JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

N. SALTYKOW

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 435-466.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__435_0>

Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre;

PAR M. N. SALTYKOW.

Le Travail qui va suivre a pour objet l'étude d'un lien intime entre les problèmes d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles et de celles aux différentielles totales, présentant une généralisation des recherches de Cauchy et Jacobi sur une seule équation. On établit de la sorte parmi les manières de traiter les problèmes d'intégration des équations simultanées et d'une seule équation une analogie complète, dont la Science semblait être privée jusqu'à présent. De plus, la théorie développée offre un intérêt particulier, les théorèmes, dont S. Lie a enrichi la théorie des équations en question, s'en présentant comme conséquences immédiates. J'ai eu l'honneur de publier dans courante les résultats de mes recherches dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, mais je veux en donner dans les pages suivantes une démonstration détaillée.

CHAPITRE I.

DES INTÉGRALES COMPLÈTES.

1. Le but de ce Chapitre est d'introduire plusieurs modifications dans la méthode des caractéristiques de Cauchy pour l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue et dont M. S. Lie a donné une généralisation sur les systèmes des équations simultanées. Je veux précisément étudier le point important de cette théorie, concernant le calcul des intégrales complètes au sens de Lagrange. Cette question me semble avoir un certain intérêt, car la méthode de Cauchy devient quelquefois illusoire. C'est à cause de cette circonstance que plusieurs auteurs éminents introduisent dans ladite théorie une nouvelle notion de M. S. Lie sur les intégrales des équations en question. Mais, c'est en conservant la première notion de Lagrange, que je me propose de combler ici cette lacune. D'ailleurs, la question posée étant résolue complètement pour une seule équation par MM. Mayer et Lemonnier [1], il ne nous reste qu'à étendre leurs résultats aux systèmes d'équations simultanées.

2. Considérons le système d'équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0, \\ \qquad k = 1, 2, \ldots, m \qquad m \leqq n, \end{cases}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des variables indépendantes et z la fonction inconnue; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignant les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$. Nous supposons que les équations (1) forment un système *complet* en entendant par là que les égalités

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H_k}{\partial x_h} - \dfrac{\partial H_k}{\partial z} H_h - \dfrac{\partial H_h}{\partial x_k} + \dfrac{\partial H_h}{\partial z} H_k \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} \frac{d H_k}{d x_{m+i}} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} \frac{d H_h}{d x_{m+i}} \right) = 0, \end{cases}$$

---

(1) *Math. An.*, Bd. III, S. p. 445. — *Bull. de la Soc. math. de F.*, t. X, p. 223.

où l'on a posé

$$\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}} = \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z} p_{m+i}, \qquad \dots,$$

sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs distinctes des indices k, h de 1 à m. On les écrira plus brièvement sous la forme symbolique ([1])

$$\{\mathrm{H}_h, \mathrm{H}_k\} = 0.$$

Le problème à résoudre, c'est de *trouver les valeurs*

$$(3) \qquad z, p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n$$

en fonction des variables indépendantes $x_1, x_2, \dots, x_n$, *de sorte qu'en y joignant les fonctions de mêmes variables* $p_1, p_2, \dots, p_m$ *définies par les équations* (1), *on ait des identités*

$$(4) \qquad p_1 = \frac{\partial z}{\partial x_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial z}{\partial x_2}, \qquad \dots, \qquad p_n = \frac{\partial z}{\partial x_n}.$$

3. En suivant Jacobi dans son Mémoire important : *Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung* ([2]), différentions par rapport aux $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ les identités qu'on obtient par la substitution des valeurs indiquées z, p dans les équations (1). Les identités obtenues nous montrent, en vertu des relations (4) et de celles-ci,

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_s} = \frac{\partial p_s}{\partial x_i},$$

qui en découlent pour toutes les valeurs des indices i, s de 1 à m, qu'il est nécessaire que les fonctions (3) satisfassent aux équations diffé-

---

(1) *Cf.* Delassus, *Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XIV, p. 126.
(2) *Gesammelte Werke*, Bd. IV, S. 1.

rentielles

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial z}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial z}{\partial x_{m+i}}=P_k,\\ &\frac{\partial p_\nu}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_\nu}{\partial x_{m+i}}=-\frac{dH_k}{dx_\nu},\\ &\nu=m+1,\, m+2,\,\ldots,\, n;\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\, m,\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé

$$P_k=\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}-H_k.$$

Les équations (5) présentent une généralisation des systèmes étudiés par Jacobi dans son Mémoire cité plus haut et ont bien la forme de celles dont la théorie est développée dans mon Travail : *Étude sur les intégrales d'un système des équations différentielles aux dérivées partielles de plusieurs fonctions inconnues* (¹).

Il y est démontré que la solution des équations (5) revient à intégrer le système suivant d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue f des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial f}{\partial x_{m+i}}+P_k\frac{\partial f}{\partial z}-\sum_{i=1}^{n-m}\frac{dH_k}{dx_{m+i}}\frac{\partial f}{\partial p_{m+i}}=0,\\ &\qquad k=1,\,2,\,\ldots,\, m.\end{aligned}\right.$$

On va voir aisément que ce dernier système est jacobien. En effet, les parenthèses de Poisson, formées pour les équations des indices h et k, deviennent

$$\sum_{\nu=1}^{n-m}\left(A_\nu^{h,k}\frac{\partial f}{\partial x_{m+\nu}}+B_\nu^{h,k}\frac{\partial f}{\partial p_{m+\nu}}\right)+A^{h,k}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

(¹) *Journal de Liouville*, p. 423; 1897.

On a d'ailleurs

$$A_\nu^{h,k} = \frac{\partial}{\partial p_{m+\nu}} \{ H_h, H_k \} = 0,$$

$$B_\nu^{h,k} = \frac{d}{dx_{m+\nu}} \{ H_h, H_k \} = 0,$$

$$A^{h,k} = \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \frac{\partial}{\partial x_{m+\nu}} \{ H_h, H_k \} - \{ H_h, H_k \} = 0.$$

Les intégrales du système (6) sont donc définies par les équations aux différentielles totales

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} dz &= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k, \\ dx_{m+i} &= \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} dx_k, \\ dp_{m+i} &= -\sum_{k=1}^{m} \frac{dH_k}{dx_{m+i}} dx_k, \\ & i = 1, 2, \ldots, n-m. \end{aligned} \right.$$

Il est à remarquer que l'on parvient de même à ces dernières équations (7) en poursuivant l'ordre d'idées développé par Jacobi dans son Mémoire célèbre : *Nova methodus æquationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi*. En effet, soit

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = C,$$

C étant une constante arbitraire, l'équation définissant l'une des valeurs (3). Il s'ensuit que la fonction f est l'intégrale du système linéaire

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{\partial f}{\partial z} H_k + [H_k, f] = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

identique au système (6), les crochets rectilignes représentant, d'après

M. Mayer, les parenthèses de Poisson, généralisées par Weiler ([1]), et comprenant toutes les variables x_{m+r}, z, p_{m+r}.

Soit l'intégrale générale du système (7) donnée par les équations

$$(8) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(9) \qquad p_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(10) \qquad x_{m+i} = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

a_i, b, b_i étant des constantes arbitraires.

S'il est possible de résoudre les équations (10) par rapport à $n-m$ constantes quelconques, on a une solution du système (5) en éliminant ces constantes des équations (8), (9). Supposons, en effet, les équations (10) résolubles par rapport à $n-m$ constantes que nous nommerons C_1, C_2, ..., C_{n-m}; toutes les autres étant désignées dans ce cas par C_{n-m+1}, C_{n-m+2}, ..., $C_{2n-2m+1}$. En éliminant C_1, C_2, ..., C_{n-m} des équations (8), (9) nous avons $n-m+1$ équations intégrales distinctes du système aux différentielles totales (7). C'est précisément une solution du système (5) comme je l'ai démontré dans le Mémoire mentionné. Le point important de nos recherches, c'est d'examiner s'il est possible de former ces dernières équations intégrales de façon à satisfaire aux conditions requises.

4. *Il est à remarquer en premier lieu qu'il suffit d'avoir*

$$(11) \qquad p_{m+i} = \frac{\partial z}{\partial x_{m+i}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m$$

pour vérifier toutes les relations (4).

En effet, les premières équations (5) étant identiquement satisfaites, on en conclut

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = -H_k,$$

([1]) Mayer, *Mathematische Annalen*, Bd. IX, S. 370.
Weiler, *Zeitschrift für Math. und Phys.*, Bd. 8, S. 264; Bd. 20, S. 271.

et, par conséquent, nous avons des identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Pour résoudre notre problème il est donc nécessaire d'étudier à quelles conditions les relations (11) ont lieu.

5. Les équations (10) étant résolubles par rapport aux $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$, le déterminant fonctionnel

$$\text{(12)} \qquad D\left(\frac{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n}{C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}}\right)$$

ne s'annule pas.

De plus, en substituant les valeurs (10) des variables x_{m+i} dans les fonctions z, p_{m+i}, obtenues plus haut, on a identiquement leurs valeurs (8), (9). Désignant par des parenthèses les résultats de cette dernière opération, on obtient des identités nouvelles en différentiant les précédentes par rapport aux constantes C

$$\text{(13)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial z}{\partial x_{m+i}}\right) \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_\nu} = \frac{\partial z}{\partial C_\nu}, \\ \nu = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array} \right.$$

$$\text{(14)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\left(\frac{\partial z}{\partial C_s}\right) + \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial z}{\partial x_{m+i}}\right) \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_s} = \frac{\partial z}{\partial C_s}, \\ s = n-m+1, n-m+2, \ldots, 2n-2m+1. \end{array} \right.$$

Nous allons introduire dans notre calcul une nouvelle notion sur des fonctions (1) qui seront dans la théorie développée d'une importance extrême; posons

$$U_C = \frac{\partial z}{\partial C} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C},$$

---

(1) *Voir* POINCARÉ, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles*, p. 23; LEMONNIER, *Bull. de la Soc. math. de France*, t. X, p. 223.

z, p_{m+i}, x_{m+i} ayant les valeurs (8), (9), (10), C étant l'une des constantes y contenues.

Les identités (11) ayant lieu de même pour les valeurs (10) des variables x_{m+i}, on tire des égalités (13)

$$U_{C_\nu} = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Ces dernières conditions sont nécessaires, mais en même temps elles sont suffisantes. En effet, supposons que les équations

$$\frac{\partial z}{\partial C_\nu} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_\nu} = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n-m,$$

sont identiquement satisfaites. En les retranchant des identités (13), qui ont toujours lieu, il viendra

$$\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial C_\nu} \left[p_{m+i} - \left(\frac{\partial z}{\partial x_{m+i}} \right) \right] = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Le déterminant (12) ne s'annulant pas, nous parviendrons aisément aux identités (11).

Quant aux égalités (14), elles donnent des conditions

$$U_{C_s} \gtrless 0$$

pour toutes les constantes C_s, qui restent dans l'expression de la fonction mentionnée z. Ces inégalités sont de même non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes, car en posant

$$\frac{\partial z}{\partial C_s} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial z}{\partial C_s} \gtrless 0,$$

$$s = n-m+1, n-m+2, \ldots, 2n-2m+1,$$

on a, en vertu des identités (11), (14),

$$\left(\frac{\partial z}{\partial C_s} \right) \gtrless 0.$$

Cela étant, la valeur z en fonction des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ contient explicitement les constantes arbitraires C_s.

Encore, les équations obtenues par l'élimination des constantes C_1, $C_2, \ldots, C_{n-m}$ étant des équations intégrales distinctes du système (7), il est impossible d'en éliminer les constantes $C_{n-m+1}, C_{n-m+2}, \ldots, C_{2n-2m+1}$. Donc, il n'existe point de relations entre les variables z, p, x qui ne soient contenues parmi les équations (1).

Par conséquent, *pour satisfaire aux exigences de notre problème, il est nécessaire et suffisant que les équations* (10) *soient résolubles par rapport à $n-m$ constantes quelconques, les fonctions U_C correspondantes étant identiquement nulles. De plus, si les autres $n-m+1$ fonctions U_C ne s'annulent pas, la solution obtenue est précisément une intégrale complète.*

Nous sommes en état d'indiquer plusieurs cas où les conditions citées ont lieu. Mais pour les étudier nous nous fonderons sur les deux lemmes suivants :

6. *En vertu des équations* (8), (9), (10), *la formule*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial z}\, dx_k$$

est une différentielle exacte.

Les équations (7) étant identiquement satisfaites, nous avons des identités

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_k} &= \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k,\\ \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} &= \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}},\\ \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} &= -\frac{dH_k}{dx_{m+i}}.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, il s'ensuit

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial H_k}{\partial z} = \frac{\partial^2 H_k}{\partial z\,\partial x_h} + \frac{\partial^2 H_k}{\partial z^2}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - H_h\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial^2 H_k}{\partial z\,\partial x_{m+i}}\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} - \frac{\partial^2 H_k}{\partial z\,\partial p_{m+i}}\frac{dH_h}{dx_{m+i}}\right).$$

Différentiant par rapport à z l'identité (2), on obtient une nouvelle égalité de même identiquement satisfaite pour les valeurs (8), (9), (10) des variables z, p_{m+i}, x_{m+i}. En vertu de cette dernière formule, il viendra

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial z},$$

notre théorème étant ainsi vérifié. Posons donc

$$d\mathrm{W} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\,dx_k.$$

7. *La fonction* $\mathrm{U_C}$ *est définie par l'équation*

$$\mathrm{U_C} = \mathrm{U_C^0}\,e^{-\int_{\mathrm{W_0}}^{\mathrm{W}} d\mathrm{W}},$$

$\mathrm{U_C^0}$, $\mathrm{W_0}$ *désignant les valeurs des fonctions* $\mathrm{U_C}$, W *correspondantes aux valeurs initiales des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

La dérivée partielle $\frac{\partial \mathrm{U_C}}{\partial x_k}$ étant mise sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathrm{U_C}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{C}}\left(\frac{\partial z}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial \mathrm{C}}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} - \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial \mathrm{C}}\right),$$

elle devient, en tenant compte des identités (15),

$$\frac{\partial \mathrm{U_C}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial \mathrm{C}} + \sum_{i=1}^{n-m}\left(\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}}\frac{\partial p_{m+i}}{\partial \mathrm{C}} + \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_{m+i}}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial \mathrm{C}}\right)$$
$$+\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial x_{m+i}}{\partial \mathrm{C}}.$$

On a donc

$$\frac{\partial \mathrm{U_C}}{\partial x_k} = -\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\mathrm{U_C}$$

te il vient, par suite,

$$U_C = U_C^0 e^{-\int_{W_0}^{W} dW}.$$

8. *Prenons pour constantes a_i, b_i, b les valeurs initiales des*

$$x_{m+i}, \quad p_{m+i}, \quad z - \sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i} p_{m+i}.$$

Les a_i étant éliminées des équations (8), (9) *en vertu des* (10), *on a une intégrale complète du système* (1).

Désignant par z^0 la valeur initiale de z, nous avons

$$z^0 = b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i.$$

Le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n}{a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}}\right)$$

est $\gtrless 0$, car pour les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ il devient égal à 1. Cela posé, on a

(16) $$U_{a_i}^0 = 0, \qquad U_{b_i}^0 = a_i, \qquad U_b^0 = 1.$$

Les fonctions $\frac{\partial H_k}{\partial z}$ restent holomorphes dans le domaine où les H_k, considérées comme fonctions des variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$, sont également holomorphes. L'intégrale générale du système (7) y présentant de même des fonctions z, p_{m+i}, x_{m+i} holomorphes, c'est pour ce domaine (auquel nous bornons aussi nos recherches) que la différentielle exacte dW admet une intégrale holomorphe. Par conséquent, la fonction

$$e^{-\int_{W_0}^{W} dW}$$

dans tout le cours de nos calculs a une valeur finie et l'on obtient, en vertu des (16), les identités

$$U_{a_i} = 0, \qquad U_{b_i} \gtrless 0, \qquad U_b \gtrless 0.$$

Donc, en éliminant les a_i, en vertu des (10), l'équation (8) donne une intégrale complète du système (1).

9. Il est aisé d'indiquer encore deux autres cas où les conditions requises sont satisfaites.

Supposons les équations (10) résolubles par rapport aux constantes b_i. Il suffit de prendre pour b la valeur initiale de z pour avoir

$$U^0_{b_i} = 0, \qquad U^0_b = 1, \qquad U^0_{a_i} = -b_i, \qquad \ldots.$$

Si le système (1) ne présente qu'une seule équation, ce cas est celui où la méthode des caractéristiques de Cauchy donne une intégrale complète.

Enfin, les équations (10) étant résolubles par rapport aux b_ν, a_i où tous les indices ν, i sont différents, on prend pour b la valeur initiale de

$$z - \sum x_{m+i} p_{m+i},$$

où la sommation s'effectue par rapport aux indices i, correspondants aux valeurs b_i, qui sont à éliminer entre les équations (10). Il viendra donc

$$U^0_{b_\nu} = 0, \qquad U^0_{a_i} = 0,$$
$$U^0_b = 1, \qquad U^0_{b_i} = a_i, \qquad U^0_{a_\nu} = -b_\nu.$$

CHAPITRE II.

ÉTUDE SUR LES ÉQUATIONS DANS LESQUELLES LA FONCTION INCONNUE NE FIGURE PAS EXPLICITEMENT.

Les deux Chapitres qui vont suivre concernent la généralisation de la première méthode de Jacobi d'intégration d'une seule équation. On y introduit la notion de *fonction principale* des équations simultanées, en généralisant celle de l'illustre Jacobi.

Considérons le système d'équations différentielles

$$(1)\qquad \begin{cases} p_k + \mathrm{H}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \qquad m < n, \end{cases}$$

que nous supposerons être en involution, les conditions

$$(2)\qquad \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_h} - \frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial \mathrm{H}_h}{\partial x_{m+i}} \right) = 0$$

étant identiquement satisfaites pour toutes les valeurs distinctes h et k de 1 à m.

Il s'ensuit que les équations

$$(3)\qquad \begin{cases} dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}} dx_k, \\ dp_{m+i} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial x_{m+i}} dx_k, \\ i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{cases}$$

présentent un système aux différentielles totales.

La théorie que je me propose ici de développer consiste à éclaircir le lien entre les problèmes d'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles (1) et de celles aux différentielles totales (3). On va voir qu'on obtient par des différentiations l'intégrale générale du système (3), une intégrale complète des équations (1) étant connue, et inversement, si l'on a l'intégrale générale des équations (3), que l'intégrale complète du système (1) s'obtient par une quadrature.

THÉORÈME I. — *Soit*

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}) + b \tag{4}$$

une intégrale complète des équations (1), $b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ *étant des constantes arbitraires. Le déterminant fonctionnel*

$$D\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \frac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}}\right) \tag{5}$$

ne s'annulant pas, les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \\ i = 1, 2, \ldots, n-m \end{cases} \tag{6}$$

donnent l'intégrale générale du système (3), *les a_i étant de nouvelles constantes arbitraires.*

En effet, les valeurs x_{m+i}, p_{m+i} définies par le système (6) satisfont identiquement aux équations (6). On obtient donc, en les différentiant par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, des identités nouvelles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\,\partial x_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\,\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial b_i\,dx_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = 0.$$

Mais, d'autre part, en substituant dans les équations (1) leur intégrale (4), elles deviennent identiques, et, en prenant les dérivées partielles, par rapport aux x_{m+i}, b_i, nous avons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial x_{m+i}} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu} \partial x_{m+i}} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial b_i} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu} \partial b_i} = 0.$$

Retranchons chacune de ces dernières identités de sa correspondante dans le système précédent; il s'ensuit

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu} \partial x_{m+i}} \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu} \partial b_i} \left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

l'indice k prenant toutes les valeurs de 1 à m. Le déterminant (5) ne s'annulant pas, nous obtenons les identités cherchées

$$(7) \qquad \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}}, \qquad \frac{\partial p_{m+\nu}}{\partial x_k} = -\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+\nu}},$$

l'indice ν prenant les valeurs de 1 à $n-m$, k, les valeurs de 1 à m. On en conclut donc que les valeurs des variables x_{m+i}, p_{m+i}, définies par les équations (6), sont une intégrale générale des équations (3).

L'inverse du théorème démontré repose sur le *lemme préliminaire :*

Soient les équations

$$(8) \quad x_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(9) \quad p_{m+i} = F_i(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m$$

l'intégrale générale du système (3), a_i, b_i *étant des constantes arbitraires. En vertu de ces dernières équations la formule*

$$\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k\right)dx_k$$

devient une différentielle exacte.

Posons

$$U_k = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k.$$

Les identités (7) ayant lieu, nous obtenons

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_h} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_k\,\partial x_h} - \frac{\partial H_k}{\partial x_h} - \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\,\frac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}},$$

$$\frac{\partial U_h}{\partial x_k} = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial^2 x_{m+i}}{\partial x_h\,\partial x_k} - \frac{\partial H_h}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial H_h}{\partial x_{m+i}}\,\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}.$$

Il s'ensuit donc, en vertu des identités (2),

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_h} = \frac{\partial U_h}{\partial x_k},$$

l'expression étudiée étant une différentielle exacte, que nous allons appeler dU,

$$dU = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k\right)dx_k.$$

Théorème II. — *Prenons pour constantes a_i, b_i les valeurs initiales des variables x_{m+i}, p_{m+i}. La quadrature de la différentielle exacte dU effectuée, considérons la fonction*

$$V = \int_{U_0}^{U} dU + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i + b,$$

où b est une nouvelle constante arbitraire, U_0, la valeur initiale de la fonction U. Les a_i étant éliminées, en vertu des équations (8), la valeur obtenue pour V est une intégrale complète du système (1).

Désignons par d une différentielle relative à des accroissements des variables x, par δ une différentielle relative à des accroissements des a_i, b_i et par Δ la différentielle totale, de sorte que l'on a

$$\Delta = d + \delta.$$

Il viendra évidemment

$$\Delta V = dU + \int_{U_0}^{U} d\,\delta U + \sum_{i=1}^{n-m} (b_i \,\delta a_i + a_i \,\delta b_i).$$

Les égalités (3) et (7) ayant lieu identiquement, nous avons

$$dU = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\, dx_{m+i} - \sum_{k=1}^{m} H_k\, dx_k,$$

$$d\,\delta U = \sum_{k=1}^{m} \delta U_k\, dx_k,$$

en posant

$$\begin{aligned}\delta U_k &= \sum_{i=1}^{n-m}\left(p_{m+i}\,\delta \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}\,\delta x_{m+i}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right).\end{aligned}$$

On a donc

$$d\,\delta U = d\left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right),$$

et, par conséquent, on trouve

$$\int_{U_0}^{U} d\,\delta U = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i}\,\delta x_{m+i} - b_i\,\delta a_i).$$

Il s'ensuit

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} (p_{m+i} \Delta x_{m+i} + a_i \delta b_i) - \sum_{k=1}^{m} H_k \, dx_k.$$

Le déterminant fonctionnel des fonctions x_{m+i} par rapport aux constantes a_i admet une valeur différente de zéro, car, pour les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, il devient égal à 1. Il est donc toujours possible de résoudre les équations (8) par rapport aux constantes a_i et d'avoir, par conséquent, la valeur de V en fonction des variables x, b_i. On en déduit

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} \Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i} \delta b_i \right) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k} dx_k.$$

En comparant les deux expressions de la différentielle ΔV, nous avons les égalités suivantes :

$$(10) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{cases}$$

$$(11) \qquad \frac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Les équations (10) présentent, entre les x, p_{m+i}, a_i, b_i, $2(n-m)$ relations distinctes, chacune d'elles contenant une des quantités, soit p_{m+i}, soit a_i, qui ne figurent pas dans les autres. Elles sont donc des équations intégrales du système (3) de forme différente des (8), (9). Quant aux équations (11), elles résultent des (1), en y substituant la valeur mentionnée de V ; elles démontrent donc que cette dernière fonction est une solution des équations (1). De plus c'est une intégrale complète. En effet, elle contient $n-m+1$ constantes arbitraires distinctes b, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}$ et le déterminant fonctionnel

$$D\left(\frac{\dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}} \right)$$

ne s'annule pas, car pour les valeurs initiales des variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ il devient égal à 1.

Cela étant, on voit bien que la fonction V sert à représenter l'intégrale complète des équations (1) et les équations intégrales du système (3). Cette fonction jouit donc de propriétés toutes analogues à la *fonction principale* de Jacobi dans sa théorie concernant une seule équation. Qu'il nous soit permis de donner aussi à V le nom de *fonction principale* de la théorie des équations que nous venons d'étudier.

THÉORÈME III. — *Les constantes a_i, b_i conservant les mêmes valeurs initiales, supposons que les ν premières équations* (8) *soient résolubles par rapport aux constantes $b_1, b_2, \ldots, b_\nu$. Posons*

$$V = \int_{U_0}^{U} dU + \sum_{i=\nu+1}^{n-m} a_i b_i + b,$$

b étant une nouvelle constante arbitraire. En éliminant les valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, a_{\nu+1}, a_{\nu+2}, \ldots, a_{n-m}$, en vertu des équations (8), *on obtient une intégrale complète des équations* (1).

Procédant de même qu'en démontrant le théorème II, il viendra

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\, \Delta x_{m+i} + \sum_{i=\nu+1}^{n-m} a_i\, \delta b_i - \sum_{i=1}^{\nu} b_i\, \delta a_i + \sum_{k=1}^{m} H_k\, dx_k,$$

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} \Delta x_{m+i} + \sum_{i=\nu+1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial b_i} \delta b_i + \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial V}{\partial a_i} \delta a_i + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial V}{\partial x_k} dx_k.$$

Il s'ensuit donc que les équations intégrales du système (3) prennent la forme suivante:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} &= p_{m+i}, & i &= 1, 2, \ldots, n-m, \\ \frac{\partial V}{\partial a_\mu} &= -b_\mu, & \mu &= 1, 2, \ldots, \nu, \\ \frac{\partial V}{\partial b_s} &= a_s, & s &= \nu+1, \nu+2, \ldots, n-m. \end{aligned}$$

La valeur de V en fonction des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est bien une intégrale complète du système (1), car il est impossible d'éliminer toutes les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, b_{\nu+1}, b_{\nu+2}, \ldots, b_{n-m}$ des équations (12), ces dernières étant des équations intégrales distinctes du système (3).

Le théorème démontré est une généralisation des idées de M. Bertrand ([1]) concernant une seule équation aux dérivées partielles. Il contient comme cas particuliers celui où toutes les équations (8) sont résolubles par rapport aux constantes b_i, et le cas, étudié dans le théorème II, où il est supposé possible d'éliminer toutes les constantes b_i des équations (8). Le rapport du théorème III aux cas cités est le même que dans les théorèmes connus de Jacobi et M. Mayer ([2]) à celui de M. Bertrand ici mentionné.

Nous allons à présent tirer quelques conséquences des théorèmes démontrés relativement aux problèmes d'intégrations des équations différentielles (3). Mais, remarquons en premier lieu que ces dernières équations présentent une généralisation des systèmes canoniques des équations différentielles ordinaires, qui s'en déduisent en posant $m = 1$. On verra d'ailleurs que les équations (3) admettent les mêmes propriétés que ces dernières. Nous proposons donc de nommer les équations en question *système canonique des équations aux différentielles totales;* quant aux x_{m+i}, p_{m+i}, nous les appellerons *variables canoniques* appartenant relativement à *deux classes*, la *positive* et la *négative*.

Théorème IV. — *Si l'on connaît $n - m$ intégrales distinctes en involution du système* (3)

$$(13) \qquad \begin{cases} \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = b_i \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n - m, \end{cases}$$

les b_i étant des constantes arbitraires, son intégration se ramène à une quadrature.

([1]) *Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 641.
([2]) *Math. An.*, Bd. III, S. 435.

Les intégrales (13) sont dites *en involution* si l'on a des identités

$$(\psi_h, \psi_k) = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_{m+i}} - \frac{\partial \psi_k}{\partial p_{m+i}} \frac{\partial \psi_h}{\partial x_{m+i}} \right) = 0,$$

pour toutes les valeurs distinctes h, k de 1 à $n-m$.

On a de plus les identités suivantes

$$(p_k + \mathrm{H}_k, \psi_i) = 0,$$
$$k = 1, 2, \ldots, m, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m.$$

Il s'ensuit donc que les équations (1), (13) présentent un système de n équations aux dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_n$ en involution. Leur intégrale complète s'obtient en effectuant la quadrature de la différentielle exacte

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s dx_s.$$

Supposons que

$$z = \mathrm{V} + b$$

soit son intégrale, V étant une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et des constantes b_i, b une constante arbitraire. D'après le théorème I, les $n-m$ intégrales cherchées du système (3) sont

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial b_i} = a_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

a_i étant de nouvelles constantes arbitraires.

Évidemment ce théorème est une généralisation de celui de Liouville (1) concernant un système canonique d'équations différentielles ordinaires. C'est un des plus beaux théorèmes démontrés par M. S. Lie (2). Mais notre démonstration est remarquable par sa simplicité en comparaison avec celle de cet éminent géomètre.

---

(1) *Journal de Liouville*, 1re série, t. XX, p. 137.

(2) M. S. Lie examine les équations linéaires aux dérivées partielles du pre-

THÉORÈME V. — *Si l'on connaît k intégrales distinctes et en involution du système* (3)

$$\left\{\begin{array}{l}\psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = b_i, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, k,\end{array}\right. \tag{14}$$

k étant moindre que n — m, l'intégration des équations (3) *revient à celle d'un système canonique aux différentielles totales d'ordre* $2n - 2m - 2k$.

Supposons les équations (14) résolubles par rapport aux variables $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{m+k}$. Les équations (1), (14), ainsi que celles qui en résultent

$$p_v + H'_v(b_1, b_2, \ldots, b_k, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_{m+k+1}, p_{m+k+2}, \ldots, p_n) = 0,$$
$$v = 1, 2, \ldots, m + k,$$

présentent un système en involution. Pour intégrer le système (3), il suffit d'avoir une intégrale complète de ces dernières équations. Mais ce problème, à une quadrature près, est équivalent à celui d'intégration des équations canoniques aux différentielles totales

$$\left\{\begin{array}{l} dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{v=1}^{m+k} \frac{\partial H'_v}{\partial p_{m+i}} dx_v, \\ dp_{m+i} = -\displaystyle\sum_{v=1}^{m+k} \frac{\partial H'_v}{\partial x_{m+i}} dx_v, \\ i = k + 1, k + 2, \ldots, n - m, \end{array}\right. \tag{15}$$

C'est ainsi que l'ordre du système (3) s'abaisse de $2k$ unités.

---

mier ordre d'une seule fonction inconnue φ

$$(p_k + H_k, \varphi) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

qui correspondent à notre système (3) (*Math. An.*, Bd. XI, S. 469).

Théorème VI. — *Le problème d'intégration du système* (3) *exige $n - m$ opérations d'intégration d'ordre*

$$2n - 2m, \quad 2n - 2m - 2, \quad \ldots, \quad 4, \quad 2$$

et une quadrature (¹).

Par une opération d'ordre $n - m$ nous aurons une intégrale du système (3) que nous supposons résoluble par rapport à p_{m+1}. L'ordre du système (3), d'après le théorème précédent, s'abaisse de deux unités. On parvient donc à un système de $2n - 2m - 2$ équations canoniques aux différentielles totales. On le traite de même que le système (3) et ainsi de suite.

Il va sans dire que, dans certains cas, l'ordre des opérations exigées peut être diminué. Supposons, par exemple, les fonctions H_1, H_2, ..., H_m indépendantes de ν variables x_1, x_2, ..., x_ν. Prenons, suivant Jacobi (²), au lieu des variables z, x_1, x_2, ..., x_ν pour nouvelle fonction

$$y = z - \sum_{i=1}^{\nu} x_i p_i$$

et pour nouvelles variables indépendantes p_1, p_2, ..., p_ν. Les m équations (1) se transforment dans m équations nouvelles, de même en involution; mais le nombre des variables indépendantes diminue de ν unités. Donc le nombre et l'ordre de toutes les opérations à effectuer sont de ν unités moindres.

Les opérations mentionnées terminées, on a par une quadrature une intégrale complète du système (1), et les formules (6) du théorème I donnent l'intégrale générale des équations (3).

Arrêtons-nous ici pour dire quelques mots sur le théorème II et son

---

(¹) Comme on le fait d'ordinaire, nous appelons le calcul d'une intégrale d'un système de μ équations aux différentielles totales de $\mu + \nu$ variables, ν étant un nombre provisoire quelconque, *opération d'intégration d'ordre* μ.

(²) *Vorlesungen über Dynamik*, zweite Ausgabe, 1884, S. 164.

lemme préliminaire; ils ont été énoncés par M. Mayer ([1]), comme je l'avais mentionné dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* du 24 juillet 1899, en donnant leur extension aux équations quelconques en involution.

Or, la théorie développée constitue une certaine relation entre la *méthode des caractéristiques* de Cauchy et les *deux méthodes* de Jacobi. C'est ce que M. Delassus a démontré pour une seule équation ([2]).

Remarque. — Nous avons toujours supposé que les équations (13), (14) et celles du théorème VI sont résolubles par rapport aux variables p_{m+1}, p_{m+2}, ... Il est aisé de voir que cela n'est point nécessaire, car, si ce n'est pas le cas, il suffit d'effectuer une transformation de M. Mayer ([3]) en réduisant plusieurs variables canoniques de classe positive dans la négative et à l'inverse.

Tout ce qui vient d'être dit démontre quelle grande analogie présente la théorie d'intégration des équations canoniques aux différentielles totales (3) avec celle des équations différentielles canoniques ordinaires. Mais il est aisé de pousser cette analogie encore plus loin.

Évidemment, les parenthèses de Poisson composées des fonctions présentant les premiers membres des intégrales du système (3), donnent lieu à de nouvelles intégrales.

Les équations intégrales du système (3) admettent une forme canonique, jouissant des mêmes propriétés que celle des équations canoniques différentielles ordinaires.

Chaque système complet des équations intégrales du système (3) se ramène à cette forme canonique, etc.

([1]) *Nachrichten von der k. Gesellschaft der W. Göttingen*, S. 299; 1873.

([2]) *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 187; 1897.

([3]) *Math. An.*, Bd. VIII, S. 313. — *Comptes rendus*, 26 juin et 3 juillet 1899.

CHAPITRE III.

ÉTUDE SUR LES ÉQUATIONS CONTENANT LA FONCTION INCONNUE EXPLICITEMENT.

Supposons que les équations étudiées contiennent explicitement la fonction inconnue z et mettons-les sous la forme suivante :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{c} p_k + H_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n) = 0, \\ k = 1, 2, \ldots, m, \qquad m \leqq n. \end{array} \right.$$

Ces dernières équations formant un système complet, les égalités

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial H_k}{\partial x_h} - \dfrac{\partial H_k}{\partial z} H_h - \dfrac{\partial H_h}{\partial x_k} + \dfrac{\partial H_h}{\partial z} H_k \\ \qquad + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \left(\dfrac{\partial H_h}{\partial p_{m+i}} \dfrac{dH_k}{dx_{m+i}} - \dfrac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} \dfrac{dH_h}{dx_{m+i}} \right) = 0, \end{array} \right.$$

où l'on a

$$\frac{dH_k}{dx_{m+i}} = \frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}} + \frac{\partial H_k}{\partial z} p_{m+i}, \qquad \ldots,$$

sont identiquement satisfaites pour toutes les valeurs distinctes des indices h, k de 1 à m. Les conditions citées ont une forme remarquable, car elles deviennent identiques à celles du Chap. II, quand les fonctions H_k ne contiennent plus z.

Les équations

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} dz = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} - H_k \right) dx_k, \\ dx_{m+i} = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}} dx_k, \\ dp_{m+i} = - \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{dH_k}{dx_{m-i}} dx_k, \\ \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array} \right.$$

présentent bien un système aux différentielles totales, si les équations (1) forment un système complet, comme il se trouve démontré dans le Chapitre I. Nous proposons de donner à ces dernières équations (3) le nom de *système canonique généralisé des équations aux différentielles totales*. En y posant $m=1$ on obtient les équations différentielles ordinaires, étudiées par Jacobi dans ses Mémoires posthumes ([1]). Nous allons continuer à développer notre théorie en démontrant les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soit*

$$z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}) \tag{4}$$

une intégrale complète des équations (1), $b, b_1, \ldots, b_{n-m}$ *étant des constantes arbitraires. Le déterminant fonctionnel*

$$D\left(\frac{V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+1}}, \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+2}}, \ldots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m}}\right) \tag{5}$$

ne s'annulant pas, les équations

$$\left\{\begin{array}{l} z = V, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \dfrac{\partial V}{\partial b} \\ \qquad\qquad i = 1, 2, \ldots, n-m, \end{array}\right. \tag{6}$$

donnent l'intégrale générale du système (3), a_i *étant de nouvelles constantes arbitraires.*

Il est d'abord nécessaire de remarquer que les équations (6) sont résolubles par rapport aux variables z, p_{m+i}, x_{m+i}. Évidemment les $n-m+1$ premières équations donnent les valeurs z, p_{m+i}; quant aux $n-m$ dernières équations (6), en leur vertu le jacobien des

---

([1]) *Gesammelte Werke*, Bd. V, S. 217, 397.

fonctions

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} - a_i \frac{\partial V}{\partial b}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-m$$

par rapport aux x_{m+i} devient égal au quotient du déterminant (5) et de la dérivée $\frac{\partial V}{\partial b}$. Donc, les équations qu'on obtient en égalant les dernières fonctions à zéro sont résolubles par rapport aux x_{m+i}.

Cela posé, les valeurs trouvées z, x_{m+i}, p_{m+i} satisfont identiquement aux équations (6). Il viendra donc

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \frac{\partial V}{\partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\, \partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+i}\, \partial x_{m+\nu}} \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial x_k} - a_i \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x_k} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b_i\, \partial x_{m+\nu}} - a_i \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x_{m+\nu}} \right) \frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} = 0,$$

$$k = 1, 2, \ldots, m,$$

l'indice i prenant toutes les valeurs de 1 à $n-m$.

D'autre part, en substituant dans les équations (1) leur intégrale (4), on a

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial x_{m+i}} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial x_{m+i}} + \frac{d H_k}{d x_{m+i}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial b} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b} + \frac{\partial H_k}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_k\, \partial b_i} + \sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial H_k}{\partial p_{m+\nu}} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{m+\nu}\, \partial b_i} + \frac{\partial H_k}{\partial z} \frac{\partial V}{\partial b_i} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

l'indice k prenant les valeurs de 1 à m.

Il est d'ailleurs aisé d'en tirer de nouvelles identités

$$\frac{\partial z}{\partial x_k} = \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu}\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \mathrm{H}_k,$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m} \frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_{m+i}\,\partial x_{m+\nu}}\left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}}\right) = \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} + \frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n-m}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_{m+\nu}\,\partial b_i} - a_i\frac{\partial^2 \mathrm{V}}{\partial x_{m+\nu}\,\partial b}\right)\left(\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}}\right) = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

ayant lieu pour toutes les valeurs de l'indice k de 1 à m.

On vient de voir que le déterminant, formé par les coefficients des $n-m$ dernières équations linéaires par rapport aux $n-m$ quantités

$$\frac{\partial x_{m+\nu}}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n-m,$$

ne s'annule pas. Par conséquent on obtient des identités

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k} &= \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+i}}, \\ \frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k} &= -\frac{d\mathrm{H}_k}{dx_{m+i}}, \\ \frac{\partial z}{\partial x_k} &= \sum_{\nu=1}^{n-m} p_{m+\nu}\frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial p_{m+\nu}} - \mathrm{H}_k, \end{aligned}\right.$$

où les indices i, k prennent les valeurs mentionnées de 1 à $n-m$ et de 1 à m.

Notre théorème est donc démontré, car les équations (3) sont identiquement vérifiées par les fonctions z, x_{m+i}, p_{m+i} tirées des équations (6).

Théorème II. — *Soient les équations*

$$(8) \qquad z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(9) \qquad x_{m+i} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, \ldots, b_{n-m}),$$

$$(10) \qquad p_{m+i} = \mathrm{F}_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, a_1, a_2, \ldots, a_{n-m}, b, b_1, \ldots, b_{n-m}),$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

l'intégrale générale du système (3), *les constantes arbitraires* a_i, b_i, b *représentant les valeurs initiales de*

$$x_{m+i},\ p_{m+i},\quad z-\sum_{i=1}^{n-m} x_{m+i}\, p_{m+i}.$$

En éliminant de la formule (8) *les constantes* a_i, *en vertu des équations* (9), *on obtient une intégrale complète du système* (1).

Le théorème énoncé est démontré dans le Chapitre I. Or, je veux en donner une nouvelle démonstration, représentant une généralisation de celle du Chapitre précédent.

Posons

$$U_k=\sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}-H_k.$$

Les équations (3) et les conditions (7) sont identiquement satisfaites, en vertu des relations (8), (9), (10).

Cela posé, en conservant les notions du Chap. II, il viendra

$$\delta\, dz=\sum_{k=1}^{m}\delta U_k\, dx_k,$$

$$\delta U_k=\sum_{i=1}^{n-m}\left(p_{m+i}\,\delta\frac{\partial H_k}{\partial p_{m+i}}-\frac{\partial H_k}{\partial x_{m+i}}\delta x_{m+i}\right)-\frac{\partial H_k}{\partial z}\delta z.$$

La dernière expression prend aisément, en vertu des identités (7), la forme suivante :

$$\begin{aligned}\delta U_k&=\sum_{i=1}^{n-m}\left[p_{m+i}\,\delta\frac{\partial x_{m+i}}{\partial x_k}+\left(\frac{\partial p_{m+i}}{\partial x_k}+\frac{\partial H_k}{\partial z}p_{m+i}\right)\delta x_{m+i}\right]-\frac{\partial H_k}{\partial z}\delta z\\ &=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right)-\frac{\partial H_k}{\partial z}\left(\delta z-\sum_{i=1}^{n-m}p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right).\end{aligned}$$

Quant à la première formule, comme on a

$$\delta\, dz = d\,\delta z,$$

elle devient

$$d\left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right) + \left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\,\delta x_{m+i}\right)\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\,dx_k = 0$$

D'ailleurs, *en vertu des conditions* (2), *la formule*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathrm{H}_k}{\partial z}\,dx_k$$

est une différentielle exacte $d\mathrm{W}$.

Il vient, par conséquent,

$$d\left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\delta x_{m+i}\right) + \left(\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\delta x_{m+i}\right) d\mathrm{W} = 0.$$

Donc, en intégrant cette dernière équation, ayant par hypothèse

$$z_0 = b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i b_i,$$

nous avons

$$\delta z - \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i}\delta x_{m+i} = \left(\delta b + \sum_{i=1}^{n-m} a_i \delta b_i\right) e^{-\int_{\mathrm{W}_0}^{\mathrm{W}} d\mathrm{W}},$$

W_0 étant la valeur de W pour les valeurs initiales des variables x_1, x_2, …, x_m. Comme on a

$$dz = \sum_{i=1}^{n-m} p_{m+i} dx_{m+i} - \sum_{k=1}^{m} \mathrm{H}_k dx_k,$$

la valeur Δz devient

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n-m} \left(p_{m+i}\Delta x_{m+i} + e^{-\int_{\mathrm{W}_0}^{\mathrm{W}} d\mathrm{W}} a_i \delta b_i\right) + e^{-\int_{\mathrm{W}_0}^{\mathrm{W}} d\mathrm{W}}\,\delta b - \sum_{k=1}^{m} \mathrm{H}_k dx_k.$$

Les équations (9) étant résolubles par rapport aux a_i, il est aisé de les éliminer de l'équation (8). Soit

$$(11) \qquad z = V(x_1, x_2, \ldots, x_n, b, b_1, b_2, \ldots, b_{n-m})$$

le résultat obtenu. Évidemment, la fonction V, en y substituant les fonctions (9) x_{m+i}, devient identique à la valeur (8) de z. On a donc

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n-m} \left(\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} \Delta x_{m+i} + \frac{\partial V}{\partial b_i} \delta b \right) + \sum_{k=1}^{n-m} \frac{\partial V}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial V}{\partial b} \delta b.$$

La comparaison des deux valeurs obtenues de la différentielle Δz nous donne les identités suivantes :

$$\frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i e^{-\int_{W_0}^{W} dW}, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = e^{-\int_{W_0}^{W} dW},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} + H_k = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Il s'ensuit que le système

$$z = V, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_{m+i}} = p_{m+i}, \qquad \frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i \frac{\partial V}{\partial b},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-m,$$

représente les équations intégrales du système (3), écrites sous une forme nouvelle.

Quant à la fonction V, définie par l'équation (11), elle est une intégrale complète des équations (1). On voit de plus qu'elle admet les mêmes propriétés caractéristiques que la *fonction principale*, introduite dans le Chapitre précédent. Il serait aisé d'aller encore plus loin, en étudiant cette fonction dans les cas où les équations (8) sont résolubles, soit par rapport à quelques-unes des constantes b_i, soit par rapport à toutes. Si l'on a dans ce dernier cas $m = 1$, le système (1) ne contenant qu'une seule équation, on obtient les théorèmes démontrés par Jacobi dans les Mémoires mentionnés plus haut. Mais c'est là que je terminerai mes recherches sur cette fonction, la théorie étudiée étant, à mon avis, suffisamment élucidée.

Il ne me reste qu'à dire quelques mots sur le problème d'intégration des systèmes canoniques généralisés d'équations aux différentielles totales. On parvient aisément à établir les théorèmes suivants :

1° *Si l'on connaît* $n-m+1$ *intégrales du système* (3) *distinctes par rapport aux* p *et de sorte qu'en les joignant aux équations* (1) *on en tire les valeurs* z, p *en fonctions des variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *vérifiant les conditions* $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, *on obtient les autres* $n-m$ *intégrales cherchées rien que par des différentiations.*

2° *Si l'on connaît* v *intégrales du système* (3) *distinctes par rapport aux* p, v *étant moindre que* $n-m+1$, *de sorte, qu'ensemble avec les équations* (1), *elles forment un système complet, l'ordre du système* (3) *s'abaisse de* $2v$ *unités.*

3° *Le problème d'intégration du système* (3) *n'exige que* $n-m+1$ *opérations d'ordre* $2n-2m+1$, $2n-2m-1$, $\ldots$, 3, 1.

Leur vérité devient évidente, quand on poursuit l'ordre d'idées développé plus haut et n'exigeant que des calculs tout à fait élémentaires.