JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LÉON AUTONNE

Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 6 (1900), p. 157-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1900_5_6__157_0>

Sur les équations algébriques dont toutes les racines sont des intégrales d'une même équation de Riccati;

Par M. Léon AUTONNE.

Introduction.

Considérons une équation algébrique h_n de degré $n \geqq 4$

$$f(x) = x^n + \mathcal{A}_1(t)\, x^{n-1} + \ldots + \mathcal{A}_n(t) = 0,$$

où les coefficients $\mathcal{A}(t)$ sont des fonctions quelconques de la variable t.

Prenons maintenant une équation de Riccati U

$$u' = \frac{du}{dt} = \mathcal{B}_0(t) + u\mathcal{B}_1(t) + u^2\mathcal{B}_2(t),$$

et admettons que les n racines $x_i (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ de h_n soient des intégrales de U.

Cette condition entraînera, tant pour h_n que pour les irrationnelles x_i, des sujétions fort étroites dont l'étude est l'objet principal du présent Mémoire.

D'abord, le rapport anharmonique formé avec quatre racines sera constant. Je donnerai, pour rappeler cette propriété, à h_n le nom d'équation *anharmonique*. Ce Travail sera donc consacré aux anharmoniques.

En second lieu, le *groupe* (au sens de Galois et de M. Jordan) de h_n sera très particularisé entre les n lettres x_i.

Pour définir ce groupe G, je considérerai comme *rationnelles par définition* :

1° Toutes les constantes;

2° Les coefficients $\mathcal{A}(t)$ de h_n.

Je dirai donc qu'une expression quelconque est *rationnelle*, si elle est le quotient de deux polynomes en $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$ à coefficients constants.

Sous le bénéfice de ces conventions, h_n sera supposée irréductible et G transitif.

Changeons x en

$$x^{(1)} = \frac{x\,A(t) + B(t)}{x\,C(t) + D(t)}, \qquad AD - BC \neq 0,$$

où A, B, C, D sont *rationnels*. h_n reste anharmonique et G ne change pas. *Je ne regarderai pas comme distinctes* deux h_n qui ne diffèrent que par le changement de x en $x^{(1)}$. Je profiterai des quatre coefficients A, B, C, D pour simplifier l'expression définitive de h_n.

La théorie des anharmoniques h_n est fondée sur celle des groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini, constitués par des substitutions

$$L = \left| z, \quad \frac{az + b}{cz + d} \right|, \qquad ad - bc \neq 0.$$

Ce sont les groupes construits par MM. Jordan, Klein et Gordan. Rappelons quelques propriétés, d'ailleurs bien connues, de ces groupes S.

S appartient à un des cinq types suivants, d'ordre N :

I. Circulaire (*Kreistheilungsgruppe* de M. Klein), dérivé des N puissances d'une substitution unique

$$| z \quad \theta z |, \qquad \theta^N = 1;$$

II. Pyramidal (*Doppelpyramidengruppe* de M. Klein), dont les $N = 2m$ substitutions proviennent de

$$\Theta = | z \quad \theta z |, \qquad \theta^m = 1,$$
$$\varepsilon = | z \quad z^{-1} |,$$
$$\varepsilon^2 = 1, \qquad \varepsilon^{-1}\Theta\varepsilon = \Theta^{-1};$$

III. Tétraédrique, $N = 12$;
IV. Octaédrique, $N = 24$;
V. Icosaédrique, $N = 60$.

Pour le Tableau des trois derniers types, je renvoie au Mémoire de M. Jordan, inséré au tome 84 du *Journal de Crelle*.

Chacun de ces cinq types possède un *invariant absolu* (*zugehörige Function* de M. Klein)

$$\Psi(z) = \psi(z) : \varphi(z),$$

où ψ et φ sont des polynomes en z, à coefficients numériques; l'un au moins des deux a N pour degré, le degré de l'autre étant égal ou inférieur.

Voici les propriétés de Ψ : 1° c'est un invariant absolu vis-à-vis de toute substitution L de S, effectuée sur z; 2° tout autre invariant absolu rationnel s'exprime rationnellement en Ψ.

On trouvera au tome XII des *Mathematische Annalen*, p. 168, la liste, dressée par M. Klein, des cinq invariants absolus $\Psi(z)$.

Tout cela posé, la théorie des anharmoniques h_n repose sur deux propositions fondamentales :

Théorème I. — *Le groupe* G *de* h_n *est isomorphe sans hémiédrie à un groupe* S.

Théorème II. — *Toute* h_n *est de la forme*

$$F(x, T) = 0,$$

où le polynome F, *à deux arguments, est à coefficients numériques* *qui ne dépendent que de* S. $T = T(t)$ *est rationnelle. La relation algébrique entre* x *et* T *est du genre zéro.*

Ainsi, il n'intervient dans h_n qu'*une seule* fonction $T(t)$ de t. Les $\mathcal{A}$ sont rationnels en T, comme T l'est par rapport aux $\mathcal{A}$.

h_n n'appartient qu'à un nombre fini, et même assez restreint, de types dont la construction effective et explicite peut être poursuivie jusqu'au bout.

Nommons

G_0 le sous-groupe formé par celles des substitutions de G qui laissent fixe la racine x_0;

S_0 le sous-groupe correspondant de S.

J'établis que G_0 *et* S_0 *sont constitués par les* p *puissances d'une substitution unique* ($\mathfrak{R}$ pour G_0, R pour S_0). Ni $\mathfrak{R}$ ni R ne sont puissances d'une autre substitution ayant un ordre plus élevé que p.

Voici comment on réalisera la construction effective de toutes les h_n :

On prendra un groupe S; on choisira dans ce groupe une substitution R d'ordre p. Il viendra $N = np$.

Posons ensuite l'équation W de degré N

$$\Psi(\Omega) = T \qquad \text{ou} \qquad \psi(\Omega) - T\varphi(\Omega) = 0,$$

où T est une fonction quelconque de t. Appelons Ω_j ($j = 0, 1, \ldots, N-1$) les N racines.

Si η_0 est une quantité dont la valeur ne change pas par l'effet de la substitution R, le polynome de degré $N = np$ en η

$$\begin{vmatrix} \psi(\eta) & \varphi(\eta) \\ \psi(\eta_0) & \varphi(\eta_0) \end{vmatrix}$$

sera la puissance $p^{\text{ième}}$ exacte d'un polynome $H(\eta)$ de degré n, qui sera le *polynome réduit* de h_n. Soient η_i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) les n racines de l'équation $H(\eta) = 0$.

Introduisons enfin l'expression suivante, où Ψ' et H' désignent les dérivées de Ψ et de H,

$$\mathfrak{F}(X, Y) = \frac{1}{\Psi'(X)}\left[\frac{1}{X-Y} - \frac{H'(X)}{nH(X)}\right],$$

laquelle possède l'invariance absolue vis-à-vis de toute substitution $\mathfrak{L}$ *de* S, *effectuée* simultanément *sur* X *et* Y.

En vertu de cette propriété *les* nN *expressions*

$$\mathfrak{F}(\Omega_j, \eta_i) \qquad \begin{pmatrix} j = 0, 1, \ldots, N-1 \\ i = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

se réduisent à n distinctes, qui sont *précisément les* n racines x_i de h_n.

On posera donc

$$x_i = \mathfrak{F}(\Omega, \eta_i),$$

Ω étant une quelconque des N racines de W.

L'irrationnelle x_i est mise sous une forme telle que la constance du rapport anharmonique de quatre x devient évidente.

Soit η une racine quelconque du polynome réduit; éliminons Ω entre les deux équations

$$x = \mathfrak{F}(\Omega, \eta), \qquad \Psi(\Omega) = T. \tag{W}$$

Le résultant, indépendant du choix de η, sera du degré N en x, mais *sera aussi une puissance* $p^{ième}$ *exacte du polynome* $F(x, T)$, *du degré* n *en* x, envisagé au théorème II ci-dessus.

h_n se trouve ainsi complètement construite et notre problème a sa solution achevée.

Les N racines Ω_j de l'équation W et les n racines η_i de $H = 0$ ont la propriété suivante : *elles sont toutes les transformées d'une quelconque d'entre elles par les substitutions* $\mathfrak{L}$ *du groupe* S.

On appelle, dans la théorie des formes algébriques, *équivalents* deux polynomes $P(x)$ et $\mathfrak{P}(\eta)$, lorsqu'on passe de l'un à l'autre en posant

$$\eta = \frac{x\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{x\mathfrak{C} + \mathfrak{D}} \qquad x = \frac{\eta\mathfrak{D} - \mathfrak{B}}{-\eta\mathfrak{C} + \mathfrak{A}}.$$

P et $\mathfrak{P}$ ont leurs invariants absolus correspondants égaux.

Je montre que *le* polynome réduit $H(\eta)$ *est* équivalent *au polynome* $f(x)$, premier membre de h_n.

$H(\eta)$ est à coefficients numériques et *tous les invariants absolus du polynome $f(x)$ sont des constantes numériques,* quoique les coefficients $\mathcal{A}(t)$ de $f(x)$ dépendent de t.

Ce résultat était à prévoir, car tous les invariants absolus d'un polynome $f(x)$ sont des fonctions rationnelles des rapports anharmoniques construits avec quatre racines.

Le choix, dans un groupe S donné, de la substitution R n'est pas tout à fait *ad libitum.*

La substitution $\mathfrak{R}$, qui correspond, dans G, à R, peut déplacer toutes les racines de h_n autres que x_0. Les $n-1$ racines $x_1, \ldots, x_{n-1}$ se répartissent p à p entre les cycles de $\mathfrak{R}$ et p divise $n-1$. Je dirai qu'on a affaire à la première catégorie.

$\mathfrak{R}$ peut laisser fixe, outre x_0, une seconde racine x_1 ; les $n-2$ racines $x_2, \ldots, x_{n-1}$ se répartissent p à p entre les cycles de $\mathfrak{R}$ et p divise $n-2$. Je dirai que l'on a affaire à la deuxième catégorie.

D'ailleurs, *aucune substitution de* G *ne peut laisser fixes plus de deux racines.*

Voici le résultat de la discussion en ce qui concerne le choix de R ou du nombre p, $N = np$.

$$p = 1, \qquad R = 1.$$

S appartient à l'un quelconque des cinq types de M. Jordan. Toutes les racines de h_n s'expriment rationnellement en fonction d'une quelconque d'entre elles

$$p > 1.$$

Dans le cas de la deuxième catégorie, n est un nombre pair, $n = 2r$.

Les $2r$ racines se répartissent en r couples. Chaque racine d'un couple s'exprime rationnellement avec l'autre. h_n n'est pas primitive.

Toutes les racines de h_n s'expriment rationnellement avec deux quelconques d'entre elles, pourvu toutefois que ces dernières (dans le cas de la deuxième catégorie) n'appartiennent pas au même couple.

S n'est jamais du type circulaire.

Si S est du type pyramidal, $p = 2$. G dérive d'une substitution circulaire

$$\Theta = (0, 1, 2, \ldots, n-1), \qquad \Theta^n = 1,$$

entre les n racines $x_0, \ldots, x_{n-1}$ et d'une substitution binaire ε.

On a, pour n impair,

$$\varepsilon = (0)(1, n-1)(2, n-2)\ldots;$$

pour n pair $= 2r$,

$$\varepsilon = (0)(r)(1, n-1)(\ldots)\ldots,$$

n impair conduit à la première catégorie; n pair conduit à la deuxième.

Même quand n n'est pas premier, h_n participe aux propriétés des équations de Galois.

S tétraédrique ne donne que 2 anharmoniques, savoir ($N = 12 = n$):

$n = 4$, $p = 3$ (l'équation h_4 est à groupe alterné et à discriminant carré; première catégorie).

$n = 6$, $p = 2$ (deuxième catégorie).

S octaédrique ne donne rien à la première catégorie et trois anharmoniques à la deuxième catégorie ($N = 24 = np$) :

$$n = 12 \quad p = 2$$
$$n = 8 \quad p = 3$$
$$n = 6 \quad p = 4$$

S icosaédrique ($N = 60 = np$) ne fournit rien à la première catégorie et trois équations à la deuxième catégorie :

$$n = 30 \quad p = 2$$
$$n = 20 \quad p = 3$$
$$n = 12 \quad p = 5$$

Quant à l'équation de Riccati U son intégrale générale est

$$u = \mathcal{F}(\Omega, C),$$

où C est la constante arbitraire et Ω la fonction fournie par l'équation W ou

$$\Psi(\Omega) = T(t).$$

Si l'on prend pour variable non plus t mais Ω, ce qui ne change pas le fond des choses, il est très facile de construire U elle-même.

H, Ψ étant les expressions en Ω déjà envisagées, Ψ', Ψ'', H', ... étant les dérivées par rapport à Ω, U s'écrit

$$\Psi' \frac{du}{d\Omega} + u\Psi'' + \frac{d}{d\Omega}\frac{H'}{nH} + \left(u\Psi' + \frac{H'}{nH}\right)^2 = 0.$$

Il fallait s'attendre à rencontrer tôt ou tard dans les présentes recherches les groupes S de M. Jordan, lesquels jouent un rôle essentiel dans l'intégration algébrique de l'équation différentielle linéaire, homogène, du second ordre.

Voici pourquoi.

M. Painlevé (*Leçons de Stockholm*, p. 29 et suivantes) rattache à l'équation U de Riccati, l'équation V

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = v M(t).$$

Si u_1, u_2, u_3, ... sont des intégrales de U, si v_1, v_2, ... sont des intégrales de V et v'_1, v'_2, ... leurs dérivées, on a

$$\frac{v'_1 + C v'_2}{v_1 + C v_2}$$

pour l'intégrale générale de U et ensuite

$$v_1^2 = \frac{u_2 - u_3}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}.$$

Dans le cas qui nous occupe toutes les intégrales tant de U que de V sont, à part le changement de variable indépendante t en $T(t)$, algébriques. L'intervention des groupes S de M. Jordan ne saurait manquer.

J'espère, dans une publication ultérieure, revenir sur la dépendance mutuelle des équations différentielles U et V.

Il paraît aussi intéressant et facile d'approfondir la théorie géométrique des courbes algébriques unicursales *anharmoniques*

$$F(x, T) = 0,$$

où, dans le polynome F envisagé au théorème II, ci-dessus, on prend x pour une ordonnée et T pour une abscisse.

Dans le présent Mémoire, je me contente, comme exemple d'application pour les procédés généraux, de construire toutes les anharmoniques du quatrième degré.

Les principaux résultats des présentes recherches ont fait l'objet de plusieurs Communications insérées aux *Comptes rendus :* une déjà ancienne (7 mai 1883), les autres plus récentes (13 février 1899; 5 et 12 février 1900).

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE ANHARMONIQUE DE DEGRÉ n; LES n CONSTANTES $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$.

---

1. Considérons une équation algébrique h_n de degré $n \geqq 4$

$$f(x) = x^n + \mathcal{A}_1(t)x^{n-1} + \ldots + \mathcal{A}_n(t) = 0,$$

où les coefficients $\mathcal{A}$ sont des fonctions quelconques de la variable t.

Nous envisagerons comme *quantités rationnelles par définition :*

1° Toutes les constantes;

2° Les coefficients $\mathcal{A}$ de h_n.

Je ne considérerai pas comme distinctes deux h_n qui ne différeront que par le changement de x en

$$x^{(1)} = \frac{xa(t)+b(t)}{xc(t)+d(t)}, \qquad ad-bc \neq 0,$$

$a, b, c, d =$ *rationnelles.*

Cela me permettra de supposer, sans restreindre la généralité, $\mathcal{A}_1 = 0$, c'est-à-dire nulle la somme des n racines.

Nommons, sous le bénéfice des hypothèses ci-dessus faites sur la rationnalité, G le groupe (au sens de Galois) de h_n. Il est évident que G est indépendant du changement de x en $x^{(1)}$. On admettra que G est transitif et h_n irréductible.

2. Prenons maintenant une équation U de Riccati

$$u' = \frac{du}{dt} = \mathfrak{B}_0(t) + u\mathfrak{B}_1(t) + u^2\mathfrak{B}_2(t).$$

Par hypothèse les n racines $x_i (i=0, 1, \ldots, n-1)$ de h_n seront des intégrales de U. Alors le rapport anharmonique de quatre racines sera constant et h_n prendra le nom d'équation algébrique *anharmonique*. Cette propriété est évidemment indépendante du changement de x en $x^{(1)}$ (n° **1**).

Je me propose d'étudier la nature de l'anharmonique h_n et des irrationnelles x_i.

3. Soit x_α une racine quelconque; posons

$$(n-1)c_\alpha = (n-1)c(x_\alpha) = \sum_i \frac{1}{x_i - x_\alpha},$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1; \qquad i \neq \alpha.$$

Il est facile de calculer la fonction $c(z)$ de l'indéterminée z. Soit

$$f(z) = (z - x_\alpha) f_\alpha(z). \tag{1}$$

On aura

$$-(n-1)c(z)=\sum_i \frac{1}{z-x_i}, \qquad i \neq \alpha,$$

c'est-à-dire que la sommation est étendue aux $n-1$ racines de $f_\alpha(z)=0$. Si L est l'algorithme du logarithme népérien, il viendra

$$\sum_i \frac{1}{z-x_i}=\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{L}\prod_i^{i\neq\alpha}(z-x_i)=\frac{f'_\alpha(z)}{f_\alpha(z)}, \qquad f'_\alpha(z)=\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}.$$

Différentions deux fois par rapport à z la relation (1), on aura

$$f'(z)=(z-x_\alpha)f'_\alpha(z)+\ f_\alpha(z),$$
$$f''(z)=(z-x_\alpha)f''_\alpha(z)+2f'_\alpha(z).$$

D'où l'on tirera

$$f_\alpha(z) \quad \text{et} \quad f'_\alpha(z).$$

Pour $z=x_\alpha$

$$f_\alpha(x_\alpha)=f'(x_\alpha), \qquad f'_\alpha(z)=\tfrac{1}{2}f''(x_\alpha),$$
$$(n-1)c_\alpha=(n-1)c(x_\alpha)=-\frac{f''(x_\alpha)}{2f'(x_\alpha)}.$$

4. Introduisons les $n-1$ quantités y_i, $i\neq\alpha$, définies par les égalités

$$(1) \qquad x_i=x_\alpha+\frac{1}{c_\alpha-y_i}.$$

On doit du reste aussi introduire un $n^{\text{ième}}$ y, y_α, qui est ∞.

Tous les x_i étant inégaux, tous les y_i le seront aussi. Notamment un seul des y_i peut être zéro.

Si ce cas se présente, je dirai que h_n appartient à la *seconde catégorie*. Sinon on aura affaire à la première catégorie.

Je dis que *le rapport de deux y, aucun des deux n'étant ∞ ou* 0, *est une constante.*

Pour établir cette proposition fondamentale, j'écris que x_i, définie par l'égalité (1) est une intégrale de U (n° **2**), tout comme x_α. Après un calcul facile on a

$$y_i' + y_i(\mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2) = \mathrm{P} = c_\alpha' + c_\alpha(\mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2) + \mathfrak{B}_2.$$

Sommons par rapport aux $(n-1)$ quantités y_i qui sont finies, il viendra

$$(n-1)\mathrm{P} = \sum_i y_i' + (\mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2) \sum_i y_i.$$

Mais, en vertu de (1),

$$y_i = c_\alpha - \frac{1}{x_i - x_\alpha}$$

et

$$\sum_i y_i = (n-1)c_\alpha - \sum_i \frac{1}{x_i - x_\alpha} = 0 \qquad (\text{n}^\circ\ 3)$$

Bref, $\mathrm{P} = 0$ et

$$-\frac{y_i'}{y_i} = \mathfrak{B}_1 + 2x_\alpha \mathfrak{B}_2 = -\frac{y_j'}{y_j}, \qquad y_j : y_i = \text{const.}$$

C. Q. F. D.

5. Considérons l'équation Y_α

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{F}^{(1)}(y;x_\alpha) = \prod_i (y - y_i) &= \prod_i \left(y - c_\alpha + \frac{1}{x_i - x_\alpha}\right) \\ &= y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x_\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i \neq \alpha),$$

l'opération $\prod_i$ étant étendue aux $(n-1)$ quantités y qui sont finies.

Y_α aura ses coefficients rationnels en x_α.

Pour la première catégorie, $a_{n-1} \neq 0$. Pour la seconde catégorie, $a_{n-1} = 0$; après départ du facteur y, Y_α se réduit au degré $n-2$.

J'écrirai pour Y_α

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(y;x_\alpha) = y^{\mathrm{M}} + y^{\mathrm{M}-1}\mathrm{A}_1(x_\alpha) + \ldots + y^j \mathrm{A}_{\mathrm{M}-j}(x_\alpha) \\ + \ldots + \mathrm{A}_{\mathrm{M}}(x_\alpha) = 0, \end{aligned}$$

$\mathrm{A}_{\mathrm{M}} \neq 0$; on aura alors

$\mathrm{M} = n-1$ pour la première catégorie,

$M = n - 2$ pour la deuxième catégorie.

Quelques-uns des A peuvent être $\equiv 0$. Nommons m le plus grand commun diviseur des indices $M - j$ tels que, dans le terme $y^j A_{M-j}$, le coefficient $A_{M-j}(x_\alpha) \not\equiv 0$. Comme $A_M \neq 0$, m est évidemment un diviseur du degré M et $M = ms$. Y_α est une équation Z, de degré s en $z = y^m$.

6. Soit y_0 une racine de Y_α; toutes les M racines s'obtiendront par la formule

$$y_0 l_k, \qquad l_k = \text{const.}, \qquad k = 0, 1, \ldots, M - 1; \qquad l_0 = 1.$$

Cela résulte immédiatement du n° 4. Aucune des constantes l_k n'est nulle.

L'équation $\mathcal{E}$

$$\prod_k (y - y_0 l_k) = y^M + E_1 y_0 y^{M-1} + \ldots + E_j y_0^j y^{M-j} + \ldots + E_M y_0^M = 0,$$

où les E sont des constantes, a les mêmes racines que Y_α; identifions Y_α et $\mathcal{E}$; on aura les M relations

$$(1) \qquad A_j(x_\alpha) = E_j y_0^j, \qquad j = 1, 2, \ldots, M$$

pour déterminer les $M + 1$ inconnues E_j et y_0.

Cherchons les solutions du système (1) ci-dessus. Plusieurs A_j peuvent être $\equiv 0$, les E_j correspondants sont alors nuls, c'est-à-dire déterminés.

Je ne retiens donc que les relations, au nombre de $M - M_1$,

$$(2) \qquad y_0^j E_j = A_j(x_\alpha),$$

où $A_j \not\equiv 0$. Soient $j, j_1, j_2, \ldots$, les exposants divers; on a déjà appelé m (n° 5) leur plus grand commun diviseur.

Toute expression de la forme

$$j\mu + j_1\mu_1 + \ldots = \Sigma j\mu,$$

où les μ sont des entiers, positifs ou négatifs, est un multiple de m. Un théorème bien connu d'arithmétique nous apprend à construire au moins un système d'entiers μ tels que $\Sigma j\mu = m$. Écrivons

$$\Pi A^{\mu} \quad \text{pour} \quad A_j^{\mu} A_{j_1}^{\mu_1} \ldots,$$
$$e^{-m} = \Pi E^{\mu} \quad \text{pour} \quad E_j^{\mu} E_{j_1}^{\mu_1} \ldots.$$

Les égalités (2) donnent immédiatement

$$(3) \qquad \begin{cases} y_0^m = e^m \Pi A^{\mu}, \\ E_j = A_j y_0^{-j}, \end{cases}$$

e restant indéterminé, ce qui devait être puisque l'on n'avait que M égalités (1) ci-dessus pour définir M + 1 inconnues.

Je dis qu'en faisant varier l'indéterminée e on obtient toutes les solutions possibles des équations (1), au moyen des formules (3) ci-dessus.

Soit en effet z_0 et E'_j un autre système de solutions; on aura

$$A_j = y_0^j E_j = z_0^j E'_j,$$
$$\left(\frac{z_0}{y_0}\right)^j = \frac{E_j}{E'_j}, \qquad z_0 : y_0 = \text{const.}$$

z_0 ne diffère de y_0 que par une autre valeur attribuée dans (3) à l'indéterminée e. Il en est de même pour E'_j et les E_j.

7. En résumé y_0 *est définie par une équation binome*

$$y_0^m - e^m \Omega(x_\alpha) = 0,$$

où e est une constante indéterminée et Ω une fonction rationnelle. $\Omega(x_\alpha)$ n'est pas autre chose que $\Pi A^{\mu}(x_\alpha)$ ci-dessus.

Je ferai entrer dans Ω le facteur constant e^m et j'écrirai simplement

$$(1) \qquad \varphi_m(y_0) = y_0^m - \Omega(x_\alpha) = 0.$$

Le quotient de deux racines sera constant.

8. *Adjoignons* (au sens de Galois) aux coefficients $\mathcal{A}$ de $f(x)$ (n° 1) encore la racine x_α. $\mathfrak{P}_m(y_0)$ se décomposera en facteurs rationnels

$$\mathfrak{P}_m(y_0) = P_\sigma^\rho(y_0) P'^{\rho'}_{\sigma'}(y_0)\ldots,$$

$\rho\sigma + \rho'\sigma' + \ldots = m$, tels que $P_\sigma = 0$, $P'_{\sigma'} = 0$, ... soient des équations irréductibles. Comme l'équation $\mathfrak{P}_m = 0$ n'a pas de racines égales, il vient

$$\rho = \rho' = \ldots = 1.$$

Je dis que *tous les degrés* σ, σ', ... *sont égaux.*

Soient η et $k\eta$ deux racines de $\mathfrak{P}_m = 0$, $k = \text{const.}$, avec

$$P_\sigma(\eta) = 0, \qquad P'_{\sigma'}(k\eta) = 0.$$

Les deux équations irréductibles en z

$$P_\sigma(z) = 0, \qquad P'_{\sigma'}(kz) = 0,$$

ont une racine $z = \eta$ commune; donc elles coïncident et $\sigma' = \sigma$. Bref, $m = pr$ et l'équation binome (1) du n° 7 se décompose en r équations irréductibles de degré p, telles que

$$P_p(z) = 0.$$

Je dis que *l'équation* $P_p(z) = 0$ *est binome.*

Cela résulte immédiatement d'un théorème de M. Fuchs (*Journal de Crelle*, t. 81, p. 100, proposition III), puisque : 1° l'équation $P_p = 0$ est irréductible ; 2° le quotient de deux racines de $P_p = 0$, qui sont aussi des racines de $\mathfrak{P}_m = 0$, est constant.

La discussion précédente montre que les $m = pr$ racines y_0 de l'équation binome $\mathfrak{P}_m = 0$ sont fournies par la formule

$$v_\alpha \lambda^k \qquad [\lambda^m = 1, \qquad k = 0, 1, \qquad \ldots, \qquad m-1],$$

où v_α est une des p déterminations de $V_\alpha^{\frac{1}{p}}$, V_α étant une fonction rationnelle de x_α.

L'équation Y_α (n° 5) de degré $M = ms$ est une équation Z de degré s en $z = y^m$. Nommons $g_h^m y_0^m$ $[h = 0, 1, \ldots, s-1]$ les s racines de Z.

Par conséquent : *Les* M *racines* y_i *de* Y_α *sont fournies par la formule*

$$(1) \qquad g_h \lambda^k v_\alpha \quad [h = 0, 1, \ldots, s-1;\ k = 0, 1, \ldots, m-1];$$

$\lambda^m = 1$, $M = ms$, $m = pr$, $v_\alpha^p = V_\alpha(x_\alpha)$, V_α *étant rationnelle. Les* g_h *sont des constantes.*

En outre, il y a un y_α infini (n° 4) et, dans le cas de la seconde catégorie, un y nul.

9. Si, dans la formule (1) du n° 4, on explicite les expressions de y_i, on aura, d'après ce qui vient d'être dit, α et β étant deux indices quelconques choisis dans la suite $0, 1, \ldots, n-1$,

$$x_\beta = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - q_{\alpha\beta} v_\alpha}.$$

Parmi les n *coefficients constants* $q_{\alpha\beta}$ *un, savoir* $q_{\alpha\alpha}$, *sera* ∞; *un, dans le cas de la seconde catégorie, sera zéro. Les* M *autres s'obtiendront par la formule* (1) *du n°* **8**, *c'est-à-dire seront de la forme* $g_h \lambda^k$. D'ailleurs

$$M = n - 1 \text{ dans la première catégorie,}$$
$$M = n - 2 \text{ dans la deuxième.}$$

Tous les y étant différents, tous les $q_{\alpha\beta}$ le sont aussi. Pour cette raison, le rapport $g_{h'} : g_h$ ne peut être une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité pour $h' \neq h$, et les s racines $g_h^m y_0^m$ de l'équation Z du n° 8 sont distinctes.

Je nomme Q_α le système des n coefficients constants $Q_{\alpha\beta}$ afférents à l'indice α.

10. Quelle modification subira la construction du système Q si, au lieu de partir de la racine x_α, on avait choisi, au n° 5, une autre racine x_β?

On aurait eu (n° 5) l'équation Y_β de degré $n-1$

$$F^{(1)}(y; x_\beta) = y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x_\beta) = 0.$$

Comme h_n est irréductible, $a_{n-1}(x_\beta)$ s'évanouit avec $a_{n-1}(x_\alpha)$ et seulement alors. Donc, *la catégorie ne change pas.*

Si $A_j(x_\alpha) \equiv 0$, $A_j(x_\beta)$ est aussi $\equiv 0$ et réciproquement; ainsi *le nombre m ne change pas.*

Admettons provisoirement que les nombres p et r puissent changer [1]. Les $n-1$ racines de l'équation Y_β seront fournies par la formule $v_\beta q_{\beta j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $j \neq \beta$, avec $q_{\beta\beta} = \infty$ et

$$v_\beta^m - \Omega(x_\beta) = 0$$

puisque (n° 7)

$$v_\alpha^m - \Omega(x_\alpha) = 0; \qquad \Omega(x_\alpha) = \Pi A^\mu(x_\alpha).$$

On aura encore les égalités

$$x_j = x_\beta + \frac{1}{c_\beta - q_{\beta j} v_\beta}, \qquad c_\beta = c(x_\beta),$$

et un système Q_β de n termes $q_{\beta j}$ tous inégaux, dont un $q_{\beta\beta}$ est ∞, un autre est zéro, si l'on se trouve dans la seconde catégorie.

Je dis que *les systèmes Q_α et Q_β ne diffèrent que par l'ordre des n termes.*

11. $q_{\beta\beta}$ étant ∞ se retrouve dans Q_α puisque $q_{\alpha\alpha}$ est ∞. Soit un terme fini $q_{\beta j}$ de Q_β; je dis que $q_{\beta j}$ se retrouve dans Q_α.

Le groupe G de h_n, étant transitif, possède au moins une substitution $s = (\alpha\beta\ldots)$; soit i l'indice auquel s fait succéder j, de façon que

$$s = (\alpha\beta\ldots)(ij\ldots)(\ldots)\ldots.$$

Or, on a

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - q_{\alpha i} v_\alpha},$$

$$x_j = x_\beta + \frac{1}{c_\beta - q_{\beta j} v_\beta},$$

---

[1] On verra au n° 32 que cela n'est pas.

$$\begin{aligned}
q_{\alpha i} v_\alpha &= c_\alpha + (x_\alpha - x_i)^{-1}, \qquad v_\alpha^m = \Omega(x_\alpha),\\
q_{\beta j} v_\beta &= c_\beta + (x_\beta - x_j)^{-1}, \qquad v_\beta^m = \Omega(x_\beta),\\
q_{\alpha i}^m &= [c_\alpha + (x_\alpha - x_i)^{-1}]^m [\Omega(x_\alpha)]^{-1} = \psi(x_\alpha, x_i),\\
q_{\beta j}^m &= \ldots = \psi(x_\beta, x_j), \qquad \psi = \text{rationnelle}.
\end{aligned}$$

La fonction rationnelle des deux racines $\psi(x_\alpha, x_i)$ est égale à la constante $q_{\alpha i}^m$ et ne change pas de valeur numérique par la substitution s; ainsi

$$q_{\alpha i}^m = \psi(x_\alpha, x_i) = \psi(x_\beta, x_j) = q_{\beta j}^m.$$

Si $q_{\beta j} = 0$, pour la deuxième catégorie, $q_{\alpha i} = 0$ aussi; $q_{\beta j}$ se retrouve dans Q_α. Si $q_{\beta j} \neq 0$, on a

$$q_{\beta j} = q_{\alpha i} \lambda^l, \qquad \lambda^m = 1.$$

Or $q_{\alpha i} = g_h \lambda^k$ (n° **9**) pour un choix convenable des nombres entiers h et k; ainsi $q_{\beta j} = g_h \lambda^{k+l}$ et se retrouve dans le système Q_α.

En résumé, tous les n termes distincts de Q_β se retrouvent parmi les n termes tous distincts de Q_α. Les deux systèmes coïncident, à l'ordre des termes près.

Je ne parlerai plus dorénavant de Q_α, Q_β, ..., mais du système unique Q (ou Q_0) dont les n termes q_i, $q_i = q_{0i}$ ont les valeurs suivantes : $q_0 = \infty$, $q_1 = 0$ dans la seconde catégorie, les M (n° **5**) autres q n'étant ni nuls, ni infinis.

Du reste, on peut numéroter de bien des façons différentes les n termes du système Q. Ainsi, au n° **17**, je démontrerai que les n quantités $q'_j = q_{j0}$ sont toutes distinctes. Au n° **27**, je raisonnerai non plus sur les q_i mais sur les q'_j.

CHAPITRE II.

Groupe linéaire fractionnaire S, d'ordre fini; son isomorphe Γ entre les n lettres q.

---

12. Je ferai grand usage des substitutions linéaires fractionnaires $\mathcal{L}$. J'emploierai plusieurs notations équivalentes

$$\mathcal{L} = \left| z \quad \frac{az+b}{cz+d} \right|, \qquad ad - bc \neq 0,$$

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}, \qquad \text{ou} \qquad \mathcal{L} = | z \quad \mathcal{L}[z] \,| = | z \quad z' \,|,$$

$z' = \mathcal{L}[z] = \dfrac{az+b}{cz+d}$ étant alors ce que devient l'indéterminée z par l'effet de $\mathcal{L}$.

L'inverse $\mathcal{L}^{-1}$ de $\mathcal{L}$ est

$$\mathcal{L}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}; \qquad z = \mathcal{L}^{-1}[z'].$$

$\mathcal{L}$ est aussi définie par la relation entre z et z'

$$\mathfrak{F}(z, z') = czz' - za + z'd - b = 0.$$

Je dirai souvent simplement *une* $\mathcal{L}$ au lieu de *une substitution linéaire fractionnaire* $\mathcal{L}$.

Pour la multiplication des substitutions et la théorie des groupes, j'emploierai la terminologie et les notations, classiques en la matière, de M. Jordan.

13. Nommons σ_α la $\mathcal{L}$ de déterminant $v_\alpha \neq 0$

$$\sigma_\alpha = \left| z \quad x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - z v_\alpha} \right|.$$

La formule du Chapitre I (n° **9**)

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - \nu_\alpha q_{\alpha i}}$$

peut s'écrire

$$x_i = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}].$$

De même

$$x_i = \sigma_\beta[q_{\beta i}],$$

et finalement

$$\sigma_\alpha[q_{\alpha i}] = \sigma_\beta[q_{\beta i}], \qquad q_{\beta i} = \sigma_\beta^{-1}\sigma_\alpha[q_{\alpha i}] = s_{\beta\alpha}[q_{\alpha i}],$$

en posant $s_{\beta\alpha} = \sigma_\beta^{-1}\sigma_\alpha$, d'où $s_{\alpha\beta} = s_{\beta\alpha}^{-1}$. On a

$$q_{\beta i} = s_{\beta\alpha}[q_{\alpha i}];$$

les $q_{\alpha i}$ et les $q_{\beta i}$ sont tous des termes appartenant au même système Q des n coefficients q_i (n° **11**). $s_{\beta\alpha}$ ne fait que permuter ensemble les q_i.

Par suite, $s_{\beta\alpha}$ a constants les rapports de trois de ses coefficients au quatrième.

Considérons maintenant la $\mathfrak{L}$ canonique d'ordre m

$$\Lambda = | z \quad \lambda z |, \qquad \lambda^m = 1.$$

On a vu au Chapitre I que tous les q_i qui ne sont ni o, ni ∞, sont donnés par la formule $g_h\lambda^k (k = 0, 1, \ldots, m-1; h = 0, 1, \ldots, s-1; ms = \mathrm{M}; \mathrm{M} = n-1$ pour la première catégorie; $\mathrm{M} = n-2$ pour la deuxième catégorie). Donc Λ ne fait que permuter ensemble les M lettres q_i telles que $q_i \neq 0$ ou ∞. De plus, $\Lambda[0] = 0$, $\Lambda[\infty] = \infty$. Ainsi, Λ *partage avec les $s_{\alpha\beta}$ la propriété de permuter ensemble les n termes q_i du système* Q.

14. Nommons S le groupe dérivé des $s_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, n-1)$ et de Λ. S est évidemment isomorphe au groupe Γ entre n lettres, constitué par les déplacements des q_i.

L'isomorphisme est holoédrique, car une $\mathfrak{L}$ de S, qui laisse fixes les $n(n > 3)$ lettres q_i, se réduit à l'unité.

S est d'ordre fini et appartient à l'un des cinq types de MM. Jordan, Klein et Gordan, énumérés dans l'Introduction.

Nommons N l'ordre commun de S et de Γ.

15. Γ *est transitif entre les n lettres* q_i.

Prenons deux combinaisons quelconques $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ des n indices o à $n-1$. Il suffit qu'il existe au moins une $\mathcal{L}$ de S, par exemple s, telle que

$$q_{\alpha'\beta'} = s[q_{\alpha\beta}],$$

pour que la transitivité soit assurée.

Or on a (n° **13**)

$$q_{\beta i} = s_{\beta\alpha}[q_{\alpha i}], \qquad q_{\beta\alpha} = s_{\beta\alpha}[q_{\alpha\alpha}] = s_{\beta\alpha}[\infty],$$

et, de même,

$$q_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}[\infty], \qquad q_{\alpha'\beta'} = s_{\alpha'\beta'}[\infty],$$

d'où

$$q_{\alpha'\beta'} = s_{\alpha'\beta'} s_{\beta\alpha}[q_{\alpha\beta}],$$

car

$$s_{\beta\alpha} = s_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Il suffit de faire

$$s = s_{\alpha'\beta'} s_{\beta\alpha}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

S contiendra $N = n\mathcal{N}$ substitutions, $\mathcal{N}$ étant l'ordre du groupe S_0 formé par les $\mathcal{L}$ de S qui laissent fixe $q_0 = \infty$.

16. Étudions S_0 et nommons s une $\mathcal{L}$ de S_0

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a, par hypothèse,

$$s[\infty] = \frac{a}{c} = \infty, \qquad \text{d'où} \qquad c = 0.$$

J'écrirai, pour simplifier les notations,

$$s = |\, z \quad az + b \,| = (a, b) \quad \text{ou} \quad [a, b].$$

Un calcul simple montre que

$$(a, b)^l = \left[a^l, \frac{b(a^l - 1)}{a - 1}\right] \qquad \text{pour} \qquad a \neq 1,$$
$$(1, b)^l = (1, lb).$$

Comme $s = (a, b)$ *est d'ordre fini*, $b = 0$, dès que $a = 1$; alors $s = 1$.

Soient $s = (a, b)$, $s' = (a', b')$, il viendra

$$s's = (aa', a'b + b'), \qquad ss' = (aa', ab' + b),$$
$$ss'(s's)^{-1} = (1, \ldots) = 1,$$

en vertu de ce qui précède, et *toutes les* $\mathfrak{L}$ *de* S_0 *sont échangeables entre elles*.

De la relation $ss' = s's$ on tire

$$a'b + b' = ab' + b, \qquad (a' - 1)b = (a - 1)b',$$
$$\frac{b}{a - 1} = \frac{b'}{a' - 1} = e.$$

Les $\mathfrak{L}$ de S_0 ont la forme

$$[a, e(a - 1)], \quad [a', e(a' - 1)], \quad \ldots,$$

e étant le même pour toutes les substitutions.

$a, a', \ldots$ sont des racines de l'unité. Si une des $\mathfrak{L}$ est canonique, $e = 0$ et toutes les $\mathfrak{N}$ substitutions $\mathfrak{L}$ de S_0 sont canoniques; donc, en vertu de théories bien connues, S_0, *d'ordre* $\mathfrak{N}$, *est constitué par les* $\mathfrak{N}$ *puissances d'une seule substitution*

$$R = [\rho, e(\rho - 1)] = |\, z \quad \rho z + e(\rho - 1)\,|, \qquad \rho^{\mathfrak{N}} = 1, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Si $m > 1$, S_0 contient les puissances de la $\mathfrak{L}$ canonique Λ (nº **13**), R est alors aussi canonique et $e = 0$. Bref, *on ne peut avoir* $e \neq 0$ *que si* $m = 1$; $\mathfrak{N}$ est évidemment un multiple de m.

17. Nous sommes maintenant à même de donner une idée plus précise de la nature de S et de Γ.

Prenons, gardant les notations du n° **13**, dans S les n substitutions $\mathfrak{s}$, $s_\alpha = s_{0\alpha} = \sigma_0^{-1}\sigma_\alpha$; $s_0 = 1$. Elles sont toutes distinctes, car si $s_\alpha = s_\beta$, on aurait

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta, \qquad \sigma_\alpha[\infty] = x_\alpha = \sigma_\beta[\infty] = x_\beta,$$

résultat absurde. La relation $\sigma_\alpha[q_{\alpha i}] = \sigma_\beta[q_{\beta i}]$ du n° **13** devient

$$s_\alpha[q_{\alpha i}] = s_\beta[q_{\beta i}],$$

d'où, à volonté : si $i = \beta = 0$,

$$(1) \qquad s_\alpha[q_{\alpha 0}] = q_{00}, \qquad q_{\alpha 0} = s_\alpha^{-1}[q_{00}] = s_\alpha^{-1}[\infty];$$

si $\alpha = 0$, $\beta = i$,

$$(2) \qquad q_{0\beta} = s_\beta[\infty], \qquad q_{0\alpha} = s_\alpha[q_{00}] = s_\alpha[\infty];$$

si $i = \beta$,

$$(3) \qquad s_\alpha[q_{\alpha\beta}] = s_\beta[\infty], \qquad q_{\alpha\beta} = s_\alpha^{-1} s_\beta[\infty].$$

Tous les coefficients $q_{\alpha\beta}$ sont ainsi connus dès que S est connu.

Nommons $\mathfrak{S}_\alpha$ la substitution de Γ qui correspond à s_α, on aura, puisque $q_{0\alpha} = q_\alpha = s_\alpha[q_{00}] = s_\alpha[q_0]$,

$$\mathfrak{S}_\alpha = (q_0 q_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots.$$

Soit $\mathfrak{T}$ une substitution *quelconque* de Γ, qui fasse succéder l'indice α à l'indice o,

$$\mathfrak{T} = (q_0 q_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots.$$

Il viendra

$$\mathfrak{T}\mathfrak{S}_\alpha^{-1} = (q_0)(\ldots)\ldots = \mathfrak{R}^l,$$

$\mathfrak{R}$ étant la substitution de Γ qui correspond à R (n° **16**). Toutes les $N = n\mathcal{N}$ substitutions de Γ sont ainsi fournies par la formule

$$\mathfrak{R}^l \mathfrak{S}_\alpha \qquad (l = 0, 1, \ldots, \mathcal{N} - 1;\ \alpha = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Par suite, *les* $n\mathfrak{N} = \mathrm{N}$ *substitutions* $\mathfrak{L}$ *de* S *sont fournies par la formule*

$$\mathrm{R}^l s_\alpha.$$

Il résulte notamment de là que *les n quantités* $q_{\alpha 0}$ *sont toutes distinctes*. En effet, si $q_{\alpha 0} = q_{\beta 0}$, la formule (1) ci-dessus donnerait

$$q_{\alpha 0} = s_\alpha^{-1}[q_{00}] = s_\alpha^{-1}[\infty] = q_{\beta 0} = s_\beta^{-1}[\infty];$$

alors

$$s_\beta s_\alpha^{-1}[\infty] = \infty, \qquad s_\beta s_\alpha^{-1} = \mathrm{R}^l, \qquad s_\beta = \mathrm{R}^l s_\alpha,$$

et les $n\mathfrak{N}$ expressions $\mathrm{R}^l s_\alpha$ ne seraient plus distinctes.

Posons (n° **11**, *in fine*) $q_{i0} = q'_i$, $q_0 = q'_0 = \infty$ (ce qui équivaut à un numérotage différent des q); en vertu de (1), on aura, pour substitution correspondante à s_α^{-1} dans le groupe Γ *construit sur les* q',

$$(q'_0 q'_\alpha \ldots)(\ldots),$$

résultat utile au n° **25**.

18. La formule du n° **13**

$$(1) \qquad x_i = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}] \qquad \text{ou} \qquad x_i = \sigma_0[q_i]$$

conduit à une conséquence nouvelle.

Envisageons le polynome $\mathfrak{F}(q)$ dont les q_i sont racines; $\mathfrak{F}(q)$ sera du degré $n-1$, puisque la racine q_0 est infinie. Dans la deuxième catégorie, il y aura aussi une racine nulle.

Les formules (1) montrent que le polynome $f(x)$ (n° **1**), dont les x_i sont racines, est *équivalent* (au point de vue de la théorie des formes) au polynome $\mathfrak{F}(q)$ à coefficients constants.

Tous les invariants absolus de $f(x)$ sont des constantes. Cela était à prévoir, car ces invariants sont des fonctions rationnelles par rapport aux rapports anharmoniques des racines x_i.

Je dirai que $\mathfrak{F}(q)$ est le *polynome réduit* du polynome $f(x)$.

Toute $\mathfrak{L}$ de S, permutant ensemble les racines q_i du polynome réduit, ne peut, après départ des dénominateurs, que multiplier ce polynome réduit par un coefficient numérique : $\mathfrak{F}(q)$ *est un inva-*

riant par rapport au groupe S, *dont les* $\mathfrak{L}$ *sont effectuées sur* q, toujours après départ des dénominateurs.

19. On a vu (n° **16**) que R,

$$R = | z \quad \rho z + e(\rho - 1) |, \qquad \rho^{\mathfrak{N}} = 1,$$

dont les $\mathfrak{N}$ puissances constituent S_0, est forcément canonique, $e = 0$, dès que $m > 1$, mais que, si $m = 1$, on a éventuellement

$$e \neq 0.$$

R devient canonique dès que l'on transforme S par la substitution

$$E^{-1} = | z \quad z + e |,$$

$E[\infty] = E[q_0] = \infty = q_0$; $E = 1$ dès que $e = 0$. Considérer ESE^{-1} au lieu de S, c'est opérer non plus sur z et q_i, mais sur $z + e$ et $q_i + e$.

Voici, relativement aux groupes S et S_0 *ainsi transformés par* E^{-1}, quelques lemmes utiles pour la suite.

I. *Aucune* s_α *n'est une puissance de* R, car on aurait $s_\alpha[\infty] = \infty$, $s_\alpha[q_0] = q_0$, ce qui est absurde, car (n° **17**)

$$s_\alpha[q_0] = q_\alpha \qquad \text{et} \qquad q_\alpha \neq q_0.$$

II. *Aucune* $\mathfrak{L}$ *de* S *autre que les puissances de* R *n'est canonique*, car on aurait encore $\mathfrak{L}[\infty] = \infty$, $\mathfrak{L} = R^l$.

III. S_0 *ne contient aucun sous-groupe* $\mathfrak{s}$ *permutable aux* $\mathfrak{L}$ *de* S.

Les $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{s}$ sont canoniques, puisque ce sont des puissances de R; désignons par s une $\mathfrak{L}$ quelconque de S non contenue dans S_0; si $s^{-1}\mathfrak{s}s = \mathfrak{s}$, on a (Jordan, *Journal de Crelle*, t. 84, p. 96, n° **7**) ou bien

$$s_\alpha \text{ canonique},$$

ce qui est absurde (lemme II), ou bien

$$s = \left| z \quad \frac{1}{z} \right|, \qquad s^2 = 1;$$

Les $N = n\mathfrak{N}$ substitutions de S, qui devient pyramidal (*voir* Introduction), se réduisent aux $2\mathfrak{N}$ substitutions dérivées de $\mathfrak{s}$ et de R et données par la formule

$$\mathfrak{s}^g R^l \qquad (l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1;\ g = 0 \text{ et } 1).$$

Cela est absurde, car on aurait $n = 2$.

On verra, du reste, au n° **32** que R est toujours canonique et e toujours nul. L'hypothèse $e \neq 0$ est toute provisoire.

CHAPITRE III.

IDENTITÉ DE Γ AVEC LE GROUPE G DE L'ANHARMONIQUE.

20. Reprenons la relation

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - \nu_\alpha q_{\alpha i}} = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}] \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{15}),$$

où

$$\sigma_\alpha = \left| z \quad x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - \nu_\alpha z} \right|,$$

et le groupe S des $n\mathfrak{N}$ substitutions (n° **17**)

$$R^l \mathfrak{s}_\alpha \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1;\ l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1),$$
$$R = | z \quad \rho z + e(\rho - 1) |.$$

Changeons z et q_i en $z + e$ et $q_i + e$, ce qui a pour effet (n° **19**) de transformer S par la substitution

$$E^{-1} = | z \quad z + e |$$

et de rendre R canonique.

Nommons

$$d_\alpha = \frac{c_\alpha}{v_\alpha} + e = \mathrm{E}^{-1}\left[\frac{c_\alpha}{v_\alpha}\right]$$

ce que devient le rapport $\frac{c_\alpha}{v_\alpha}$ par l'effet de E^{-1}.

Il viendra

$$\sigma_\alpha = \left| z \quad x_\alpha + \frac{1}{v_\alpha(d_\alpha - z)} \right|.$$

Dès que $m > 1$, E se réduit à l'unité (nº **16**, *in fine*)

$$e = 0,$$

et d_α se réduit au quotient

$$\frac{c_\alpha}{v_\alpha},$$

dont la puissance $m^{\text{ième}}$ est rationnelle puisque $v_\alpha^m = \Omega(x_\alpha)$ (Chapitre I).

21. Je vais étudier les propriétés des d_α qui sont le fondement de toute la théorie.

On a d'abord, avec les notations du nº **17**,

$$\infty = \sigma_\alpha[d_\alpha] = \sigma_0[d_0], \qquad d_0 = \sigma_0^{-1}\sigma_\alpha[d_\alpha] = s_\alpha[d_\alpha],$$

d'où $d_\alpha = s_\alpha^{-1}[d_0]$; de même $s_\alpha[d_\alpha] = s_\beta[d_\beta]$.

Les $n\mathfrak{N}$ quantités $u_j (j = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}-1; \mathrm{N} = n\mathfrak{N})$ fournies par la formule

$$\rho^l d_\alpha = \mathrm{R}^l s_\alpha^{-1}[d_0]$$

sont des transformées par des $\mathfrak{L}$ de S de l'expression $u_0 = d_0$. Je vais montrer que les N quantités u_j sont toutes distinctes. Alors elles seront *toutes les transformées* de u_0 par les $\mathfrak{L}$ de S. Ces dernières ne feront que permuter ensemble les u_j.

22. I. *Aucun d_α n'est ∞*, car on aurait

$$v_\alpha = 0 \qquad \text{et} \qquad x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha};$$

h_n aurait des racines égales.

II. *Si un $d_\alpha =$* const., *tous les d_α sont constants.*

Posons $d_\alpha = \frac{c_\alpha}{v_\alpha} + e = \mathrm{K}$; il viendra

$$\frac{c_\alpha}{v_\alpha} = \mathrm{K} - e, \qquad c_\alpha^m = (\mathrm{K} - e)^m v_\alpha^m.$$

Or (Chap. I) $v_\alpha^m = \Omega(x_\alpha)$, Ω étant rationnelle

$$(1) \qquad c_\alpha^m = [c(x_\alpha)]^m = (\mathrm{K} - e)^m \Omega(x_\alpha).$$

Comme h_n est irréductible, la relation (1) subsiste pour toutes les racines x_α et *tous* les d_α sont des constantes.

III. *Il est absurde de supposer tous les d_α constants.*

Des formules telles que

$$(1) \qquad x_\beta = x_\alpha + \frac{1}{v_\alpha(d_\alpha - q_{\alpha\beta})}$$

on tire

$$(x_\beta - x_\alpha)^{-1} = v_\alpha(d_\alpha - q_{\alpha\beta}) = - v_\beta(d_\beta - q_{\beta\alpha}).$$

$d_\alpha - q_{\alpha\beta} \neq 0$ sans quoi, en vertu de (1), $x_\beta = \infty$; de même $d_\beta - q_{\beta\alpha} \neq 0$. Alors

$$\frac{v_\alpha}{d_\beta - q_{\beta\alpha}} = \frac{-v_\beta}{d_\alpha - q_{\alpha\beta}}.$$

Si tous les d sont constants, les rapports des v sont constants et l'on peut poser

$$(2) \qquad x_\beta - x_\alpha = \mathrm{K}_{\beta\alpha}\,\omega, \qquad \mathrm{K}_{\beta\alpha} = \text{const.}$$

Effectuons la sommation $\sum_\beta$, $\beta \neq \alpha$, des égalités (2), en remarquant que la somme des racines de h_n est nulle (n° **1**); on aura

$$- n x_\alpha = \omega \sum_\beta \mathrm{K}_{\beta\alpha}.$$

Le rapport de deux racines x_α serait constant. Raisonnant sur h_n

comme on a raisonné sur Y_α au Chapitre I, on verra que l'irrationnelle x_i est de la forme $x_i = K_i T^{\frac{1}{m}}$, T = fonction rationnelle des coefficients $\mathcal{A}$ de $f(x)$ (n° **1**). Les x_i ne seraient plus intégrales d'une équation de Riccati mais d'une équation

$$mT\frac{du}{dt} = uT', \qquad T' = \frac{dT}{dt}.$$

IV. *Aucun rapport $d_\beta : d_\alpha$ n'est constant pour $\beta \neq \alpha$.*

Posons $d_\beta = K d_\alpha$, K = const. On a $d_\beta = s[d_\alpha]$ (n° **21**), où

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = s_\beta^{-1} s_\alpha$$

est une $\mathfrak{L}$ de S.

Il viendrait

$$d_\beta = K d_\alpha = \frac{a d_\alpha + b}{c d_\alpha + d},$$

$$(1) \qquad K c d_\alpha^2 + d_\alpha(Kd - a) - b = 0.$$

L'équation (1) en d_α est une identité, sinon d_α = const., ce qui est absurde (lemme III); donc

$$b = c = Kd - a = 0,$$

s est canonique.

De là successivement, toujours avec les notations du n° **17**,

$$s[\infty] = s_\beta^{-1} s_\alpha[\infty] = \infty,$$
$$s_\alpha[\infty] = s_\beta[\infty],$$
$$\sigma_0 s_\alpha[\infty] = \sigma_\alpha[\infty] = x_\alpha = \sigma_0 s_\beta[\infty] = \sigma_\beta[\infty] = x_\beta,$$

ce qui est absurde.

Les quatre lemmes précédents entraînent la conséquence annoncée :

V. *Les $N = n\mathfrak{N}$ quantités $u_j (j = 0, 1, \ldots, N-1)$ du n° **21** données par la formule*

$$\rho^l d_\alpha \qquad (l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1;\ \alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$$

sont toutes distinctes.

Si l'on avait, en effet,

$$\rho'' d_{\alpha'} = \rho' d_\alpha, \qquad \alpha' \neq \alpha,$$

on aurait

$$d_{\alpha'} : d_\alpha = \text{const.}$$

ce qui est absurde (lemme IV).

Les $\mathfrak{L}$ de S permutent entre elles les N lettres u_j; les déplacements des u_j forment un groupe Γ' entre N lettres, évidemment : 1° isomorphe à S et à Γ; 2° transitif.

Il n'y a pas hémiédrie, car S ne possède aucune $\mathfrak{L}$ laissant tous les u_j fixes. Γ' a son ordre N égal à son degré. Chaque substitution de Γ' déplace chacune des N lettres u.

23. Considérons l'équation D de degré N [$l = 0, 1, \ldots, \mathfrak{N} - 1$; $\alpha = 0, 1, \ldots, n - 1$] :

$$D(u) = \prod_{j=0}^{j=N-1} (u - u_j) = \prod_{l\alpha} (u - \rho^l d_\alpha) = \prod_{\alpha} (u^{\mathfrak{N}} - d_\alpha^{\mathfrak{N}}) = 0.$$

Je dis que $d_\alpha^{\mathfrak{N}} = \left(\frac{c_\alpha}{v_\alpha} + e\right)^{\mathfrak{N}}$ (n° **20**) est rationnel en x_α.

En effet, $v_\alpha^m = \Omega(x_\alpha)$ (Chap. I), Ω étant rationnelle. $e = 0$ dès que $m > 1$ (n° **16**, *in fine*); enfin $\mathfrak{N}$ est un multiple de m (n° **16**).

Par conséquent :

lorsque $m > 1$, $e = 0$, $d_\alpha^{\mathfrak{N}} = \left[\frac{c(x_\alpha)}{v_\alpha}\right]^{\mathfrak{N}} = \frac{[c(x_\alpha)]^{\mathfrak{N}}}{[\Omega(x_\alpha)]^{\frac{\mathfrak{N}}{m}}} =$ rationnelle;

lorsque $m = 1$, v_α est rationnelle et $d_\alpha^{\mathfrak{N}}$ aussi.

On a donc $D(u) = W(u^{\mathfrak{N}})$, les coefficients du polynome W en $u^{\mathfrak{N}}$ étant symétriques par rapport aux x_α, c'est-à-dire rationnels par rapport aux coefficients $\mathcal{A}$ de $f(x)$ (n° **1**). Les coefficients des polynomes D ou W sont donc *rationnels* au sens du n° **1**.

24. *Le groupe (au sens de Galois) de l'équation* D, *de degré* N *et à coefficients rationnels, est précisément le groupe* Γ' *du n°* **22** (*in fine*).

On supposera D irréductible; on verra au Chapitre IV, n° **35**, ce qu'il en est effectivement.

Soient $s_j (j = 0, 1, \ldots, N-1)$ les N substitutions $\mathfrak{L}$ de S, on aura $u_j = s_j[u_0]$. L'expression $\psi(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, rationnelle en u_j et à coefficients *rationnels* au sens du n° **1**, est identique à une expression analogue $\chi(u_0)$ en u_0 seul. Il est indifférent d'effectuer dans ψ :

Soit *sur les* u_j une substitution s de S;

Soit *entre les* u_j une permutation marquée par la substitution σ de Γ' correspondante à s.

Prenons l'identité

$$\psi(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}) = \chi(u_0).$$

Si ψ est invariable par les substitutions σ de Γ', on a, en vertu de la transitivité de Γ',

$$\chi(u_0) = \chi(u_1) = \ldots = \chi(u_{N-1}) = \frac{\chi(u_0) + \chi(u_1) + \ldots}{N},$$

ψ est symétrique par rapport aux racines de D, c'est-à-dire rationnelle.

Si $\psi = \chi(u_0)$ est rationnelle, on a, puisque D est irréductible par hypothèse,

$$\psi = \chi(u_0) = \chi(u_1) = \ldots;$$

ψ ne change pas de valeur par les substitutions σ de Γ.

Ainsi Γ' est le *groupe* de D. C. Q. F. D.

Posons

$$w_0 \doteq u_0^{\mathfrak{N}} = d_0^{\mathfrak{N}}.$$

w_0 est invariable par les $\mathfrak{N}$ puissances de la canonique $R = | z \quad \rho z |$ $(\rho^{\mathfrak{N}} = 1)$ qui constituent le groupe S_0.

Les N transformées de w_0 par les $N = n\mathfrak{N}$ substitutions de S se réduisent à n seulement, savoir $[\alpha = 0, 1, \ldots, n-1]$

$$w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{N}}.$$

Toutes les w_α sont distinctes, car, si $w_\alpha = w_\beta$, on aurait

$$d_\alpha : d_\beta = \text{const.} \quad (\text{n° } \mathbf{22}, \text{ lemme IV}).$$

Chaque substitution de S produit, entre les n lettres $\mathfrak{w}_\alpha$, un certain déplacement dont l'ensemble constitue un groupe Γ'' entre n lettres évidemment isomorphe à S, à Γ et à Γ'.

Je dis que *l'hémiédrie n'existe pas.* Il existerait, en effet, alors dans S un groupe $\mathfrak{J}$ laissant fixes toutes les n quantités $\mathfrak{w}_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{M}}$; R laisse $\mathfrak{w}_0$ fixe et $\mathfrak{J}$ est contenu dans S_0. $\mathfrak{J}$ est permutable aux $\mathfrak{L}$ de S, ce qui est absurde (lemme III du n° **19**); l'holoédrie est forcée.

25. Je dis que *les deux groupes* Γ *et* Γ'', *de même degré* n, *isomorphes sans hémiédrie, sont identiques*, c'est-à-dire diffèrent uniquement par le nom des lettres déplacées.

La proposition devient évidente si l'on suppose Γ construit sur les n lettres q' du n° **17** (c'est-à-dire sur les q différemment numérotés).

En effet, prenons les substitutions correspondantes R de S, $\mathfrak{R} = (q'_0)(\ldots)\ldots$ de Γ, $\mathfrak{R}'' = (\mathfrak{w}_0)(\ldots)\ldots$ de Γ'', puis les substitutions correspondantes s_α^{-1}, $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}''_\alpha$ de S, Γ et Γ''. On a

$$q'_\alpha = s_\alpha^{-1}[q'_0] \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{17},\ \textit{in fine}),$$

$$d_\alpha = s_\alpha^{-1}[d_0] \quad (\text{n}^\circ\ \mathbf{21}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{w}_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{M}};$$

donc

$$\mathfrak{S}_\alpha = (q'_0 q'_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots, \qquad \mathfrak{S}''_\alpha = (\mathfrak{w}_0 \mathfrak{w}_\alpha \ldots)(\ldots)\ldots.$$

Prenons maintenant dans Γ et Γ'' deux correspondantes quelconques $\mathfrak{T} = (q'_\alpha q'_\beta \ldots)\ldots$ et $\mathfrak{T}''$. Je vais montrer, et cela suffit, que $\mathfrak{T}'' = (\mathfrak{w}_\alpha \mathfrak{w}_\beta \ldots)\ldots$. Or

$$\mathfrak{S}_\alpha \mathfrak{T} \mathfrak{S}_\beta^{-1} = (q'_0)(\ldots)\ldots = \mathfrak{R}'$$

et

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{S}_\alpha^{-1} \mathfrak{R}' \mathfrak{S}_\beta.$$

D'où, par isomorphisme holoédrique,

$$\mathfrak{T}'' = \mathfrak{S}_\alpha''^{-1} \mathfrak{R}''' \mathfrak{S}''_\beta = (\mathfrak{w}_\alpha \mathfrak{w}_\beta \ldots)(\ldots)\ldots.$$

C. Q. F. D.

Ainsi Γ'' permute les $\mathfrak{w}_\alpha$, de la même façon que Γ permute les $q_\alpha = q_{\alpha 0}$ du n° **17**.

Je ne parlerai dorénavant plus de Γ'', mais seulement de Γ.

26. Revenons maintenant à l'équation D du n° **23**.

Le premier membre $D(u)$ de D est un polynome de degré $N = n\mathfrak{N}$ en u et de degré n, $W(w)$, en $w = u^{\mathfrak{N}}$.

Les n racines de l'équation W, $W(w) = 0$, sont évidemment les $w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{N}}$.

W est irréductible dès que D l'est. En effet, si

$$W(w) = W(u^{\mathfrak{N}}) = D(u)$$

admettait le polynome rationnel $\Phi(w)$ pour diviseur, $D(u)$ admettrait le diviseur rationnel $\Phi(u^{\mathfrak{N}})$.

Je dis que *le groupe (au sens de Galois) de W est précisément* Γ (c'est-à-dire Γ'') (n° **25**).

Si ψ et χ ont même signification qu'au n° **24**, on aura encore

$$\psi(w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}) = \chi(u_0),$$

et le raisonnement s'achève comme au n° **24**.

27. On a vu, au n° **23**, que $w_\alpha = \left[\frac{c(x_\alpha)}{v_\alpha} + e\right]^{\mathfrak{N}}$ est toujours une fonction rationnelle et à coefficients rationnels $\xi(x_\alpha)$ de x_α. Je dis que *réciproquement* $x_\alpha = X(w_\alpha)$, X étant de même nature que ξ.

Considérons, en effet, les deux équations en x, $h_{\prime\prime}$ ou $f(x) = 0$ et $w = \xi(x)$. La résultante, de degré n en w, est évidemment W. Je dis qu'il n'y a, sous le bénéfice de W, qu'une seule racine x commune à $f(x) = 0$ et $\xi(x) - w = 0$. S'il y en avait deux, x_α et x_β, on aurait, pour une même racine w_α de la résultante W,

$$w_\alpha = d_\alpha^{\mathfrak{N}} = \xi(x_\alpha) = \xi(x_\beta) = w_\beta = d_\beta^{\mathfrak{N}};$$

$d_\beta : d_\alpha =$ const., ce qui est absurde (n° **22**, lemme IV). L'unique racine commune s'obtient par des procédés rationnels, et l'on a

$$x = X(w), \qquad x_\alpha = X(w_\alpha) = X_\alpha.$$

28. *Le groupe* G *de l'équation* h_n *est précisément* Γ.

Soit $\psi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ une expression rationnelle par rapport aux x et à coefficients rationnels. On aura l'identité

$$\psi(x_0, x_1, \ldots) = \psi(X_0, X_1, \ldots) = \chi(w_0, w_1, \ldots).$$

Si ψ est rationnellement exprimable, il en est de même pour χ et réciproquement. Γ est le groupe de W; pour que χ soit rationnellement exprimable, il faut et il suffit que χ soit invariable par les substitutions σ de Γ. Opérer une σ dans χ entre les w, c'est opérer aussi σ dans ψ entre les x. Donc Γ est aussi le groupe de h_n.

Il vient ainsi le théorème fondamental de toute la présente théorie : *Toute anharmonique* h_n *a son groupe* G *isomorphe sans hémiédrie à un groupe* S *de substitutions linéaires fractionnaires.*

S est d'ordre fini et appartient à l'un des cinq types de MM. Jordan, Klein et Gordan.

CHAPITRE IV.

ÉQUATION D; POLYNOME RÉDUIT.

---

29. Je suis maintenant à même de préciser la nature du groupe G et du sous-groupe G_0, ce dernier composé des substitutions $(x_0)(\ldots)\ldots$.

G_0, étant correspondant à S_0, provient des $\mathfrak{M}$ puissances de la substitution $\mathfrak{R}$ correspondante à R.

Reprenons la formule du Chapitre I :

$$(1) \qquad x_i = x_0 + \frac{1}{c_0 - v_0 q_i},$$

où $c_0 = c(x_0)$, $q_i = q_{0i}$ (n° **11**). v_0 est racine de l'équation binome $v_0^m - \Omega(x_0) = 0$ et de l'équation binome irréductible P_p du n° **8**,

$$v_0^p - V_0(x_0) = 0, \qquad m = pr;$$

enfin $\mathfrak{M} = m'm$ (n° **16**, *in fine*), $m' =$ entier.

V_0 est rationnelle. Je vais montrer que $\mathfrak{M} = p$; par suite, les égalités $\mathfrak{M} = m'm$, $m = pr$ donnent

$$rm' = 1, \qquad r = m' = 1, \qquad \mathfrak{M} = m = p.$$

30. Adjoignons (au sens de Galois) x_0 à h_n; G se réduit à G_0 et l'équation P_p à coefficients rationnels et irréductible possède un groupe transitif γ.

Si λ est racine primitive $m^{\text{ième}}$ de l'unité, $\mu = \lambda^r$ est racine primitive $p^{\text{ième}}$. Les p racines de P_p sont

$$v_{00} = v_0, \quad v_{01} = \mu v_0, \quad \ldots, \quad v_{0i} = \mu^i v_0, \quad \ldots, \quad v_{0,p-1} = \mu^{p-1} v_0.$$

Je dis que γ *est constitué par les p puissances de la substitution circulaire*

$$\pi = (v_{00} v_{01} \ldots v_{0,p-1}).$$

Soit en effet

$$\pi' = (v_{0\alpha} v_{0\alpha'} \ldots)(v_{0\beta} v_{0\beta'} \ldots)(\ldots)\ldots$$

une substitution quelconque de γ. π' ne change pas la valeur $\mu^{\beta-\alpha}$ du quotient $v_{0\beta} : v_{0\alpha}$. Donc

$$\mu^{\beta-\alpha} = v_{0\beta} : v_{0\alpha} = v_{0\beta'} : v_{0\alpha'} = \mu^{\beta'-\alpha'},$$

$$\beta' - \alpha' \equiv \beta - \alpha \qquad (\operatorname{mod} p),$$

$$\beta' - \beta \equiv \alpha' - \alpha \equiv k \qquad (\operatorname{mod} p),$$

$$\beta' \equiv \beta + k, \quad \alpha' \equiv \alpha + k \qquad (\operatorname{mod} p).$$

π' ajoute aux p indices le même nombre k et est une puissance π^k de π.

Soient $\pi^k, \pi^{k'}, \ldots$ les diverses puissances qui interviennent, ρ le plus grand commun diviseur des $k, k', \ldots$, δ le plus grand commun diviseur de ρ et de p. γ sera constituée par les $\frac{p}{\delta}$ puissances de π^ρ, qui amèneront, à la place de v_{00}, $\frac{p}{\delta}$ racines. Comme γ est transitif, il faut avoir $\delta = 1$, ρ premier avec p et γ constitué par les p puissances de π.

31. Dans la formule (1) du n° **29** il peut arriver (cas de la seconde catégorie, mentionné au Chapitre I) qu'un des q_i, q_1 par exemple, soit zéro. x_1 est alors rationnel en x_0 et toutes les substitutions de G_0 sont de la forme $(x_0)(x_1)(\ldots)\ldots$. Les M($M = n - 1$ dans la première catégorie; $M = n - 2$ dans la deuxième) q_i qui ne sont ni nuls ni infinis sont fournis par la formule (n° **9**)

$$(1) \quad q_i = g_h\lambda^k, \qquad h = 0, 1, \ldots, s-1, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1;$$
$$\lambda^m = 1, \qquad M = ms, \qquad m = pr.$$

Divisons l'entier k par l'entier r; nommons d le reste et l le quotient; on aura $k = lr + d$ et la formule (1) devient

$$g_h\mu^l\lambda^d, \qquad \mu = \lambda^r, \qquad \mu^p = 1;$$

où $l = 1, \ldots, p$. Réunissons dans un même système X_e les x_i pour lesquels le q_i correspondant comporte une même valeur pour $g_h\lambda^d$. Il y aura rs systèmes X_e, puisque l'expression $g_h\lambda^d$ a rs valeurs, et chaque système comportera p racines, distinguées entre elles par les p valeurs de l'exposant l; $e = 0, 1, \ldots, rs - 1$.

Si entre les p racines de l'équation binome P_p (n° **30**), j'effectue la substitution π, q_i se multiplie par μ et l'indice l s'accroît d'une unité. Il se produit entre les x une substitution ϖ, qui, laissant fixes les rs systèmes X, permute circulairement les p racines d'un même système X; $\varpi^p = 1$.

Je dis que G_0 *est constitué par les* p *puissances de* ϖ, autrement dit ϖ est la substitution $\mathfrak{R}$ du n° **29**.

En vertu de la formule

$$x_i = x_0 + \frac{1}{c_0 - v_0 q_i},$$

et de l'adjonction de x_0 à h_n, on peut écrire

$$x_i = F(v_0) = F(v_{00}), \qquad \text{F rationnelle.}$$

Toute fonction $\psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ rationnelle de $x_1, \ldots, x_{n-1}$ et à coefficients rationnels devient une fonction analogue $\chi(v_{00})$ de la seule racine $v_0 = v_{00}$ de P_p (n° **30**). Réciproquement les racines v_{0i} de P_p sont rationnelles en $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Effectuant dans le second membre de l'identité

$$\psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \chi(v_{00}),$$

la substitution π du groupe γ de P_p, on effectue dans le premier membre de l'identité et entre les $x_1, \ldots, x_{n-1}$ la substitution ϖ, et réproquement. Si ψ est invariable par ϖ, χ est invariable par π, c'est-à-dire rationnelle, puisque le groupe γ (n° **30**) de P_p ne comprend que les puissances de π. ψ est rationnelle.

Réciproquement, si ψ est rationnelle, χ l'est aussi; χ est invariable par π et ψ est invariable par ϖ.

G_0 est constitué par les p puissances de ϖ et ϖ est précisément $\mathfrak{R}$: $\mathfrak{M} = p$.

32. Il découle de là plusieurs conséquences.

Le nombre p degré de l'équation binome irréductible $v_0^p - V_0 = 0$ est le même pour tous les indices $0, 1, 2, \ldots, n-1$, contrairement à l'hypothèse provisoire du n° **10**.

Nous avons vu (n° **29**) que, si $\mathfrak{M} = p$, $\mathfrak{M} = m = p$.

Je dis que la substitution $E^{-1} = | z, \quad z + e |$ introduite au n° **19** pour rendre $\mathfrak{R}$ canonique est inutile.

e est déjà zéro pour $m > 1$. Or, pour $m = 1$, $p = 1$ et $\mathfrak{R}$ est canonique comme se réduisant à l'unité, puisque l'ordre $\mathfrak{M}$ de $\mathfrak{R}$ se réduit à l'unité.

Je supposerai dorénavant $\mathfrak{R}$ canonique.

33. L'équation D, $D(u) = 0$, du n° **23**, a pour racines les N quantités

$$u_j = s_j[u_0], \qquad s_0 = 1 \qquad (j = 0, 1, \ldots, N-1),$$

les s_j étant les $\mathfrak{L}$ de S. Cela nous permet de construire sur-le-champ cette équation D.

On sait que tout groupe linéaire fractionnaire S, d'ordre fini N, possède un *invariant absolu* $\Psi(z)$. Je nomme ainsi le quotient $\Psi(z) = \psi(z) : \varphi(z)$ de deux polynomes ψ et φ dont l'un au moins est du degré N par rapport à l'indéterminée z et l'autre a un degré égal ou inférieur à N; les coefficients des deux polynomes sont numériques.

$\Psi(z)$ possède la double propriété suivante :

C'est un invariant absolu vis-à-vis de toute $\mathfrak{L}$ de S, effectuée sur z;

Tout invariant absolu, vis-à-vis les $\mathfrak{L}$ de S, est une fonction rationnelle de Ψ. On trouvera au Tome XII des *Mathematische Annalen*, p. 168, la liste, dressée par M. Klein, des Ψ afférents aux cinq types de groupes S.

Je ne considérerai pas comme distincts Ψ et $P(\Psi)$, P étant une substitution linéaire fractionnaire quelconque à coefficients numériques.

34. Soit r_0 une quantité quelconque. L'équation de degré N qui a pour racines les transformées $s_j[r_0]$ de r_0 par les substitutions s_j de S $[j = 0, 1, \ldots, N-1]$ pourra s'écrire

$$\Psi(z) = \Psi(r_0).$$

En effet r_0 est racine et l'équation ne change pas quand l'on remplace z par $s_j[z]$.

Soit u_0 une racine de l'équation D du n° **23**; D s'écrira, en vertu de ce qui vient d'être dit,

$$\Psi(u) = \Psi(u_0).$$

Mais on a

$$\begin{aligned}\Psi(u_0) = \Psi(u_1) = \ldots = \Psi(u_{N-1}) \\ &= \text{fonction symétrique des racines de D} \\ &= \text{fonction rationnelle des coefficients de D} \\ &= \text{fonction rationnelle des coefficients } \mathcal{A} \text{ (n° 1) de } h_n.\end{aligned}$$

En effet (n° **23**), les coefficients de D sont rationnels par rapport aux $\mathcal{A}$.

En résumé D s'écrira

$$\Psi(u) = T,$$

T étant une expression *rationnelle* au sens du n° **1**.

35. L'équation D, qui vient d'être construite, est-elle irréductible comme l'exige le raisonnement du n° **24**?

Oui, lorsqu'on envisage $T(t)$ comme une variable simple ou une lettre unique. Autrement dit : D *ne possède aucune racine commune avec une équation* D′, *de degré* $N' < N$, *qui ait ses coefficients de la forme* $\varpi(T)$ *et qui soit irréductible;* $\varpi(T)$ désignant le quotient de deux polynomes en T à coefficients numériques.

Désignons, en effet, par $u_0, u_1, u_2, \ldots$ les N′ racines de D′, qui sont aussi des racines de D. On aura (n° **33**)

$$u_l = s_l[u_0], \qquad l = 0, 1, \ldots, N' - 1,$$

s_l étant une $\mathfrak{L}$ de S, $s_0 = 1$. Je dis que *les* s_l *forment un groupe* S′, *contenu dans* S. Il suffira de montrer que $s_1 s_2[u_0]$, par exemple, est aussi racine. Le groupe de D′ étant transitif contiendra au moins une substitution $\sigma = (u_0\, u_2 \ldots)(u_1 u_3 \ldots)(\ldots), \ldots;$ u_3 étant la racine que σ fait succéder à u_1. σ ne change pas la valeur nulle de l'expression $u_1 - s_1[u_0]$ et il vient

$$0 = u_3 - s_1[u_2] = u_3 - s_1 s_2[u_0];$$

par suite, $s_1 s_2[u_0]$ est racine. Cela posé, D′, s'obtient par le procédé du n° **34** et s'écrit

$$\Psi'(u) = T'(t),$$

Ψ' étant l'invariant absolu de S′. On aurait, par hypothèse,

$$T' = \varpi(T),$$

c'est-à-dire une égalité ω à coefficients numériques :

$$\Psi'(u) = \varpi[\Psi(u)].$$

ω n'est pas une équation en u, car elle admettrait pour racines celles de D′, qui seraient alors des constantes. Cela est impossible, car il y aurait des d_α constants (n° **22**, lemmes II et III). Donc ω est une identité. Cela est encore absurde, car Ψ' est l'invariant absolu de S′ seulement, tandis que $\varpi(\Psi)$ est invariant absolu pour S.

Par contre, en particularisant T, on détruit facilement l'irréductibilité de D. Voici des exemples simples de ce fait :

Nommons Θ_r la canonique $\mathfrak{L}$ d'ordre r.

Prenons S circulaire et dérivé de Θ_N, $\Psi(z) = z^N$; D est $u^N - T = 0$. D est réductible si $T^{\frac{1}{\rho}} =$ rationnelle, ρ étant un diviseur de N.

Prenons encore S pyramidal, en combinant Θ_M, $N = 2M$, avec la substitution $|z \quad z^{-1}|$. On a

$$\Psi(z) = z^M + z^{-M}.$$

D s'écrit :

$$u^{2M} - Tu^M + 1 = 0,$$

et devient réductible dès que $(T^2 - 4)^{\frac{1}{2}} =$ rationnelle.

Dans le présent Mémoire, je traiterai toujours T comme une variable simple et D comme irréductible. Je réserve, pour un Travail ultérieur, la discussion des équations D réductibles et des anharmoniques h_n *dégénérées*, qui prennent alors naissance.

36. La construction effective du polynome réduit (n° **18**) ne présente pas de difficulté. Soit q_0 une racine du polynome. q_0 est invariable par la substitution R et q_0 est numériquement déterminée. Les $N = np$ quantités $s_j[q_0]$ se réduisent à n distinctes dont chacune est répétée p fois. L'équation

$$\psi(q) : \varphi(q) = \Psi(q) = \Psi(q_0) = \psi(q_0) : \varphi(q_0)$$

a n racines, chacune avec le degré p de multiplicité. Le polynome en q de degré N

$$\begin{vmatrix} \psi(q) & \varphi(q) \\ \psi(q_0) & \varphi(q_0) \end{vmatrix}$$

est la puissance $p^{\text{ième}}$ exacte du polynome réduit, lequel se trouvera ainsi construit.

Nous avons pris R canonique, d'où $q_0 = \infty$, mais le raisonnement est indépendant de la canonicité de R; il suffit que $R[q_0] = q_0$.

CHAPITRE V.

NATURE DE L'IRRATIONNALITÉ POUR LES RACINES DE L'ANHARMONIQUE.

---

37. Les n racines x_i de l'équation anharmonique h_n ont été (n° **27**) exprimées rationnellement au moyen des w_α, c'est-à-dire d'une quelconque des racines u_j del'équation D. La nature des irrationnelles x_i est théoriquement connue, puisque D vient d'être construite.

Mais je ne m'en tiendrai pas là. Je mettrai les x_i sous une forme telle que la constance du rapport anharmonique de quatre x_i deviendra évidente.

Reprenons, à cet effet, les formules, déjà tant de fois considérées,

$$x_i = x_\alpha + \frac{1}{c_\alpha - v_\alpha q_{\alpha i}} = \sigma_\alpha | q_{\alpha i} |.$$

x_α et c_α sont des fonctions rationnelles de $w_\alpha = d_\alpha^p$ (n° **27**), puisque (n° **32**) $\mathfrak{N} = p$, $d_\alpha = c_\alpha : v_\alpha$, puisque $e = 0$ (n$^{\text{os}}$ **32** et **20**). On écrira

$$x_\alpha = \xi(d_\alpha^p), \qquad c_\alpha^{-1} = \zeta(d_\alpha^p)$$

et

$$x_i = \xi(d_\alpha^p) + \zeta(d_\alpha^p) \frac{d_\alpha}{d_\alpha - q_{\alpha i}} = \mathrm{F}(d_\alpha, q_{\alpha i}).$$

Le rapport anharmonique de quatre x_i est évidemment constant, puisque c'est celui des quatre constantes $q_{\alpha i}$ correspondantes.

38. La fonction rationnelle F(X, Y),

$$\mathrm{F(X, Y)} = \xi(\mathrm{X}^p) + \zeta(\mathrm{X}^p) \frac{\mathrm{X}}{\mathrm{X - Y}},$$

des deux indéterminées X et Y possède une propriété importante, qui servira pour la construction effective de F.

Soient :

u une racine quelconque de l'équation D (n° **23**);
q une racine quelconque du polynome réduit.

La propriété signalée est celle-ci : *L'expression*

$$F(u, q)$$

possède l'invariance absolue vis-à-vis de toute $\mathfrak{L}$ *de* S, *effectuée* SIMULTANÉMENT *sur* u *et* q.

La proposition est évidente pour la canonique

$$R = |z, \rho z|, \qquad \rho^p = 1.$$

S dérive de R et des n substitutions s_α (n° **17**). Il suffira de démontrer l'invariance de $F(u, q)$ vis-à-vis des n substitutions s_α.

39. On peut toujours, pour un choix convenable des entiers l et α, poser

$$u = \rho^l d_\alpha \qquad (\text{n° } \mathbf{21}).$$

En vertu de ce qui vient d'être dit et par l'intervention de R^{-l},

$$F(u, q) = F(\rho^l d_\alpha, q) = F(d_\alpha, \rho^{-l} q).$$

On peut toujours, pour un choix convenable de l'indice i, poser $\rho^{-l} q = q_{\alpha i}$, puisque la substitution R permute simplement les termes du système Q (n° **11**); alors

$$F(u, q) = F(d_\alpha, q_{\alpha i}) = \sigma_\alpha[q_{\alpha i}] = x_i,$$

avec nos notations habituelles (n° **37**).

L'indice β étant quelconque on a

$$s_\alpha[q_{\alpha i}] = s_\beta[q_{\beta i}] \qquad (\text{n° } \mathbf{17}),$$

$$s_\alpha[d_\alpha] = s_\beta[d_\beta] \qquad (\text{n° } \mathbf{21}),$$

$$d_\alpha = s_\alpha^{-1} s_\beta[d_\beta], \qquad q_{\alpha i} = s_\alpha^{-1} s_\beta[q_{\beta i}],$$

$$F(u, q) = F(s_\alpha^{-1} s_\beta[d_\beta], \qquad s_\alpha^{-1} s_\beta[q_{\beta i}]).$$

Mais aussi (n° **37**)

$$\mathrm{F}(u, q) = x_i = \mathrm{F}(d_\beta, q_{\beta i}) = \sigma_\beta[q_{\beta i}]$$

et

$$\mathrm{F}(d_\beta, q_{\beta i}) = \mathrm{F}(s_\alpha^{-1} s_\beta[d_\beta], s_\alpha^{-1} s_\beta[q_{\beta i}]).$$

Changeons α en β et réciproquement

$$\mathrm{F}(u, q) = \mathrm{F}(d_\alpha, q_{\alpha i}) = \mathrm{F}(\mathrm{T}_\beta[d_\alpha], \mathrm{T}_\beta[q_{\alpha i}]), \qquad \mathrm{T}_\beta = s_\beta^{-1} s_\alpha.$$

L'invariance de $\mathrm{F}(u, q)$ est démontrée vis-à-vis du groupe S' dérivé de R et des T_β. Or

$$\mathrm{T}_0 = s_\alpha. \qquad s_\beta = s_\alpha \mathrm{T}_\beta^{-1} = \mathrm{T}_0 \mathrm{T}_\beta^{-1},$$

S' coïncide avec S, comme dérivé aussi de R et des s.

La proposition du n° **38** est complètement établie.

40. Le théorème subsiste évidemment, quand on pose $u = \mathrm{M}[\Omega]$, $q = \mathrm{M}[\eta]$, M étant une substitution linéaire fractionnaire quelconque, et quand on envisage, au lieu de S, le groupe $\mathrm{M}^{-1}\mathrm{SM}$. Un calcul simple montre que

$$\mathrm{F}(u, q) = \mathrm{F}(\mathrm{M}[\Omega], \qquad \mathrm{M}[\eta]) = \mathrm{P} \times \left(\frac{1}{\Omega - \eta} + \mathrm{Q}\right),$$

P et Q étant rationnels en Ω, sans contenir η.

Je choisirai bien entendu M de façon à mettre S sous une forme simple, celle de MM. Jordan et Klein, par exemple, car S a été pris jusqu'à présent sous une forme très particulière, celle où la substitution R est canonique.

41. Soient donc :

le groupe S, mis sous forme nouvelle;
$\Psi(z)$ son invariant absolu (n° **33**);
$\Psi(\Omega) = \mathrm{T}$ l'équation W qui remplace l'équation D du n° **34**;
$\mathrm{H}(\eta)$ le polynome réduit, construit comme il est expliqué au n° **36**;
η_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, les n racines du polynome réduit H, avec $q_i = \mathrm{M}[\eta_i]$;

$\Omega = \Omega_0 = M^{-1}[u_0]$ la racine de W qui correspond à la racine $u_0 = d_0$ de D.

L'égalité (n° **37**)

$$x_i = \sigma_0[q_{0i}] = \sigma_0[q_i] = x_0 + \frac{d_0}{c_0(d_0 - q_i)} = F(u_0, q_i)$$

devient, en vertu de ce qui a été dit au n° **40**,

$$x_i = P(\Omega)\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} + Q(\Omega)\right] = P(\Omega)\varpi(\Omega, \eta_i).$$

Je vais construire directement P et Q, en m'appuyant sur le théorème du n° **38**.

42. On a (n° **1**) $\sum_i x_i = 0$; donc

$$\sum_i x_i = P\left(nQ + \sum_i \frac{1}{\Omega - \eta_i}\right) = 0.$$

L étant l'algorithme du logarithme népérien, on a

$$\sum_i \frac{1}{\Omega - \eta_i} = \frac{\partial}{\partial\Omega}\sum_i L(\Omega - \eta_i) = \frac{\partial}{\partial\Omega} L \prod_i (\Omega - \eta_i)$$
$$= \frac{\partial}{\partial\Omega} LH(\Omega) = \frac{H'(\Omega)}{H(\Omega)},$$

H' étant la dérivée du polynome réduit H.

Ainsi

$$Q = -\frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)},$$

Enfin

$$x_i = \mathfrak{f}(\Omega, \eta_i) = P\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} - \frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)}\right] = P(\Omega)\varpi(\Omega, \eta_i).$$

43. Posons $\Omega' = s[\Omega]$, $\eta'_i = s[\eta_i]$,

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad (ad - bc = 1)$$

étant une substitution quelconque $\mathfrak{L}$ de S.

En vertu du théorème du n° **38**,

$$\mathfrak{f}(\Omega', \eta_i') = \mathfrak{f}(\Omega, \eta_i) = \mathrm{P}(\Omega')\varpi(\Omega', \eta_i').$$

Soient X et Y deux indéterminées quelconques, avec $X' = s[X]$, $Y' = s[Y]$; on aura par un calcul facile

$$X' = (aX + b)[\omega(X)]^{-1}, \qquad \omega(X) = cX + d = \omega,$$

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = [\omega(X)]^{-2}, \qquad \frac{\partial X}{\partial X'} = \omega^2, \qquad \frac{1}{X' - Y'} = \frac{\omega(X)\omega(Y)}{X - Y}.$$

La substitution s ne fait que permuter ensemble les n racines de $\mathrm{H}(\eta)$, donc, L étant toujours le logarithme,

$$\mathrm{H}(\eta') = [\omega(\eta)]^{-n}\mathrm{KH}(\eta), \qquad \mathrm{K} = \text{const.}, \qquad \eta' = s[\eta].$$

$$\frac{\mathrm{H}'(\eta')}{\mathrm{H}(\eta')} = \frac{\partial}{\partial\eta'}\mathrm{LH}(\eta') = \frac{\partial}{\partial\eta}[\mathrm{LK} + \mathrm{LH}(\eta) - n\mathrm{L}\omega(\eta)]\frac{\partial\eta}{\partial\eta'}$$
$$= [\omega(\eta)]^2\left[\frac{\mathrm{H}'(\eta)}{\mathrm{H}(\eta)} - \frac{nc}{\omega(\eta)}\right].$$

Bref, sous le bénéfice des calculs ci-dessus,

$$\varpi(X, Y) = \frac{1}{X - Y} - \frac{\mathrm{H}'(X)}{n\mathrm{H}(X)}$$

devient

$$\varpi(X', Y') = [\omega(X)]^2\varpi(X, Y).$$

Enfin, la relation

$$\mathrm{P}(\Omega)\varpi(\Omega', \eta_i') = \mathrm{P}(\Omega')[\omega(\Omega)]^2\varpi(\Omega, \eta_i) = \mathrm{P}(\Omega)\varpi(\Omega, \eta_i)$$

donne

$$(1) \qquad \mathrm{P}(\Omega') = (c\Omega + d)^{-2}\mathrm{P}(\Omega).$$

44. Soient $\mathrm{P}(\Omega)$ et $\mathrm{P}_1(\Omega)$ deux expressions satisfaisant à la condition (1). Le quotient $\mathrm{P}_1 : \mathrm{P}$ sera invariable par toutes les substitutions $\mathfrak{L}$ de S, donc $\mathrm{P}_1 : \mathrm{P}$ est une fonction rationnelle de l'invariant absolu $\Psi(\Omega)$ de S. Or, Ω est une racine de l'équation W (n° **41**)

$\Psi(\Omega) = T =$ rationnelle; $P_1 : P = \varpi =$ rationnelle; P_1 ne diffère de P que par un facteur rationnel ϖ. Supprimer ce facteur ϖ, c'est, en vertu de la formule

$$x_i = P(\Omega)\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} - \frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)}\right],$$

multiplier tous les x_i par un facteur rationnel. Cela est indifférent (n° **1**).

Il suffira donc d'obtenir, d'une façon quelconque, *une seule* fonction $P(\Omega)$ satisfaisant à la condition (1) du n° **43**.

Nommons Ψ' la dérivée de l'invariant absolu Ψ. On aura

$$\Psi(\Omega') = \Psi(\Omega), \qquad \Psi'(\Omega') = \Psi'(\Omega)\frac{\partial\Omega}{\partial\Omega'},$$
$$\Psi'(\Omega') = \Psi'(\Omega)(c\Omega + d)^2.$$

Il suffit de poser

$$P(\Omega) = \frac{1}{\Psi'(\Omega)}.$$

45. L'expression définitive des irrationnelles x_i sera

$$f(\Omega, \eta_i) = x_i = \Psi'^{-1}(\Omega)\left[\frac{1}{\Omega - \eta_i} - \frac{H'(\Omega)}{nH(\Omega)}\right]$$

avec

$$\Psi(\Omega) = T \qquad \text{et} \qquad H(\eta_i) = 0,$$

Ψ étant l'invariant absolu et $H(\eta)$ le polynome réduit du groupe S; H' et Ψ' sont les dérivées de H et de Ψ.

Notons que *la fonction rationnelle* $f(X, Y)$ *des deux arguments* X *et* Y *est à coefficients* NUMÉRIQUES.

46. Considérons l'expression $f(\Omega, \eta)$ où Ω et η sont des racines quelconques de W et du polynome réduit respectivement. On a

$$\Omega = s_j[\Omega_0] \qquad \text{et} \qquad \eta = s_l[\eta_0],$$

s_j et s_l étant deux $\mathfrak{L}$ de S. En vertu du théorème du n° **38**, il viendra à volonté

$$f(\Omega, \eta) = f(s_j[\Omega_0], s_l[\eta_0]) = f(\Omega_0, s_j^{-1}s_l[\eta_0]),$$

ou, de même,

$$\mathfrak{f}(\Omega, \eta) = \mathfrak{f}(s_i^{-1} s_j[\Omega_0], \eta_0).$$

Toutes les nN valeurs possibles de $\mathfrak{f}(\Omega, \eta)$ s'obtiendront donc, soit en associant à une racine, arbitrairement choisie une fois pour toutes, de W, successivement les n racines du polynome réduit, soit en associant à une racine du polynome réduit, arbitrairement choisie une fois pour toutes, successivement les $N = np$ racines Ω de W.

Le premier procédé fournit les n valeurs

$$x_i = \mathfrak{f}(\Omega_0, \eta_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1);$$

le second procédé fournit les N valeurs

$$\mathfrak{f}(\Omega_j, \eta_0) \qquad (j = 0, 1, \ldots, N-1).$$

Ces n valeurs se réduisent à n distinctes, chacune étant répétée p fois.

En effet, effectuons dans $\mathfrak{f}(\Omega_j, \eta_0)$, sur Ω_j et η_0, simultanément les p substitutions de S_0. La valeur de $\mathfrak{f}$ ne change pas, ni η_0, tandis que Ω_j est remplacée successivement par $p-1$ autres racines de W. Nommons $\zeta(\Omega)$ l'invariant absolu du groupe S_0. $\mathfrak{f}(\Omega, \eta_0)$ est une expression rationnelle $\mathfrak{M}(\zeta, \eta_0)$. Les N substitutions de S donnent n expressions, $\zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1}$. Les n valeurs distinctes de $\mathfrak{f}(\Omega, \eta_0)$ sont fournies par le Tableau

$$\mathfrak{M}(\zeta_i, \eta_0) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

47. Si l'on élimine Ω entre les deux équations

$$\Psi(\Omega) = T \qquad \text{et} \qquad x = \mathfrak{f}(\Omega, \eta_0),$$

la résultante, qui est en x du degré $N = np$, aura pour racine p^{uple} chacune des n quantités $x_i = \mathfrak{M}(\zeta_i, \eta_0)$ et sera la puissance $p^{\text{ième}}$ exacte du polynome $f(x)$, premier membre de h_n. Ce dernier se trouvera ainsi construit.

48. En résumé, *toute équation anharmonique peut s'écrire*

$$f(x, T) = 0,$$

où f est un polynome à coefficients numériques et T *une fonction unique de la variable t, rationnelle au sens du* n° **1**.

La structure du polynome f ne dépend que de la nature de S et du choix de la substitution R dans ce groupe S.

Le genre de la relation algébrique qui lie x et T est évidemment zéro, puisque x et T s'expriment rationnellement à l'aide d'un même paramètre Ω

$$x = \mathfrak{f}(\Omega, \eta_0), \qquad T = \Psi(\Omega).$$

Si x et T sont l'ordonnée et l'abscisse d'un point dans un plan, la courbe $f = 0$ serait intéressante à construire, mais ces recherches, que j'ai esquissées dans ma Note du 13 février 1899, seront mieux à leur place dans une publication ultérieure.

CHAPITRE VI.

CLASSIFICATION DES ANHARMONIQUES.

49. On sait que le groupe S linéaire, fractionnaire, d'ordre fini N, appartient à l'un des cinq types de MM. Jordan, Klein et Gordan.

Voici l'énumération des cinq types :

I. — Circulaire (*Kreistheilungsgruppe* de M. Klein) dérivé d'une substitution unique Θ d'ordre N.

II. — Pyramidal (*Doppelpyramidengruppe* de M. Klein), dérivé des deux substitutions Θ et ε; $N = 2m$; $\Theta^m = 1$, $\varepsilon^2 = 1$; $\varepsilon^{-1}\Theta\varepsilon = \Theta^{-1}$.

III. — *Tétraédrique*, $N = 12$.

IV. — *Octaédrique*, $N = 24$.

V. — *Icosaédrique*, $N = 60$.

Je renvoie au Mémoire de M. Jordan (t. 84 du *Journal de Crelle*) pour le Tableau des trois derniers types, et au Mémoire de M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. XII, p. 168) pour la liste des invariants absolus $\Psi(z)$ afférents aux cinq types.

50. Je me propose, dans ce Chapitre, d'examiner jusqu'à quel point peut être choisie arbitrairement dans S la substitution R, dont les p puissances constituent le groupe S_0; $N = np$.

Si $p = 1$, $R = 1$ et S appartient à l'un quelconque des cinq types; mais il n'en est plus de même dès que $p > 1$.

Je rappellerai (Chapitre I) que p divise M,

$M = n - 1$ pour la première catégorie,

$M = n - 2$ pour la seconde catégorie.

On a vu que la seconde catégorie se présente quand le groupe G_0 de G, qui laisse immobile une racine x_0, laisse aussi immobile une seconde racine x_1. Alors n est pair et les racines sont associées par couples, tels que x_0 et x_1.

Quant à la première catégorie, elle se présente toutes les fois qu'on n'a pas affaire à la deuxième catégorie. G_0 ne laisse immobile qu'une seule racine x_0.

Dès que $p > 1$, S *ne peut être du type circulaire.*

En effet, mettons R, qui est une puissance de Θ (n° **49**), sous forme canonique. Les s_α (n° **17**), qui sont aussi des puissances de Θ, deviennent canoniques ; cela est absurde (n° **19**, lemme II).

51. *Si* S *est circulaire, h_n est une équation binome.*

En effet, alors

$$p = 1, \qquad n = N, \qquad \Psi(z) = z^n = T, \qquad H(\eta) = \eta^n - K,$$

$$K = \text{const.}, \qquad x = f(z, \eta) = \frac{1}{nz^{n-1}}\left(\frac{1}{z - \eta} - \frac{z^{n-1}}{z^n - K}\right);$$

d'où, par un calcul facile, puisque $z^n = T$,

$$\frac{\eta}{z} = 1 - \left(nTx + \frac{T}{T - 1}\right)^{-1},$$

ou simplement $\frac{\eta}{z} = x$ (eu égard au n° **1**).

Enfin

$$\frac{K}{T} = x^n. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

L'équation binome est bien un cas particulier de l'anharmonique.

52. Supposons, pour $N = 2m$, que S appartient au type pyramidal et dérive de Θ et ε, avec

$$\Theta^m = 1, \qquad \varepsilon^2 = 1, \qquad \varepsilon^{-1}\Theta\varepsilon = \Theta^{-1}.$$

Les N substitutions de S sont : 1° les m puissances de Θ, et 2° les m substitutions $\varepsilon\Theta^r$, $r = 0, 1, \ldots, m-1$, toutes d'ordre deux.

Laquelle prendrons-nous pour R ? Prenons d'abord $R = \Theta^g$, avec $p = \frac{m}{\delta}$, $\delta =$ le plus grand commun diviseur de m et de g. Mettons R sous forme canonique, Θ sera aussi canonique. Si $\delta > 1$, $p < m$, et il y aura des puissances de Θ en dehors du groupe S_0 ; ces puissances de Θ seront canoniques, ce qui est absurde (n° **19**, lemme II). Si, au contraire, $\delta = 1$, $p = m$, $N = 2m = np = nm$ et $n = 2$, ce qui est absurde.

Il faut donc prendre pour R une des $\varepsilon\Theta^r$; alors $p = 2$ et $m = n$.

On peut choisir l'argument z de façon à avoir

$$\Theta = \left| z \quad \theta z \right|, \qquad \theta^n = 1, \qquad \varepsilon = \left| z \quad \frac{1}{z} \right| ;$$

l'invariant absolu

$$\Psi(z) = z^n + z^{-n}.$$

Pour la première catégorie, p ou 2 divise $n - 1$ et n est impair.

Pour la deuxième catégorie, 2 divise $n - 2$ et n est pair.

En résumé : *pour* $p > 1$ *et* S *pyramidal*, $p = 2$. n *est impair pour la première catégorie, pair pour la seconde.*

Entre les n racines $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de h_n, G dérive des deux substitutions

$$\bar{\Theta} = (0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

et

$$\bar{\varepsilon} = (0)(1, n-1)(2, n-2)\ldots, \qquad \text{si } n \text{ est impair;}$$

$$\bar{\varepsilon} = (0)(r)(1, n-1)(2, n-2)\ldots, \qquad \text{si } n = 2r = \text{pair.}$$

53. Prenons S tétraédrique, $N = 12$. S est isomorphe au groupe alterné entre quatre lettres ; S contient des substitutions d'ordre 2 ou 3 seulement.

Formons le Tableau suivant :

$$N = pn = 12.$$

p	2	3
n	6	4
$n-1$	5	3
$n-2$	4	2

Il y aura une anharmonique $n = 6$, $p = 2$ de la seconde catégorie et une anharmonique $n = 4$, $p = 3$ de la première catégorie.

54. Prenons S octaédrique ; $N = 24$. S est isomorphe au groupe général entre quatre lettres et contient des substitutions d'ordre 4 au plus. Donc $p = 2$, ou 3, ou 4. On a encore le Tableau :

$$N = pn = 24.$$

p	2	3	4
n	12	8	6
$n-1$	11	7	5
$n-2$	10	6	4

Il n'y a pas de h_n de première catégorie et trois existent de seconde catégorie :

$$n = 12, \qquad p = 2,$$
$$n = 8, \qquad p = 3,$$
$$n = 6, \qquad p = 4.$$

55. S icosaédrique est isomorphe au groupe alterné en cinq lettres et contient des substitutions d'ordre 2, ou 3, ou 5. On a le Tableau, où $N = np = 60$,

p	2	3	5
n	30	20	12
$n-1$	29	19	11
$n-2$	28	18	10

Aucune h_n de première, mais trois de la seconde catégorie :

$$n = 30, \qquad p = 2,$$
$$n = 20, \qquad p = 3,$$
$$n = 12, \qquad p = 5.$$

56. Une précaution est encore à prendre dans le choix, pour un groupe S donné, de la substitution R.

On a vu que, R étant canonique, il ne peut exister dans S des canoniques autres que les p puissances de R (n° **19**, lemme II). Aucune $\mathfrak{L}$ de S n'est donc échangeable avec les puissances de R, en dehors de ces puissances elles-mêmes. Donc R ne peut être puissance d'une substitution de S, autre que les puissances de R.

On ne construira pas toutes les anharmoniques qui correspondent aux diverses combinaisons de N, n, p qui viennent d'être énumérées. Ce serait un calcul assez long, désormais sans difficulté et sans intérêt théoriques. On se bornera, dans le Chapitre suivant, à donner quelques exemples simples. Je rappelle, du reste, que, dans ma Note : *Sur certaines équations des quatrième et cinquième degrés* (*Bulletin de la Société mathématique*, 1900), j'ai construit directement et d'une façon plus élémentaire les anharmoniques h_4 et h_5. Je renverrai à ce Travail par une notation, telle que (*Bulletin de la Société mathématique*, 7°) par exemple.

57. Terminons le présent Chapitre par quelques indications sur l'équation U de Riccati elle-même (n° **1**).

$\mathfrak{f}$ ayant la signification exposée au précédent Chapitre, je dis que *l'intégrale générale de* U *est*

$$\mathfrak{f}(z, C),$$

où C *est le paramètre arbitraire et* z *une fonction de* t *définie par l'équation*

$$\Psi(z) = T(t).$$

Ψ et T ont leur signification habituelle.

Soient x_0, x_1, x_2 trois racines quelconques de h_n, savoir

$$x_0 = \mathfrak{f}(z, \eta_0), \qquad x_1 = \mathfrak{f}(z, \eta_1), \qquad x_2 = \mathfrak{f}(z, \eta_2),$$

et u une intégrale quelconque de U. On peut toujours écrire

$$u = \mathfrak{f}(z, \xi), \tag{1}$$

ξ étant une fonction de t définie, pour u donné, par l'identité (1) elle-même.

Le rapport anharmonique

$$\mathcal{R}(u, x_0, x_1, x_2) = \frac{(u - x_0)(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_0)(u - x_1)}$$

des quatre intégrales u, x_0, x_1, x_2 de U est une constante K. Mais

$$K = \mathcal{R}(u, x_0, x_1, x_2) = \mathcal{R}(\xi, \eta_0, \eta_1, \eta_2),$$

d'où

$$\frac{\xi - \eta_0}{\xi - \eta_1} = K \frac{\eta_2 - \eta_0}{\eta_2 - \eta_1}.$$

ξ est une constante dont la valeur dépend de celle de K. ξ est donc le paramètre arbitraire C. C. Q. F. D.

58. On pouvait prévoir que, dans la présente théorie, on rencontrerait tôt ou tard les groupes S linéaires, fractionnaires, d'ordre fini.

En effet, dans ses *Leçons de Stockholm* (p. 29 et suiv.), M. Painlevé montre comment d'une équation U de Riccati

$$u' = \mathfrak{A}_0(t) + u\mathfrak{A}_1(t) + u^2\mathfrak{A}_2(t),$$

on déduit une équation Z

$$z'' = z\mathrm{M}(t),$$

différentielle linéaire, homogène, du second ordre. Les équations U et Z ont les relations mutuelles que voici :

Si z_1 et z_2 sont deux intégrales de Z, l'intégrale générale de U est

$$z = \frac{z_1' + Cz_2'}{z_1 + Cz_2}.$$

Si u_1, u_2, u_3 sont trois intégrales de U, elles donnent une intégrale z_1 de Z par la relation

$$z_1^2 = \frac{u_2 - u_3}{(u_2 - u_1)(u_3 - u_1)}.$$

Si les u sont racines de h_n, z_1 est aussi racine d'une équation algébrique, à coefficients *rationnels* (au sens du n° **1**). Prenons, ce qui ne change pas le fond des choses, pour variable, non plus t, mais $T(t)$. z_1 devient algébrique. Or on sait quel rôle essentiel jouent les groupes S dans l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires.

J'espère, dans un Travail ultérieur, revenir sur la dépendance mutuelle des équations différentielles U et Z.

Quant à la construction effective des U qui correspondent à des h_n données, elle ne présente aucune difficulté. Prenons pour variable non plus t, mais s, liée à t par l'équation W,

$$\Psi(s) = T(t).$$

On aura, pour l'intégrale générale de U (n° **57**),

$$u = \mathfrak{f}(s, C),$$

$$u = \frac{1}{\Psi'(s)}\left[\frac{1}{s - C} - \frac{H'(s)}{nH(s)}\right],$$

d'où

$$C = s - \left[u\Psi'(s) + \frac{H'(s)}{nH(s)}\right]^{-1}.$$

Prenons la dérivée $\frac{d}{ds}$, il viendra

$$\Psi'\frac{du}{ds} + u\Psi'' + \frac{d}{ds}\frac{H'}{nH} + \left(u\Psi' + \frac{H'}{nH}\right)^2 = 0,$$

ce qui est bien une équation de Riccati,

$$\Psi'' = \frac{\partial^2\Psi}{\partial s^2}, \qquad \ldots .$$

CHAPITRE VII.

ANHARMONIQUES DES QUATRIÈME ET CINQUIÈME DEGRÉS.

59. Comme exemple d'application pour les théories du présent Mémoire, je vais construire toutes les anharmoniques des quatrième et cinquième degrés, $n=4$ et 5. Les résultats (nº **56**) sont à comparer avec ceux du *Bulletin de la Société mathématique*. Supposons d'abord $n=4$.

p devant diviser ou $n-1$ (première catégorie) ou $n-2$ (deuxième catégorie) est un des trois nombres 1, 2 ou 3.

Nommons, pour abréger l'écriture, Θ_m la substitution canonique

$$\Theta_m = |\, z \quad \theta z \,|, \qquad \theta^m = 1,$$

d'ordre m, et ε la substitution d'ordre deux

$$\varepsilon = \left| z \quad \frac{1}{z} \right|.$$

L'invariant

$$2(a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2)$$

du polynome général du quatrième degré

$$a_0 y^4 + 4 a_1 y^3 + 6 a_2 y^2 + 4 a_3 y + a_4$$

se nommera I.

L'invariant

$$6 \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

se nommera J.

60. Si $p=1$, $N=4$, S est circulaire ou pyramidal.

S circulaire dérive de l'unique substitution Θ_4 (*cas I*). S pyramidal dérive de Θ_2 combinée avec ε (*cas II*).

Si $p = 2$, $N = 8$. S ne peut être que pyramidal, dérivé de Θ_4 et de ε (*cas III*).

Si $p = 3$, $N = 12$. S ne peut être que tétraédrique (*cas IV*).

Examinons ces quatre cas.

61. *Cas I.* — On a (n° **51**) une équation binome.

Dans le cas actuel, l'invariant J des polynomes $f(x)$ et $H(\eta)$ est zéro. Le rapport anharmonique des quatre racines est harmonique, c'est-à-dire constant, ce qui doit être. C'est un cas particulier de l'équation h_4 *harmonique* (*Bulletin de la Soc. math.*, 6°), exclu (*Ibid.*, 7°) comme conduisant à une équation U de Riccati dégénérée.

62. *Cas II.* — S dérive de

$$\Theta_2 = \left| z \quad -z \right| \qquad \text{et de} \qquad \varepsilon = \left| z \quad \frac{1}{z} \right|,$$

$\Psi(z) = z^2 + z^{-2}$. Le polynome réduit est

$$H(\eta) = \eta^4 - 6k\eta^2 + 1;$$

W est

$$z^4 - 6Tz^2 + 1 = 0.$$

h_4 s'obtient en éliminant z entre l'équation W et

$$x = \frac{1}{2(z - z^{-3})}\left[\frac{1}{z-\eta} - \frac{z(z^2-3k)}{z^4 - 6kz^2 + 1}\right].$$

Le rapport anharmonique des quatre racines est une constante arbitraire, fonction de k. Le groupe G de h_4 provient de

$$\overline{\Theta_2} = (x_0 x_2)(x_1 x_3), \qquad \bar{\varepsilon} = (x_0 x_1)(x_2 x_3).$$

On a l'anharmonique construite au 13° du *Bulletin de la Société mathématique*.

63. *Cas III.* — S dérive de

$$\Theta_4 = \left| z \quad \theta z \right|, \qquad (\theta = \sqrt{-1}) \qquad \text{et de} \qquad \varepsilon = \left| z \quad \frac{1}{z} \right|.$$

$\Psi(z) = z^4 + z^{-4}$. L'équation W est

$$z^8 - \mathrm{T}z^4 + 1 = 0.$$

Le polynome réduit s'obtient en donnant à T (nº **36**) une valeur constante telle que le premier membre de W devienne carré parfait. On posera $\mathrm{T} = 2$. Le polynome réduit est $\eta^4 - 1$. h_4 s'obtient en éliminant z entre W et

$$x = \frac{1}{4(z^3 - z^{-5})}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{z^3}{z^4-1}\right).$$

L'invariant $\mathrm{J} = 0$ et le rapport anharmonique des quatre racines est harmonique. On a la h_4 *harmonique* du *Bulletin de la Société mathématique*.

64. *Cas IV.* — S est tétraédrique et dérive les deux $\mathfrak{L}$ binaires Θ_2 et ε jointes à la $\mathfrak{L}$ ternaire, $i^2 + 1 = 0$,

$$(1) \qquad \left| z \quad \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{z-1}{z+1} \right|.$$

$$\Psi(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} = \left(\frac{z^4 + 1 + 2i\sqrt{3}\,z^2}{z^4 + 1 - 2i\sqrt{3}\,z^2}\right)^3.$$

Pour former le polynome réduit, employons le procédé du nº **36**, en prenant pour R la substitution (1).

R laisse fixe une racine de $\psi^{\frac{1}{3}} = 0$ (ou de $\varphi^{\frac{1}{3}} = 0$), parce que R permute ensemble les quatre racines, tout en étant d'ordre 3. L'équation quadratique $\eta_0 = \mathrm{R}[\eta_0]$ a donc une racine commune avec chacune des deux équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Prenons, par exemple, $\psi(\eta_0) = 0$.

Le polynome du douzième degré en η

$$\begin{vmatrix} \psi(\eta) & \varphi(\eta) \\ \psi(\eta_0) & \varphi(\eta_0) \end{vmatrix},$$

devient simplement, pour $\psi(\eta_0) = 0$,

$$\psi(\eta) = (\eta^4 + 1 + 2i\eta^2\sqrt{3})^3.$$

Le polynome réduit

$$H(\eta) = \eta^4 + 1 + 2\eta^2 i\sqrt{3}.$$

Dans H, on a (n° **59**),

$$a_0 = 1 = a_4, \qquad a_1 = a_3 = 0, \qquad a_2 = \frac{i\sqrt{3}}{3}$$

et l'invariant

$$I = (a_0 a_4 + 3a_2^2) = 0.$$

Le rapport anharmonique des quatre racines est équianharmonique.

h_4 s'obtiendra par le procédé ordinaire et sera l'équation *équianharmonique* du *Bulletin de la Société mathématique*.

On remarquera que, dans l'invariant absolu du groupe tétraédrique, nous avons, rectifiant une erreur à la page 168 du tome XII des *Mathematische Annalen*, changé z^4 en $-z^4$.

65. La discussion des h_5, $n = 5$, est très simple. $p = 1, 2, 3, 4$.

Le cas $[p = 1, N = 5]$ fournit un S circulaire et une h_5 binome (n° **51**).

Les cas $[p = 3, N = 15]$ et $[p = 4, N = 20]$ fournissent des S pyramidaux, ce qui est absurde (n° **52**).

Le cas $[p = 2, N = 10]$ est admissible (n° **52**) et fournit la h_5 construite au Chapitre II du *Bulletin de la Société mathématique*.