}{\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial P}{\partial t} = 0. \end{array}\right.$$

Si M_0 est un point de la surface S, si θ, θ' sont deux tangentes rectangulaires issues de ce point, on aura, en vertu de la troisième équation (90),

$$(91)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta, x) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_0^2}\cos(\theta, y) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial z_0\,\partial y_0}\cos(\theta, z) = 0, \\ &\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(\theta', x) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_0^2}\cos(\theta', y) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial z_0\,\partial y_0}\cos(\theta', z) = 0. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, soient n_i la demi-normale intérieure menée par le point M_0 et $M(x, y, z)$ un point de cette demi-normale à une distance δn du point M_0. Nous aurons

$$(92)\qquad \left[\frac{\partial^2 P_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\cos(n_i, x) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial y_0^2}\cos(n_i, y) + \frac{\partial^2 P_0}{\partial z_0\,\partial y_0}\cos(n_i, z)\right]\delta n = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Multiplions respectivement les deux membres des égalités (91) et (92) par $\cos(\theta, z)\,\delta n$, $\cos(\theta', z)\,\delta n$, $\cos(n_i, z)$ et ajoutons membre à membre les égalités obtenues, en tenant compte des égalités (87); nous trouvons la première des égalités

$$(93)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y}\cos(n_i, z) = \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial y_0\,\partial z_0}\,\delta n, & \dfrac{\partial P}{\partial z}\cos(n_i, y) = \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial y_0\,\partial z_0}\,\delta n, \\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}\cos(n_i, x) = \dfrac{\partial^2 Q_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\,\delta n, & \dfrac{\partial Q}{\partial x}\cos(n_i, z) = \dfrac{\partial^2 Q_0}{\partial z_0\,\partial x_0}\,\delta n, \\ \dfrac{\partial R}{\partial x}\cos(n_i, y) = \dfrac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\,\delta n, & \dfrac{\partial R}{\partial y}\cos(n_i, x) = \dfrac{\partial^2 R_0}{\partial x_0\,\partial y_0}\,\delta n. \end{cases}$$

Les cinq autres s'établissent d'une manière analogue.

Les égalités (81) et (93) donnent immédiatement

$$u''\cos(n_i, x) + v''\cos(n_i, y) + w''\cos(n_i, z) = 0.$$

D'où le proposition suivante :

En un point intérieur à l'onde et infiniment voisin du front de l'onde, le flux représenté par les égalités (81) *est infiniment petit et parallèle au plan tangent à l'onde.*

C'est pour rappeler cette propriété que l'on donne, *d'une manière générale*, au flux représenté par les égalités (81), le nom de *flux transversal*.

Le théorème démontré aux nos **11** et **12** peut alors s'énoncer ainsi :

Le flux total qui vérifie les égalités (26) *s'obtient de la manière la plus générale en composant un flux longitudinal qui dépend de l'équation aux dilatations et un flux transversal qui dépend de l'équation aux rotations.*

CHAPITRE IV.

ÉQUATIONS AUXQUELLES S'APPLIQUENT LES CONSIDÉRATIONS PRÉCÉDENTES.

---

19. Parmi les équations auxquelles s'appliquent les considérations précédentes, nous citerons, en premier lieu, les équations des petits mouvements des solides isotropes. Avec les notations de Lamé, ces équations s'écrivent

$$(94)\qquad \begin{cases} \rho\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ \rho\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu\Delta v - (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \\ \rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu\Delta w - (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Elles sont de la forme (26).

L'équation aux dilatations est

$$\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - (\lambda+2\mu)\Delta\Theta = 0.$$

L'équation aux rotations est

$$\rho\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2} - \mu\Delta\Omega = 0.$$

Les conditions de stabilité donnant les deux inégalités

$$\lambda + 2\mu > 0, \qquad \mu > 0,$$

ces deux équations sont de la forme de l'*équation du son :*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - a^2\Delta\varphi = 0.$$

Ce cas est celui que Clebsch a considéré.

20. Les équations (94) renferment comme cas particulier les équations

$$
(95) \qquad \begin{cases}
\mu\,\Delta u + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \\[2mm]
\mu\,\Delta v + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \\[2mm]
\mu\,\Delta w + (\lambda + \mu)\dfrac{\partial \theta}{\partial z} = 0,
\end{cases}
$$

qui sont les équations de l'équilibre d'élasticité pour un solide isotrope soumis à des forces exclusivement appliquées à sa surface. L'équation aux dilatations et l'équation aux rotations sont

$$\Delta\Theta = 0, \qquad \Delta\Omega = 0.$$

Ce sont des *équations de Laplace*.

Ainsi, *lorsqu'un solide isotrope est soumis à des forces appliquées exclusivement à la surface qui le termine, les composantes du déplacement peuvent être mises sous la forme donnée par les égalités* (6) *et* (7), Φ, P, Q, R *étant quatre fonctions harmoniques*.

21. Nous citerons, en second lieu, les équations des petits mouvements adiabatiques des fluides compressibles et visqueux.

Si l'on désigne par

ρ la densité du fluide,
Π la pression,
u, v, w les composantes de la vitesse,
μ et ν deux constantes,

les équations des mouvements finis des fluides compressibles et visqueux sont les équations

$$
(96) \qquad \begin{cases}
-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + \nu\dfrac{\partial u}{\partial z} - \mu\Delta u - \nu\dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \\[2mm]
-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \mu\,\Delta v - \nu\dfrac{\partial \theta}{\partial y}, \\[2mm]
-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \Pi}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \mu\Delta w - \nu\dfrac{\partial \theta}{\partial z},
\end{cases}
$$

auxquelles il faut joindre l'équation de continuité

$$(97)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\Theta+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+v\frac{\partial\rho}{\partial y}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}=0.$$

Si le fluide est animé d'un mouvement très petit au voisinage d'une position d'équilibre où ρ_0 et T_0 sont sa densité et sa température uniformes, les équations précédentes deviendront, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$(98)\qquad \left\{\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial t}-\mu\Delta u-\nu\frac{\partial\theta}{\partial x},\\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial t}-\mu\Delta u-\nu\frac{\partial\theta}{\partial y},\\ -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\Pi}{\partial z}&=\frac{\partial w}{\partial t}-\mu\Delta w-\nu\frac{\partial\theta}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

$$(99)\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\Theta=0.$$

Si les petits mouvements en question sont supposés adiabatiques, aux équations précédentes, il faut joindre la loi de détente adiabatique

$$(100)\qquad \Pi=f(\rho,\rho_0,T_0)=F(\rho).$$

Moyennant l'équation (100), l'équation (99) devient

$$\frac{\partial\Pi}{\partial t}=-\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\Theta,$$

d'où

$$(101)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial t}&=-\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial x},\\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial t}&=-\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial y},\\ \frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial t}&=-\rho_0\frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Différentions les équations (98) par rapport à t, en tenant compte des équations (101), et nous trouvons les équations

$$(102)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta u - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial x} - \nu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0,\\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta v - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial y} - \nu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial y} = 0,\\ &\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu\frac{\partial}{\partial t}\Delta w - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\frac{\partial\theta}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\theta}{\partial z} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces équations (102) sont du type (26).

L'équation aux dilatations est

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \frac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}\Delta\Theta - (\mu+\nu)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Theta = 0.$$

L'équation aux rotations est

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \mu\Delta\Omega\right) = 0.$$

D'ailleurs les équations (98) nous montrent immédiatement que les rotations vérifient l'équation

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} - \mu\Delta\Omega = 0,$$

qui est l'*équation de la conductibilité de la chaleur*.

22. On obtient un type beaucoup plus général d'équations auxquelles s'appliquent les considérations précédentes en traitant le problème de la propagation des actions électriques dans un milieu homogène qui est à la fois conducteur et diélectrique.

Si l'on désigne par

ε la constante des lois de Coulomb,
a^2 la constante des actions électromagnétiques,
k la constante de Helmholtz,
ρ la résistance électrique spécifique du milieu,
F son coefficient de polarisation diélectrique,
f son coefficient d'aimantation,

les théories de Helmholtz montrent que les composantes X, Y, Z du champ électrique vérifient les équations :

$$
(103)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}+4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3 X}{\partial t^3}-\frac{\partial}{\partial t}\Delta X\\
&-\frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial \theta}{\partial x}-\frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t}=0,\\
&\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}+4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3 Y}{\partial t^3}-\frac{\partial}{\partial t}\Delta Y\\
&-\frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial \theta}{\partial y}-\frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial^2\theta}{\partial y\,\partial t}=0,\\
&\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}+4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3 Z}{\partial t^3}-\frac{\partial}{\partial t}\Delta Z\\
&-\frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial \theta}{\partial z}-\frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\frac{\partial^2\theta}{\partial z\,\partial t}=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces équations sont du type (26).

L'équation aux dilatations, que vérifie également la fonction potentielle électrostatique V, est la suivante

$$(1+4\pi\varepsilon F)\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Theta-4\pi a^2 k F\frac{\partial^3\theta}{\partial t^3}-\frac{4\pi}{\rho}\left(\varepsilon\Delta\Theta-a^2 k\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right)=0.$$

L'équation aux rotations est

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Omega-4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^3\Omega}{\partial t^3}-\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}=0.$$

Mais on montre directement que les trois rotations et les trois composantes L, M, N du champ magnétique vérifient l'équation

$$\Delta\Omega-4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^2\Omega}{\partial t^2}-\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial\Omega}{\partial t}=0,$$

qui est l'*équation des télégraphistes généralisée*, objet d'une Note de M. Boussinesq ([1]).

([1]) *Voir* un Article de M. Blondin dans la *Lumière électrique* du 3 mars 1894.

23. Si l'on suppose que le milieu ne soit pas diélectrique,

$$F = 0,$$

les équations (103) deviennent

$$(104)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{4\pi a^2(1+4\pi f)}{\rho}\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\Delta X \\ &- \frac{4\pi\varepsilon(1+4\pi f)}{k\rho}\frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1+4\pi f - k}{k}\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial t} = 0, \\ &\text{et deux analogues.}\end{aligned}\right.$$

Ces équations, qui régissent la propagation de l'électricité dans un milieu conducteur non diélectrique, se ramènent aux équations (102) des petits mouvements adiabatiques des fluides visqueux, si l'on remplace

$$\begin{array}{ccc} X, Y, Z & \text{par} & u, v, w, \\ \dfrac{\rho}{4\pi a^2(1+4\pi f)} & \text{par} & \mu, \\ \dfrac{(1+4\pi f - k)\rho}{4\pi a^2 k(1+4\pi f)} & \text{par} & \nu, \\ \dfrac{\varepsilon}{a^2 k} & \text{par} & \dfrac{dF(\rho_0)}{d\rho_0}. \end{array}$$

Cette remarque a été faite par Helmholtz.

24. Si l'on suppose que le milieu ne soit pas conducteur,

$$\rho = \infty,$$

les équations (103) deviennent

$$(105)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\Big[4\pi a^2 F(1+4\pi f)\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \\ &\qquad - \Delta X - \frac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f) - k}{k}\frac{\partial\theta}{\partial x}\Big] = 0, \\ &\text{et deux analogues.}\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs, dans ce cas, on montre directement que X, Y, Z vérifient les équations

$$(106)\quad \begin{cases} 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \Delta X - \dfrac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \\ 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\dfrac{\partial^2 Y}{\partial t^2} - \Delta Y - \dfrac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \\ 4\pi a^2 F(1+4\pi f)\dfrac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \Delta Z - \dfrac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{k}\dfrac{\partial\theta}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

Ces équations, qui régissent la propagation des actions électriques dans les corps diélectriques isolants, se ramènent aux équations (94) des petits mouvements des corps élastiques isotropes, si l'on remplace

$$\begin{array}{ccc} X, Y, Z & \text{par} & u, v, w, \\ \dfrac{1}{4\pi a^2 F(1+4\pi f)} & \text{par} & \dfrac{\mu}{\rho}, \\ \dfrac{(1+4\pi\varepsilon F)(1+4\pi f)-k}{4\pi a^2 k F(1+4\pi f)} & \text{par} & \dfrac{\lambda+\mu}{\rho}. \end{array}$$

On voit que le théorème de Clebsch, généralisé comme nous l'avons indiqué dans cet écrit, trouve son emploi dans les questions les plus variées de la Physique mathématique.