JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Sur les fonctions abéliennes singulières (premier mémoire)

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 5 (1899), p. 233-350.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1899_5_5__233_0>

Sur les fonctions abéliennes singulières;

(Premier Mémoire)

PAR M. G. HUMBERT.

Considérons un système de fonctions abéliennes, à deux variables u et v, ayant pour périodes normales

$$\begin{array}{lcccc} u: & 1, & 0, & g, & h, \\ v: & 0, & 1, & h, & g'; \end{array}$$

nous dirons que ces périodes vérifient une *relation de forme singulière* ou *relation singulière*, si elles sont liées par l'équation

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0, \tag{1}$$

où A, B, C, D, E sont des entiers, qu'on peut toujours supposer, sans nuire à la généralité, n'avoir aucun diviseur commun.

Les fonctions abéliennes dont les périodes vérifient une ou plusieurs relations singulières, et que nous appellerons *fonctions abéliennes singulières,* jouissent de propriétés importantes; on peut leur rattacher des *fonctions intermédiaires singulières* qui ne sont pas des fonctions thêta aux mêmes périodes. De plus, les fonctions abéliennes singulières admettent des *transformations* qui n'existent pas dans le cas général, et ce sont enfin les seules qui soient susceptibles d'une *multiplication singulière,* extension de la multiplication complexe des fonctions elliptiques.

Le présent Mémoire est consacré à quatre questions principales qui correspondent à ses quatre parties :

1° La réduction, au moyen de transformations du premier ordre, d'une relation singulière; on y verra apparaître un invariant entier, qui joue un rôle capital;

2° et 3° L'étude des *fonctions* intermédiaires singulières et des *courbes* qui leur correspondent sur la surface de Kummer;

4° La formation de l'équation *algébrique* qui lie les modules d'une fonction abélienne dont les périodes vérifient une relation singulière.

Nous réserverons, pour un second Mémoire, l'étude des transformations singulières et celle des multiplications complexes.

Il va sans dire que toutes ces théories s'étendent aux fonctions abéliennes d'un nombre quelconque de variables; nous aurons à revenir sur ce sujet général.

PREMIÈRE PARTIE.

Invariant d'une relation singulière.

1. Soit la relation singulière

$$(1)\qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0.$$

Faisons subir aux périodes une transformation d'ordre quelconque k; soient G, H, G′ les périodes nouvelles qui correspondent à g, h, g'; si l'on désigne par $(ab)_{ij}$ la quantité $a_i b_j - a_j b_i$, on a entre les périodes les relations d'Hermite [1]

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
g &= \frac{(db)_{01} + (db)_{31}G + 2(db)_{03}H + (db)_{02}G' + (db)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + (ab)_{31}G + 2(ab)_{03}H + (ab)_{02}G' + (ab)_{23}(H^2 - GG')},\\
h &= \frac{(ad)_{01} + (ad)_{31}G + [2(ad)_{03} - k]H + (ad)_{02}G' + (ad)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\
g' &= \frac{(ac)_{01} + (ac)_{31}G + 2(ac)_{03}H + (ac)_{02}G' + (ac)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},\\
h^2 - gg' &= \frac{(cd)_{01} + (cd)_{31}G + 2(cd)_{03}H + (cd)_{02}G' + (cd)_{23}(H^2 - GG')}{(ab)_{01} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots},
\end{aligned}
\right.
$$

les dénominateurs sont les mêmes dans les quatre formules; les a_i, b_i, c_i, d_i sont seize entiers vérifiant les relations de la transformation d'ordre k :

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(ad)_{01} + (bc)_{01} = (ad)_{02} + (bc)_{02}\\
&\qquad\qquad = (ad)_{13} + (bc)_{13} = (ad)_{23} + (bc)_{23} = 0,\\
&(ad)_{03} + (bc)_{03} = (ad)_{12} + (bc)_{12} = k.
\end{aligned}
\right.
$$

On peut remplacer ces relations par les suivantes qui leur sont équivalentes d'après M. Hermite :

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(ab)_{03} + (ab)_{12} = (ac)_{03} + (ac)_{12}\\
&\qquad\qquad = (bd)_{03} + (bd)_{12} = (cd)_{03} + (cd)_{12} = 0,\\
&(ad)_{03} + (ad)_{12} = (bc)_{03} + (bc)_{12} = k.
\end{aligned}
\right.
$$

Inversement, des équations (2), on peut tirer G, H, G′, $H^2 - GG'$ en fonction de g, h, g' :

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&G = \frac{(cd)_{02} + (ac)_{02}g + 2(bc)_{02}h + (db)_{02}g' + (ab)_{02}(h^2 - gg')}{(cd)_{23} + (ac)_{23}g + 2(bc)_{23}h + (db)_{23}g' + (ab)_{23}(h^2 - gg')},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Il résulte de la forme des équations (2) que toute relation singulière $Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$, entre g, h, g', se

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XL; 1855.

transforme en une relation singulière entre G, H, G',

$$(6)\qquad A_1 G + B_1 H + C_1 G' + D_1(H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

où :

$$(7)\quad \begin{cases} A_1 = A(db)_{31} + B(ad)_{31} + C(ac)_{31} + D(cd)_{31} + E(ab)_{31}, \\ B_1 = 2A(db)_{03} + B[2(ad)_{03} - k] + 2C(ac)_{03} + 2D(cd)_{03} + 2E(ab)_{03}, \\ C_1 = A(db)_{02} + B(ad)_{02} + C(ac)_{02} + D(cd)_{02} + E(ab)_{02}, \\ D_1 = A(db)_{23} + B(ad)_{23} + C(ac)_{23} + D(cd)_{23} + E(ab)_{23}, \\ E_1 = A(db)_{01} + B(ad)_{01} + C(ac)_{01} + D(cd)_{01} + E(ab)_{01}. \end{cases}$$

2. Cela posé, on vérifie immédiatement, en se servant de ces expressions et des relations (3) et (4) entre les a_i, b_i, c_i, d_i, l'identité fondamentale

$$(8)\qquad B_1^2 - 4A_1C_1 - 4D_1E_1 = k^2(B^2 - 4AC - 4DE).$$

Par exemple, dans le premier membre, où A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont remplacés par leurs valeurs (7), le coefficient de $4A^2$ est

$$(db)_{03}^2 - (db)_{31}(db)_{02} - (db)_{23}(db)_{01};$$

on peut l'écrire, puisque, d'après (4), $(db)_{03} + (db)_{12} = 0$:

$$-(db)_{03}(db)_{12} - (db)_{31}(db)_{02} - (db)_{23}(db)_{01},$$

ce qui est nul identiquement. De même, le coefficient de $4AB$ dans le premier membre de (8) est

$$(db)_{03}[2(ad)_{03} - k] - (db)_{02}(ad)_{31} - (db)_{31}(ad)_{02} \\ - (db)_{23}(ad)_{01} - (db)_{01}(ad)_{23},$$

ce qu'on peut écrire, en tenant compte de (3) et de (4),

$$-(db)_{03}(ad)_{12} - (db)_{12}(ad)_{03} - (db)_{02}(ad)_{31} - (db)_{31}(ad)_{02} \\ - (db)_{23}(ad)_{01} - (db)_{01}(ad)_{23},$$

quantité nulle identiquement.

Calculons de même le coefficient de B^2 dans le premier membre de (8); c'est, en remplaçant $2(ad)_{03}-k$ par $(ad)_{03}-(ad)_{12}$:

$$[(ad)_{03}-(ad)_{12}]^2-4(ad)_{31}(ad)_{02}-4(ad)_{23}(ad)_{01},$$

ou :

$$[(ad)_{03}+(ad)_{12}]^2,$$

c'est-à-dire, d'après (4), k^2, comme dans le second membre de (8). On vérifierait d'une manière toute pareille les autres termes de la relation (8), qui se trouve ainsi démontrée.

Observons maintenant que A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, obtenus sous la forme (7), peuvent avoir un plus grand diviseur commun ρ, de sorte que, si $A_1=\rho A'$, $B_1=\rho B'$, ..., $E_1=\rho E'$, l'identité (8) s'écrit

$$(9)\qquad \rho^2(B'^2-4A'C'-4D'E')=k^2(B^2-4AC-4DE).$$

Inversement, si l'on transforme la relation

$$A'G+B'H+C'G'+D'(H^2-GG')+E'=0,$$

en y remplaçant G, H, G', H^2-GG' par leurs valeurs (5), en g, h, g', h^2-gg', on retombe évidemment sur la relation singulière (1), dont on est parti, mais à un facteur entier près σ, de sorte qu'on obtient l'identité, analogue à (9),

$$(10)\qquad \sigma^2(B^2-4AC-4DE)=k^2(B'^2-4A'C'-4D'E').$$

Bornons-nous, pour le moment, au cas d'une *transformation du premier ordre* ($k=1$); les identités (9) et (10) donnent immédiatement $\rho^2\sigma^2=1$, c'est-à-dire $\rho^2=\sigma^2=1$, et par suite

$$B'^2-4A'C'-4D'E'=B^2-4AC-4DE,$$

c'est-à-dire que la quantité $B^2-4AC-4DE$ reste invariable par les transformations du premier ordre. Ainsi :

3. *Une transformation quelconque du premier ordre des périodes change la relation singulière*

$$Ag+Bh+Cg'+D(h^2-gg')+E=0,$$

où A, B, C, D, E *sont des entiers sans diviseur commun, en une relation singulière analogue par rapport aux nouvelles périodes; dans cette opération, la quantité*

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

demeure invariable.

On appellera cette quantité Δ l'*invariant* de la relation singulière; c'est un entier de la forme $4N$ ou $4N+1$, selon que B est pair ou impair. Il résulte de là que la *parité* du coefficient B ne varie pas par les transformations du premier ordre.

Réduction d'une relation singulière à la forme canonique.

4. On peut, par une série de transformations du premier ordre, ramener une relation singulière à une forme canonique extrêmement simple, ne dépendant que de l'invariant.

5. Je dis d'abord qu'on peut faire disparaître le terme en $h^2 - gg'$. Effectuons, en effet, une transformation du premier ordre pour laquelle on ait

$$a_1 = a_2 = b_0 = b_3 = c_0 = c_3 = d_1 = d_2 = d_3 = 0$$
$$a_3 = 1; \qquad d_0 = -1.$$

Les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

(11) $$b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1,$$

les autres étant identiquement satisfaites.

La relation

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$$

devient alors, si l'on remplace $g, h, g', h^2 - gg'$ par leurs valeurs (2), une relation de même forme en G, H, G', où le coefficient de $H^2 - GG'$

et le terme indépendant ont pour valeurs

$$(12)\qquad \begin{cases} D_1 = -Cc_2 - Eb_2, \\ E_1 = -Ab_1 + Dc_1 + a_0(Cc_1 + Eb_1). \end{cases}$$

Il est aisé de faire disparaître D_1 : soit δ le plus grand commun diviseur de C et de E; on prendra

$$c_2 = \frac{E}{\delta}; \qquad b_2 = -\frac{C}{\delta};$$

b_2 et c_2 seront premiers entre eux, de sorte qu'on pourra toujours trouver des entiers b_1 et c_1 vérifiant (11); quant à a_0 il restera arbitraire.

6. Je dis, en second lieu, qu'on peut faire disparaître le terme constant.

Supposons, en effet, la relation singulière privée de terme en $h^2 - gg'$:

$$Ag + Bh + Cg' + E = 0;$$

effectuons la transformation du premier ordre qui n'altère pas h et g', et qui remplace g par $g + \theta$, θ étant un entier quelconque; la relation singulière devient

$$Ag + Bh + Cg' + E' = 0, \qquad E' = E + A\theta.$$

Je dis qu'on peut disposer de θ de manière que le plus grand commun diviseur de C et de E' divise A.

Soient en effet :

δ_1 le plus grand commun diviseur de A, C, E;
$\delta_1\delta_2$ le plus grand commun diviseur de A et E;
$\frac{C}{\delta_1}$ sera premier avec δ_2.

D'après le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique, on pourra choisir θ de manière que

$$\frac{E}{\delta_1\delta_2} + \theta\frac{A}{\delta_1\delta_2}$$

soit un nombre premier p, supérieur à C : le premier terme et la raison de la progression sont en effet premiers entre eux; on aura alors

$$E' = E + A\theta = \delta_1\delta_2 p.$$

Le plus grand commun diviseur de E' et de C est alors δ_1, puisque $\frac{C}{\delta_1}$ est premier avec $\delta_2 p$, ce qui démontre la proposition énoncée.

Ainsi la relation singulière peut être supposée de la forme

$$(13)\qquad Ag + Bh + Cg' + E = 0,$$

le plus grand commun diviseur, δ, de C et E divisant A.

Effectuons maintenant la même transformation du premier ordre qu'au n° 5, la relation (13) devient

$$A_1G + B_1H + C_1G' + D_1(H^2 - GG') + E_1 = 0,$$

avec (12) :

$$D_1 = -Cc_2 - Eb_2, \qquad E_1 = -Ab_1 + a_0(Cc_1 + Eb_1),$$

et je dis qu'on peut annuler D_1 et E_1.

Pour annuler D_1 prenons

$$c_2 = \frac{E}{\delta}, \qquad b_2 = -\frac{C}{\delta};$$

la relation (11) devient

$$b_1\frac{E}{\delta} + c_1\frac{C}{\delta} = 1,$$

et elle a des solutions en b_1, c_1, puisque $\frac{E}{\delta}$ et $\frac{C}{\delta}$ sont premiers entre eux. Soit b_1, c_1 une solution quelconque; on annulera E_1 si l'on peut choisir a_0 de manière que

$$a_0(Cc_1 + Eb_1) = Ab_1,$$

c'est-à-dire

$$a_0\delta = Ab_1;$$

cela est possible, puisque δ divise A, par hypothèse.

Ainsi une transformation convenable du premier ordre permet de ramener la relation singulière générale à la forme

$$(14)\qquad Ag + Bh + Cg' = 0.$$

7. On peut encore pousser plus loin la réduction en employant les transformations du premier ordre des deux types suivants :

8. *Premier type.* — Prenons

$$a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = c_0 = c_1 = d_0 = d_1 = 0.$$

Il résulte des formules (7) que la relation (14) garde la même forme en G, H, G'; c'est-à-dire qu'il ne s'introduit ni terme en $H^2 - GG'$, ni terme constant : les quantités $(db)_{01}$, $(ad)_{01}$, $(ac)_{01}$, $(db)_{23}$, $(ad)_{23}$, $(ac)_{23}$ sont en effet toutes nulles.

Prenons en outre

$$c_2 = a_0, \qquad c_3 = -a_1, \qquad d_2 = -b_0, \qquad d_3 = b_1;$$

les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

$$(15)\qquad a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1,$$

et l'on a, pour exprimer g, h, g' en G, H, G' :

$$\begin{aligned} g &= b_1^2 G - 2b_0 b_1 H + b_0^2 G',\\ h &= -a_1 b_1 G + (a_0 b_1 + a_1 b_0) H - a_0 b_0 G',\\ g' &= a_1^2 G - 2a_0 a_1 H + a_0^2 G'. \end{aligned}$$

La relation singulière (14) devient alors

$$A_1 G + B_1 H + C_1 G' = 0,$$

étant posé

$$\begin{aligned} A_1 &= A b_1^2 - B a_1 b_1 + C a_1^2, \\ B_1 &= -2 A b_0 b_1 + B(a_0 b_1 + a_1 b_0) - 2 C a_0 a_1, \\ C_1 &= A b_0^2 - B a_0 b_0 + C a_0^2. \end{aligned}$$

Les coefficients A_1, $-B_1$, C_1 sont précisément ceux qu'on obtient en effectuant sur la forme quadratique

$$A x^2 - B xy + C y^2$$

la substitution de déterminant 1 [à cause de (15)]

$$x = b_1 x' + b_0 y', \qquad y = a_1 x' + a_0 y'.$$

Ainsi, en désignant par $(A_1, -B_1, C_1)$ une forme quadratique quelconque équivalente à la forme $(A, -B, C)$ la relation singulière $Ag + Bh + Cg' = 0$ peut se ramener, par une transformation du premier ordre, à

$$A_1 g + B_1 h + C_1 g' = 0.$$

9. *Second type.* — Prenons maintenant

$$a_1 = a_2 = b_0 = b_3 = c_0 = c_3 = d_1 = d_2 = 0,$$
$$a_0 = d_0 = 1.$$

Les relations (3) entre les a_i, b_i, c_i, d_i se réduisent à

$$(16) \qquad \begin{cases} d_3 - a_3 = 1, \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 = 1, \end{cases}$$

et la relation singulière $Ag + Bh + Cg' = 0$ devient

$$A G + B' H + C' G' + D'(H^2 - GG') + E' = 0,$$

étant posé :

$$\begin{aligned}
A' &= A d_3 b_1 + C a_3 c_1, \\
B' &= B, \\
C' &= A b_2 + C c_2, \\
D' &= -A d_3 b_2 - C a_3 c_2, \\
E' &= A b_1 + C c_1.
\end{aligned}$$

Annulons D′ et E′ : à cet effet, désignons par δ le plus grand commun diviseur de A et de C, de sorte que

$$A = \delta\alpha, \qquad C = \delta\gamma,$$

α et γ étant premiers entre eux.

Pour annuler E′, posons

$$b_1 = \gamma, \qquad c_1 = -\alpha;$$

annulons D′ :

$$(17) \qquad \alpha d_3 b_2 + \gamma a_3 c_2 = 0.$$

Les formules (16) s'écrivent alors

$$(18) \qquad d_3 = 1 + a_3, \qquad \gamma c_2 + \alpha b_2 = 1.$$

Soit (b_2, c_2) une solution quelconque de la dernière équation (il en existe, puisque α et γ sont premiers entre eux); la relation (17) donne, en tenant compte de (18) :

$$a_3 = -\alpha b_2;$$

d'où

$$d_3 = 1 + a_3 = 1 - \alpha b_2,$$

et tous les nombres a_i, b_i, c_i, d_i sont déterminés.

On a alors

$$\begin{aligned}
A' &= \delta\alpha\gamma(1 - \alpha b_2) + \delta\alpha\gamma\,\alpha b_2 = \delta\alpha\gamma, \\
B' &= B, \\
C' &= \delta\alpha\, b_2 + \delta\gamma\, c_2 = \delta(\gamma c_2 + \alpha b_2) = \delta;
\end{aligned}$$

ce qui montre que l'on peut faire en sorte, par une transformation du premier ordre, que C' se réduise au plus grand commun diviseur de A et de C et divise A'.

10. Cela posé, la relation singulière étant ainsi ramenée à la forme

$$C\alpha g + Bh + Cg' = 0,$$

on peut supposer B et C sans diviseur commun. Effectuons maintenant une des transformations du premier type pour laquelle on ait

$$a_0 = b_1 = a_1 = 1, \qquad b_0 = 0;$$

la relation singulière ci-dessus devient, par les formules du n° **8** :

$$(C\alpha - B + C)G + (B - 2C)H + CG' = 0.$$

Le plus grand commun diviseur des coefficients de G et G', c'est-à-dire de $C(\alpha - 1) - B$ et de C, est celui de B et de C, c'est-à-dire l'*unité;* on pourra donc, par une transformation du second type, ramener la relation singulière précédente à une forme analogue, où le coefficient de g' sera l'*unité*,

$$Ag + Bh + g' = 0. \tag{19}$$

11. Distinguons maintenant deux cas selon que B est pair ou impair (on a vu au n° **5** que la parité de B ne changeait pas dans les transformations du premier ordre).

1° Si $B = 2B'$, la forme quadratique

$$Ax^2 - 2B'xy + y^2$$

peut s'écrire

$$(y - B'x)^2 + (A - B'^2)x^2;$$

elle est donc équivalente à la forme

$$(A - B'^2)X^2 + Y^2,$$

où il n'y a pas de terme en XY. Par suite, d'après le n° **8**, la relation singulière (19) peut, par une transformation du premier type, se ramener à la forme

$$(19\ bis) \qquad A_1 g + g' = 0.$$

2° Si $B = 2B' + 1$, la forme

$$Ax^2 - (2B' + 1)xy + y^2$$

est équivalente à la forme

$$(A - B'^2 - B')X^2 - XY + Y^2,$$

car elle s'écrit

$$(y - B'x)^2 - (y - B'x)x + (A - B'^2 - B')x^2;$$

donc la relation singulière (19) peut se ramener à la forme

$$(19\ ter) \qquad A'_1 g + h + g' = 0.$$

Observons maintenant que la quantité $\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$ est un invariant; si donc Δ est la valeur de cet invariant pour la relation singulière générale dont on est parti; on aura

$$-4A_1 = \Delta, \qquad \text{si B est pair,}$$
$$1 - 4A'_1 = \Delta, \qquad \text{si B est impair;}$$

ce qui détermine A_1 et A'_1 en fonction de Δ. Voici donc le théorème final :

12. Théorème. — *Soit une relation singulière quelconque*

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0:$$

si son invariant $\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$ *est divisible par* 4, *c'est-à-dire si* B *est pair, on peut, par des transformations du premier ordre des périodes, la ramener au type*

$$-\frac{\Delta}{4}g + g' = 0;$$

et si Δ est de la forme $4N+1$, c'est-à-dire si B est impair, au type

$$-\frac{\Delta-1}{4}g+h+g'=0.$$

13. *Corollaire.* — Il résulte de là que deux relations singulières quelconques, de même invariant, sont *équivalentes,* c'est-à-dire peuvent-être ramenées l'une à l'autre par une transformation du premier ordre : l'une et l'autre en effet peuvent être ramenées à un seul et même type, où ne figure que l'invariant. Ainsi, dans le sens qui vient d'être attribué à l'équivalence,

Toutes les relations singulières de même invariant sont équivalentes.

Propriétés de l'invariant.

14. THÉORÈME. — *L'invariant est essentiellement positif.*

Prenons, en effet, la relation singulière sous la forme

$$\alpha g+\beta h+\gamma g'=0, \tag{20}$$

on a

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma.$$

Pour qu'il existe des fonctions abéliennes de u, v ayant pour couples de périodes $1, 0$; $0, 1$; g, h; h, g', il faut (et il suffit), comme on sait, qu'en désignant par g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g' $(g=g_2+ig_1, \ldots)$, on ait

$$h_1^2-g_1g'_1<0.$$

On a entre g_1, h_1, g'_1 la relation, déduite de (20) :

$$\alpha g_1+\beta h_1+\gamma g'_1=0,$$

et si l'on tire h_1 de cette équation pour le porter dans l'inégalité précédente, celle-ci devient

$$\alpha^2 g_1^2+(2\alpha\gamma-\beta^2)g_1g'_1+\gamma^2 g_1'^2<0.$$

Pour qu'il puisse exister des valeurs réelles de g_1, g'_1 vérifiant l'inégalité, il faut évidemment que le trinôme en g_1 et g'_1 ait ses racines réelles et distinctes, c'est-à-dire que

$$(2\alpha\gamma - \beta^2)^2 - 4\alpha^2\gamma^2 > 0 \quad \text{ou} \quad \beta^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) > 0,$$

c'est-à-dire $\Delta > 0$, ce qui démontre le théorème.

15. Théorème. — *Si l'invariant d'une relation singulière est carré parfait, une intégrale abélienne de première espèce correspondant aux périodes considérées est réductible à une intégrale elliptique; et réciproquement.*

En effet, pour qu'une intégrale de première espèce se réduise à une intégrale elliptique, il faut et il suffit que les périodes de $u + \lambda v$ se réduisent à deux, λ désignant une constante convenable. Les périodes simultanées de u, v étant $1, 0$; $0, 1$; g, h; h, g', les périodes de $u + \lambda v$ sont

$$1, \quad \lambda, \quad g + \lambda h, \quad h + \lambda g';$$

si donc ω et ω' sont les périodes elliptiques, il faut et il suffit que l'on ait

$$(21)\qquad \left\{ \begin{aligned} 1 &= m_0\omega + n_0\omega', \\ \lambda &= m_1\omega + n_1\omega', \\ g + \lambda h &= m_2\omega + n_2\omega', \\ h + \lambda g' &= m_3\omega + n_3\omega'; \end{aligned} \right.$$

les m_i, n_i étant des entiers. On en conclut, en éliminant λ, ω et ω', la relation de *forme singulière*, entre g, h, g',

$$(22)\qquad \left\{ \begin{aligned} 0 = {} & (nm)_{03}g + [(nm)_{13} - (nm)_{02}]h \\ & - (nm)_{12}g' + (nm)_{01}(h^2 - gg') - (nm)_{23}. \end{aligned} \right.$$

Je dis que l'invariant correspondant est un carré parfait, ce qui revient à établir que l'expression

$$[(nm)_{13} - (nm)_{02}]^2 + 4(nm)_{03}(nm)_{12} + 4(nm)_{01}(nm)_{23}$$

est un carré : c'est en effet le carré de $(nm)_{13} + (nm)_{02}$.

Ainsi, *dans le cas elliptique,* il existe entre les périodes une relation singulière dont l'invariant est un carré; *réciproquement,* si l'invariant d'une relation singulière est le carré n^2, cette relation est équivalente à la relation $nh - 1 = 0$, qui a même invariant : le tableau des périodes peut donc être ramené, par une transformation du premier ordre, à

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & \frac{1}{n}, \\ 0, & 1, & \frac{1}{n}, & g', \end{matrix}$$

ce qui prouve bien qu'on est dans le cas elliptique; et il y a deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques.

16. *Remarque I.* — Les considérations précédentes fournissent une nouvelle démonstration du théorème de Weierstrass-Picard ([1]) *sur la réduction des intégrales hyperelliptiques de genre deux aux intégrales elliptiques;* elles montrent également, ainsi que M. Picard l'a vérifié directement ([2]), que la forme de Weierstrass

$$h = \frac{m}{n} \qquad \text{ou} \qquad nh - m = 0$$

est équivalente à la forme $nh - 1 = 0$, car l'invariant est n^2 dans les deux cas.

17. *Remarque II.* — L'invariant Δ étant positif et de l'une des formes $4N$ ou $4N + 1$ a pour plus petite valeur 1 : ce cas ne correspond pas à de véritables fonctions abéliennes, puisque le tableau des périodes peut se ramener, en faisant $n = 1$, à

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & 1, \\ 0, & 1, & 1, & g'; \end{matrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & 0, \\ 0, & 1, & 0, & g'; \end{matrix}$$

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XI, p. 43.

([2]) *Ibid.,* t. XII, p. 153.

les fonctions hyperelliptiques correspondantes sont alors des combinaisons rationnelles *quelconques* de fonctions séparément elliptiques par rapport aux variables u et v.

18. *Intégrales réductibles.* — Lorsque Δ est un carré parfait, $\Delta = n^2$, on obtient les deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques par la formule $u + \lambda v$, où λ est choisi de manière que les périodes de $u + \lambda v$ se réduisent à deux : ces deux périodes, ω et ω', et la quantité λ vérifient les relations (21), d'où l'on a déduit la relation singulière (22).

Soit donc $Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0$ la relation entre les périodes; en écrivant qu'elle est identique à (22), on a

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} (nm)_{03} &= \rho A,\\ (nm)_{13} - (nm)_{02} &= \rho B,\\ -(nm)_{12} &= \rho C,\\ (nm)_{01} &= \rho D,\\ -(nm)_{23} &= \rho E, \end{aligned}\right.$$

ρ étant un entier. Éliminant ω et ω' entre les équations (21) on trouve

$$\begin{aligned} (nm)_{12} - \lambda(nm)_{02} + (g + \lambda h)\,(nm)_{01} &= 0,\\ (nm)_{13} - \lambda(nm)_{03} + (h + \lambda g')(nm)_{01} &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions la seconde de ces relations par λ et ajoutons à la première, il vient, en tenant compte de (23),

$$-\rho C + \lambda\rho B + (g + \lambda h)\rho D - \lambda^2\rho A + \lambda(h + \lambda g')\rho D = 0,$$

ou, en ordonnant par rapport à λ,

$$\lambda^2(Dg' - A) + \lambda(2Dh + B) + Dg - C = 0,$$

ce qui donne pour λ les deux valeurs

$$\lambda = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{4D^2(h^2 - gg') + 4DBh + 4DAg + 4DCg' + B^2 - 4AC}}{2(Dg' - A)}.$$

En vertu de la relation $Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') = -E$, la quantité sous le radical est $B^2 - 4AC - 4DE$, c'est-à-dire Δ; donc

$$\lambda = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{\Delta}}{2(Dg' - A)}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda} = \frac{-2Dh - B \pm \sqrt{\Delta}}{2(Dg - C)},$$

ce qui donne les deux valeurs cherchées de λ.

19. *Extension d'un théorème de M. Poincaré.* — M. Poincaré a montré que, s'il existe plus de deux intégrales réductibles aux intégrales elliptiques, il en existe une infinité; ce qui, dans notre langage, s'énonce ainsi :

S'il existe entre les périodes deux relations singulières pour chacune *desquelles l'invariant soit carré parfait, il existe une infinité de telles relations* ([1]).

Plus généralement, nous allons établir que :

*S'il existe entre les périodes deux relations singulières dont l'*une *ait pour invariant un carré parfait, il y a une infinité de telles relations.*

Soient, en effet, les relations

$$(24) \qquad Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

$$(25) \qquad A_1 g + B_1 h + C_1 g' + D_1(h^2 - gg') + E_1 = 0,$$

où

$$\Delta = B^2 - 4AC - 4DE$$

est le carré n^2.

On en déduit, en multipliant par les entiers ρ et σ et ajoutant, la nouvelle relation singulière

$$\begin{aligned} 0 = (A\rho + A_1\sigma)g &+ (B\rho + B_1\sigma)h \\ &+ (C\rho + C_1\sigma)g' + (D\rho + D_1\sigma)(h^2 - gg') + E\rho + E_1\sigma, \end{aligned}$$

([1]) *American Journal of Mathematics*, t. VIII, p. 306.

dont l'invariant (à un facteur carré près) est

$$\Delta\rho^2 + M\rho\sigma + \Delta_1\sigma^2;$$

Δ_1 désigne l'invariant de la relation (25) et M une fonction de A, B, ..., E; A_1, ..., E_1, qu'il est inutile d'expliciter.

Le théorème est qu'on peut déterminer la fraction $\frac{\rho}{\sigma}$ d'une infinité de manières différentes, de telle sorte que le nombre $\Delta\rho^2 + M\rho\sigma + \Delta_1\sigma^2$ soit un carré; or on peut écrire ce nombre, en remplaçant Δ par n^2, et en désignant par θ un entier quelconque,

$$(n\rho + \theta\sigma)^2 + \sigma[M\rho + \Delta_1\sigma - 2n\theta\rho - \theta^2\sigma],$$

et ce sera un carré si l'on prend $\frac{\rho}{\sigma}$ de telle sorte que le terme entre crochets s'annule, c'est-à-dire si

$$\frac{\rho}{\theta^2 - \Delta_1} = \frac{\sigma}{M - 2n\theta}$$

d'où, puisque θ est quelconque, une infinité de solutions.

C. Q. F. D.

DEUXIÈME PARTIE.

Fonctions intermédiaires singulières.

20. Soit un système de périodes normales des variables u et v

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g'; \end{matrix}$$

en changeant au besoin les signes de g, h, g' simultanément, on a le droit de supposer que la partie imaginaire, g_1, de g est *positive;* il en sera de même de la partie imaginaire, g'_1, de g', à cause de l'inégalité nécessaire $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$.

A l'exemple de Briot et Bouquet ([1]) et de M. Poincaré ([2]), nous appellerons *fonction intermédiaire* toute fonction entière de u, v qui se reproduit, multipliée par une exponentielle $e^{\lambda u + \mu v + \nu}$, quand u, v augmentent d'une période.

En désignant par $f(u, v)$ une telle fonction, on a ainsi

$$\begin{aligned}
f(u+1, v) &= e^{\lambda_1 u + \mu_1 v + \nu_1} f(u, v),\\
f(u, v+1) &= e^{\lambda_2 u + \mu_2 v + \nu_2} f(u, v),\\
f(u+g, v+h) &= e^{\lambda_3 u + \mu_3 v + \nu_3} f(u, v),\\
f(u+h, v+g') &= e^{\lambda_4 u + \mu_4 v + \nu_4} f(u, v).
\end{aligned}$$

En multipliant $f(u, v)$ par une exponentielle $e^{au^2 + buv + cv^2 + du + fv}$, $a, b, \ldots$ étant des constantes, on peut évidemment disposer de ces constantes de manière que le produit de l'exponentielle par $f(u, v)$, produit que nous désignerons par $\varphi(u, v)$, vérifie les relations

$$\begin{aligned}
\varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v+1) &= e^{\theta u}\varphi(u, v);
\end{aligned}$$

il suffit pour cela de prendre

$$\begin{gathered}
2a = -\lambda_1, \qquad b = -\mu_1, \qquad d + a = -\nu_1,\\
2c = -\mu_2, \qquad f + c = -\nu_2,
\end{gathered}$$

θ est une constante, égale à $-\mu_1$.

La fonction $\varphi(u, v)$ satisfait donc aux conditions

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v),\\
\varphi(u, v+1) &= \varphi(u, v)e^{\theta u},\\
\varphi(u+g, v+h) &= \varphi(u, v)e^{\lambda u + \mu v + \nu},\\
\varphi(u+h, v+g') &= \varphi(u, v)e^{\lambda' u + \mu' v + \nu'}.
\end{aligned}\right.$$

([1]) *Traité des fonctions elliptiques.*

([2]) *American Journal of Mathematics,* t. VIII, p. 316.

Pour que les deux premières équations soient compatibles, il faut que

$$0 = 2\pi i n,$$

n étant entier; de même, la première et la seconde combinées successivement avec les deux autres donnent

$$\lambda = -2\pi i l,\quad \lambda' = 2\pi i l',\quad \mu = 2\pi i(m - ng),\quad \mu' = 2\pi i(m' - nh),$$

l, l', m, m' étant entiers. Enfin la combinaison des deux dernières relations (1) donne

$$\lambda h + \mu g' = \lambda' g + \mu' h + 2q\pi i,$$

q étant entier. En remplaçant λ, μ, λ', μ' par leurs valeurs ci-dessus, on trouve

$$l'g + (m' + l)h - mg' - n(h^2 - gg') + q = 0;$$

si donc les entiers l', $m' + l$, m, n, q ne sont pas nuls à la fois, il existe entre g, h, g' une relation singulière.

Dans le cas où

$$l' = m' + l = m = n = q = 0,$$

les relations deviennent

$$\begin{aligned} \varphi(u+1, v) &= \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) &= e^{-2\pi i l u + \nu}\varphi(u, v), \\ \varphi(u+h, v+g') &= e^{-2\pi i l v + \nu'}\varphi(u, v); \end{aligned}$$

la fonction $\varphi(u, v)$ est alors une *fonction thêta*. Ainsi, dans le cas où il n'y a pas de relation singulière entre les périodes, les seules fonctions intermédiaires sont les fonctions thêta et leurs produits par des exponentielles $e^{au^2 + buv + \dots}$.

21. Supposons, au contraire, qu'il y ait entre g, h, g' une relation singulière, et ramenons-la, par une transformation du premier ordre des périodes, à la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

On a alors, en désignant par k un entier,

$$l' = -\alpha k, \qquad m' + l = -\beta k, \qquad m = \gamma k, \qquad n = q = 0,$$

et les relations (1) s'écrivent

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = e^{2\pi i[-lu + k\gamma v] + \nu} \varphi(u, v), \\ \varphi(u+h, v+g') = e^{2\pi i[-k\alpha u - (l+k\beta)v] + \nu'} \varphi(u, v). \end{cases}$$

Si k est nul, la fonction $\varphi(u, v)$ est une *fonction thêta d'ordre* l; si $k \gtrless 0$, il entre dans la définition de $\varphi(u, v)$ *deux* nombres entiers, l et k, que nous appellerons les *indices* de la *fonction intermédiaire singulière* $\varphi(u, v)$.

22. Considérons maintenant le déterminant δ des coefficients de u, v dans les exponentielles qui figurent aux seconds membres des deux dernières équations (2)

$$\delta = l(l + k\beta) + \alpha\gamma k^2 = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2.$$

Je dis que, en général, δ *n'est pas nul*. Car, si $\delta = 0$, on a

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2},$$

ce qui exige que $\beta^2 - 4\alpha\gamma$, c'est-à-dire l'invariant Δ de la relation singulière entre les périodes, soit un carré parfait. Ainsi, δ *ne peut être nul que dans le cas elliptique*.

23. *Cas elliptique.* — Avant d'aller plus loin, supposons-nous placés dans le cas elliptique, l et k étant tels que $\delta = 0$, et étudions les fonctions $\varphi(u, v)$ correspondantes.

A cet effet, supposons $\gamma = 1$, comme nous en avons le droit, dans la relation entre les périodes; soit

$$\beta^2 - 4\alpha = n^2,$$

ce qui donne

$$\alpha = \frac{\beta^2 - n^2}{4}.$$

Les nombres β et n sont nécessairement de même parité.

On a pour $\frac{l}{k}$, en écrivant $\delta = 0$,

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta \pm n}{2}.$$

Supposons, par exemple,

$$\frac{l}{k} = -\frac{\beta + n}{2}.$$

Cela posé, nous savons qu'il y a deux fonctions de la forme $u + \lambda v$, ou $\frac{1}{\lambda} u + v$, qui n'ont que deux périodes; les deux valeurs correspondantes de $\frac{1}{\lambda}$ sont (n° **18**)

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-\beta \pm n}{-2}.$$

Prenons pour variables nouvelles, à la place de u et v, ces deux fonctions, en posant

$$nU = v + \frac{\beta + n}{2} u,$$

$$nV = v + \frac{\beta - n}{2} u;$$

la fonction $\varphi(u, v)$, qui vérifie les relations (2), devient une fonction $\chi(U, V)$, et ces relations donnent sans difficulté

$$\chi\left(U + \frac{1}{n}, V + \frac{1}{n}\right) = \chi\left(U + \frac{\beta + n}{2n}, V + \frac{\beta - n}{2n}\right) = \chi(U, V),$$

$$\chi\left(U + \frac{\beta + n}{2n} g + \frac{h}{n}, V + \frac{\beta - n}{2n} g + \frac{h}{n}\right) = \chi(U, V) e^{2\pi i k n U + \nu},$$

$$\chi\left(U + \frac{\beta + n}{2n} h + \frac{g'}{n}, V + \frac{\beta - n}{2n} h + \frac{g'}{n}\right) = \chi(U, V) e^{2\pi i k n \frac{n - \beta}{2} U + \nu'}.$$

Si l'on pose

$$\Omega = \frac{\beta + n}{2n} g + \frac{h}{n}, \qquad \Omega' = \frac{\beta - n}{2n} g + \frac{h}{n},$$

on déduit de là, en tenant compte de la relation singulière

$$(3) \qquad \frac{\beta^2 - n^2}{4} g + \beta h + g' = 0,$$

les équations nouvelles :

$$(4) \qquad \begin{cases} \chi(U + 1, V) = \chi(U, V + 1) = \chi(U, V), \\ \chi(U + \Omega, V + \Omega') = \chi(U, V) e^{2\pi i k n U + \nu}, \\ \chi\left(U + \frac{n - \beta}{2}\Omega, V - \frac{n + \beta}{2}\Omega'\right) = \chi(U, V) e^{2\pi i k n \frac{n - \beta}{2} U + \nu'}. \end{cases}$$

La combinaison des deux dernières donne facilement

$$(5) \qquad \chi(U, V + n\Omega') = \chi(U, V) e^{\nu''},$$

ν'' étant une constante.

D'ailleurs $\chi(U, V)$ ayant, en vertu de (4), les périodes $1, 0$; $0, 1$, et étant une fonction entière, peut se développer par la formule de Fourier

$$(6) \qquad \chi(U, V) = \Sigma A_{pq} e^{2\pi i (pU + qV)}.$$

Exprimons que cette série vérifie (5); il vient, si $A_{pq} \gtrless 0$,

$$e^{2\pi i q n \Omega'} = e^{\nu''},$$

d'où, en remplaçant Ω' par sa valeur,

$$q\left[\frac{\beta - n}{2} g + h\right] = \frac{\nu''}{2\pi i} + E,$$

E étant un entier. Une telle relation ne peut avoir lieu pour deux valeurs q et q_0, de l'entier q; car on en déduirait, par soustraction,

$$(q - q_0)\left[\frac{\beta - n}{2} g + h\right] = E - E_0.$$

Soient alors g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g'; on aurait

$$h_1 = \frac{n-\beta}{2} g_1,$$

et de la relation (3) entre les périodes on tirerait

$$g'_1 = \left(\frac{n-\beta}{2}\right)^2 g_1,$$

d'où

$$h_1^2 - g_1 g'_1 = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse initiale.

Par suite, dans la série de Fourier (6), q est constant et égal à q_0; en supprimant le facteur $e^{2\pi i q_0 V}$, on voit que $\chi(U, V)$ est une fonction de la seule variable U, et les relations (4) montrent que c'est une fonction thêta.

Inversement, on établit sans difficulté qu'une fonction thêta (elliptique) de U vérifie des équations de la forme (2), avec $\delta = 0$.

Remarque. — Si l'on avait supposé

$$\frac{l}{k} = \frac{-\beta + n}{2},$$

on aurait trouvé de même une fonction thêta de la seule variable V.

Ainsi, *dans le cas elliptique, δ peut être nul; les fonctions intermédiaires correspondantes sont, à un facteur exponentiel près, des fonctions thêta elliptiques d'une seule variable.*

24. Laissant de côté le cas de ces fonctions thêta elliptiques, nous avons le droit de supposer δ différent de zéro; nos résultats s'appliqueront aussi bien au cas elliptique qu'au cas général.

Reprenons la relation entre les périodes sous la forme

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

et revenons aux équations (2) qui caractérisent une fonction intermédiaire singulière $\varphi(u, v)$, d'indices l et k; δ n'étant pas nul, on peut faire le changement de variables

$$(7)\qquad \begin{cases} u = -(l+k\beta)\mathrm{U} - k\gamma\mathrm{V}, \\ v = k\alpha\,\mathrm{U} - l\mathrm{V}; \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(8)\qquad \begin{cases} \delta\mathrm{U} = -lu + k\gamma v, \\ \delta\mathrm{V} = -k\alpha u - (l+k\beta)v, \end{cases} \qquad \delta = l^2 + \beta k l + \alpha\gamma k^2.$$

La fonction $\varphi(u, v)$ devient alors une fonction $\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V})$, et les deux premières équations (2) donnent

$$(9)\qquad \theta\left(\mathrm{U} - \frac{l}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(\mathrm{U} + \frac{k\gamma}{\delta}, \mathrm{V} - \frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$

d'où l'on déduit, en désignant par ρ et σ deux entiers arbitraires,

$$\theta\left(\mathrm{U} - \rho\frac{l}{\delta} + \sigma\frac{k\gamma}{\delta}, \mathrm{V} - \rho\frac{k\alpha}{\delta} - \sigma\frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}).$$

En prenant $\rho = -l - k\beta$, $\sigma = k\alpha$, on a

$$\theta(\mathrm{U}+1, \mathrm{V}) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}),$$

et l'on voit de même que

$$\theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}+1) = \theta(\mathrm{U}, \mathrm{V}).$$

Enfin, si l'on pose

$$\mathrm{G} = \frac{-lg + k\gamma h}{\delta}, \qquad \mathrm{H} = \frac{-lh + k\gamma g'}{\delta} = \frac{-k\alpha g - (l+k\beta)h}{\delta}\ (^1),$$

$$\mathrm{G}' = \frac{-k\alpha h - (l+k\beta)g'}{\delta},$$

---

(1) Les deux valeurs de H sont les mêmes, en vertu de la relation

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0.$$

les deux dernières équations (2) donnent

$$(10)\qquad \begin{cases} \theta(U+G,\ V+H) = e^{2\pi i\delta U+\nu}\,\theta(U,V), \\ \theta(U+H,\ V+G') = e^{2\pi i\delta V+\nu'}\,\theta(U,V); \end{cases}$$

en y joignant

$$\theta(U+1,V) = \theta(U,V+1) = \theta(U,V),$$

on voit que $\theta(U,V)$ est une fonction *thêta, d'ordre* δ, aux périodes $1, 0$; $0, 1$; G, H; H, G'; mais ce n'est pas une fonction θ quelconque, à cause des relations (9) :

$$(9)\qquad \theta\left(U - \frac{l}{\delta},\ V - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{k\gamma}{\delta},\ V - \frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(U,V).$$

23. *Conditions d'existence des fonctions intermédiaires singulières.* — Pour qu'il existe des fonctions thêta de U, V vérifiant (10), deux conditions sont nécessaires et suffisantes :

1° En désignant par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G, H, G', il faut que $H_1^2 - G_1G'_1 < 0$.

Or on a, en désignant par g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g',

$$G_1 = \frac{-lg_1 + k\gamma h_1}{\delta},\qquad H_1 = \frac{-lh_1 + k\gamma g'_1}{\delta} = \frac{-k\alpha g_1 - (l+k\beta)h_1}{\delta},$$
$$G'_1 = \frac{-k\alpha h_1 - (l+k\beta)g'_1}{\delta},$$

d'où

$$H_1^2 - G_1G'_1 = \frac{1}{\delta^2}[-lh_1 + k\gamma g'_1][-k\alpha g_1 - (l+k\beta)h_1]$$
$$- \frac{1}{\delta^2}[-lg_1 + k\gamma h_1][-k\alpha h_1 - (l+k\beta)g'_1] = \frac{1}{\delta^2}\delta(h_1^2 - g_1g'_1),$$

et l'inégalité à vérifier devient, puisque $h_1^2 - g_1g'_1 < 0$,

$$(11)\qquad \delta > 0,\quad \text{c'est-à-dire}\quad l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 > 0.$$

2° En second lieu, il faut que δ, ordre de la fonction thêta, ait le signe contraire à celui de la partie imaginaire de G, c'est-à-dire que G_1 soit négatif; ainsi

$$(12)\qquad -lg_1 + k\gamma h_1 < 0,$$

inégalité évidemment compatible avec la précédente, et sur laquelle nous reviendrons.

26. Si les inégalités (11) et (12) sont vérifiées, il existe des fonctions thêta, $\theta(U, V)$, satisfaisant aux relations (10); elles sont, comme l'on sait, fonctions linéaires et homogènes de δ^2 d'entre elles. Il reste à voir si, parmi ces fonctions, on peut en trouver qui vérifient les relations (9).

27. Observons d'abord, pour simplifier l'écriture, qu'en faisant le changement de variables $U = U_1 + \lambda$, $V = V_1 + \mu$, λ et μ étant des constantes, on peut déterminer ces constantes de manière que $\theta(U_1, V_1)$ satisfasse aux égalités (10), où ν et ν' ont des valeurs fixées à l'avance. On a donc le droit de supposer $\nu = 2\pi i \frac{G\delta}{2}$, $\nu' = 2\pi i \frac{G'\delta}{2}$, de sorte que la fonction $\theta(U, V)$ est telle que

$$(13)\qquad \begin{cases} \theta(U+1, V) = \theta(U, V+1) = \theta(U, V), \\ \theta(U+G, V+H) = e^{2\pi i\delta\left(U+\frac{G}{2}\right)}\theta(U, V), \\ \theta(U+H, V+G') = e^{2\pi i\delta\left(V+\frac{G'}{2}\right)}\theta(U, V), \end{cases}$$

$$(14)\qquad \theta\left(U - \frac{l}{\delta}, V - \frac{k\alpha}{\delta}\right) = \theta\left(U + \frac{k\gamma}{\delta}, V - \frac{l+k\beta}{\delta}\right) = \theta(U, V).$$

Or on peut exprimer les fonctions $\theta(U, V)$ qui satisfont aux équations (13) en fonction linéaire et homogène des δ^2 fonctions $\Theta_{00}, \Theta_{01}, \ldots, \Theta_{pq}, \ldots (0 \leqq p, q < \delta)$ définies par

$$(15)\qquad \Theta_{pq}(U, V) = \sum_\rho \sum_\sigma e^{2\pi i[(p+\rho\delta)U + (q+\sigma\delta)V]} e^{\frac{\pi i}{\delta} f(p+\rho\delta,\, q+\sigma\delta)},$$

ρ et σ variant par valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$, et $f(x, y)$ désignant la forme $-(Gx^2+2Hxy+G'y^2)$; on a mis le signe — devant $Gx^2+\dots$ parce que la partie imaginaire, G_1, de G est négative.

Les fonctions Θ_{pq} vérifient les relations (13); de plus, il est évident que

$$(16)\qquad \begin{cases} \Theta_{pq}\left(U+\frac{1}{\delta}, V\right) = e^{2\pi i \frac{p}{\delta}}\Theta_{pq}(U, V), \\ \Theta_{pq}\left(U, V+\frac{1}{\delta}\right) = e^{2\pi i \frac{q}{\delta}}\Theta_{pq}(U, V). \end{cases}$$

Pour que Θ_{pq} satisfasse aux équations (14), il faut et il suffit que p et q soient choisis de manière que

$$(17)\qquad -lp-k\alpha q = m\delta, \qquad k\gamma p-(l+k\beta)q = n\delta,$$

m et n étant entiers; c'est-à-dire

$$(18)\qquad p = -m(l+k\beta)+nk\alpha, \qquad q = -mk\gamma - nl.$$

Combien y a-t-il de systèmes de valeurs de p et q de cette forme, compris entre o inclus et δ exclus?

Pour le voir, considérons p et q comme les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan; tous les points p, q représentés par les formules (18), où m et n prennent toutes les valeurs entières, sont les sommets d'un réseau de parallélogrammes, construit avec les périodes $-(l+k\beta)-ik\gamma$ et $k\alpha - il$, et dont un sommet est à l'origine. Tout revient à chercher combien il y a de ces sommets à l'intérieur du carré de côté δ construit sur les parties positives des axes : si l'on observe que les quatre sommets de ce carré sont des sommets du réseau (ce qui se reconnaît de suite), on en conclut que le nombre cherché est le quotient de l'aire du carré et de l'aire du parallélogramme. L'aire du carré est δ^2; celle du parallélogramme est $(l+k\beta)l+k\gamma k\alpha$, c'est-à-dire δ; il y a donc $\frac{\delta^2}{\delta}=\delta$ sommets du réseau dans le carré, l'origine étant comptée, mais non les trois autres sommets du carré.

Soient alors p_1, q_1; p_2, q_2; $\dots$; p_δ, q_δ les δ systèmes de valeurs correspondantes de p, q; les δ fonctions

$$\Theta_{p_1q_1}(U,V), \quad \Theta_{p_2q_2}(U,V), \quad \dots, \quad \Theta_{p_\delta q_\delta}(U,V),$$

satisfont seules, parmi les fonctions Θ_{pq}, aux équations (13) et (14):

en d'autres termes les fonctions entières qui vérifient ces équations s'expriment en fonction linéaire et homogène de δ d'entre elles.

Remontons maintenant des variables U, V aux variables u, v, nous avons ce théorème :

28. *Soit un système de périodes* $\begin{matrix} 1 & 0 & g & h \\ 0 & 1 & h & g' \end{matrix}$, *telles qu'on ait la relation*

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0,$$

α, β, γ étant entiers sans diviseur commun; désignons par g_1, h_1, g'_1 les parties imaginaires de g, h, g' et supposons $h_1^2 - g_1 g'_1 < 0$, g_1 et $g'_1 > 0$.

Soient l et k deux entiers, tels que la quantité $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ soit positive et que $-lg_1 + k\gamma h_1$ soit négatif (¹); *il existe des fonctions* intermédiaires singulières, $\varphi(u, v)$, *d'indices l et k, c'est-à-dire vérifiant les relations*

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(u+1, v) \qquad = \varphi(u, v+1) = \varphi(u, v), \\ \varphi(u+g, v+h) = \varphi(u, v)e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\nu}, \\ \varphi(u+h, v+g') = \varphi(u, v)e^{2\pi i(-k\alpha u-(l+k\beta)v)+\nu'}, \end{cases}$$

ν et ν' désignant des constantes arbitraires données. Ces fonctions s'expriment en fonction linéaire et homogène de δ d'entre elles.

Il serait aisé d'avoir le développement en série de chacune de ces δ fonctions, en se servant de celui de $\Theta_{pq}(U, V)$; nous trouverons plus loin des développements un peu plus généraux d'une manière directe.

29. *Remarque I.* — Reprenons les inégalités nécessaires

$$(11)\qquad l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 > 0,$$

$$(12)\qquad -lg_1 + k\gamma h_1 < 0.$$

La première s'écrit

$$(2l + \beta k)^2 - k^2(\beta^2 - 4\alpha\gamma) > 0,$$

et l'on sait (n° **14**) que l'invariant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ est > 0.

(¹) On verra plus bas (n° 29) que ces deux conditions se réduisent à une seule.

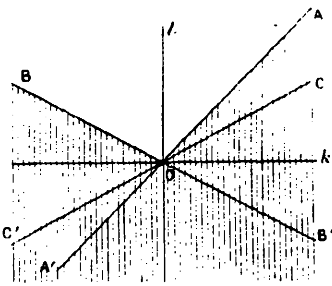
Regardons l et k comme les coordonnées d'un point dans un plan et construisons les deux droites *réelles* $A'OA$, $B'OB$ qui ont pour équation $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = 0$: elles passent par l'origine O.

Construisons de même la droite $C'OC$ qui a pour équation

$$-lg_1 + k\gamma h_1 = 0;$$

je dis qu'elle est dans l'angle des droites $A'OA$ et $B'OB$ qui ne com-

Fig. 1.



prend pas l'axe des l. En effet, en substituant dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$ les valeurs $l = \infty$, $k = 0$, on trouve le signe $+$; en substituant $l = \gamma h_1$, $k = g_1$, on trouve

$$\gamma^2 h_1^2 + \gamma g_1(\beta h_1 + \alpha g_1),$$

c'est-à-dire, puisque $\alpha g_1 + \beta h_1 + \gamma g'_1$ est nul, $\gamma^2(h_1^2 - g_1 g'_1)$, résultat négatif.

Il résulte de là que les deux inégalités (11) et (12) ne sont vérifiées que si le point l, k est dans l'angle BOA, qui comprend la partie *positive* de l'axe des l (région non ombrée) : g_1 est en effet > 0.

Comme il y a, dans cet angle, une infinité de points à coordonnées entières, il y a une infinité de systèmes de valeurs de l, k correspondant à des fonctions intermédiaires singulières.

Pour un quelconque de ces systèmes de valeurs, la quantité $2l + \beta k$ est positive : en effet, la droite $2l + \beta k = 0$ est dans la région ombrée, car en faisant $l = \beta$, $k = -2$ dans $l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2$, on trouve

$$-(\beta^2 - 4\alpha\gamma),$$

quantité négative; par suite, pour tous les points de l'angle BOA, $2l+\beta k$ est positif.

L'inégalité (11) : $(2l+\beta k)^2 - k^2\Delta > 0$ donne alors

$$(19) \qquad 2l+\beta k > \sqrt{\Delta} \bmod k$$

et il est clair, géométriquement, que cette inégalité, si elle est vérifiée, entraîne les inégalités (11) et (12) : c'est donc la seule à laquelle les indices l et k soient assujettis.

30. *Remarque II.* — Il résulte de ce qui précède que, si l, k est un système de valeurs vérifiant l'inégalité (19) et m un entier positif, les systèmes ml, mk et $l+m$, k vérifieront aussi cette inégalité.

On peut voir aussi que, si l', k' est un système analogue, la même propriété appartient au système $l+l'$, $k+k'$: cela résulte de ce que le produit de deux fonctions singulières d'indices l, k et l', k' est évidemment une fonction singulière d'indices $l+l'$, $k+k'$; c'est une fonction thêta si $k+k'=0$.

31. *Remarque III.* — Si l, k vérifient l'inégalité (19), on pourra trouver une infinité d'entiers l'' tels que le système l'', $-k$ la vérifie aussi : cela résulte immédiatement de ce que la partie positive de l'axe des l est dans l'angle BOA. En d'autres termes, étant donnée une fonction intermédiaire singulière φ, on peut en trouver une infinité d'autres φ'' telles que le produit $\varphi\varphi''$ soit une fonction thêta.

Zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières.

32. Reprenons les relations de transformation du n° **24**

$$\begin{aligned} u &= -(l+k\beta)\mathrm{U} - k\gamma\mathrm{V}, \\ v &= \qquad\quad k\alpha\,\mathrm{U} - \;l\mathrm{V}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \delta\mathrm{U} &= -\,lu + k\gamma v, \\ \delta\mathrm{V} &= -\,k\alpha u - (l+k\beta)v. \end{aligned}$$

Je dis qu'à un système (U, V), déterminé aux périodes près, ne correspond qu'un seul système (u, v), aux périodes près : car si l'on augmente U et V d'une période du tableau

$$\begin{matrix} 1, & 0, & G, & H, \\ 0, & 1, & H, & G', \end{matrix}$$

où

$$G = \frac{-lg + k\gamma h}{\delta},$$

$$H = \frac{-lh + k\gamma g'}{\delta} = \frac{-k\alpha g - (l + k\beta)h}{\delta},$$

$$G' = \frac{-k\alpha h - (l + k\beta)g'}{\delta},$$

on reconnaît immédiatement que u et v augmentent d'une période du tableau

$$\begin{matrix} 1, & 0, & g, & h, \\ 0, & 1, & h, & g'. \end{matrix}$$

Inversement, je dis qu'à un système (u, v) correspondent δ systèmes U, V. Donnons, en effet, à u, v les valeurs

$$u + \theta + \rho g + \sigma h, \qquad v + \theta' + \rho h + \sigma g',$$

θ, θ', ρ, σ étant des entiers quelconques, il vient

$$U = \frac{-lu + k\gamma v}{\delta} + \frac{-l\theta + k\gamma\theta'}{\delta} + \rho\frac{-lg + k\gamma h}{\delta} + \sigma\frac{-lh + k\gamma g'}{\delta},$$

$$V = \frac{-k\alpha u - (l + k\beta)v}{\delta} + \frac{-k\alpha\theta - (l + k\beta)\theta'}{\delta},$$

$$+ \rho\frac{-k\alpha g - (l + k\beta)h}{\delta} + \sigma\frac{-k\alpha h - (l + k\beta)g'}{\delta}.$$

Les coefficients de ρ dans les deux seconds membres étant respectivement G et H, ceux de σ étant H et G', on peut supposer $\rho = 0$, $\sigma = 0$, sans changer U, V *aux périodes près;* tout revient ainsi à chercher combien on obtient de systèmes distincts aux périodes près par les formules

$$U' = \frac{-l\theta + k\gamma\theta'}{\delta}, \qquad V' = \frac{-k\alpha\theta - (l + k\beta)\theta'}{\delta},$$

lorsque θ et θ' prennent toutes les valeurs entières.

Deux systèmes θ, θ' et θ_1, θ'_1 donnent le même système U', V' aux périodes près si

$$\frac{-l(\theta - \theta_1) + k\gamma(\theta' - \theta'_1)}{\delta} = m + \rho' G + \sigma' H,$$

$$\frac{-k\alpha(\theta - \theta_1) - (l + k\beta)(\theta' - \theta'_1)}{\delta} = n + \rho' H + \sigma' G'.$$

Les entiers ρ' et σ' sont nécessairement nuls, sinon, en égalant les parties imaginaires dans les deux membres, on trouverait

$$\rho' G_1 + \sigma' H_1 = 0, \qquad \rho' H_1 + \sigma' G'_1 = 0,$$

d'où $H_1^2 - G_1 G'_1 = 0$, ce qui est impossible (n° **25**). On a donc

$$\begin{aligned} -\ l(\theta - \theta_1) \ + \quad k\gamma(\theta' - \theta'_1) \quad &= m\delta, \\ -\ k\alpha(\theta - \theta_1) - (l + k\beta)(\theta' - \theta'_1) &= n\delta, \end{aligned}$$

et l'on en conclut, comme au n° **27**, qu'en considérant θ et θ' comme les coordonnées d'un point, deux points θ, θ' et θ_1, θ'_1 donnent le même système (U', V') s'ils sont deux points homologues d'un réseau de parallélogrammes, et réciproquement.

Ce réseau est construit sur les périodes

$$-(l + k\beta) + ik\alpha, \qquad -k\gamma - il;$$

il a l'origine pour un de ses sommets, et l'aire de son parallélogramme est δ.

Il y aura autant de systèmes (U, V) correspondant à un système (u, v) qu'il y a de points (θ, θ') à coordonnées entières dans un parallélogramme du réseau; or, l'aire du parallélogramme étant δ, ce nombre de points est évidemment δ, en comptant l'origine et en excluant les trois autres sommets. Ainsi :

A un système (u, v) *correspondent* δ *systèmes* (U, V) *distincts aux périodes près.*

33. Il est maintenant facile de trouver le nombre de zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières; c'est-à-dire le nombre des solutions communes aux deux équations $\varphi(u, v) = 0$, $\varphi_1(u, v) = 0$: deux solutions qui ne diffèrent que de périodes ne sont pas regardées comme distinctes.

Supposons que les deux fonctions intermédiaires considérées aient pour indices l, k et l', k'; nous les représenterons par $\varphi_{l,k}$, $\varphi_{l',k'}$, et leur nombre de zéros communs par

$$N(l, k;\ l', k');$$

il est clair, en effet, qu'il ne dépend que des nombres l, k; l', k'. [*Voir*, par exemple, le raisonnement de M. Poincaré pour trouver le nombre de zéros communs à deux fonctions thêta (¹).]

34. Distinguons maintenant plusieurs cas.

1° Supposons $l' = l$, $k' = k$. En ce cas, la transformation employée au n° **24** change $\varphi_{l,k}$ et $\varphi_{l',k'}$ en deux fonctions thêta de U et V, d'ordre δ. Ces deux fonctions ayant, d'après M. Poincaré (²), $2\delta^2$ zéros communs, et δ systèmes (U, V) correspondant à un système (u, v), le nombre des zéros communs à $\varphi_{l,k}$ et $\varphi_{l',k'}$ est $\frac{2\delta^2}{\delta} = 2\delta$; on a donc

$$N(l, k;\ l, k) = 2l^2 + 2\beta kl + 2\alpha\gamma k^2. \tag{20}$$

2° Supposons $l' = 1$, $k' = 0$. La fonction $\varphi_{l',k'}$ est alors une fonction thêta, $\vartheta(u, v)$, du premier ordre; si l'on désigne par $j(x)$ et $j_1(x)$ deux intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe de genre deux $f(x, y) = 0$, qui correspond au système de périodes

(¹) *Bulletin de la Société Mathématique de France*, t. X.

(²) *Ibid.*

1, 0 : 0, 1 : g, h ; h, g', on a identiquement

$$\Xi[j(x)+\nu,\ j_1(x)+\nu_1]=0,$$

ν et ν_1 étant des constantes.

D'après cela, le nombre des zéros communs à $\varphi_{l,k}(u, v)$ et à $\Xi(u, v)$ est le nombre des racines de l'équation

$$\varphi_{l,k}[j(x)+\nu,\ j_1(x)+\nu_1]=0. \tag{21}$$

On sait trouver ce nombre lorsque $\varphi_{l,k}$ est une fonction thêta, c'est-à-dire une fonction admettant les périodes 1, 0 ; 0, 1 et telle que

$$\Theta(u+g,\ v+h)=e^{2\pi i l u+\text{const}}\,\Theta(u, v),$$
$$\Theta(u+h,\ v+g')=e^{-2\pi i l v+\text{const}}\cdot\Theta(u, v) :$$

on établit, dans la théorie des fonctions abéliennes, que le nombre cherché est la somme du coefficient de $-2\pi i u$ dans la première exponentielle et du coefficient de $-2\pi i v$ dans la seconde, c'est-à-dire $l+l$, ou $2l$. Le même raisonnement, *appliqué dans les mêmes termes* (¹), à la fonction $\varphi_{l,k}$ qui a les périodes 1, 0 ; 0, 1 et qui satisfait à

$$\varphi_{l,k}(u+g,\ v+h)=e^{2\pi i(-lu-k\gamma v)+\text{const.}}\,\varphi_{l,k}(u, v),$$
$$\varphi_{l,k}(u+h,\ v+g')=e^{2\pi i(-k\alpha u-(l+k\beta)v)+\text{const}}\cdot\varphi_{l,k}(u, v),$$

montre que le nombre des racines de l'équation (21) est encore la somme des coefficients de $-2\pi i u$ dans la première exponentielle et de $-2\pi i v$ dans la seconde, c'est-à-dire $l+l+\beta k=2l+\beta k$.

Ainsi

$$\mathrm{N}(l, k;\ 1, 0)=2l+\beta k,$$

quantité qu'on sait être toujours positive (n° **29**).

Si l'on observe que le produit de l' fonctions thêta du premier ordre est une fonction thêta d'ordre l', il est clair que

$$\mathrm{N}(l, k;\ l', 0)=l'(2l+\beta k)=2ll'+\beta kl'. \tag{22}$$

(¹) *Voir*, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. II, p. 617-618.

3° Supposons $k' = k$. Soit, par exemple, $l > l'$. Le produit de $\varphi_{l',k}$ par une fonction thêta d'ordre $l - l'$ est une fonction $\varphi_{l,k}$, par suite

$$N(l, k;\, l', k) = N(l, k;\, l, k) - N(l, k;\, l - l', 0)$$

d'où, en vertu de (20) et (22),

$$N(l, k;\, l', k) = 2ll' + \beta k(l + l') + 2\alpha\gamma k^2. \tag{23}$$

4° Supposons l, k, l', k' quelconques, mais toutefois k et k' de même signe. Si m est entier et positif, la puissance m de $\varphi_{l,k}$ est une fonction $\varphi_{ml,mk}$, et, par suite,

$$N(ml, mk;\, nl', nk') = mn\, N(l, k;\, l', k'),$$

m et n étant entiers et positifs.

Prenons $m = \varepsilon k'$, $n = \varepsilon k$, ε étant $+1$ si k et $k' > 0$, et ε étant -1 si k et $k' < 0$; on a

$$N(l, k;\, l', k') = \frac{1}{kk'} N(\varepsilon k' l, \varepsilon kk';\, \varepsilon kl', \varepsilon kk'),$$

et, d'après (23),

$$N(l, k;\, l', k') = \frac{1}{kk'}\left[2kk'll' + \beta\varepsilon kk'(\varepsilon k' l + \varepsilon kl') + 2\alpha\gamma k^2 k'^2\right],$$

c'est-à-dire

$$N(l, k;\, l', k') = 2ll' + \beta(k' l + kl') + 2\alpha\gamma kk' \quad (\text{si } kk' > 0). \tag{24}$$

5° Enfin, si l, k, l', k' sont quelconques et $k > 0$, $k' < 0$, en multipliant $\varphi_{l',k'}$ par $\varphi_{l'',-k'}$ le produit sera une fonction thêta $\varphi_{l'+l'',0}$; on a en effet observé (n° **31**) qu'on peut toujours trouver une infinité d'entiers l'' tels qu'il existe une fonction $\varphi_{l'',-k'}$. Il résulte de là que

$$N(l, k;\, l', k') = N(l, k;\, l' + l'', 0) - N(l, k;\, l'', -k'),$$

et, d'après les formules (22) et (24)

$$\begin{aligned} &N(l, k;\, l', k') \\ &\quad = 2l(l' + l'') + \beta k(l' + l'') - 2ll'' - \beta(-lk' + kl'') + 2\alpha\gamma kk', \end{aligned}$$

c'est-à-dire que, *dans tous les cas*,

$$\mathrm{N}(l, k; l', k') = 2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk', \tag{25}$$

formule générale qui contient toutes les précédentes.

55. *Remarque I.* — Il est aisé de vérifier que si l, k et l', k' satisfont, comme cela doit être, à l'inégalité (19), c'est-à-dire si les points l, k, et l', k' sont situés dans l'angle BOA (n° **29**), le nombre

$$2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'$$

est toujours positif. Car la droite

$$2yl' + \beta(k'y + l'x) + 2\alpha\gamma xk' = 0,$$

où y et x sont les coordonnées courantes, est la polaire du point l', k par rapport aux droites A′OA et B′OB ; elle n'est donc pas dans l'angle AOB : si donc on substitue à y et x, dans le premier membre de l'équation de la droite, les coordonnées l, k et l', k' de deux points de cet angle, on obtient des résultats de même signe, c'est-à-dire que

$$|2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'|\,|2l'^2 + 2\beta k'l' + 2\alpha\gamma k'^2| > 0,$$

et le second facteur étant > 0, le premier l'est également.

56. *Remarque II.* — La formule générale (25) qui donne le nombre des zéros communs à deux fonctions intermédiaires singulières $\varphi_{l,k}$, $\varphi_{l',k'}$ s'applique au cas, exclu jusqu'ici (n° **24**) où $\varphi_{l,k}$ est une fonction thêta d'une seule variable (correspondant à un cas elliptique et à $\delta = 0$). Car si $\varphi_{l'',k''}$ est une fonction intermédiaire telle que δ'' ne soit pas nul, le produit $\varphi_{l,k}\varphi_{l'',k''}$ est une fonction intermédiaire qui n'est pas une fonction thêta d'une variable, et l'on a évidemment

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(l, k; l', k') &= \mathrm{N}(l + l'', k + k''; l', k') - \mathrm{N}(l'', k''; l', k'),\\ &= 2(l + l'')l' + \beta[(l + l'')k' + l'(k + k'')] + 2\alpha\gamma(k + k'')k'\\ &\quad - 2l''l' - \beta(l''k' + l'k'') - 2\alpha\gamma k'k''.\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{N}(l, k; l', k') = 2ll' + \beta(k'l + kl') + 2\alpha\gamma kk'.$$

C. Q. F. D.

Fonctions intermédiaires normales.

37. Cherchons s'il peut exister des fonctions intermédiaires paires ou impaires en u et v.

La fonction intermédiaire la plus générale étant (nos **20-21**) le produit d'une fonction $\varphi_{l,k}$ par une exponentielle $e^{au^2+buv+cv^2+du+fv}$, il s'agit de reconnaître si le produit $e^{du+fv}\varphi_{l,k}(u,v)$ peut être pair ou impair. En le désignant par $F_{l,k}(u,v)$, on voit que $F_{l,k}(u,v)$ satisfait aux relations

$$\begin{aligned}
F(u+1,v) &= A_1 F(u,v),\\
F(u,v+1) &= B_1 F(u,v),\\
F(u+g,v+h) &= A_2\, e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)} F(u,v),\\
F(u+h,v+g') &= B_2\, e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]} F(u,v),
\end{aligned}$$

les A et B étant des constantes.

De plus $F(-u,-v)=\pm F(u,v)$; en exprimant que cette dernière relation est compatible avec chacune des précédentes, on trouve sans difficulté les valeurs des constantes A_1, B_1, A_2, B_2, de sorte que, en désignant par ω, ω', θ, θ' des nombres égaux à 0 ou 1, on obtient

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
F(u+1,v) &= e^{\omega\pi i} F(u,v),\\
F(u,v+1) &= e^{\omega'\pi i} F(u,v).\\
F(u+g,v+h) &= e^{\theta\pi i}\, e^{2\pi i(-lu+k\gamma v)+\pi i(-lg+k\gamma h)} F(u,v),\\
F(u+h,v+g') &= e^{\theta'\pi i}\, e^{2\pi i[-k\alpha u-(l+k\beta)v]+\pi i[-k\alpha h-(l+k\beta)g']} F(u,v).
\end{aligned}\right.$$

Ainsi les fonctions intermédiaires paires ou impaires, d'indices l et k, vérifient nécessairement les relations (26); inversement, nous appellerons *fonctions intermédiaires normales* celles qui satisfont à ces relations, *qu'elles soient ou non paires ou impaires*.

Nous dirons que la *caractéristique* de $F(u,v)$ est $\begin{vmatrix}\omega & \omega'\\ \theta & \theta'\end{vmatrix}$.

Les fonctions normales de caractéristique nulle sont celles pour lesquelles $\omega=\omega'=\theta=\theta'=0$.

38. Nous aurons besoin des fonctions intermédiaires normales pour étudier les courbes tracées sur les surfaces de Kummer singulières et former l'équation aux modules qui correspond à une relation singulière entre les périodes; en particulier, nous étudierons celles des fonctions normales qui sont paires ou impaires et nous rechercherons pour quelles demi-périodes elles s'annulent.

A cet effet, nous commencerons par indiquer le développement en série d'une fonction normale.

Développements en série.

39. La fonction normale $F(u, v)$, d'indices l et k, qui vérifie les deux premières relations (26) peut se développer en série de Fourier sous la forme

$$F(u, v) = \sum_{m,n} A_{m,n}\, e^{2\pi i\left(m+\frac{\omega}{2}\right)u + 2\pi i\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)v}.$$

Pour abréger les calculs ultérieurs, nous poserons

$$A_{m,n} = B_{m,n}\, e^{\pi i\left[G_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)^2 + 2H_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\left(n+\frac{\omega'}{2}\right) + G'_0\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)^2\right]},$$

où G_0, H_0, G'_0 désignent les quantités

$$(27)\qquad \begin{cases} G_0 = \dfrac{(l+k\beta)g + k\gamma h}{\delta}, \\[2mm] H_0 = \dfrac{-k\alpha g + lh}{\delta} = \dfrac{(l+k\beta)h + k\gamma g'}{\delta}, \\[2mm] G'_0 = \dfrac{-k\alpha h + lg'}{\delta}. \end{cases}$$

On déduit de là

$$\begin{aligned} g &= lG_0 - k\gamma H_0, \\ h &= k\alpha G_0 + (l+k\beta)H_0 = lH_0 - k\gamma G'_0, \\ g' &= k\alpha H_0 + (l+k\beta)G'_0. \end{aligned}$$

Le terme général de la série $F(u, v)$ s'écrit ainsi

$$B_{m,n}\, e^{2\pi i\left(m+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)v}\, e^{\pi i\left[G_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)^2+2H_0\left(m+\frac{\omega}{2}\right)\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)+G'_0\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)^2\right]},$$

ce que nous écrirons également

$$B_{m,n}\, T_{m,n}(u, v).$$

Exprimons maintenant que $F(u, v)$ vérifie la troisième des relations (26), c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} &e^{\theta\pi i}\, B_{m,n}\, T_{m,n}\, e^{2\pi i\left[\left(m+\frac{\omega}{2}\right)g+\left(n+\frac{\omega'}{2}\right)h\right]} \\ &\quad = B_{m+l,n-k\gamma}\, T_{m+l,n-k\gamma}\, e^{2\pi i\left(-lu+k\gamma v-\frac{1}{2}lg+\frac{1}{2}k\gamma h\right)}. \end{aligned}$$

Les exponentielles en u et v se détruisent dans les deux membres et il reste, après un calcul qui ne présente aucune difficulté,

$$B_{m,n} = e^{\theta\pi i}\, B_{m+l,n-k\gamma}.$$

De même, en exprimant que $F(u, v)$ vérifie la quatrième des relations (26), on trouve

$$B_{m,n} = e^{\theta'\pi i}\, B_{m+k\alpha,n+l+k\beta}.$$

Enfin, si l'on pose

$$B_{m,n} = C_{m,n}\, e^{\frac{\pi i}{\delta}\left[\theta(m(l+k\beta)-nk\alpha)+\theta'(mk\gamma+nl)\right]},$$

on a

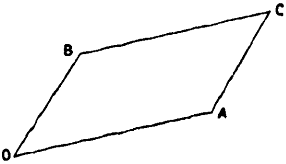
$$C_{m,n} = C_{m+l,n-k\gamma} = C_{m+k\alpha,n+l+k\beta}.$$

Ainsi $C_{m,n}$ ne change pas quand on augmente m et n de l et $-k\gamma$, ou de $k\alpha$ et $l+k\beta$; géométriquement, si m, n sont les coordonnées rectangulaires d'un point dans un plan, $C_{m,n}$ a la même valeur en tous les points homologues d'un réseau de parallélogrammes, construit sur les périodes $l-ik\gamma$, $k\alpha+i(l+k\beta)$. Construisons ce réseau à partir de l'origine, et appelons *parallélogramme principal* celui qui a pour sommets les points O, A, B, C de coordonnées :

O : $x=0$, $y=0$; B : $x=k\alpha$, $y=l+k\beta$;
A : $x=l$, $y=-k\gamma$; C : $x=l+k\alpha$, $y=-k\gamma+l+k\beta$.

L'aire de ce parallélogramme est δ, il y a donc, à son intérieur et sur les côtés OA, OB, δ points de coordonnées entières; soit p, q un

Fig. 2.



de ces points (parmi lesquels figure l'origine); à ce point et aux points homologues dans le réseau correspondent, dans $F(u, v)$, les termes pour lesquels $m = p + l\rho + k\alpha\sigma$, $n = q - k\gamma\rho + (l + k\beta)\sigma$, ρ et σ étant des entiers quelconques. La somme de ces termes est, à un facteur constant près, la série $\Phi_{p,q}(u, v)$:

$$\sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left[q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right]v}$$
$$\times e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')} e^{\pi i f\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2},\, q-k\gamma\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right)},$$

$f(x, y)$ désignant la forme

$$G_0 x^2 + 2H_0 xy + G'_0 y^2.$$

Comme p et q peuvent recevoir δ systèmes de valeurs, correspondant aux points à coordonnées entières du parallélogramme principal, on voit que toute fonction singulière normale, d'indices l et k, $F(u, v)$, est une *fonction linéaire et homogène, quelconque d'ailleurs, des δ séries correspondantes $\Phi_{p,q}$*. Ces séries sont *convergentes*, car si l'on désigne par G_1, H_1, G'_1 les parties imaginaires de G_0, H_0, G'_0, je dis que

$$H_1^2 - G_1 G'_1 < 0 \quad \text{et} \quad G_1 > 0.$$

En effet, d'après (27),

$$\begin{aligned}\delta^2(H_1^2 - G_1 G'_1) &= [-k\alpha g_1 + l h_1][(l+k\beta)h_1 + k\gamma g'_1] \\ &\quad - [(l+k\beta)g_1 + k\gamma h_1][-k\alpha h_1 + l g'_1] = (h_1^2 - g_1 g'_1)\delta,\end{aligned}$$

ce qui démontre la première inégalité. Reste à établir que

$$(l+k\beta)g_1+k\gamma h_1>0.$$

Or, l et k étant des coordonnées courantes, la droite

$$(l+k\beta)g_1+k\gamma h_1=0$$

n'est pas dans l'angle BOA (n° **29**), car, si l'on fait $l=\beta g_1+\gamma h_1$, $k=-g_1$ dans le trinôme $l^2+\beta kl+k^2\alpha\gamma$, on trouve $\gamma^2(h_1^2-g_1g_1')$, résultat négatif. Comme g_1 est >0, l'expression $lg_1+k(\beta g_1+\gamma h_1)$ est positive pour tous les points l, k de l'angle BOA, ce qui établit la proposition.

Les δ fonctions $\Phi_{p,q}$ sont évidemment distinctes linéairement.

Remarque. — Dans toute la suite de ce Mémoire, nous supposerons, comme nous en avons le droit, $\gamma=1$, *c'est-à-dire que nous ramènerons la relation singulière entre les périodes à la forme*

$$\alpha g+\beta h+g'=0.$$

Fonctions normales singulières paires et impaires.

40. Cherchons maintenant s'il y a des fonctions normales paires ou impaires. Plusieurs cas sont à distinguer.

41. *Caractéristique nulle.* — On a

$$\omega=\omega'=\theta=\theta'=0;$$

la fonction $\Phi_{p,q}(u, v)$ est

$$\Phi_{p,q}(u, v)=\sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i(p+l\rho+k\alpha\sigma)u+2\pi i[q-k\rho+(l+k\beta)\sigma]}\, e^{\pi i f(p+l\rho+k\alpha\sigma,\, q-k\rho+(l+k\beta)\sigma)}.$$

Si ε et ε' désignent des entiers quelconques, il est clair qu'on ne change pas $\Phi_{p,q}$ en changeant p en

$$p + \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha$$

et q en

$$q - \varepsilon k + \varepsilon'(l + k\beta),$$

car cela revient à augmenter ρ et σ de ε et ε'.

Maintenant changeons dans $\Phi_{p,q}(u, v)$ les signes de u et v : cela revient à changer simultanément les signes de p, q, ρ, σ, sans altérer u et v, et, par suite,

$$\Phi_{p,q}(-u, -v) = \Phi_{-p,-q}(u, v) \tag{28}$$

et, d'après la remarque précédente, pour que $\Phi_{p,q}(u, v)$ soit paire, il faut et il suffit que

$$p = -p + \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha, \qquad q = -q - \varepsilon k + \varepsilon'(l + k\beta),$$

c'est-à-dire

$$2p = \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha, \qquad 2q = -\varepsilon k + \varepsilon'(l + k\beta). \tag{29}$$

On peut supposer, sans diminuer la généralité, que ε et ε' sont égaux à 0 ou à 1 ; car augmenter ε, par exemple, de 2, revient à augmenter p et q de l et $-k$, ce qui ne change pas la fonction $\Phi_{p,q}$. En d'autres termes, on trouvera les fonctions $\Phi_{p,q}$ paires en prenant les valeurs entières de p et de q données par les équations (29) où ε et ε' désignent 0 ou 1; il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ impaire.

On voit que les équations (29) sont toujours satisfaites pour $\varepsilon = \varepsilon' = 0$, $p = q = 0$, c'est-à-dire que $\Phi_{0,0}$ est toujours paire. Résolvons ces équations par rapport à ε et ε' :

$$\begin{cases} \varepsilon\delta = 2p(l + k\beta) - 2qk\alpha, \\ \varepsilon'\delta = 2pk + 2ql. \end{cases} \tag{30}$$

42. Faisons maintenant des hypothèses :

1° δ (c'est-à-dire $l^2 + \beta kl + \alpha k^2$) *est impair*. — Les relations (30) montrent que ε et ε' sont pairs, c'est-à-dire $\varepsilon = \varepsilon' = 0$.

Il n'y a donc pas d'autre fonction $\Phi_{p,q}$ paire que $\Phi_{0,0}$. Mais la somme de $\Phi_{p,q}(u,v)$ et $\Phi_{-p,-q}(u,v)$ est paire, d'après (28), et la différence impaire. On voit ainsi qu'il existe $1+\frac{\delta-1}{2}=\frac{\delta+1}{2}$ fonctions normales paires d'indices l, k, et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires, linéairement distinctes.

2° *δ est pair.* — Ce cas se subdivise en deux autres :

a. — *k pair, l* (nécessairement) *pair.* — Les équations (29) donnent des valeurs entières de p, q pour les quatre systèmes de valeurs (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) de ε et ε' : il y a donc quatre fonctions $\Phi_{p,q}$ paires; les $\delta-4$ autres combinées deux à deux donnent $\frac{\delta-4}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-4}{2}$ impaires. Donc, on a finalement $\frac{\delta+4}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-4}{2}$ impaires, linéairement distinctes.

b. — *k impair.* — Alors δ, c'est-à-dire $l^2+\beta kl+\alpha k^2$ étant pair, α est de la parité de $l^2+\beta l$ ou $l(l+\beta)$.

Les équations (29) s'écrivent *suivant le module* 2 :

$$0\equiv\varepsilon l+\varepsilon' l(l+\beta),\qquad 0\equiv\varepsilon+\varepsilon'(l+\beta)\qquad(\mathrm{mod}\ 2).$$

Quelle que soit la parité de l, elles se réduisent à une seule, la seconde. On peut donc faire $\varepsilon'=0$ ou 1, ε s'en déduit : il y a donc deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires, et, par suite, on a $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires, linéairement distinctes.

Ainsi, en résumé :

Nombre des fonctions normales singulières d'indices l, k et de caractéristique nulle.

		Paires.	Impaires.	
δ *impair*		$\frac{\delta+1}{2}$	$\frac{\delta-1}{2}$	
δ *pair*	*k pair*	$\frac{\delta+4}{2}$	$\frac{\delta-4}{2}$	
	k impair	$\frac{\delta+2}{2}$	$\frac{\delta-2}{2}$	$(\delta=l^2+\beta kl+\alpha k^2)$

43. *Caractéristique quelconque.* — La fonction $\Phi_{p,q}$ a pour expression

$$\Phi_{p,q}(u,v) = \sum_{\rho,\sigma} e^{2\pi i\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2}\right)u+2\pi i\left[q-k\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right]v}$$
$$\times e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')}\, e^{\pi i f\left(p+l\rho+k\alpha\sigma+\frac{\omega}{2},\; q-k\rho+(l+k\beta)\sigma+\frac{\omega'}{2}\right)}.$$

Si ε et ε' sont des entiers quelconques, on voit que, si l'on change p et q en $p+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha$ et $q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta)$, cela revient à changer ρ et σ en $\rho+\varepsilon$, $\sigma+\varepsilon'$ dans la première et la troisième exponentielle : $\Phi_{p,q}$ se reproduit donc multiplié par le facteur $e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta')}$, qui est égal à ± 1.

Changeons maintenant u, v en $-u$, $-v$: cela revient à changer simultanément p, q, ρ, σ en $-p-\omega$, $-q-\omega'$, $-\rho$, $-\sigma$, dans la première et la troisième exponentielle ; comme la deuxième demeure inaltérée par ce changement, on voit que

$$\Phi_{p,q}(-u,-v) = \Phi_{-p-\omega,-q-\omega'}(u,v).$$

Par suite, pour que $\Phi_{p,q}(u,v)$ soit paire ou impaire, il faut et il suffit qu'on ait, en désignant par ε, ε' deux entiers égaux à 0 ou 1 :

$$p = -p-\omega+\varepsilon l+\varepsilon' k\alpha,$$
$$q = -q-\varepsilon k+\varepsilon'(l+k\beta);$$

$\Phi_{p,q}$ sera paire si $e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon\theta')} = 1$, impaire si $= -1$.

Les relations précédentes s'écrivent

$$(31)\qquad \begin{cases} 2p+\omega = \varepsilon l + \varepsilon' k\alpha, \\ 2q+\omega' = -\varepsilon k + \varepsilon'(l+k\beta), \end{cases}$$

d'où

$$(32)\qquad \begin{cases} \varepsilon\delta = (2p+\omega)(l+k\beta) - (2q+\omega')k\alpha, \\ \varepsilon'\delta = (2p+\omega)k + (2q+\omega')l. \end{cases}$$

44. Distinguons deux cas :

1° δ *impair*. — Les relations (32) donnent alors, suivant le module 2,

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon &\equiv \omega(l+k\beta)-\omega' k\alpha\\ \varepsilon' &\equiv \omega k \qquad\quad +\omega' l\end{aligned}\right\}\pmod 2;$$

ce qui donne un seul système de valeurs pour ε et ε', c'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire.

Elle est paire si $\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta'\equiv 0 \pmod 2$, c'est-à-dire si

$$\omega[(l+k\beta)\theta+k\theta']+\omega'[-k\alpha\theta+l\theta']\equiv 0 \pmod 2,$$

et impaire dans le cas contraire. Il y a donc, par un raisonnement déjà fait, $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions normales impaires, ou inversement.

2° δ *pair*. — Subdivisons encore ce cas en deux :

a. — *k pair, l* (nécessairement) *pair*. — Les relations (31) donnent, suivant le module 2,

$$\omega\equiv 0, \qquad \omega'\equiv 0,$$

c'est-à-dire $\omega=\omega'=0$. Si donc ω et ω' ne sont pas nuls à la fois, il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire; c'est-à-dire qu'il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires, et autant d'impaires.

Si $\omega=\omega'=0$, on peut satisfaire aux équations (31) en prenant ε et ε' égaux à volonté à 0 ou 1; il y a donc quatre fonctions $\Phi_{p,q}$ qui sont paires ou impaires, selon la parité de $\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta'$, c'est-à-dire suivant la parité des quatre nombres $0, \theta, \theta', \theta+\theta'$. Comme θ et θ' ne sont pas nuls simultanément, puisque la caractéristique n'est pas nulle, deux de ces quatre nombres sont pairs et deux impairs. Donc il y a deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires et deux impaires; par suite, il y a $2+\frac{\delta-4}{2}=\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires.

En résumé, dans le cas de δ pair et k pair, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires, linéairement distinctes.

b. — *k impair.* — En ce cas, δ étant pair, on a

$$\alpha \equiv l(l+\beta) \qquad (\text{mod } 2),$$

et les équations (31) s'écrivent, suivant le module 2,

$$(33) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega &\equiv \varepsilon l + \varepsilon' l(l+\beta) \\ \omega' &\equiv \varepsilon + \varepsilon' (l+\beta) \end{aligned} \right. \qquad (\text{mod } 2);$$

on en conclut

$$\omega \equiv l\omega' \qquad (\text{mod } 2).$$

Si donc ω n'est pas de même parité que $l\omega'$, il n'y a pas de fonction $\Phi_{p,q}$ paire ou impaire, et, par suite, il existe $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires, linéairement distinctes.

Si $\omega' \equiv l\omega'$ (mod 2), la première équation (33) est une conséquence de la seconde, qui donne

$$\varepsilon \equiv \omega' + \varepsilon'(l+\beta) \qquad (\text{mod } 2).$$

On peut donc prendre $\varepsilon' = 0$ et 1 : on a deux valeurs correspondantes de ε, et par suite deux fonctions $\Phi_{p,q}$ paires ou impaires, selon la parité de $\varepsilon\theta + \varepsilon'\theta'$, c'est-à-dire du nombre

$$\theta\omega' + \varepsilon'[\theta' + \theta(l+\beta)].$$

Si $\theta' + \theta(l+\beta)$ est impair, la parité de ce nombre change avec celle de ε', de sorte qu'il y a une fonction $\Phi_{p,q}$ paire et une impaire, d'où $\frac{\delta}{2}$ fonctions normales paires et autant d'impaires.

Si $\theta' + \theta(l+\beta)$ est pair, les deux fonctions $\Phi_{p,q}$ sont paires lorsque $\theta\omega'$ est pair; elles sont impaires dans le cas contraire. On a donc $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions normales paires et $\frac{\delta-2}{2}$ impaires, ou inversement, selon que $\theta\omega'$ est pair ou impair.

45. Le tableau suivant résume tous ces résultats.

Nombre des fonctions normales singulières d'indices l, k, et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \theta \\ \omega' & \theta' \end{vmatrix}$, *non nulle.*

			Paires.	Impaires.
δ *impair*	$\omega[(l+k\beta)\theta+k\theta']+\omega'[-k\alpha\theta+l\theta']$ *pair*...		$\frac{\delta+1}{2}$	$\frac{\delta-1}{2}$
	id.	*impair*..	$\frac{\delta-1}{2}$	$\frac{\delta+1}{2}$
δ *pair*	k *pair*............................		$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$
	k *impair*..........................		$\frac{\delta}{2}$	$\frac{\delta}{2}$
	toutefois si k *impair*, $\omega+l\omega'$ et $\theta'+\theta(l+\beta)$ *pairs*	$\theta\omega'$ *pair*....	$\frac{\delta+2}{2}$	$\frac{\delta-2}{2}$
		$\theta\omega'$ *impair*..	$\frac{\delta-2}{2}$	$\frac{\delta+2}{2}$

$(\delta = l^2+\beta kl+\alpha k^2)$

Ces résultats supposent que la relation singulière entre g, h, g' a été ramenée à $\alpha g+\beta h+g'=0$; l et k sont les deux indices des fonctions considérées, et $\delta = l^2+\beta kl+\alpha k^2$.

46. Remarque I. — Désignons par $F(u, v)$ une fonction normale, d'indices l, k, de caractéristique nulle, et qui soit paire ou impaire; considérons la demi-période

$$\frac{\mathfrak{P}}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\lambda g+\frac{1}{2}\lambda' h, \qquad \frac{\mathfrak{P}'}{2} = \frac{1}{2}\varepsilon'+\frac{1}{2}\lambda h+\frac{1}{2}\lambda' g',$$

où ε, ε', λ, λ' sont 0 ou 1; et posons

$$\psi(u, v) = e^{\pi i\{(l\lambda+k\alpha\lambda')u+[-k\lambda+(l+k\beta)\lambda']v\}}\,F\left(u+\frac{\mathfrak{P}}{2},\ v+\frac{\mathfrak{P}'}{2}\right). \tag{34}$$

On vérifie aisément que $\psi(u, v)$ est une fonction normale, soit paire, soit impaire, d'indices l, k, et dont la caractéristique est définie par

$$(35)\left\{\begin{array}{ll}\omega \equiv l\lambda + k\alpha\lambda' & \theta \equiv -l\varepsilon + k\varepsilon' \\ \omega' \equiv -k\lambda + (l+k\beta)\lambda', & \theta' \equiv -k\alpha\varepsilon - (l+k\beta)\varepsilon'\end{array}\right. \pmod 2.$$

Inversement, si l'on se donne ω, θ, ω', θ', *et si l'on suppose* δ *impair,* ces équations donnent toujours pour λ, λ' et ε, ε' des valeurs entières (o ou 1), car le déterminant $\delta \equiv 1 \pmod 2$, par hypothèse. On en conclut, puisque les δ fonctions normales d'indices l, k, et de caractéristique donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires (ou inversement, n° **45**) : 1° que les $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions du premier groupe se déduisent des $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires de mêmes indices et de caractéristique nulle par l'addition à u, v d'une même demi-période : 2° que les $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions du second groupe se déduisent des $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires de caractéristique nullé par l'addition de la même demi-période, le tout à un même facteur exponentiel près (34).

Aux quinze demi-périodes, autres que $u=0$, $v=0$, correspondent ainsi les fonctions des quinze caractéristiques non nulles.

47. Remarque II. — *Supposons* δ *pair et* k *impair.* Les δ fonctions normales d'indices l, k et de caractéristique $\begin{vmatrix}\omega & \omega' \\ \theta & \theta'\end{vmatrix}$ se divisent en $\frac{\delta}{2}$ paires et $\frac{\delta}{2}$ impaires, sauf pour les caractéristiques qui vérifient les congruences

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta) \qquad \pmod 2,$$

(n° **45**).

Ces caractéristiques *remarquables* sont au nombre de quatre, à savoir :

$$\begin{array}{lcccc}\omega \equiv 0 & 0 & l & l & \\ \omega' \equiv 0 & 0 & 1 & 1 & \pmod 2, \\ \theta \equiv 0 & 1 & 0 & 1 & \\ \theta' \equiv 0 & l+\beta & 0 & l+\beta & \end{array}$$

parmi elles figure la caractéristique nulle.

Supposons alors que, dans la formule (34), $F(u,v)$ désigne une fonction normale, paire ou impaire, d'indices l, k et de caractéristique nulle; la caractéristique de $\psi(u,v)$ sera, en faisant $k\equiv 1$ dans (35) et $\alpha\equiv l(l+\beta)$:

$$\begin{aligned} \omega &\equiv l[\lambda+(l+\beta)\lambda'], & \theta &\equiv l\varepsilon+\varepsilon' \\ \omega' &\equiv \lambda+(l+\beta)\lambda', & \theta' &\equiv (l+\beta)(l\varepsilon+\varepsilon') \end{aligned} \pmod 2,$$

c'est-à-dire que

$$\omega\equiv l\omega', \qquad \theta'\equiv\theta(l+\beta);$$

$\psi(u,v)$ appartient donc à une des *quatre caractéristiques remarquables*. On déduit de là, sans difficulté, les résultats suivants :

1° Si l'on augmente u, v d'une des quatre demi-périodes telles que

$$\lambda+(l+\beta)\lambda'\equiv 0, \qquad l\varepsilon+\varepsilon'\equiv 0,$$

c'est-à-dire d'une des quatre demi-périodes définies par

$$\begin{array}{lcccc} \varepsilon\equiv 0 & 0 & 1 & 1 \\ \varepsilon'\equiv 0 & 0 & l & l \\ \lambda\equiv 0 & l+\beta & 0 & l+\beta \\ \lambda'\equiv 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \pmod 2,$$

les fonctions singulières paires (ou impaires) de mêmes indices l, k, ayant une des quatre caractéristiques remarquables, se transforment respectivement les unes dans les autres.

2° Les δ fonctions normales d'indices (l,k), de l'une des trois caractéristiques remarquables, autre que la caractéristique nulle, se divisent en $\frac{\delta+2}{2}$ paires et $\frac{\delta-2}{2}$ impaires, ou inversement (n° 45): les $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions se déduisent des $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires de caractéristique nulle par l'addition à u, v d'une même demi-période; et les $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions se déduisent des $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires de caractéristique nulle par l'addition de la même demi-période. Il y a d'ailleurs quatre demi-périodes répondant à la question.

TROISIÈME PARTIE.

Courbes singulières sur les surfaces de Kummer.

48. Considérons une surface hyperelliptique singulière quelconque, c'est-à-dire une surface pour laquelle les coordonnées d'un point sont des fonctions abéliennes singulières de deux paramètres, u et v.

Dans mon Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques (ce Journal, t. IX, 4e série, p. 42 et 43), j'ai reconnu, en partant d'un important théorème de M. Appell (¹), que l'équation de toute courbe algébrique, tracée sur une quelconque de ces surfaces, s'obtient en égalant à zéro une fonction intermédiaire, et réciproquement.

Si la surface hyperelliptique est singulière, elle admettra donc des courbes algébriques qui n'existent pas dans le cas général, et qu'on obtient en annulant les fonctions intermédiaires singulières; ce sont ces *courbes singulières* que nous allons maintenant étudier, en supposant que la surface hyperelliptique sur laquelle elles sont tracées est une *surface de Kummer*.

49. Nous représenterons paramétriquement la surface de Kummer par le procédé de M. Weber (*Crelle*, t. 84) : les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point sont des fonctions thêta du second ordre, normales et à caractéristique nulle. Ces fonctions étant toutes paires, à un point de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ correspondent (aux périodes près) les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$; il en résulte sans difficulté que l'équation d'une courbe quelconque tracée sur $\mathfrak{K}$ s'obtient

(¹) *Journal de Math.*, 4e série, t. VII, p. 195-196.

en annulant une fonction intermédiaire paire ou impaire, et réciproquement (*voir*, par exemple, notre Mémoire cité plus haut, p. 48 et 49); en d'autres termes :

L'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, *s'obtient en égalant à zéro une fonction intermédiaire normale, paire ou impaire, de caractéristique quelconque; et réciproquement.*

Si la fonction intermédiaire est une fonction thêta, c'est-à-dire si son indice k est nul (n° **21**), la courbe est une courbe *ordinaire*, existant sur toute surface de Kummer; si k est différent de zéro, la fonction intermédiaire et la courbe correspondante sont *singulières*, et réciproquement.

D'après cela, les courbes ordinaires sont un cas particulier des courbes singulières; il suffira, dans les formules relatives aux secondes, de supposer $k = 0$ pour les appliquer aux premières.

50. *Degré d'une courbe singulière.* — Soit $F_{l,k}(u, v) = 0$ l'équation d'une telle courbe; son degré est la moitié du nombre des zéros communs à $F_{l,k}(u, v)$ et à une fonction thêta paire, d'ordre deux, et de caractéristique nulle; c'est-à-dire à $F_{l,k}(u, v)$ et à une fonction $F_{2,0}(u, v)$; d'après la formule (25) du n° **34**, le degré est donc

$$\tfrac{1}{2}(2.2l + \beta.2k), \quad \text{c'est-à-dire} \quad 2l + \beta k,$$

quantité toujours positive (n° **29**).

Si $\beta \equiv 0 \pmod 2$, c'est-à-dire si l'invariant Δ de la relation fondamentale entre les périodes est de la forme $4n$, on voit que le degré des courbes singulières est toujours pair; si $\beta \equiv 1 \pmod 2$, c'est-à-dire si Δ est de la forme $4n + 1$, le degré peut être pair ou impair, selon la parité de k.

51. *Familles de courbes singulières.* — Les fonctions singulières normales, de mêmes indices l, k, de même caractéristique (quelconque d'ailleurs), et qui sont, soit paires, soit impaires, sont des fonctions linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles (n^{os} **40-44**) : les courbes qu'on obtient sur la surface de Kummer en les égalant à zéro, appartiennent donc à une série *linéaire*, nous dirons qu'elles forment une *famille de courbes singulières*.

Une famille est donc déterminée : 1° par les indices l et k; 2° par la caractéristique; 3° par le caractère de fonction paire ou impaire des fonctions normales correspondantes. Par suite, à des indices donnés l, k correspondent, puisqu'il y a seize caractéristiques, *trente-deux* familles de courbes singulières.

Si $k = 0$, les trente-deux familles deviennent des familles de courbes ordinaires, puisque les fonctions normales correspondantes sont des fonctions thêta.

52. Les courbes d'une même famille singulière passent *toutes* par un certain nombre de points doubles de la surface de Kummer, comme on va l'établir. Auparavant il est utile de rappeler quelques définitions et propriétés relatives aux points doubles.

53. *Points doubles de la surface de Kummer.* — Ils sont au nombre de seize, situés six à six dans seize plans dits *singuliers*, qui touchent respectivement $\mathfrak{K}$ suivant une conique. Leurs arguments u, v sont les seize demi-périodes, c'est-à-dire

$$u = \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda g + \tfrac{1}{2}\lambda' h,$$
$$v = \tfrac{1}{2}\varepsilon' + \tfrac{1}{2}\lambda h + \tfrac{1}{2}\lambda' g',$$

où ε, ε', λ, λ' sont égaux à 0 ou 1.

Rappelons d'abord la notation que nous avons proposée ([1]) pour les seize plans singuliers et les seize points doubles; les plans singuliers sont représentés respectivement par un des seize symboles :

$$11',\quad 12',\quad 13',\quad 14',\quad 21',\quad 22',\quad \ldots,\quad 44',$$

obtenus en combinant un des caractères 1, 2, 3, 4 avec un des carac-

([1]) Ce Journal, t. IX, 4e série, p. 58.

tères $1'$, $2'$, $3'$, $4'$; les seize points doubles sont représentés par les mêmes symboles (avec parenthèses)

$$(11'),\quad (12'),\quad \ldots,\quad (44').$$

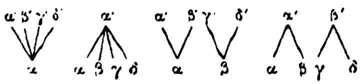
Les six points doubles situés dans le plan $\alpha\alpha'$ sont

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\alpha'),\quad (\gamma\alpha'),\quad (\delta\alpha').$$

de même, les six plans singuliers qui passent par le point $(\alpha\alpha')$ sont

$$\alpha\beta',\quad \alpha\gamma',\quad \alpha\delta',\quad \beta\alpha',\quad \gamma\alpha',\quad \delta\alpha';$$

Quatre points doubles forment un *groupe de Rosenhain*, lorsque le tétraèdre qui les a pour sommets a pour faces quatre plans singuliers : il y a quatre-vingt de ces tétraèdres. Si l'on dispose les caractères $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ sur une ligne horizontale, dans un ordre quelconque, et les caractères 1, 2, 3, 4 sur une ligne parallèle située au-dessous, dans un ordre également quelconque, et si l'on représente le point $(\alpha\alpha')$ par la droite qui joint les caractères α et α', les *symboles graphiques* des groupes ou tétraèdres de Rosenhain sont



De même, quatre points doubles forment un *groupe de Göpel*, lorsque le tétraèdre qui les a pour sommets n'a pour face aucun plan singulier : il y a soixante tétraèdres de Göpel ayant pour symboles graphiques

Le symbole graphique des six points doubles situés dans un même plan singulier est

Indiquons enfin les symboles de groupes remarquables de huit points, formant ce qu'on peut appeler un *octaèdre de Göpel*, et que nous retrouverons par la suite : ce sont

Il y a trente de ces octaèdres.

34. Quant à la relation entre la notation symbolique et les demi-périodes correspondantes, elle est marquée au Tableau suivant :

Symboles.	Demi-périodes correspondantes.			
	ε.	ε'.	λ.	λ'.
(11')	0	0	0	0
(12')	0	1	0	0
(21')	1	0	0	0
(22')	1	1	0	0
(31')	0	0	1	0
(32')	0	1	1	0
(41')	1	0	1	0
(42')	1	1	1	0
(13')	0	0	0	1
(14')	0	1	0	1
(23')	1	0	0	1
(24')	1	1	0	1
(33')	0	0	1	1
(34')	0	1	1	1
(43')	1	0	1	1
(44')	1	1	1	1

La demi-période ε, ε', λ, λ' est

$$u = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' h,$$

$$v = \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g'.$$

35. Il est intéressant de voir ce que deviennent les symboles ci-dessus, quand on ajoute aux seize demi-périodes une même demi-période, autre que $u = 0$, $v = 0$; voici les résultats, qu'on vérifie immédiatement à l'aide du Tableau précédent.

Ajouter la demi-période $u = \frac{1}{2}$, $v = 0$ revient à permuter 1 et 2, 3 et 4, sans changer 1′, 2′, 3′, 4′; c'est-à-dire que la demi-période, qu'on obtient en ajoutant $\frac{1}{2}$, 0 à (23′), est (13′). Ainsi :

L'addition	de la demi-période	$\varepsilon = 0$,	$\varepsilon' = 1$,	$\lambda = 0$,	$\lambda' = 0$	permute	1 et 2; 3 et 4; ... de même :
»	»	1	0	0	0	»	1′, 2′; 3′, 4′;
»	»	1	1	0	0	»	1, 2; 3, 4; 1′, 2′; 3′, 4′.
»	»	0	0	1	0	»	1, 3; 2, 4;
»	»	0	1	1	0	»	1, 4; 2, 3;
»	»	1	0	1	0	»	1, 3; 2, 4; 1′, 2′; 3′, 4′.
»	»	1	1	1	0	»	1, 4; 2, 3; 1′, 2′; 3′, 4′.
»	»	0	0	0	1	»	1′, 3′; 2′, 4′;
»	»	0	1	0	1	»	1, 2; 3, 4; 1′, 3′; 2′, 4′.
»	»	1	0	0	1	»	1′, 4′; 2′, 3′;
»	»	1	1	0	1	»	1, 2; 3, 4; 1′, 4′; 2′, 3′.
»	»	0	0	1	1	»	1, 3; 2, 4; 1′, 3′; 2′, 4′.
»	»	0	1	1	1	»	1, 4; 2, 3; 1′, 3′; 2′, 4′.
»	»	1	0	1	1	»	1, 3; 2, 4; 1′, 4′; 2′, 3′.
»	»	1	1	1	1	»	1, 4; 2, 3; 1′, 4′; 2′, 3′.

Zéros remarquables des fonctions normales, paires ou impaires.

56. *Toutes* les fonctions normales paires, de caractéristique donnée, correspondant à des indices l et k donnés, ou *toutes* les fonctions normales impaires correspondantes, s'annulent pour une demi-période quelconque, c'est-à-dire pour

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda g + \frac{1}{2}\lambda' h, \\ v &= \frac{1}{2}\varepsilon' + \frac{1}{2}\lambda h + \frac{1}{2}\lambda' g'. \end{aligned}\right.$$

On a en effet, d'après les relations mêmes qui définissent une fonction normale $F(u, v)$, d'indices l et k,

$$\begin{aligned} &F(u + \varepsilon + \lambda g + \lambda' h, v + \varepsilon' + \lambda h + \lambda' g') \\ &\quad = F(u, v) e^{\pi i(\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta')} \times e^{2\pi i\lambda(-lu + kv) + 2\pi i\lambda'[-k\alpha u - (l + k\beta)v]} \\ &\quad\quad \times e^{\pi i\lambda^2(-lg + kh) + 2\pi i\lambda\lambda'(-lh + kg')} \times e^{\pi i\lambda'^2[-k\alpha h - (l + k\beta)g']}. \end{aligned}$$

Si l'on fait, dans cette relation,

$$u = -\tfrac{1}{2}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda g - \tfrac{1}{2}\lambda' h, \qquad v = -\tfrac{1}{2}\varepsilon' - \tfrac{1}{2}\lambda h - \tfrac{1}{2}\lambda' g',$$

et si, pour abréger, on désigne par $-\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $-\frac{\mathfrak{P}'}{2}$ ces valeurs de u, v, il vient

$$F\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right) = F\left(-\frac{\mathfrak{P}}{2}, -\frac{\mathfrak{P}'}{2}\right) e^{\pi i[\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + k(\varepsilon'\lambda + \alpha\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda')]}.$$

Si donc le nombre

$$(2) \qquad N = \varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + k(\varepsilon'\lambda + \alpha\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda')$$

est *pair*, la relation précédente montre que les fonctions $F(u, v)$ *impaires* s'annulent pour la demi-période $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}$; si ce nombre est *impair*, ce sont les fonctions $F(u, v)$ *paires* qui s'annulent.

57. Il est aisé de trouver les demi-périodes qui annulent les fonctions $F(u, v)$ paires ou impaires. Plusieurs cas sont à distinguer :

58. Premier cas : *k est pair.* — Le nombre N (2) est alors de même parité que

$$\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') :$$

donc, ω, ω', θ, θ' étant donnés, c'est-à-dire la caractéristique étant donnée, les fonctions normales paires (impaires), pour lesquelles l a la même parité, s'annulent pour les mêmes demi-périodes. En particulier, elles s'annulent pour les mêmes demi-périodes que les fonctions thêta normales paires (impaires) dont l'ordre a la parité de l; géométriquement, si k est pair, les courbes des familles singulières passent sur la surface de Kummer par les mêmes groupes de points doubles que les courbes des familles ordinaires. Ainsi (1) :

k étant pair,

---

(1) *Voir* notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX de ce *Journal*, 4e série, p. 72-74.

Si l est pair, $\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2$ l'est également :

1° *Les* $\frac{\delta+4}{2}$ *fonctions singulières normales paires, d'indices l, k et de caractéristique nulle, ne s'annulent simultanément par aucune demi-période : il leur correspond une famille,* $\frac{\delta+4}{2} - 1$ *fois infinie, de courbes singulières ne passant par aucun point double de la surface de Kummer ;*

2° *Les* $\frac{\delta-4}{2}$ *fonctions singulières normales impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les seize demi-périodes ; il leur correspond une famille,* $\frac{\delta-4}{2} - 1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par les seize points doubles ;*

3° *Les* $\frac{\delta}{2}$ *fonctions singulières normales paires, de caractéristique donnée non nulle, s'annulent pour huit demi-périodes et les* $\frac{\delta}{2}$ *fonctions normales impaires de même caractéristique s'annulent pour les huit autres ; il correspond respectivement à ces deux séries de fonctions deux familles,* $\frac{\delta}{2} - 1$ *fois infinie chacune, de courbes singulières ; les courbes de la première famille passent toutes par huit points doubles formant un octaèdre de Göpel, les courbes de la seconde famille passent par les huit autres points doubles qui forment aussi un pareil octaèdre.*

Si l est impair, δ est également impair :

Les δ fonctions singulières normales, de caractéristique donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions paires et* $\frac{\delta-1}{2}$ *fonctions impaires, ou inversement, selon que la caractéristique est paire ou impaire* (¹) *: aux* $\frac{\delta+1}{2}$ *fonctions correspond une famille,* $\frac{\delta+1}{2} - 1$ *fois infinie, de courbes singulières passant par six points doubles situés dans un même plan singulier de la surface de Kummer ; aux*

(¹) La caractéristique est paire ou impaire, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair ou impair.

$\frac{\delta-1}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta-1}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant par les dix autres points doubles.

59. Deuxième cas : *k est impair.* — Le nombre N (2) a la parité de

$$\varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'+\lambda\theta+\lambda'\theta'+l(\varepsilon\lambda+\varepsilon'\lambda')+\varepsilon'\lambda+\alpha\varepsilon\lambda'+\beta\varepsilon'\lambda'.$$

D'ailleurs $l^2+\beta l+\alpha\equiv\delta\ (\mathrm{mod}\ 2)$, et en remplaçant α par sa valeur tirée de cette congruence, on est ramené au nombre

$$(3)\qquad \begin{cases} \varepsilon\omega+\varepsilon'\omega'+\lambda\theta+\lambda'\theta' \\ \qquad +l(\varepsilon\lambda+\varepsilon'\lambda')+\varepsilon'\lambda+\delta\varepsilon\lambda'+l(l+\beta)\varepsilon\lambda'+\beta\varepsilon'\lambda'. \end{cases}$$

Distinguons maintenant trois sous-cas désignés ci-dessous par I, II, III.

60. 1° *δ est impair.* — D'après le n° 46 les fonctions singulières normales paires et impaires, de caractéristique donnée quelconque, se déduisent (à un facteur exponentiel près) des fonctions singulières normales, paires et impaires ou impaires et paires, par l'addition à u, v d'une demi-période.

Il suffit donc d'étudier les demi-périodes qui annulent les fonctions paires et impaires de caractéristique nulle.

Le nombre (3) est alors, en y faisant $\omega=\omega'=\theta=\theta'=0$ et $\delta=1$,

$$l(\varepsilon\lambda+\varepsilon'\lambda')+\varepsilon'\lambda+\varepsilon\lambda'+l(l+\beta)\varepsilon\lambda'+\beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$[\varepsilon'+\varepsilon l][\lambda+\lambda'(l+\beta)]+\varepsilon\lambda'.$$

S'il est $\equiv 1$, les fonctions paires de caractéristique nulle s'annulent pour la demi-période $(\varepsilon, \varepsilon', \lambda, \lambda')$, sinon ce sont les fonctions impaires. Or l'équation

$$xy+zt\equiv \mathrm{A}\qquad (\mathrm{mod}\ 2),$$

où x, y, z, t sont 0 ou 1, a *six* solutions si $\mathrm{A}\equiv 1$, et *dix* si $\mathrm{A}\equiv 0$;

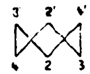
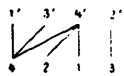
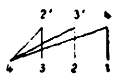
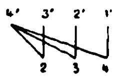
pour $A \equiv 1$, ces solutions sont

$$\begin{array}{llllll} x = 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ y = 0, & 1, & 0, & 1, & 1, & 1, \\ z = 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 1, \\ t = 1, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0. \end{array}$$

Les fonctions paires, de caractéristique nulle, d'indices l et k, s'annulent donc pour les six demi-périodes

$$\left.\begin{array}{lllllll} \varepsilon \equiv & 1, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ \varepsilon' \equiv & l, & l, & l+1, & 1, & 1, & l+1, \\ \lambda \equiv & l+\beta, & l+\beta+1, & l+\beta, & 1, & l+\beta+1, & 1, \\ \lambda' \equiv & 1, & 1, & 1, & 0, & 1, & 0. \end{array}\right\} \pmod 2.$$

Les notations symboliques de ces six demi-périodes sont les suivantes, suivant la parité de β et de l :

β *pair*	l *pair* ...	$(23')$,	$(43')$,	$(24')$,	$(32')$,	$(34')$,	$(42')$	
	l *impair*.	$(44')$,	$(24')$,	$(43')$,	$(32')$,	$(14')$,	$(41')$	
β *impair*	l *pair* ...	$(43')$,	$(23')$,	$(44')$,	$(32')$,	$(14')$,	$(42')$	
	l *impair*.	$(24')$,	$(44')$,	$(23')$,	$(32')$,	$(34')$,	$(41')$	

On a ainsi trois types de groupes de six points doubles de $\mathfrak{K}$ (les deux derniers revenant évidemment au même) qu'on peut caractériser aisément au point de vue géométrique.

Le premier type : $(23')$, $(43')$, $(24')$, $(32')$, $(34')$, $(42')$ est formé par les six sommets non communs à deux tétraèdres de Göpel qui ont un sommet commun $(22')$.

Le deuxième type : (44′), (24′), (43′), (32′), (14′), (41′) est formé par les six sommets non communs à deux tétraèdres de Rosenhain qui ont un sommet commun (42′).

Le troisième type : (43′), (23′), (44′), (32′), (14′), (42′) est formé par les six sommets non communs à un tétraèdre de Göpel et à un tétraèdre de Rosenhain qui ont un sommet commun (41′).

Les fonctions impaires, de caractéristique nulle, d'indices l et k s'annulent pour les *dix* demi-périodes qui n'annulent pas les fonctions paires.

On passe enfin du cas de la caractéristique nulle à celui des caractéristiques non nulles en ajoutant une même demi-période à chacun des groupes ci-dessus; les notations symboliques des groupes nouveaux se déduisent des précédentes par les règles du n° **55**, et l'on reconnaît que les systèmes de six points doubles correspondants possèdent encore les mêmes propriétés géométriques. En résumé :

61. I. *k étant impair, si δ est impair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l et k, de caractéristique donnée quelconque, se divisent en $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions impaires, ou inversement(¹) : *aux $\frac{\delta+1}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta+1}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant toutes par six points doubles, non situés dans un même plan singulier, de la surface de Kummer; aux $\frac{\delta-1}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta-1}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant par les dix autres points doubles.*

Comme il y a seize caractéristiques, on trouve ainsi, pour l et k donnés (k impair), *seize groupes* remarquables de six points doubles, qui ne dépendent que de la parité de l et de β et qui se déduisent de l'un d'eux par l'addition d'une des quinze demi-périodes autres que (o, o) : on vérifie sans difficulté que deux quelconques de ces groupes ont

(¹) Selon que $\omega[(l+\beta)\theta+\theta']+\omega'[-\alpha\theta+l\theta']$ est pair ou impair (n° **45**).

toujours deux points communs et deux seulement; les huit points non communs forment un octaèdre de Göpel; enfin un même point singulier appartient à six groupes.

62. 2° *δ est pair, et la caractéristique est telle que*

$$\omega \equiv l\omega'; \; \theta' \equiv \theta(l+\beta) \pmod 2.$$

Comme d'après le n° **47** on passe au cas de la caractéristique non nulle en ajoutant une demi-période convenable aux fonctions normales, paires et impaires, de caractéristique nulle, nous supposerons encore

$$\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0.$$

Le nombre (3) est alors, en faisant $\delta \equiv 0$, de la parité de

$$l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + l(l+\beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$[\varepsilon' + \varepsilon l][\lambda + \lambda'(l+\beta)].$$

On a donc à étudier une congruence de la forme

$$xy \equiv \mathrm{A} \qquad \pmod 2.$$

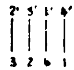
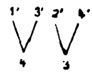
Si $\mathrm{A} \equiv 1$, on a nécessairement $x = 1$, $y = 1$, d'où

$$\varepsilon' + \varepsilon l \equiv 1, \qquad \lambda + \lambda'(l+\beta) \equiv 1 \qquad \pmod 2,$$

ce qui donne pour zéros des fonctions *paires*, de caractéristique nulle, d'indices l, k, les *quatre* demi-périodes

$$\begin{array}{llll}
\varepsilon \equiv 0, & 0, & 1, & 1, \\
\varepsilon' \equiv 1, & 1, & l+1, & l+1, \\
\lambda \equiv 1, & l+\beta+1, & 1, & l+\beta+1, \\
\lambda' \equiv 0, & 1, & 0, & 1.
\end{array}$$

Les notations symboliques correspondantes sont, suivant la parité de β et de l :

β *pair*	l *pair*................	$(32')$,	$(34')$,	$(42')$,	$(44')$	
	l *impair*..............	$(32')$,	$(14')$,	$(41')$,	$(23')$	
β *impair*	l *pair*................	$(32')$,	$(14')$,	$(42')$,	$(24')$	
	l *impair*..............	$(32')$,	$(34')$,	$(41')$,	$(43')$	

Si β est pair, les quatre points forment donc un *groupe de Göpel;* si β est impair, *un groupe de Rosenhain*.

Les fonctions impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les *douze* demi-périodes qui n'annulent pas les fonctions paires.

Pour passer au cas des trois caractéristiques remarquables non nulles telles que $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta)$, il suffit d'ajouter une demi-période aux groupes de quatre points ci-dessus; on retrouve soit le même groupe (pour quatre demi-périodes y compris o, o), soit trois autres groupes, dont chacun correspond à une des trois caractéristiques. Le Tableau suivant fait connaître ces groupes de quatre points, selon la parité de β et de l; on y a récrit le groupe qui répond à la caractéristique nulle.

β *pair.*

l pair.				*l impair.*			
$(32')$,	$(34')$,	$(42')$,	$(44')$,	$(32')$,	$(14')$,	$(41')$,	$(23')$,
$(31')$,	$(33')$,	$(41')$,	$(43')$,	$(42')$,	$(24')$,	$(31')$,	$(13')$,
$(12')$,	$(14')$,	$(22')$,	$(24')$,	$(12')$,	$(34')$,	$(21')$,	$(43')$,
$(11')$,	$(13')$,	$(21')$,	$(23')$,	$(22')$,	$(44')$,	$(11')$,	$(33')$,

β *impair.*

l pair.				*l impair.*			
(32′),	(14′),	(42′),	(24′),	(32′),	(34′),	(41′),	(43′),
(31′),	(13′),	(41′),	(23′),	(31′),	(33′),	(42′),	(44′),
(12′),	(34′),	(22′),	(44′),	(12′),	(14′),	(21′),	(23′),
(11′),	(33′),	(21′),	(43′),	(22′),	(24′),	(11′),	(13′).

Ce Tableau montre que, dans chaque cas, les quatre groupes de quatre points comprennent une (et une seule) fois chacun des seize points doubles; deux quelconques d'entre eux forment un octaèdre de Göpel; si β est pair, chaque groupe est un groupe de Göpel; si β est impair, un groupe de Rosenhain. En résumé :

63. II. *k étant impair, si δ est pair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l et k, appartenant à l'une des quatre caractéristiques remarquables $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ telles que $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta)$ (mod 2), se divisent en $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions paires et $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions impaires, ou inversement, selon que $\theta\omega'$ est pair ou impair : aux $\frac{\delta+2}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta+2}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant toutes par quatre points doubles de la surface de Kummer; aux $\frac{\delta-2}{2}$ fonctions correspond une famille, $\frac{\delta-2}{2}-1$ fois infinie, de courbes singulières passant par les douze autres points doubles.

Aux quatre caractéristiques correspondent ainsi quatre groupes de quatre points doubles, dont l'ensemble forme les seize points doubles de la surface.

64. 3° *δ est pair et la caractéristique ne vérifie pas*

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l+\beta) \qquad (\text{mod } 2).$$

En ce cas, il y a $\frac{\delta}{2}$ fonctions paires d'indices l, k et autant d'impaires; la caractéristique ne peut être nulle. Le nombre (3) s'écrit, en y faisant $\delta = 0$,

$$\varepsilon\omega + \varepsilon'\omega' + \lambda\theta + \lambda'\theta' + l(\varepsilon\lambda + \varepsilon'\lambda') + \varepsilon'\lambda + l(l+\beta)\varepsilon\lambda' + \beta\varepsilon'\lambda',$$

ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}&|\varepsilon' + \varepsilon l + \theta||\lambda + \lambda'(l+\beta) + \omega'| + |\varepsilon + \theta' + \theta(l+\beta)||\omega + l\omega'|\\ &\quad + \lambda'|\theta' + \theta(l+\beta)| + \omega|\theta' + \theta(l+\beta)| + \omega'|\theta' l + \theta l(l+\beta) + \theta|.\end{aligned}$$

Pour trouver les demi-périodes qui annulent les fonctions paires, il faut exprimer que ce nombre $\equiv 1 \pmod 2$; ce qui, en représentant par Ω les termes de la seconde ligne, formés de quantités connues, donne une congruence de la forme

$$xy + z(\omega + l\omega') + t|\theta' + \theta(l+\beta)| \equiv \Omega + 1 \pmod 2.$$

Or, par hypothèse, $\omega + l\omega'$ et $\theta' + \theta(l+\beta)$ ne sont pas pairs à la fois, de sorte que, si $\omega + l\omega' \equiv 1$ par exemple, on peut donner à x, y, t les valeurs 0 ou 1 et en déduire toujours une valeur de z. On a donc en tout *huit* solutions en x, y, z, t; à une de ces solutions x, y, z, t correspond la solution en ε, ε', λ, λ' :

$$(4)\quad \begin{cases} \varepsilon' + \varepsilon l + \theta \equiv x, & \varepsilon + \theta' + \theta(l+\beta) \equiv z,\\ \lambda + \lambda'(l+\beta) + \omega' \equiv y, & \lambda' \equiv t,\end{cases}$$

ce qui donne un et un seul système ε, ε', λ, λ'. Donc les fonctions normales paires s'annulent pour *huit* demi-périodes, et les fonctions impaires pour les *huit* autres : les groupes de points doubles correspondants ne dépendent, d'après (4), que de la parité de l et de β.

Comme les caractéristiques qui ne vérifient pas $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta)$ sont au nombre de $16 - 4 = 12$, on trouve ainsi, pour l et β de parités données, $2 \times 12 = 24$ groupes de huit points doubles; ces groupes sont *associés* deux à deux de telle sorte que les huit points doubles qui ne font pas partie d'un groupe appartiennent à l'autre. Il suffira donc d'écrire douze des vingt-quatre groupes; les douze autres s'en déduisent immédiatement. Voici les résultats :

β pair.

l pair.

$(44')\ (24')\ (43')\ (32')\ (12')\ (13')\ (21')\ (31')$
$(44')\ (24')\ (43')\ (41')\ (11')\ (13')\ (22')\ (42')$
$(44')\ (24')\ (32')\ (41')\ (11')\ (12')\ (23')\ (33')$
$(44')\ (43')\ (32')\ (14')\ (22')\ (23')\ (11')\ (31')$
$(44')\ (43')\ (14')\ (41')\ (21')\ (23')\ (12')\ (42')$
$(44')\ (32')\ (14')\ (41')\ (21')\ (22')\ (13')\ (33')$
$(24')\ (43')\ (32')\ (41')\ (21')\ (22')\ (23')\ (34')$
$(44')\ (24')\ (43')\ (14')\ (33')\ (34')\ (11')\ (21')$
$(44')\ (24')\ (14')\ (41')\ (31')\ (34')\ (13')\ (23')$
$(24')\ (32')\ (14')\ (41')\ (42')\ (11')\ (21')\ (31')$
$(24')\ (43')\ (32')\ (14')\ (42')\ (13')\ (23')\ (33')$
$(43')\ (32')\ (14')\ (41')\ (11')\ (12')\ (13')\ (34')$

et les douze groupes associés.

l impair.

$(23')\ (43')\ (24')\ (34')\ (11')\ (13')\ (14')\ (22')$
$(24')\ (32')\ (34')\ (42')\ (11')\ (12')\ (14')\ (33')$
$(23')\ (43')\ (32')\ (42')\ (11')\ (12')\ (13')\ (44')$
$(43')\ (32')\ (34')\ (42')\ (22')\ (11')\ (31')\ (41')$
$(23')\ (32')\ (34')\ (42')\ (21')\ (22')\ (13')\ (33')$
$(43')\ (24')\ (32')\ (42')\ (21')\ (22')\ (14')\ (44')$
$(23')\ (43')\ (24')\ (42')\ (33')\ (11')\ (21')\ (41')$
$(23')\ (43')\ (24')\ (32')\ (31')\ (33')\ (12')\ (22')$
$(23')\ (43')\ (34')\ (42')\ (31')\ (33')\ (14')\ (44')$
$(23')\ (24')\ (32')\ (34')\ (44')\ (11')\ (21')\ (31')$
$(23')\ (24')\ (34')\ (42')\ (41')\ (44')\ (12')\ (22')$
$(43')\ (24')\ (32')\ (34')\ (41')\ (44')\ (13')\ (33')$

et les douze groupes associés.

β impair.

l pair.

$(32')\ (34')\ (43')\ (12')\ (13')\ (14')\ (21')\ (31')$
$(34')\ (41')\ (43')\ (11')\ (13')\ (14')\ (22')\ (42')$
$(32')\ (34')\ (41')\ (11')\ (12')\ (14')\ (23')\ (33')$
$(32')\ (41')\ (43')\ (11')\ (12')\ (13')\ (24')\ (44')$
$(34')\ (41')\ (43')\ (21')\ (23')\ (24')\ (12')\ (42')$
$(31')\ (34')\ (41')\ (21')\ (22')\ (24')\ (13')\ (33')$
$(32')\ (34')\ (43')\ (22')\ (23')\ (24')\ (11')\ (31')$
$(32')\ (41')\ (43')\ (21')\ (22')\ (23')\ (14')\ (44')$
$(32')\ (41')\ (43')\ (31')\ (33')\ (12')\ (22')\ (42')$
$(34')\ (41')\ (43')\ (31')\ (33')\ (14')\ (24')\ (44')$
$(32')\ (34')\ (41')\ (42')\ (44')\ (11')\ (21')\ (31')$
$(32')\ (34')\ (43')\ (42')\ (44')\ (13')\ (23')\ (33')$

et les douze groupes associés.

l impair.

$(32')\ (42')\ (24')\ (12')\ (13')\ (21')\ (31')\ (41')$
$(32')\ (42')\ (24')\ (11')\ (12')\ (23')\ (33')\ (43')$
$(32')\ (14')\ (42')\ (11')\ (12')\ (13')\ (34')\ (44')$
$(32')\ (14')\ (42')\ (21')\ (22')\ (13')\ (33')\ (43')$
$(32')\ (14')\ (42')\ (22')\ (23')\ (11')\ (31')\ (41')$
$(32')\ (42')\ (24')\ (21')\ (22')\ (23')\ (34')\ (44')$
$(14')\ (42')\ (24')\ (33')\ (34')\ (11')\ (21')\ (41')$
$(32')\ (14')\ (24')\ (31')\ (33')\ (34')\ (12')\ (22')$
$(14')\ (42')\ (24')\ (31')\ (34')\ (13')\ (23')\ (43')$
$(32')\ (14')\ (24')\ (44')\ (11')\ (21')\ (31')\ (43')$
$(42')\ (14')\ (24')\ (41')\ (43')\ (44')\ (12')\ (22')$
$(32')\ (14')\ (24')\ (41')\ (44')\ (13')\ (23')\ (33')$

et les douze groupes associés.

On peut faire sur ces Tableaux les remarques suivantes :

1° β *pair*. — Il y a *huit* plans singuliers qui contiennent respectivement *quatre* points d'un groupe ; par exemple, pour le groupe

$$(44') \quad (24') \quad (43') \quad (32') \quad (12') \quad (13') \quad (21') \quad (31'),$$

ces huit plans sont

$$42', \quad 22', \quad 41', \quad 23', \quad 11', \quad 14', \quad 33' \quad 34'.$$

Considérons un de ces plans : il contient, outre quatre points du groupe, deux autres points doubles ; ces deux points et les quatre points du groupe non situés dans le plan forment un des groupes de six points rencontrés aux nos **60-61** ; si l est pair, ce groupe de six points est un de ceux qui correspondent à l impair, et inversement.

Chacun des groupes de huit points comprend deux points de l'un quelconque des quatre groupes de quatre points rencontrés au n° **62**, et qui correspondent à la même parité de l.

2° β *impair*. — Il y a *deux* plans singuliers qui contiennent respectivement *cinq* points d'un groupe ; par exemple, pour le groupe

$$(32') \quad (34') \quad (43') \quad (12') \quad (13') \quad (14') \quad (21') \quad (31'),$$

ces deux plans sont

$$11' \quad \text{et} \quad 33'.$$

Un de ces plans contient en outre un sixième point double ; ce point et les trois points du groupe non situés dans le plan forment un des groupes de quatre points (Rosenhain) rencontrés au n° **62** : si l est pair, c'est un des groupes de quatre points qui correspondent à l impair, et inversement.

En résumé :

65. III. *k étant impair, si δ est pair :*

Les δ fonctions singulières normales, d'indices l, k, appartenant à l'une des douze caractéristiques qui ne vérifient pas les congruences $\omega \equiv l\omega'$, $\theta' \equiv \theta(l+\beta)$ (mod 2), se divisent en $\frac{\delta}{2}$ fonctions *paires et $\frac{\delta}{2}$ fonctions impaires; à ces deux groupes de fonctions correspondent deux familles, $\frac{\delta}{2} - 1$ fois infinie chacune, de courbes singulières; les courbes d'une famille passent toutes par huit points doubles de la surface de Kummer, et les courbes de l'autre famille par les huit autres points doubles.*

66. *Remarque I.* — D'une manière générale, tous les groupes de points doubles rencontrés aux nos **58-65** ne dépendent, pour une caractéristique donnée, que de la parité de β, de l et de k.

67. *Remarque II.* — *Si k est impair*, les groupes de points doubles situés sur les courbes singulières d'une même famille possèdent la propriété suivante : un plan singulier quelconque contient toujours un nombre pair de ces points lorsque β est pair, et un nombre impair lorsque β est impair. Cela résulte, soit des Tableaux donnés ci-dessus, soit de ce qu'une courbe (singulière ou non) tracée sur la surface de Kummer touche les seize plans singuliers en tous les points, autres que les points doubles, où elle les rencontre; par suite, dans chaque plan singulier, elle passe par un nombre pair ou impair de points doubles, selon que son degré $(2l + \beta k)$ est pair ou impair.

68. *Remarque III.* — Il résulte des propositions ci-dessus que, *dans tous les cas :*

Une famille de courbes singulières, d'indices l, k, qui passent toutes par $2s$ points doubles de la surface de Kummer, est

$$\tfrac{1}{2}(\delta - s + 2)$$

fois infinie.

On pose toujours

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2.$$

C'est également vrai, bien entendu, pour les familles de courbes ordinaires, qui répondent au cas particulier de $k = 0$.

Genre des courbes singulières sur la surface de Kummer.

69. Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes non homogènes d'un point de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, on a

$$(5) \qquad x = \frac{\Theta_1(u, v)}{\Theta_0(u, v)}, \qquad y = \frac{\Theta_2}{\Theta_0}, \qquad z = \frac{\Theta_3}{\Theta_0},$$

les Θ étant des fonctions thêta du second ordre, paires et de caractéristique nulle.

Désignons par $F_0(u, v)$ une fonction normale quelconque, d'indices l, k, paire ou impaire, et de caractéristique donnée; par la courbe $F_0 = 0$, tracée sur $\mathfrak{K}$, menons une surface d'ordre quelconque n, $S(x, y, z) = 0$, qui coupe en outre $\mathfrak{K}$ suivant une courbe $C(u, v) = 0$; on a, en désignant par $S(u, v)$ ce que devient $S(x, y, z)$, quand on y remplace x, y et z par leurs valeurs (5) en u et v :

$$(6) \qquad S(u, v) = F_0(u, v)\frac{C(u, v)}{\Theta_0^n(u, v)}.$$

Par la courbe $C(u, v) = 0$ menons une surface quelconque d'ordre n, $\varphi(x, y, z) = 0$, on a de même

$$(7) \qquad \varphi(u, v) = F(u, v)\frac{C(u, v)}{\Theta_0^n(u, v)},$$

$F(u, v)$ étant une fonction normale de mêmes indices et de même caractéristique que F_0, paire ou impaire en même temps que F_0; car, d'après (6) et (7), $\frac{F}{F_0}$ est une fonction quadruplement périodique paire.

Cela posé, d'après un théorème bien connu de M. Nöther, toute différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe $F_0(u, v) = 0$ est *nécessairement* de la forme

$$(8) \qquad \frac{\varphi(x, y, z)}{S'_y K'_z - S'_z K'_y}\, dx,$$

en désignant par $K(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface $\mathfrak{K}$.

Réciproquement, une différentielle de ce type n'est pas toujours de première espèce si la courbe F_0 présente des singularités; mais nous n'aurons besoin que de la première partie du théorème.

70. Remplaçons maintenant, dans la différentielle (8), x, y et z par leurs valeurs en u, v, et tenons compte de ce que, sur la courbe considérée, $F_0(u, v)$ est nul.

On a, d'après (6),

$$S'_u = \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{C}{\Theta''_0} = S'_x\frac{\partial x}{\partial u} + S'_y\frac{\partial y}{\partial u} + S'_z\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{C}{\Theta'_0} = S'_x\frac{\partial x}{\partial v} + S'_y\frac{\partial y}{\partial v} + S'_z\frac{\partial z}{\partial v},$$

De même, $K(u, v)$ étant nul identiquement,

$$0 = K'_x\frac{\partial x}{\partial u} + K'_y\frac{\partial y}{\partial u} + K'_z\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$0 = K'_x\frac{\partial x}{\partial v} + K'_y\frac{\partial y}{\partial v} + K'_z\frac{\partial z}{\partial v},$$

d'où, en éliminant $\frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial x}{\partial u}(S'_x K'_z - S'_z K'_x) + \frac{\partial y}{\partial u}(S'_y K'_z - S'_z K'_y) = \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{C}{\Theta''_0}K'_z.$$
$$\frac{\partial x}{\partial v}(S'_x K'_z - S'_z K'_x) + \frac{\partial y}{\partial v}(S'_y K'_z - S'_z K'_y) = \frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{C}{\Theta''_0}K'_z,$$

et, par suite,

$$(9)\qquad (S'_y K'_z - S'_z K'_y)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = \frac{C}{\Theta''_0}\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)K'_z.$$

D'ailleurs

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$
$$0 = \frac{\partial F_0}{\partial u}\,du + \frac{\partial F_0}{\partial v}\,dv,$$

ce qui donne

$$dx = \left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F_0}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}.$$

Portant cette valeur de dx, la valeur (7) de φ et la valeur (9) de $S'_y K'_z - S'_z K'_y$ dans la différentielle (8), celle-ci devient

$$(10) \qquad \frac{F(u,v)}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}\,\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}}{K'_z}\,du.$$

Observons enfin que, sur la surface $\mathfrak{K}$, l'intégrale double

$$\int\int \frac{dx\,dy}{K'_z}$$

est de première espèce et se réduit à $\int\int du\,dv$ si l'on remplace x et y par leurs valeurs (5) en u et v; on a ainsi

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = K'_z$$

(car on peut supposer le facteur constant égal à l'unité). La différentielle (10) s'écrit alors

$$(11) \qquad F(u,v)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}.$$

Telle est la forme *nécessaire* des différentielles abéliennes de première espèce appartenant à la courbe $F_0 = 0$; $F(u,v)$ y désigne une fonction de la même famille que $F_0(u,v)$.

71. *Réciproquement,* il est clair que toute différentielle de la forme (11) est une intégrale abélienne appartenant à la courbe $F_0(u,v) = 0$; on le voit, par exemple, en refaisant en sens inverse les calculs précédents.

Pour qu'elle soit de première espèce, il faut et il suffit, si la courbe

$F_0 = 0$ possède un point double, c'est-à-dire un point vérifiant les relations

$$F_0 = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial F_0}{\partial v} = 0,$$

que la courbe $F = 0$ passe par ce point; en général, si la courbe $F_0 = 0$ a, en un point, une singularité σ, il faut et il suffit que la courbe $F = 0$ possède en ce point la singularité σ', *adjointe de* σ. Ainsi :

Les différentielles abéliennes de première espèce appartenant à une courbe $F_0(u, v) = 0$ *sont de la forme* (11), *où* $F(u, v)$ *est le premier membre de l'équation d'une courbe de la même famille que la proposée et adjointe à celle-ci.*

72. Les courbes d'une même famille passent *toutes* (nos 58-65) par $2s$ points doubles de la surface de Kummer, s pouvant être nul. Nous allons montrer :

1° Qu'elles n'ont pas d'autre point commun, simple ou multiple;

2° Qu'aucun des $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$ par lesquels elles passent n'est multiple sur elles toutes.

Soit, en effet, $F_0(u, v) = 0$ une quelconque des courbes de la famille, ne présentant aucune singularité spéciale par rapport aux autres : les courbes de la famille formant une série *linéaire* tracée sur une surface $\mathfrak{K}$, sans lignes multiples, n'ont pas *toutes* des points singuliers variables d'une courbe à l'autre; si donc la courbe $F_0 = 0$ a des singularités, celles-ci sont fixes et communes, dès lors, à toutes les courbes de la famille. Soit alors $F = 0$ une autre de ces courbes; la différentielle abélienne

$$F(u, v)\frac{du}{\left(\frac{\partial F_0}{\partial v}\right)}$$

est de première espèce sur $F_0 = 0$, puisqu'en tout point singulier de $F_0 = 0$, s'il en existe, la courbe $F = 0$ présente la même singularité. Le *genre*, p, de $F_0 = 0$ est donc égal au nombre des fonctions $F(u, v)$ linéairement distinctes, diminué d'une unité (car on doit exclure la fonction F_0); on a ainsi, en vertu du n° **68**,

$$(12) \qquad p = \tfrac{1}{2}(\delta - s + 2) \qquad (\delta = l^2 + \beta kl + \alpha k^2).$$

D'ailleurs, d'après un théorème classique, la courbe $F_0 = 0$ est coupée par les courbes F, qui sont ses adjointes les plus générales, en $2(p-1)$ points mobiles, c'est-à-dire que les deux équations

$$F_0(u, v) = 0, \qquad F(u, v) = 0$$

ont $2.2(p-1)$ solutions *non fixes*, deux à deux égales et de signes contraires. Le nombre *total* des solutions communes étant (n° **34**) égal à 2δ, on a, pour le nombre des solutions *fixes*,

$$2\delta - 4(p-1),$$

c'est-à-dire $2s$, d'après (12).

Il en résulte que les courbes $F_0 = 0$, $F = 0$ n'ont pas d'autres points communs fixes que les $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$, par lesquels passent toutes les courbes de la famille, et que les $2s$ points sont *simples* sur ces courbes.

73. Nous allons maintenant étudier les singularités que peuvent présenter les courbes d'une même famille en un des points doubles de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$.

74. Soit O le point double de $\mathfrak{K}$ qui répond à $u = 0$, $v = 0$; on verra, sans difficulté, que les raisonnements ci-après s'appliquent à tout autre point double.

Si les courbes d'une même famille passent *toutes* par O, comme O est simple (n° **72**) sur la courbe générale de la famille, l'équation de celle-ci s'obtient en annulant une fonction *impaire*, $F(u, v)$, de u et v: par suite, les courbes de la famille qui admettent O comme point multiple, l'admettent comme point multiple d'*ordre impair*, $2q+1$.

Pour exprimer que O est un point multiple d'ordre $2q+1$ pour une courbe de la famille, il faut écrire que, dans le développement de Maclaurin de la fonction impaire $F(u, v)$, les termes d'ordres

1, 3, 5, ..., $(2q-1)$ en u et v disparaissent, ce qui donne

$$2+4+6+\ldots+2q \qquad \text{ou} \qquad q(q+1)$$

conditions *au plus*. Nous disons *au plus,* parce qu'il pourrait arriver que ces conditions fussent réductibles entre elles.

De même, si O n'est pas un des $2s$ points communs à toutes les courbes de la famille, l'équation de la courbe la plus générale de cette famille s'obtient en annulant une fonction *paire*, $F(u, v)$, de u et v; les courbes de la famille qui admettent O comme point multiple, l'admettent donc comme point multiple d'*ordre pair,* $2r$. Le nombre des conditions exprimant que O est multiple d'ordre $2r$ est

$$1+3+5+\ldots+2r-1$$

ou r^2 *au plus.*

75. *Expression générale du genre d'une courbe.* — Supposons qu'une courbe *indécomposable*, appartenant à une famille d'indices l, k, ait, en un point double, O, de $\mathfrak{K}$, un point multiple d'ordre $2r$, à branches distinctes : quel abaissement de genre produit une pareille singularité ?

Soit $F_0(u, v) = 0$ la courbe considérée; les différentielles abéliennes de première espèce qui lui appartiennent sont du type

$$F(u, v)\frac{du}{\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial v}\right)},$$

où $F(u, v)$ est le premier membre de l'équation d'une courbe de la même famille que $F_0 = 0$ et *adjointe* à celle-ci, c'est-à-dire devant présenter en O un point multiple d'ordre $2r-1$ *au moins*. Mais, en vertu du numéro précédent, les ordres de multiplicité du point O sur les diverses courbes d'une même famille sont de même parité : la courbe $F_0(u, v) = 0$ admet donc nécessairement O comme point multiple d'ordre $2r$, c'est-à-dire qu'elle est assujettie à r^2 conditions *au plus*. La diminution de genre est donc r^2 *au plus*.

De même, si la courbe $F_0(u, v) = 0$ a, en un point double de $\mathfrak{K}$, un point multiple d'ordre $2q+1$, à branches distinctes, la diminution correspondante du genre est $q(q+1)$ *au plus.*

Enfin, il est clair qu'un point double, non situé en un des seize points singuliers de $\mathfrak{K}$, diminue le genre d'une unité; et, en général, un point multiple à branches distinctes d'ordre h, le diminue de $\frac{1}{2}h(h-1)$, *au plus*.

Soit alors une courbe $F_0(u, v) = 0$, appartenant à une famille d'indices l, k, dont toutes les courbes passent par $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$.

Supposons que F_0 présente les singularités suivantes :

1° En chacun de ces $2s$ points, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres respectifs

$$2q_1+1, \quad 2q_2+1, \quad \ldots, \quad 2q_{2s}+1;$$

2° En chacun des $16-2s$ autres points doubles de $\mathfrak{K}$, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres respectifs

$$2r_1, \quad 2r_2, \quad \ldots, \quad 2r_{16-2s};$$

3° En d'autres points, des points multiples *à branches distinctes* d'ordres

$$h_1, \quad h_2, \quad \ldots.$$

Un ou plusieurs des nombres q_i, r_i, h_i peuvent être nuls, c'est-à-dire que la courbe considérée n'a aucune singularité au point correspondant.

Le genre des courbes de la même famille que F_0 est (n° **72**)

$$\frac{1}{2}(\delta - s + 2);$$

si p est le genre de F_0, on a donc, en vertu des résultats relatifs à l'abaissement du genre,

$$(13) \qquad p \geqq \frac{1}{2}(\delta - s + 2) - \Sigma q(q+1) - \Sigma r^2 - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

Soit d'ailleurs $F(u, v) = 0$ une quelconque des courbes de la même famille que la courbe F_0, et adjointe à celle-ci; les deux équations

$$F_0(u, v) = 0, \qquad F(u, v) = 0,$$

qui ont en tout 2δ solutions communes, en ont $4(p-1)$ non fixes (n° **72**); comme la courbe $F(u, v) = 0$ présente les mêmes singularités que la courbe $F_0 = 0$ aux seize points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° **75**), et un point d'ordre $h-1$, au moins, en chaque autre point multiple d'ordre h de F_0, on a

$$(14) \quad 4(p-1) = 2\delta - 4\Sigma r^2 - \Sigma(2q+1)^2 - \Sigma h(h-1) - N,$$

le terme N étant mis pour tenir compte des autres points fixes d'intersection de F_0 avec les courbes F, s'il y en a. On en déduit, en observant que $\Sigma(2q+1)^2 = 4\Sigma q(q+1) + 2s$,

$$(15) \quad p \leqq \frac{1}{2}(\delta - s + 2) - \Sigma r^2 - \Sigma q(q+1) - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1)$$

et, par suite, en comparant avec (13), on voit qu'il faut prendre le signe $=$, ce qui donne la formule

$$(16) \quad p = \frac{1}{2}(l^2 + \beta k l + \alpha k^2 - s + 2) - \Sigma r^2 - \Sigma q(q+1) - \frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

76. *Remarque I.* — La seconde partie de la démonstration précédente ne s'applique pas si la courbe F_0 est unicursale, c'est-à-dire si $p = 0$, parce qu'il n'existe alors pas de courbe $F(u, v)$: la formule (14) peut donc n'être plus vérifiée.

Il est aisé d'en donner une démonstration valable.

Soit $\Phi(u, v)$ une fonction normale de même caractéristique que la fonction $F_0(u, v)$, paire ou impaire en même temps que celle-ci, d'indices $l + 2m$, k; m étant un entier > 0 quelconque. Les courbes $\Phi(u, v) = 0$ passent par les $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$ communs à toutes les courbes de la famille qui comprend F_0 (n° **66**).

Parmi ces courbes Φ, considérons celles, $\varphi(u, v) = 0$, qui sont adjointes à F_0; elles présentent aux points singuliers de F_0 les singularités que présentaient tout à l'heure les courbes adjointes F : on démontre sans difficulté qu'elles coupent F_0 en $2(p-1) + m(2l + \beta k)$ points mobiles [1]; de sorte que, en raisonnant comme plus haut et en

[1] *Voir* une démonstration analogue dans notre Mémoire : *Sur les surfaces hyperelliptiques*, t. IX de ce *Journal*, 4e série, p. 152.

employant la formule (25) du n° **34**, on a

$$4(p-1)+2m(2l+\beta k)=2l(l+2m)+\beta k(2l+2m)+2\alpha k^2 \\ -4\Sigma r^2-\Sigma(2q+1)^2-\Sigma h(h-1)-\mathrm{N},$$

ce qui, les termes en m disparaissant, donne à nouveau la formule (14). Or les courbes Φ dépendent linéairement de

$$\frac{1}{2}[(l+2m)^2+\beta k(l+2m)+\alpha k^2-s+2]$$

paramètres (n° **68**), et l'on peut toujours prendre m assez grand pour qu'il y ait une au moins de ces courbes adjointe à F_0. La formule (16) est donc générale.

77. *Remarque II.* — Nous avons supposé, en établissant la formule (16) du genre, que les points multiples de la courbe $\mathrm{F}_0=0$ étaient à branches séparées; s'il en est autrement, cette circonstance ne peut évidemment que *diminuer* le genre, de sorte qu'on a, en ce cas,

$$(17)\qquad p \leqq \frac{1}{2}(\delta-s+2)-\Sigma r^2-\Sigma q(q+1)-\frac{1}{2}\Sigma h(h-1).$$

78. Des raisonnements précédents résulte aussi, sans difficulté, la proposition suivante :

Considérons, parmi les courbes d'une famille donnée, d'indices l, k, passant simplement par $2s$ points doubles de $\mathfrak{K}$, celles, C, qui admettent un ou plusieurs de ces points pour points multiples d'ordres donnés, à savoir :

Chacun des $2s$ points pour points d'ordres respectifs $2q_i+1$;

Chacun des $16-2s$ autres points doubles pour points d'ordres respectifs $2r_i$;

et supposons que ces courbes ne soient pas toutes *décomposables*.

Les courbes C forment évidemment une série linéaire; elles dépendent d'un nombre de paramètres p qui est égal à leur genre, et qui a pour expression

$$(18)\qquad p=\frac{1}{2}(l^2+\beta kl+\alpha k^2-s+2)-\Sigma r^2-\Sigma q(q+1).$$

Elles n'ont en commun aucun autre point, simple ou double de $\mathfrak{K}$, que ceux qui interviennent dans leur définition; elles n'ont pas non plus, puisqu'elles forment une série linéaire, de point multiple variable d'une courbe à l'autre.

Cas elliptique.

79. Nous avons jusqu'ici laissé expressément de côté (nº **24**), dans le cas elliptique, les courbes qui correspondent à des indices l, k tels que δ, c'est-à-dire $l^2 + \beta kl + \alpha k^2$ soit nul : d'après le nº **23**, ces courbes s'obtiennent en annulant une fonction thêta elliptique d'une seule variable, U ou V, de sorte qu'elles forment deux familles, évidemment linéaires, $\mathrm{U} = \text{const.}$ et $\mathrm{V} = \text{const.}$

Les courbes d'une de ces familles ne passent évidemment *toutes* par aucun point double de la surface de Kummer $\mathfrak{K}$.

On établit sans difficulté, en suivant la marche du nº **23**, les propositions suivantes, dont plusieurs se trouvent déjà énoncées dans notre Mémoire *Sur les surfaces de Kummer elliptiques* (¹).

80. Posons toujours $\Delta = n^2$; chaque courbe $\mathrm{U} = \text{const.}$ s'obtient individuellement en annulant une fonction thêta elliptique de U, paire, et d'ordre deux : si l'on revient aux variables anciennes, u et v, à cette fonction correspond une fonction intermédiaire singulière normale, de caractéristique nulle, et paire, pour laquelle les indices sont

$$l = \beta + n, \qquad k = -2.$$

Il y a *deux* de ces fonctions linéairement distinctes.

Or ce nombre, *deux*, est compris dans la formule générale, $\frac{\delta + 4}{2}$, du nº **42**, qui donne le nombre des fonctions normales paires, de caractéristique nulle, d'indices l, k; δ désignant toujours $l^2 + \beta kl + \alpha k^2$: pour $\delta = 0$, $\frac{\delta + 4}{2}$ est bien égal à 2.

Le degré des courbes $\mathrm{U} = \text{const.}$ s'obtient (nºˢ **36** et **50**) par la formule générale $2l + \beta k$, ce qui donne $2n$.

(¹) *American Journal of Mathematics*, t. XVI.

Les courbes $V = \text{const.}$ donnent lieu à des remarques semblables; leurs indices sont :

$$l = -\beta + n, \qquad k = 2;$$

elles sont aussi de degré $2n$.

On verrait sans difficulté que toutes ces courbes sont de genre un : les courbes $U = \text{const.}$ ont le même module; de même, les courbes $V = \text{const.}$

On démontre enfin, par les raisonnements mêmes du cas général, que pour les indices

$$l = \frac{1}{2}(\beta + n), \qquad k = -1,$$

et pour chacune des *quatre* caractéristiques remarquables

$$\omega \equiv l\omega', \qquad \theta' \equiv \theta(l + \beta),$$

il existe $\frac{\delta + 2}{2}$, c'est-à-dire *une* fonction normale, soit paire, soit impaire, s'annulant pour quatre demi-périodes, conformément aux Tableaux du n° **62**.

Mêmes résultats pour les indices

$$l = \frac{1}{2}(-\beta + n), \qquad k = 1.$$

Il y a ainsi, dans la série des courbes $U = \text{const.}$ ou $V = \text{const.}$, quatre courbes remarquables, passant par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$; elles sont d'ordre $2l + \beta k$, c'est-à-dire n, et de genre zéro.

D'après cela, les courbes exclues jusqu'ici sur les surfaces de Kummer elliptiques rentrent dans le cas général, et toutes les formules précédemment établies leur sont applicables.

QUATRIÈME PARTIE.

Équations modulaires.

81. En vertu d'une proposition rappelée plus haut (nº **48**) et qui dérive d'un beau théorème de M. Appell, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur une surface hyperelliptique quelconque s'obtient *nécessairement* en annulant une fonction intermédiaire : si donc, une surface de Kummer $\mathfrak{K}$ admet une courbe algébrique qui n'existe pas sur la surface générale, c'est qu'il correspond à cette courbe une fonction intermédiaire *singulière*; $\mathfrak{K}$ est donc une surface de Kummer *singulière*.

Les surfaces hyperelliptiques répondant à des fonctions abéliennes singulières sont donc *caractérisées* par ce fait qu'on peut y tracer des courbes algébriques n'existant pas dans le cas général : on en déduit immédiatement une importante conséquence.

82. Les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer peuvent s'exprimer en fonction rationnelle de deux paramètres, x et y, et des deux radicaux

$$\sqrt{x(1-x)(1-\lambda x)(1-\mu x)(1-\nu x)},$$

$$\sqrt{y(1-y)(1-\lambda y)(1-\mu y)(1-\nu y)};$$

les constantes λ, μ, ν (ou leurs racines carrées) sont les *modules* des fonctions abéliennes liées à la surface. Exprimons maintenant qu'une surface ainsi définie paramétriquement admet une courbe algébrique de degré donné, n'existant pas dans le cas où λ, μ, ν sont quelconques : nous arrivons évidemment à une ou plusieurs relations *algébriques* entre ces modules λ, μ, ν. D'ailleurs, dans le cas d'une surface *une fois* singulière, c'est-à-dire dans le cas où les périodes g, h, g' ne sont liées que par une seule relation singulière, il ne peut exister entre les modules qu'une seule relation, laquelle est nécessairement algébrique par ce qui précède. Ainsi :

A toute relation singulière entre les périodes d'une fonction abélienne de genre deux, correspond une relation algébrique entre les modules.

Nous nommerons cette relation *équation modulaire;* dans ce qui suit, nous nous proposerons de former l'équation modulaire qui correspond à une relation singulière donnée entre les périodes.

83. La méthode que nous suivrons consistera essentiellement à exprimer que la surface de Kummer admet des courbes algébriques n'existant pas dans le cas général; au lieu de traiter le problème dans l'espace, nous le ramènerons à une question de géométrie plane, en projetant sur un plan la surface et les courbes qu'on y peut tracer, le point de vue étant un des seize points doubles, que nous supposerons toujours être le point (11').

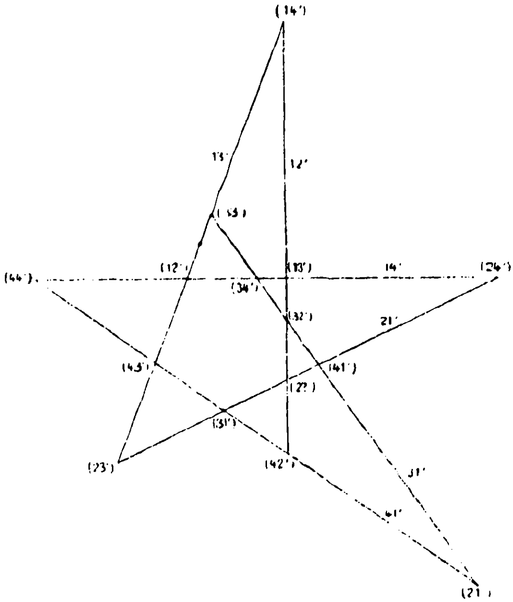
Avant d'aller plus loin, nous devons entrer dans quelques explications, relativement à cette projection.

84. La figure (F), ci-dessous, représente la section par un plan quelconque, II, des six plans singuliers de la surface de Kummer passant par le point double (11') : ces six droites forment, comme on sait, le contour apparent de la surface sur le plan II.

Sur chacune des six droites on a inscrit le symbole du plan singulier correspondant : 12', 13', 14', 21', 31', 41'; au point d'intersection de deux droites, on a marqué le symbole du point double, autre que (11'), commun aux deux plans singuliers correspondants, de sorte que les quinze points où les six droites se coupent deux à deux sont les projections, sur le plan II et à partir du point double (11'), des quinze autres points doubles de la surface.

Soit maintenant une courbe C, tracée sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, et rencontrée en un seul point mobile par chacun des rayons qui la projettent à partir du point (11') : sa projection sur le plan II sera une courbe Σ *inscrite* au contour apparent de $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire une courbe tangente aux six droites de la figure (F) en tous les points où elle les rencontre, les points doubles du contour, c'est-à-dire les points d'intersection des six droites entre elles, *étant seuls exceptés*.

Fig. (F)



85. Inversement, une courbe Σ donnée dans le plan Π et inscrite au système des six droites, est-elle la perspective d'une courbe C de la surface de Kummer, rencontrée en un seul point par les rayons qui la projettent; en d'autres termes, le cône qui a pour sommet le point double (11') et pour base la courbe Σ coupe-t-il la surface $\mathfrak{K}$ suivant *deux* courbes distinctes.

Supposons que le point (11') soit pris pour le sommet $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ du tétraèdre de référence; l'équation de $\mathfrak{K}$ est de la forme

$$U_2 t^2 + 2 U_3 t + U_4 = 0, \tag{1}$$

U_2, U_3, U_4 étant des polynomes homogènes en x, y, z de degrés marqués par l'indice. Le cône circonscrit à $\mathfrak{K}$ à partir du point (11') est $U_3^2 - U_2 U_4 = 0$, et se décompose en six plans, qui sont les six plans singuliers passant par (11'); on a donc identiquement

$$U_3^2 - U_2 U_4 = P_1 P_2 P_3 P_4 P_5 P_6.$$

Cela posé, pour qu'un cône de sommet $(11')$ coupe $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes, il faut et il suffit évidemment que, *sur ce cône*, les deux valeurs de t, tirées de l'équation (1), soient rationnelles en x, y, z, c'est-à-dire que $U_3^2 - U_2 U_4$, ou le produit $P_1 P_2 \ldots P_6$, soit rationnel. En d'autres termes, en désignant par $\Sigma = 0$ l'équation du cône, ou celle de sa base dans le plan Π *pris pour plan* $t = 0$, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 \equiv M^2 + \Sigma Q,$$

N, M, Q étant des polynomes en x, y, z. *Telle est la condition à laquelle doit satisfaire la courbe inscrite* Σ : on voit que toute courbe inscrite au système des six droites P_i ne répond pas à la question, car en général pour une telle courbe Σ', on a seulement l'identité

$$R P_1 P_2 \ldots P_6 \equiv M^2 + \Sigma' Q,$$

le polynome R n'étant pas nécessairement un carré.

86. Observons, pour terminer ces généralités, que les six plans singuliers passant par $(11')$ touchent un cône du second ordre, celui des tangentes à la surface de Kummer au point double $(11')$; on sait de plus que si l'on fait correspondre d'une manière univoque un paramètre x à chacun des plans tangents de ce cône, et si $a_1, a_2, \ldots, a_6$ sont les valeurs du paramètre correspondant aux six plans singuliers considérés, les fonctions hyperelliptiques liées à la surface de Kummer dépendent du radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_6)}.$$

Le problème de former les équations modulaires ou, ce qui est la même chose, les équations entre $a_1, a_2, \ldots, a_6$, revient donc à trouver, pour chaque relation singulière entre les périodes, une relation géométrique *caractéristique* entre les six plans singuliers qui passent par $(11')$, ou *entre les six droites* (*tangentes à une même conique*) *de la figure* (F) *qui précède.*

87. Pour mieux faire comprendre la méthode que nous suivrons, nous l'appliquerons d'abord aux deux cas particuliers non elliptiques les plus simples, à savoir ceux où l'invariant Δ de la relation singulière entre les périodes, et qui est nécessairement de la forme $4N$ ou $4N+1$, a l'une des valeurs 5 et 8; le cas de $\Delta = 1$ a été exclu au n° **17** comme ne correspondant pas à de véritables fonctions abéliennes; celui de $\Delta = 4$ est elliptique, et nous en dirons de suite quelques mots.

Cas de $\Delta = 4$.

88. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme (n° **12**)

$$-g + g' = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1.$$

On a pour δ

$$\delta = l^2 - k^2.$$

On sait (n° **80**) qu'il existe sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ deux séries, simplement infinies chacune, de courbes de genre 1 et de degré $2\sqrt{\Delta}$, c'est-à-dire de *biquadratiques gauches;* dans chaque série, quatre des biquadratiques se réduisent à des courbes d'ordre moitié moindre, c'est-à-dire à des *coniques,* passant chacune par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$. Ces coniques correspondent (n° **80**) aux indices $l = 1$, $k = 1$ pour une série, et $l = 1$, $k = -1$ pour l'autre; les Tableaux du n° **62** montrent qu'une conique du premier groupe et une conique du second passent par les quatre mêmes points doubles : par exemple, deux coniques passent par les points

$$(11'), \quad (22'), \quad (33'), \quad (44').$$

Projetons l'une d'elles sur le plan Π à partir du point $(11')$; la perspective est une droite Σ qui passe par les trois points marqués $(22')$, $(33')$, $(44')$ de la figure (F). Ainsi, pour une surface de Kummer elliptique, d'invariant $\Delta = 4$, ces trois points sont en ligne droite, c'est-à-dire que :

Si une surface de Kummer elliptique a pour invariant QUATRE, *les six plans singuliers qui passent par un quelconque de ses points doubles, et qui touchent comme d'ordinaire un cône du second ordre, forment trois couples en involution.*

On peut transformer cette propriété par polaires réciproques : la surface de Kummer étant sa propre transformée dans dix corrélations, qui font correspondre les points singuliers aux points doubles et inversement, on arrive à ce résultat bien connu :

Sur une surface de Kummer elliptique répondant à $\Delta = 4$, les six points doubles situés sur une même conique d'un plan singulier forment trois couples en involution ou, ce qui revient au même, un hexagone de Brianchon.

Une pareille surface est le *tétraédroïde* de Cayley : *réciproquement*, toute surface de Kummer jouissant de la propriété précédente est un tétraédroïde; M. Klein l'a établi (*Math. Annalen*, t. II, p. 217), et cela résulterait aisément d'ailleurs des méthodes générales qui vont être développées.

Cas de $\Delta = 5$.

89. La relation singulière entre les périodes peut alors se ramener (n° **12**) au type

$$-g + h + g' = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\alpha = -1, \qquad \beta = 1, \qquad \gamma = 1.$$

La quantité δ est ici

$$\delta = l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 = l^2 + kl - k^2.$$

Les valeurs $l = 1$, $k = 1$ sont telles que

$$2l + \beta k > \sqrt{\Delta} \bmod k;$$

il y a donc (n° **29**) des fonctions intermédiaires singulières d'indices 1, 1 : pour ces valeurs de l et k, δ prend la valeur 1; par suite (n° **45**), il existe *une* fonction intermédiaire normale, de caractéristique donnée quelconque et d'indices 1, 1; cette fonction est soit paire, soit impaire, selon la caractéristique. A une des *seize* fonctions ainsi définies correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une courbe d'ordre $2l+\beta k$, ou *trois* (n° **50**); passant par *six* points doubles de $\mathfrak{K}$ (n° **61**) et *unicursale* (n° **72**) : ainsi, dans le cas de $\Delta = 5$, la surface de Kummer admet *seize cubiques gauches*, dont chacune passe par six points doubles, et qui se déduisent de l'une d'elles (n° **46**) par l'addition de demi-périodes aux arguments hyperelliptiques u, v.

Il y a d'ailleurs sur $\mathfrak{K}$ *seize autres cubiques gauches*, qui correspondent aux indices $l=2$, $k=-1$, pour lesquels on a encore $\delta = 1$ et $2l+\beta k = 3$; les Tableaux du n° **60** permettent d'étudier, avec la plus grande facilité, la disposition six à six des seize points doubles sur les trente-deux cubiques; nous n'insisterons pas sur ce point.

Parmi les seize cubiques de chaque groupe, *six* passent par le point double $(11')$ (n° **61**). La cubique qui répond aux indices 1, 1 et à la caractéristique nulle ne passe pas par ce point; elle contient (n° **60**) les points $(24')$, $(44')$, $(23')$, $(32')$, $(34')$, $(41')$: pour en déduire une des cubiques passant par $(11')$, il suffit d'ajouter la demi-période qui correspond à $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 1$, $\lambda = 1$, $\lambda' = 0$; car le nouveau groupe de six points doubles se déduit du précédent en permutant 1 et 4, 2 et 3 dans les symboles ci-dessus (n° **55**), ce qui donne les points

$$(34'),\quad (14'),\quad (33'),\quad (22'),\quad (24'),\quad (11').$$

90. Projetons maintenant cette seconde cubique sur le plan Π à partir de $(11')$, la perspective est une conique Σ qui passe par les cinq points de la figure (F) marqués $(34')$, $(14')$, $(33')$, $(22')$ $(24')$, et qui est inscrite au système des six droites de la figure. Comme les cinq points indiqués sont des points doubles de ce système et qu'ils sont les sommets d'un pentagone formé par cinq des six droites (*voir* la figure), la conique Σ doit toucher la sixième droite $41'$.

Nous obtenons ainsi une propriété simple des six plans singuliers de $\mathfrak{K}$ qui passent par le point double $(11')$, dans le cas où les périodes des fonctions abéliennes correspondantes vérifient une relation singulière d'invariant 5 :

Les six points doubles situés sur une même conique de la surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 5$, sont tels qu'il existe une conique passant par l'un d'eux et inscrite à un pentagone formé par les cinq autres.

91. *Réciproquement*, montrons que si cette condition ou la condition corrélative est satisfaite, la surface de Kummer est nécessairement singulière, et que l'invariant correspondant est 5.

92. L'hypothèse est qu'il existe, dans le plan Π, une conique Σ, tangente à une des six droites de la figure (F), et circonscrite à un des pentagones formés par les cinq autres; je dis que le cône qui a pour base la conique Σ et pour sommet le point $(11')$ coupe la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes. Soit, en effet, $M = 0$ l'équation d'une cubique quelconque du plan Π, passant par les cinq sommets du pentagone précédent et par le point de contact q de la conique Σ avec la sixième droite; en désignant toujours par $P_1 = 0, \ldots, P_6 = 0$ les équations des six droites, la courbe d'ordre *six*

$$P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta M^2 = 0,$$

où θ est un paramètre quelconque, a évidemment pour points doubles les cinq sommets du pentagone, et touche la sixième droite au point q. Cette courbe a ainsi, avec la conique Σ, *douze* intersections qui sont fixes quand θ varie; si θ est choisi de manière qu'elle passe par un nouveau point de Σ, elle se décomposera en deux courbes, dont l'une est Σ, de sorte qu'on aura *identiquement*

$$P_1 P_2 \ldots P_6 \equiv \theta_0 M^2 + \Sigma Q,$$

ce qui démontre bien (n° **85**) que le cône du second ordre de sommet $(11')$ et de base Σ coupe $\mathfrak{K}$ suivant *deux courbes distinctes*, C *et* C'.

La conique Σ passe par cinq des points de rencontre des six droites de la figure (F) : les deux courbes C et C' passent donc, simplement chacune, par cinq points doubles de $\mathfrak{K}$ et ne passent par aucun autre point double, sauf peut-être le point $(11')$. Elles passent nécessairement par ce point, qui est d'ordre de multiplicité impair sur chacune d'elles; car, en vertu des résultats des nos **58-65**, il n'existe pas de courbe algébrique sur une surface de Kummer passant simplement par cinq points doubles seulement. D'ailleurs les cinq points doubles en question et le point (11′) ne sont pas dans un même plan singulier de $\mathfrak{K}$, puisque les cinq sommets du pentagone auquel la conique Σ est circonscrite ne sont pas sur *une* des six droites de la figure (F) : il en résulte que $\mathfrak{K}$ admet des courbes algébriques passant, avec des ordres impairs de multiplicité, par six points doubles non situés dans un même plan, ce qui ne se présente pas (n° **58**) pour des courbes non singulières, ni pour des courbes singulières dont l'indice k est pair : $\mathfrak{K}$ *est donc une surface de Kummer singulière,* et les seconds indices k, k' relatifs à C et C′ sont impairs.

93. Soit alors

$$\alpha g + \beta h + g' = 0$$

la relation singulière qui correspond à $\mathfrak{K}$; désignons par l et k les indices de C; par $2q+1$ l'ordre de multiplicité de (11′) sur cette courbe. Le degré de C est $2l + \beta k$ (n° **50**); son genre est zéro, car elle correspond point par point à sa projection, la conique Σ; de plus elle ne peut évidemment admettre d'autre point multiple que (11′). On a alors, en écrivant que la projection de C à partir de (11′) est d'ordre deux, et en appliquant la formule (16) du n° **75** sur le genre,

$$\begin{aligned} 2 &= 2l + \beta k - (2q+1), \\ 0 &= l^2 + \beta kl + \alpha k^2 - s + 2 - 2q(q+1). \end{aligned}$$

Ici $s = 3$; éliminant q entre ces relations, on trouve, en posant $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$:

$$\Delta = \frac{6 - (2l + \beta k - 4)^2}{k^2},$$

d'où, nécessairement, puisque k doit être impair et Δ positif de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$,

$$\Delta = 5. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

94. *Équation modulaire.* — En vertu de ce qui précède et du n° **86**, pour exprimer que le radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_6)}$$

conduit à des fonctions abéliennes singulières *avec l'invariant cinq*, il suffit de considérer une conique dont les tangentes correspondent d'une manière univoque à un paramètre, et d'écrire qu'il existe une seconde conique touchant la tangente de paramètre a_6, et circonscrite à un pentagone formé par les tangentes de paramètres a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, prises dans un ordre quelconque.

Pour simplifier, supposons $a_6 = \infty$, ce qui ne diminue pas la généralité; le radical est alors

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_5)};$$

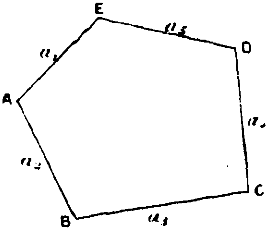
prenons pour conique fondamentale la parabole $y = x^2$, dont les tangentes ont pour équation générale

$$y + 2\theta x + \theta^2 = 0,$$

θ étant un paramètre arbitraire; à $\theta = \infty$ correspond la droite de l'infini.

Pour déterminer le pentagone, prenons les cinq tangentes qui correspondent aux valeurs $a_1, a_2, \dots, a_5$ de θ, dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; il s'agit d'exprimer que la conique qui passe par les cinq sommets A, B, C, D, E touche la droite de l'infini, c'est-à-dire est une parabole.

Fig. 3.



mets A, B, C, D, E touche la droite de l'infini, c'est-à-dire est une parabole.

Le problème ne présente aucune difficulté, et voici le résultat final :

Pour que le radical

$$\sqrt{(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)(x-a_5)}$$

conduise à des fonctions abéliennes dont les périodes normales soient liées par une relation singulière d'invariant CINQ, *la condition est*

$$\begin{aligned} &4\,|a_1^2(a_3-a_4)+a_2^2(a_4-a_5)+a_3^2(a_5-a_1)+a_4^2(a_1-a_2)+a_5^2(a_2-a_3)| \\ \times\, &|a_1^2(a_3-a_4)a_2a_5+a_2^2(a_4-a_5)a_3a_1+\ldots\ldots\ldots+a_5^2(a_2-a_3)a_1a_4| \\ = \;&|a_1^2(a_3-a_4)(a_2+a_5)+a_2^2(a_4-a_5)(a_3+a_1)+\ldots+a_5^2(a_2-a_3)(a_1+a_4)|^2. \end{aligned}$$

95. *Remarque.* — Si le radical était pris sous la forme générale $\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_6)}$, on passerait de ce cas au précédent par la substitution $t=\dfrac{1}{x-\alpha_6}$, α_6 désignant une *quelconque* des six racines. Les racines du polynome du cinquième ordre en t qui figure maintenant sous le radical sont $\dfrac{1}{\alpha_i-\alpha_6}$, $(i=1, 2, 3, 4, 5)$, et il suffit de les substituer *dans un ordre quelconque*, aux a_1, a_2, $\ldots$ a_5 de la formule précédente pour avoir la condition cherchée.

96. *Conséquences géométriques.* — *Si la conique* Σ *existe dans le plan* Π, on vient de voir que la surface $\mathfrak{K}$ est singulière et correspond à l'invariant cinq : outre la cubique dont la perspective est Σ, la surface $\mathfrak{K}$ admet *onze* autres cubiques passant par (11'), (n° **89**); par suite il existe, dans le plan Π, onze coniques analogues à Σ, c'est-à-dire tangentes à une des six droites de la figure (F) et circonscrites à un pentagone formé par les cinq autres droites.

Les Tableaux et les résultats du n° **60** permettent d'étudier la disposition des points doubles de $\mathfrak{K}$ sur les onze nouvelles cubiques, c'est-à-dire la disposition des pentagones inscrits aux onze nouvelles coniques du plan Π; on arrive ainsi à un théorème de Géométrie élémentaire, qu'il est intéressant de rattacher aux fonctions abéliennes, et que nous énonçons sous sa forme corrélative :

Soient a, b, c, d, e, f six points d'une conique : s'il existe une conique passant par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, b, c, d, e, il existera une autre conique passant par a et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont f, c, b, e, d.

Comme a est un quelconque des sommets du premier pentagone, on obtient ainsi non pas une, mais *cinq* coniques nouvelles; ces cinq coniques et la conique inscrite au premier pentagone sont les perspectives des six cubiques d'un même groupe (n° **89**) qui passent par le point (11').

Les six cubiques de l'autre groupe ont pour projection six coniques définies par la propriété suivante, qui est connue d'ailleurs par les théorèmes de Poncelet :

Soient a, b, c, d, e, f six points d'une conique : s'il existe une conique passant par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, b, c, d, e, il existera une autre conique passant également par f et inscrite au pentagone dont les sommets successifs sont a, c, e, b, d.

A chacune des six premières coniques correspond ainsi une des six coniques du second groupe.

Cas de $\Delta = 8$.

97. La relation singulière entre les périodes peut se ramener à la forme (n° **12**)

$$-2g + g' = 0;$$

par suite

$$\alpha = -2, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 1,$$

et

$$\delta = l^2 - 2k^2.$$

Les valeurs $l = 2$, $k = 1$ conviennent pour indices de fonctions intermédiaires singulières (n° **29**) et donnent $\delta = 2$. Il existe donc (n° **42**) $\frac{\delta + 2}{2}$, c'est-à-dire *deux* fonctions normales, de caractéristique nulle, et d'indices 2,1; géométriquement, on peut ainsi tracer sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ une série *simplement infinie* de courbes d'ordre $2l$, c'est-à-dire d'ordre *quatre* : ces courbes passent par les quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ dont les symboles sont (n° **63**)

$$(32'), \quad (34'), \quad (42'), \quad (44');$$

elles sont de genre *un* (n° **72**).

Pour $l = 2$, $k = -1$ et la caractéristique nulle, on obtient de même une seconde série simplement infinie de biquadratiques gauches (de genre *un*) passant par les quatre mêmes points, et l'on voit sans difficulté qu'une biquadratique quelconque de la première série et une quelconque de la seconde sont sur une surface du second ordre.

A chacune des *trois* autres caractéristiques remarquables (n^{os} **45** et **63**) correspondent de même (pour $l = 2$, $k = \pm 1$) deux séries de biquadratiques, passant toutes par quatre mêmes points doubles de $\mathfrak{K}$, qui sont ici, pour chaque caractéristique :

$$\begin{array}{cccc} (31'), & (33'), & (41'), & (43'), \\ (12'), & (14'), & (22'), & (24'), \\ (11'), & (13'), & (21'), & (23'). \end{array}$$

Parmi les biquadratiques de l'une des séries qui passent par (32'), (34'), (42'), (44'), il en est *une* qui passe par (11') et qui y a nécessairement un point double (n° **74**); sa perspective sur le plan Π, à partir de (11'), est une conique Σ passant par les quatre points de la figure (F) marqués (32'), (34'), (42'), (44') et inscrite au système des six droites de cette figure : comme les quatre points indiqués sont les sommets du quadrilatère formé par les droites 31', 12', 41', 14', la conique Σ touche les deux autres droites 13' et 21'. Donc, corrélativement :

Les six points doubles situés sur une même conique de la surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 8$ sont tels qu'il existe une conique passant par deux d'entre eux et inscrite à un quadrilatère formé par les quatre autres.

98. *Réciproquement*, on établit comme au n° **92** que si cette condition est vérifiée, c'est-à-dire si la conique Σ existe, le cône qui a $(11')$ pour sommet et Σ pour base coupe $\mathfrak{K}$ suivant *deux courbes distinctes*, C et C'.

Ces courbes, en vertu de l'hypothèse, passent, simplement chacune, par les quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ de symboles $(32')$, $(34')$, $(42')$, $(44')$, et ne passent par aucun autre point double, sauf, peut-être, par $(11')$.

Il n'y a, sur aucune surface de Kummer, de courbe algébrique passant simplement (ou avec des ordres de multiplicité impairs) par cinq points doubles (n^{os} **58-65**), il faut donc que $(11')$ soit, sur C et C', un point de multiplicité paire (l'ordre zéro pouvant convenir); enfin comme une surface de Kummer non singulière n'admet pas de courbe algébrique passant simplement par quatre points doubles (n° **58**), $\mathfrak{K}$ est nécessairement *une surface singulière*, et les courbes C, C' sont des courbes singulières. Leur genre est zéro, puisque chacune correspond point par point à sa projection, la conique Σ; les indices k qui leur correspondent sont impairs (n° **58**).

Soit alors $\alpha g + \beta h + g' = 0$ la relation singulière qui correspond à $\mathfrak{K}$; désignons par l et k les indices de la courbe C, par $2r$ l'ordre de multiplicité sur cette courbe du point $(11')$, qui est évidemment son seul point singulier. On a, en écrivant les formules relatives au degré et au genre de C, comme au n° **93**,

$$2 = 2l + \beta k - 2r,$$

$$0 = \frac{1}{2}[l^2 + \beta kl + \alpha k^2 + s - 2] - r^2.$$

Ici $s = 2$; l'élimination de r entre ces équations donne, en posant toujours $\Delta = \beta^2 - 4\alpha$,

$$\Delta = \frac{8 - (2l + \beta k - 4)^2}{k^2},$$

et comme Δ doit être entier, positif de l'une des formes $4N$ ou $4N + 1$, et que k est impair, les seules valeurs admissibles sont $\Delta = 8$ et $\Delta = 4$.

Ainsi, la condition énoncée plus haut, c'est-à-dire l'existence de la conique Σ, entraîne, pour la surface de Kummer considérée, la nécessité d'être singulière avec l'invariant 4 ou l'invariant 8; en traduisant analytiquement cette condition, on trouvera donc à la fois les équations modulaires pour $\Delta = 4$ et pour $\Delta = 8$.

99. *Équation modulaire.* — Pour l'obtenir, prenons le radical fondamental sous la forme

$$\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)};$$

considérons la parabole $y = x^2$ et les six tangentes

$$y + 2\theta x + \theta^2 = 0,$$

qui correspondent aux valeurs ∞, 0, a_1, a_2, a_3, a_4 de θ : il faut exprimer, d'après ce qui précède, qu'il existe une conique circonscrite au quadrilatère formé par les quatre dernières tangentes, prises dans l'ordre a_1, a_2, a_3, a_4, et touchant les deux premières, à savoir la droite de l'infini et la droite $y = 0$. Le calcul ne présente aucune difficulté; on trouve en facteur la quantité $(a_1 a_3 - a_2 a_4)^2$, qui, égalée à zéro, exprime que les six tangentes forment trois couples $(0, \infty;\ a_1, a_3;\ a_2, a_4)$ en involution : *c'est l'équation modulaire du tétraédroïde* (n° **88**). L'autre facteur obtenu est l'équation modulaire pour $\Delta = 8$, d'où le théorème :

Pour que le radical $\sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}$ conduise à des fonctions abéliennes dont les périodes normales soient liées par une relation singulière d'invariant HUIT, *la condition est*

$$\begin{aligned}4a_1a_2a_3a_4[(a_1+a_3)(a_2+a_4) - 2a_1a_3 - 2a_2a_4]^2 \\ = (a_2-a_4)^2(a_1-a_3)^2(a_1a_3+a_2a_4)^2.\end{aligned}$$

100. *Remarque.* — On en déduirait sans difficulté, comme au n° **95**, la formule correspondante, lorsque le polynome sous le radical est du sixième degré, et de racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$.

101. *Conséquences géométriques.* — En considérant les autres séries de biquadratiques qui passent simplement par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$ (nº **97**) autres que (11′), on obtient, *en tout*, *six* de ces biquadratiques ayant un point double en (11′); on voit de suite qu'elles sont deux à deux sur *trois* cônes du second ordre ayant (11′) pour sommet; il y a dès lors dans le plan Π *trois* coniques Σ, sections de ces trois cônes par le plan. En se reportant au Tableau des points doubles par lesquels passent les biquadratiques et en raisonnant comme au nº **96**, on arrive à cette proposition élémentaire :

Soient, sur une conique, trois couples de points non en involution; s'il existe une conique passant par les points d'un des couples et inscrite au quadrilatère qui a pour sommets opposés les points de chacun des deux autres couples, il existera deux autres coniques analogues qu'on obtient par la permutation des trois couples.

Ce théorème est d'ailleurs bien facile à établir directement; il est curieux de le voir lié aux propriétés d'une surface de Kummer singulière.

102. *Remarque.* — Il convient de rapprocher des résultats obtenus dans les cas de $\Delta = 5$ et $\Delta = 8$ une proposition que nous avons établie ailleurs (¹) pour le cas *elliptique* de $\Delta = 9$.

Si $\Delta = 9$, la surface de Kummer correspondante admet (nº **80**) deux groupes de quatre cubiques gauches, passant chacune par quatre points doubles; dans chaque groupe, une cubique, et une seule, passe par un point double donné de $\mathfrak{K}$, (11′) par exemple. En la projetant sur le plan Π à partir de ce point, on obtient une conique Σ, inscrite au triangle formé par trois des droites de la figure (F) et circonscrite au triangle formé par les trois autres. On démontre sans difficulté que, réciproquement, si la conique Σ existe, la surface de Kummer est singulière et répond à l'invariant *neuf*. Ainsi, par corrélation :

(¹) *American Journal of Mathematics*, t. XVI, p. 238. M. O. Bolza a retrouvé la même propriété dans un Mémoire des *Math. Annalen;* il a bien voulu, par une Note publiée dans le t. LI du même Recueil, reconnaître notre priorité

Les six points doubles situés sur une même conique d'une surface de Kummer singulière qui répond à $\Delta = 9$, sont tels qu'il existe une conique passant par trois de ces points et inscrite au triangle formé par les trois autres. Réciproquement, cette propriété n'appartient qu'à une surface de Kummer singulière d'invariant neuf.

L'*équation modulaire* correspondante se déduit de là avec la plus grande facilité.

Cas général d'un invariant Δ pair.

103. Pour former l'équation modulaire dans le cas d'un invariant pair, ou pour trouver une propriété géométrique, caractéristique de ce cas, appartenant aux six plans singuliers qui passent par un même point double de la surface de Kummer correspondante (n° **86**), on s'appuiera sur deux propositions.

Théorèmes fondamentaux.

104. I. *Soit une surface de Kummer $\mathfrak{K}$, jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites suivant lesquelles les six plans singuliers passant par un même point double coupent un plan quelconque sont telles qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, indécomposables, de genre p et de degré 2λ, dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites et touche, partout ailleurs, les six droites en tous les points où elle les rencontre :

1° *La surface $\mathfrak{K}$ est singulière; son invariant Δ est pair et a pour maximum*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p), \tag{1}$$

$\lambda^2 - p$ est dès lors nécessairement positif;

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme (1) jouit de la propriété géométrique indiquée.*

105. II. *Soit une surface de Kummer $\mathfrak{K}$, jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites définies plus haut peuvent se répartir en trois couples, de telle sorte qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, indécomposables, de genre p et de degré $2\lambda+1$, dont chacune passe par les sommets des trois couples et touche, partout ailleurs, les six droites en tous les points où elle les rencontre :

1° *La surface $\mathfrak{K}$ est singulière; son invariant Δ est pair et a pour maximum*

$$\Delta = 4[2\lambda(\lambda+1)-2p+1], \tag{2}$$

$\lambda(\lambda+1)-p$ *est dès lors nécessairement positif;*

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (2) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

106. *Remarque.* — On peut reconnaître directement que l'existence des courbes Σ, définies ci-dessus, entraîne bien une relation modulaire, c'est-à-dire une relation entre les six droites de la figure (F).

Plaçons-nous, par exemple, dans le cas du théorème I : les courbes Σ sont d'ordre 2λ, de genre p, et sont soumises, par les conditions de passer par quatre points et de toucher partout ailleurs les six droites, à 6λ conditions. Leur équation générale doit donc, *a priori*, renfermer un nombre de paramètres égal à

$$\tfrac{1}{2}2\lambda(2\lambda+3)-\tfrac{1}{2}(2\lambda-1)(2\lambda-2)+p-6\lambda,$$

c'est-à-dire $p-1$. Or l'hypothèse est que ce nombre est p, ce qui établit bien une relation entre les six droites.

Un calcul analogue s'applique au cas du théorème II.

Avant de donner la démonstration des théorèmes fondamentaux, montrons comment on peut les appliquer à la formation de la propriété caractéristique modulaire.

Équations modulaires.

107. Pour obtenir l'équation ou la propriété géométrique modulaire qui correspond à un invariant Δ pair, nous distinguerons, puisque Δ est multiple de 4, les deux cas de

$$\Delta = 8\text{N} \qquad \text{et} \qquad \Delta = 8\text{N} + 4.$$

108. Supposons obtenues les équations ou propriétés modulaires pour tous les invariants Δ pairs, jusqu'à $\Delta = 8\text{N}$, *exclusivement.*

Faisons dans la formule (1) $\Delta = 8\text{N}$, ce qui donne

$$\text{N} = \lambda^2 - p.$$

Prenons, pour λ, le plus petit entier positif dont le carré atteigne ou dépasse N; on a alors p par la formule

$$p = \lambda^2 - \text{N}.$$

Il résulte alors du théorème fondamental I que, pour la surface de Kummer singulière d'invariant 8N, les six droites de la figure (F) sont telles qu'il existe un système, p fois infini, de courbes Σ, d'ordre 2λ et de genre p, dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, et touche ces droites en tous les autres points où elle les rencontre.

C'est bien là une propriété des six droites, c'est-à-dire une *propriété modulaire;* réciproquement, en vertu du théorème I, elle ne peut appartenir en outre qu'à des surfaces de Kummer singulières *d'invariants pairs, et inférieurs à* 8N. Si donc on traduit analytiquement la propriété précédente (ce qui peut se faire par un nombre fini d'opérations algébriques), on obtient, non seulement l'équation modulaire pour $\Delta = 8\text{N}$, mais les équations modulaires pour certains invariants pairs plus petits, équations qu'on a supposées obtenues au préalable. Il ne restera donc qu'à débarrasser l'équation modulaire complète de facteurs connus d'avance, pour avoir, sans facteur étranger, l'équation modulaire cherchée relative à $\Delta = 8N$ ([1]).

109. Supposons de même obtenues les équations modulaires pour les invariants pairs jusqu'à $\Delta = 8N + 4$, exclusivement. Partons cette fois de la formule (2) où nous ferons $\Delta = 8N + 4$:

$$4N + 1 = (2\lambda + 1)^2 - 4p.$$

Prenons, pour $2\lambda + 1$, le plus petit entier impair dont le carré atteigne ou dépasse $4N + 1$; p aura la valeur

$$p = \lambda(\lambda + 1) - N.$$

Alors, par le théorème fondamental **II**, pour la surface de Kummer singulière d'invariant $8N + 4$, les six droites de la figure (F) peuvent se répartir en trois couples, de manière qu'il existe un système p fois infini, de courbes Σ, de genre p et d'ordre $2\lambda + 1$, dont chacune passe par les sommets des trois couples et touche en λ points chacune des six droites.

C'est là une propriété modulaire qui, d'après le théorème **II**, ne peut appartenir en outre qu'à des surfaces de Kummer singulières, d'invariants pairs et inférieurs à $8N + 4$. On voit dès lors, comme plus haut, qu'on pourra obtenir, débarrassée de facteurs étrangers, l'équation modulaire pour $\Delta = 8N + 4$.

110. Le problème de la formation des équations modulaires, dans le cas d'un invariant pair, peut donc être considéré comme résolu *théoriquement*, par une méthode *algébrique* qui permet d'opérer de proche en proche : mais, *pratiquement*, la solution analytique serait fort difficile à obtenir, même dans des cas très simples, à cause de la longueur des calculs. La Géométrie du moins, en substituant la propriété modulaire à l'équation algébrique, donne une idée assez nette du résultat : nous y reviendrons d'une manière plus étendue aux nos **124-131**.

([1]) Nous reviendrons plus loin (n° **131**) sur les facteurs étrangers.

Il nous reste maintenant à démontrer les théorèmes fondamentaux.

Démonstration des théorèmes fondamentaux.

111. Lemme. — *Une courbe singulière tracée sur une surface de Kummer ne peut être l'intersection complète de cette surface et d'une autre surface.*

Car, en vertu du mode même de représentation paramétrique (nº **49**), l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre n s'obtient en annulant une *fonction thêta*, normale, d'ordre $2n$ et de caractéristique nulle : pour une intersection complète, l'indice k est donc nul, ce qui prouve bien qu'une telle courbe n'est *jamais* singulière.

112. *Corollaire.* — Le rayon, qui joint à un point double de la surface de Kummer un point d'une courbe singulière, ne rencontre pas constamment la courbe en un second point, sinon celle-ci serait l'intersection complète avec un cône ayant le point double pour sommet.

En d'autres termes, la projection sur le plan Π, à partir du point double (11'), d'une courbe singulière quelconque, est une courbe *du même genre, inscrite* au système des six droites de la figure (F) (nº **84**).

Démonstration du théorème I.

113. Supposons qu'il existe, dans le plan Π de la figure (F), des courbes Σ d'ordre 2λ, de genre p, en nombre p fois infini, dont chacune passe par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, et touche partout ailleurs ces six droites : *montrons d'abord que la surface de Kummer* $\mathfrak{K}$ *est singulière*, et, pour cela, établissons que le cône, qui a pour sommet le point double (11') et pour base une quelconque des courbes Σ, coupe $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes.

114. L'équation générale des courbes Σ contient, par hypothèse, p paramètres : $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$, sous une forme évidemment algébrique.

On peut toujours, puisque le triangle de référence est arbitraire, supposer que l'équation de la courbe générale Σ contient un terme en $x^{2\lambda}$, de sorte que cette équation est de la forme

$$(3) \qquad \Sigma = x^{2\lambda} + V_1 x^{2\lambda-1} y + V_2 x^{2\lambda-1} z + \ldots = 0,$$

$V_1, V_2, \ldots$ étant des fonctions algébriques des paramètres ρ.

Soient x, y, z un point d'une courbe Σ, de paramètres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ un point, voisin du premier, sur la courbe Σ, de paramètres $\rho_1 + d\rho_1, \ldots, \rho_p + d\rho_p$; on a

$$dx \frac{\partial \Sigma}{\partial x} + dy \frac{\partial \Sigma}{\partial y} + dz \frac{\partial \Sigma}{\partial z} + d\rho_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \ldots + d\rho_p \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0,$$

quels que soient $d\rho_1, \ldots, d\rho_p$. Si donc (x, y, z) est un point double de la courbe Σ, les courbes

$$(4) \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0,$$

qui sont du même ordre, 2λ, que Σ, passent par ce point double : ce sont, dès lors, des courbes *adjointes* à Σ.

D'après la théorie des enveloppes, les courbes (4) passent par les quatre points communs à toutes les courbes Σ et par les $6\lambda - 4$ points où la courbe $\Sigma = 0$ touche les six droites de la figure (F) : comme, d'une manière générale, les courbes d'ordre 2λ adjointes à une courbe du même ordre et de genre p coupent celle-ci, en dehors de ses points multiples, en $2(p-1) + 6\lambda$ points, on voit que les courbes

$$(5) \qquad \theta_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \theta_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} + \ldots + \theta_p \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0,$$

où les θ_i sont des constantes arbitraires, coupent la courbe $\Sigma = 0$ en $2(p-1) + 6\lambda - 4 - (6\lambda - 4)$, c'est-à-dire en $2(p-1)$ points mobiles.

En d'autres termes, les courbes (5) découpent, sur la courbe $\Sigma = 0$, des groupes de $2(p-1)$ points mobiles, *parmi lesquels* $p - 1$ *sont* *arbitraires*, puisque l'équation (5) renferme $p-1$ constantes arbitraires [1].

Ces groupes de points appartiennent donc, sur la courbe de genre p, $\Sigma = 0$, à un *système spécial*, dans le sens de MM. Brill et Nœther : d'ailleurs, sur une courbe de genre p et d'ordre n, le seul système spécial de $2(p-1)$ points est celui que découpent les adjointes d'ordre $n-3$; il en résulte que les $2(p-1)$ points mobiles où une quelconque des courbes (5), courbe que je désignerai par $M=0$, coupe la courbe $\Sigma = 0$, sont sur une courbe d'ordre $2\lambda - 3$, $N=0$, adjointe à Σ.

Cela posé, soient toujours $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, ..., $P_6 = 0$ les équations des six droites fondamentales; considérons la courbe, *d'ordre* 4λ,

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta M^2 = 0, \tag{7}$$

où θ désigne un paramètre variable, et cherchons ceux de ses points d'intersection avec Σ qui restent fixes quand θ varie.

---

[1] Pour mettre ce raisonnement à l'abri de tout reproche, il faut établir qu'il n'existe pas d'*identité* de la forme

$$A\Sigma + A_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \ldots + A_p \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0, \tag{6}$$

les A_i étant des constantes en x, y, z, c'est-à-dire des fonctions des ρ_i. On voit d'abord que A doit être nul, puisque, d'après (3), Σ contient un terme en $x^{2\lambda}$, qui ne figure dans aucune des fonctions $\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_i}$; en remplaçant alors Σ, $\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1}$, ... par leurs valeurs tirées de (3), l'identité donne naissance aux identités suivantes en $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$:

$$A_1 \frac{\partial V_1}{\partial \rho_1} + \ldots + A_p \frac{\partial V_1}{\partial \rho_p} = 0,$$
$$A_1 \frac{\partial V_2}{\partial \rho_1} + \ldots + \ldots\ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces relations prouvent que les fonctions V_i sont fonctions de $p-1$ d'entre elles, au plus; par suite, l'équation (3) de Σ ne contiendrait que $p-1$ paramètres, au lieu de p, comme c'est l'hypothèse. Il n'existe donc aucune identité de la forme (6). C. Q. F. D.

Les courbes $M = 0$, $N = 0$ étant adjointes à Σ, on voit, de suite, que les points singuliers de Σ comptent, dans l'intersection avec les courbes (7), pour

$$2[2\lambda(2\lambda - 3) - 2(p - 1)].$$

De plus, les quatre sommets du quadrilatère par lesquels passent toutes les courbes Σ et les $2(p - 1)$ points communs aux courbes $M = 0$, $N = 0$, $\Sigma = 0$, sont évidemment des points doubles des courbes (7), et comptent dès lors pour

$$8 + 4(p - 1)$$

intersections.

Enfin, les courbes (7) touchent évidemment la courbe $\Sigma = 0$ aux $6\lambda - 4$ points où celle-ci est tangente aux six droites $P_i = 0$, car la courbe $M = 0$ passe par ces points, ainsi qu'on l'a vu plus haut; de là

$$12\lambda - 8$$

nouvelles intersections fixes.

On trouve ainsi, au total, que les courbes (7) ont, avec Σ, un nombre d'intersections fixes égal à

$$4\lambda(2\lambda - 3) - 4(p - 1) + 8 + 4(p - 1) + 12\lambda - 8,$$

c'est-à-dire $8\lambda^2$; comme Σ est d'ordre 2λ et les courbes (7) d'ordre 4λ, on peut déterminer θ de manière que, pour $\theta = \theta_0$, la courbe (7) ait un nouveau point de rencontre avec Σ, *qu'elle contiendra dès lors tout entière;* on aura ainsi *identiquement*

$$N^2 P_1 P_2 \ldots P_6 - \theta_0 M^2 \equiv \Sigma Q, \tag{8}$$

ce qui prouve bien (nº **85**) que le cône de sommet (11′) et de base Σ coupe la surface $\mathfrak{K}$ suivant *deux* courbes algébriques distinctes, C et C′, de même genre, p, que la courbe Σ, à laquelle elles correspondent point par point.

113. On en déduit immédiatement que $\mathfrak{K}$ est singulière. En effet, les courbes Σ passant simplement par quatre des points communs à deux des six droites de la figure (F), les courbes C (et C′) passent toutes, simplement, par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$, et ne passent simultanément par aucun autre point double, le point (11′) pouvant être excepté. Comme il n'existe pas, sur une surface de Kummer ordinaire (nos **58-66**), de courbe algébrique passant simplement par quatre points doubles et ne pouvant, en outre, contenir qu'*un* autre point double, $\mathfrak{K}$ *est nécessairement une surface singulière.*

116. *Détermination de l'invariant.* — Les courbes C étant singulières et passant simplement par quatre points doubles, leur second indice k est impair et le point (11′) est, sur chacune d'elles, multiple d'ordre pair, $2r$, r pouvant être nul (nos **58** et **74**). Soit

$$\alpha g + \beta h + g' = 0$$

la relation singulière qui correspond à la surface $\mathfrak{K}$; l et k étant les indices de C, le degré de cette courbe est (n° **50**) $2l + \beta k$, et l'on a, en écrivant que la perspective Σ, de C, à partir de (11′), est de degré 2λ :

$$2\lambda = 2l + \beta k - 2r, \tag{9}$$

ce qui montre que βk, et par suite β, est pair. On peut donc supposer (n° **12**) $\beta = 0$, et la relation singulière sera

$$-N'g + g' = 0, \qquad (N' > 0)$$

de sorte que, par (9)

$$\lambda = l - r. \tag{10}$$

117. Écrivons maintenant que C est de genre p. La courbe C générale a un point multiple d'ordre $2r$ en (11′); elle peut avoir d'autres points multiples, répondant aux points multiples de sa projection Σ : en vertu de la formule (16) du n° **75** et de la remarque du n° **77**, son genre p a une expression de la forme

$$p = \tfrac{1}{2}(l^2 - N'k^2) - r^2 - p', \tag{11}$$

le terme $-p'$ (où $p' \geqq 0$) étant relatif aux points multiples autres que (11′), et aux branches confondues que peut présenter la courbe C en ce point.

L'élimination de r entre (10) et (11) donne

$$N' = \frac{2(\lambda^2 - p) - 2p' - (l - 2\lambda)^2}{k^2}$$

et, par suite, la valeur *maximum* que puisse prendre l'invariant $4N'$ est, en faisant $p' = 0$, $l = 2\lambda$, $k = 1$ (car k est impair),

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p).$$

C'est précisément ce qu'il s'agissait d'établir, conformément à l'énoncé du théorème I.

118. Il reste, pour terminer la démonstration de ce théorème, à montrer que toute surface de Kummer $\mathfrak{K}$, dont l'invariant est $8(\lambda^2 - p)$, jouit de la propriété relative aux courbes Σ, c'est-à-dire que ces courbes existent dans le plan de la figure (F).

Si Δ est de la forme $8(\lambda^2 - p)$, la relation entre les périodes peut être supposée du type

$$-2(\lambda^2 - p)g + g' = 0.$$

Considérons les indices $l = 2\lambda$, $k = 1$: ils sont admissibles, car on vérifie de suite (nº **29**) l'inégalité nécessaire et suffisante

$$2l \geqq \sqrt{\Delta} \bmod k, \qquad \text{ou} \qquad 4\lambda \geqq 2\sqrt{2(\lambda^2 - p)}.$$

La quantité δ, qui répond à ces indices, est

$$\delta = 4\lambda^2 - 2(\lambda^2 - p) = 2(\lambda^2 + p).$$

Elle est *paire*. Par suite (nºs **42** et **63**), il existe $\frac{1}{2}(\delta + 2)$ fonctions intermédiaires normales, d'indices $2\lambda, 1$, de caractéristique nulle, paires, s'annulant simplement pour les quatre demi-périodes (32′), (34′), (42′), (44′).

A ces fonctions correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une famille de courbes algébriques d'ordre 4λ passant simplement par quatre points doubles : celles d'entre elles, C, qui ont en (11′) un point multiple d'ordre 2λ, sont (n° **78**) de genre

$$p_1 = \frac{1}{2}[4\lambda^2 - 2(\lambda^2 - p)] - \lambda^2 = p,$$

et forment un système linéaire p fois infini.

Les projections des courbes C, à partir du point (11′), sur le plan de la figure (F) sont donc des courbes Σ, de degré 2λ, de genre p, formant un système p fois infini, et passant toutes simplement par les quatre points de la figure marqués (32′), (34′), (42′), (44′), points qui sont les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites de cette figure. Enfin (n^{os} **84** et **112**) les courbes Σ touchent les six droites, en dehors de ces points, partout où elles les rencontrent.

Cet ensemble de propositions constitue la seconde et dernière partie du théorème fondamental qu'il s'agissait d'établir ([1]).

Démonstration du théorème II.

119. Elle se fait d'une manière toute pareille; les courbes C appartiennent alors à une famille de courbes passant toutes simplement par quatre points doubles de $\mathfrak{K}$, parmi lesquels est le point (11′). Nous n'insisterons pas sur le raisonnement, qu'il suffit de calquer sur le précédent.

120. *Remarque.* — Au n° **114** nous avons supposé implicitement que p n'est pas nul, c'est-à-dire que la courbe Σ n'est pas unicursale. Si $p = 0$, le raisonnement fait pour établir l'identité (8)

$$(8) \qquad N^2 P_1 \ldots P_6 - \theta_0 M^2 \equiv \Sigma Q$$

([1]) Les courbes C formant un système linéaire sur $\mathfrak{K}$, les courbes Σ, dans le plan Π, forment un système du second ordre, c'est-à-dire que les paramètres variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ figurent au second ordre dans l'équation générale de ces courbes.

ne s'applique plus, mais il est bien facile de lui en substituer un autre.

L'hypothèse est qu'il existe *une* courbe Σ, de genre zéro, passant par les quatre sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites $P_i = 0$ et touchant ces six droites partout ailleurs.

Pour démontrer l'identité (8), il suffit d'établir qu'en chaque point de Σ, la fonction $P_1 P_2 \ldots P_6$ est le carré d'une fonction rationnelle $\frac{M}{N}$ des coordonnées. Or, supposons les coordonnées homogènes, x, y, z d'un point de Σ, exprimées en fonction rationnelle entière d'un paramètre t, une seule valeur du paramètre répondant à chaque point : tout polynome en t, $\varphi(t)$, sera rationnel en x, y, z. D'ailleurs, en tout point de Σ, $P_1 P_2 \ldots P_6$ est un polynome en t, et ce polynome est un carré parfait, puisque, en vertu des hypothèses géométriques, ses racines sont deux à deux égales : on a donc, en tout point de Σ,

$$P_1 P_2 \ldots P_6 = \varphi^2(t) = \left[\frac{M}{N}(x, y, z)\right]^2,$$

C. Q. F. D.

Cas général d'un invariant Δ impair.

121. Nous énoncerons, sans démonstration, les deux théorèmes fondamentaux qui permettent de former l'équation modulaire; les explications données aux n^{os} **113-120** et celles des n^{os} **92-93** relatives à $\Delta = 5$, permettront de reconstituer les raisonnements sans aucune difficulté.

122. I. *Soit une surface de Kummer $\mathfrak{K}$ jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites suivant lesquelles les six plans singuliers passant par un même point double coupent un plan quelconque sont telles qu'il existe un système p fois infini de courbes Σ indécomposables, de genre p et de degré 2λ, dont chacune passe par les sommets d'un triangle formé par trois des six droites, et touche, partout ailleurs, ces six droites en tous les points où elle les rencontre :

1° *La surface $\mathfrak{K}$ est singulière; son invariant Δ est impair et a* *pour maximum*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p) + 1; \tag{12}$$

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (12) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

II. *Soit une surface de Kummer* $\mathfrak{K}$ *jouissant de la propriété suivante :*

Les six droites définies plus haut sont telles qu'il existe un système p fois infini de courbes Σ *de genre p et de degré* 2λ, *dont chacune passe par les cinq sommets d'un pentagone formé par cinq des six droites et touche, partout ailleurs, ces six droites en tous les points où elle les rencontre :*

1° *La surface* $\mathfrak{K}$ *est singulière, son invariant* Δ *est impair et a pour maximum*

$$\Delta = 8(\lambda^2 - p) - 3; \tag{13}$$

2° *Réciproquement, toute surface de Kummer singulière dont l'invariant est de la forme* (13) *jouit de la propriété géométrique indiquée.*

Équations modulaires.

123. Les deux valeurs (12) et (13) de Δ sont respectivement des formes $8N + 1$ et $8N + 5$, qui sont les deux formes que peut prendre un invariant impair $4P + 1$; on en conclut, comme aux n^os **107-109**, qu'on pourra théoriquement former de proche en proche l'équation modulaire qui répond à un invariant impair quelconque.

Propriétés modulaires générales.

124. Les théorèmes qui nous ont servi à former les équations modulaires sont des cas particuliers d'une proposition plus étendue, qu'on peut employer au même but et qui permet de simplifier souvent, en pratique, les calculs indiqués précédemment.

125. Reprenons le plan de la figure (F), et supposons qu'il existe dans ce plan des courbes Σ, de degré d, de genre p, formant un système p fois infini, et jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles passent simplement, ou avec des ordres impairs de multiplicité, $2q_1+1$, $2q_2+1$, ... par n des quinze points de rencontre des six droites de la figure deux à deux : pour mettre en évidence la parité de n, nous écrirons $n=2\nu+\eta$, η étant o ou 1;

2° Elles passent, avec des ordres de multiplicité pairs, $2r_1$, $2r_2$, ... par d'autres de ces quinze points : tous ces points multiples, aussi bien que les précédents, étant à branches distinctes;

3° En dehors de ces points multiples fixes, elles n'ont que des points doubles ordinaires, dont aucun, pour la courbe Σ générale, n'est sur la conique que touchent les six droites (¹);

4° Elles touchent les six droites en tous les points où elles les rencontrent, les points communs à deux des droites exceptés.

126. On démontre, comme au n° **114**, que le cône qui a pour sommet (11′) et pour base une courbe Σ quelconque, coupe la surface de Kummer $\mathfrak{K}$ suivant deux courbes distinctes C et C′. Il est clair que les courbes C et C′ sont de genre p, et admettent chacune pour points multiples d'ordres respectifs

$$2q_1+1,\quad 2q_2+1,\quad \ldots;\quad 2r_1,\quad 2r_2,\quad \ldots,$$

les points doubles de $\mathfrak{K}$ qui ont pour projections les points multiples fixes des courbes Σ : ces points multiples de l'espace sont, pour C et C′, à branches distinctes.

Les courbes C et C′ passent ainsi, avec des ordres impairs de multiplicité, par $2\nu+\eta$ points doubles de $\mathfrak{K}$, et peut-être aussi par le

(¹) Ces restrictions ne figuraient pas dans les énoncés des théorèmes fondamentaux, qui sont absolument généraux et conduisent dès lors, sans obstacle possible, aux équations modulaires. C'est pour cette raison que nous avons établi séparément ces théorèmes.

point (11'). Si $\eta = 0$, (11') est un point d'ordre pair; si $\eta = 1$, d'ordre impair, car, d'après les nos **38-66**, le nombre total des points doubles de $\mathfrak{K}$, par lesquels passe une courbe algébrique avec des ordres impairs, est pair : dans tous les cas, on peut donc dire que (11') est, sur les courbes C (ou C'), un point multiple d'ordre $2m + \eta$, et que ces courbes ont des points d'ordre impair en $2(\nu + \eta)$ points doubles de $\mathfrak{K}$. Ces $2(\nu + \eta)$ points forment nécessairement un des groupes de quatre, six, huit, dix, douze ou seize points rencontrés aux nos **38-66**, et l'on reconnaît de suite, en se reportant à la figure (F) et la notation des points doubles, si ce groupe répond à une valeur paire ou impaire de l'indice k.

Ainsi, la seule configuration des points fixes d'ordre impair des courbes Σ donne la parité de l'indice k qui correspond aux courbes C (ou C'), et cette configuration n'est pas arbitraire.

Je dis maintenant que le point (11') est multiple *à branches distinctes* sur C et C' : il suffit évidemment d'établir que le cône de sommet (11') et de base Σ coupe, suivant des génératrices distinctes, le cône des tangentes de $\mathfrak{K}$ au point (11'), ou, ce qui revient au même, que la conique touchée par les six droites de la figure (F) ne passe par aucun point multiple de Σ et ne touche pas Σ.

Or, par hypothèse, la courbe générale Σ n'a aucun point multiple sur la conique; tout revient à démontrer que les courbes Σ ne touchent pas *toutes* la conique.

S'il en était ainsi, les courbes $\frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_i} = 0$ (en gardant les notations du no **114**) passeraient par les points de contact de la conique et de la courbe Σ de paramètres ρ_i : les courbes

$$\theta_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \theta_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} + \ldots + \theta_p \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_p} = 0$$

couperaient alors Σ en moins de $2(p-1)$ points mobiles, ce qui est impossible, car il n'y a pas, sur une courbe de genre p, de système de groupes de moins de $2(p-1)$ points ayant une multiplicité égale à $p-1$.

Enfin, comme points multiples mobiles, les courbes C ne peuvent avoir que des points doubles répondant aux points doubles de leur projection Σ; mais il n'est pas nécessaire évidemment qu'à un point double de Σ corresponde un point double de C. Si donc p' est le nombre des points doubles mobiles des courbes C, p' sera au plus égal au nombre des points doubles mobiles des Σ.

127. Cela posé, soit

$$\alpha g + \beta h + \gamma g' = 0$$

la relation singulière qui répond à la surface $\mathfrak{K}$: si celle-ci est ordinaire, α, β, γ sont nuls, mais les formules qui vont suivre s'appliquent toujours. Représentons par (l, k) les indices des courbes C, la parité de k étant connue par ce qui précède, et écrivons les formules relatives au degré et au genre de C. On a (nos **50** et **75**)

$$(14) \qquad 2l + \beta k = d + 2m + \eta,$$

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} p = \tfrac{1}{2}(l^2 + \beta kl + \alpha\gamma k^2 - \nu - \eta + 2) \\ - \Sigma q(q+1) - \Sigma r^2 - m(m+\eta) - p', \end{aligned} \right.$$

en se souvenant qu'on a désigné par $2m + \eta$ l'ordre de multiplicité du point (11').

L'équation qui donne le genre (n° **75**) est applicable ici sans modification, tous les points multiples de C étant à branches distinctes. En éliminant m entre (14) et (15), et posant toujours

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma = \Delta,$$

on trouve

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta k^2 = 2d^2 + 2(\eta - 1)^2 - 4\nu + 6 \\ - 8[p + p' + \Sigma q(q+1) + \Sigma r^2] - (2l + \beta k - 2d)^2, \end{aligned} \right.$$

ou, en introduisant le nombre $n = 2\nu + \eta$, et observant que η est o ou 1,

$$(17) \qquad \Delta = \frac{2d^2 - 2n - 8[p + p' - 1 + \Sigma q(q+1) + \Sigma r^2] - (2l + \beta k - 2d)^2}{k^2}.$$

Cette expression de l'invariant Δ contient, outre p', deux entiers indéterminés, k et l, ou mieux k et $2l+\beta k-2d$, qui figurent tous deux au carré et dont la parité est connue : celle de k l'est par une remarque précédente; celle de $2l+\beta k-2d$, par l'équation (14), est la même que celle de $d+\eta$.

Observons que si k est impair et, par suite, sûrement différent de zéro, les courbes C sont singulières, ainsi que la surface $\mathfrak{K}$; pour que celle-ci puisse être ordinaire, il faut que l'équation (17) soit satisfaite pour $k=0$, c'est-à-dire qu'on puisse déterminer l et p' de manière à annuler le numérateur de Δ.

128. *Réciproquement*, supposons qu'on puisse trouver des entiers k, l et p' tels que la valeur (17) de Δ soit positive, entière, de l'une des formes $4N$ ou $4N+1$; bien entendu, k, l et p' sont soumis aux conditions de parité ou de limitation qu'on a indiquées plus haut. Nous allons montrer que, la figure (F) étant supposée dépendre d'une surface de Kummer singulière d'invariant Δ, il existe, dans le plan de cette figure, des courbes Σ vérifiant les conditions énoncées au n° **125**.

129. Pour simplifier, nous donnerons la démonstration dans un cas particulier, qui correspond à celui du premier théorème fondamental ci-dessus, c'est-à-dire que nous supposerons $\eta=0$, $q_i=0$, $r_i=0$, $\nu=2$ et $d=2\lambda$. Il s'agit alors d'établir l'existence, dans le plan de la figure (F), de courbes Σ, de degré 2λ, de genre et de multiplicité p, passant simplement par les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites et touchant ces six droites partout ailleurs : l'hypothèse est que Δ est défini par

$$\Delta=\frac{8\lambda^2-8p-8p'-4\omega^2}{k^2}, \tag{18}$$

car le nombre $2l+\beta k-2d$ de la formule (17) est de même parité que $d+\eta$, ici 2λ; on peut donc le désigner par 2ω.

Quant au nombre k, il est impair, car le groupe des quatre points par lesquels passent simplement les courbes Σ correspond à un indice k impair. Dès lors, en vertu de (18), Δ est de la forme $4N$, et la relation singulière correspondante peut être supposée du type

$$-\tfrac{1}{4}\Delta g+g'=0.$$

Considérons alors les fonctions intermédiaires normales, de caractéristique nulle, paires, et d'indices (l, k), l étant donné par

$$2l - 4\lambda = 2\omega \qquad \text{ou} \qquad l = 2\lambda + \omega;$$

ces indices sont admissibles, car on voit de suite que $2l \geqq \sqrt{\Delta} \bmod k$. La quantité δ qui leur correspond est

$$(19) \qquad \delta = 2(\lambda + \omega)^2 + 2p + 2p';$$

elle est paire, de sorte que les fonctions normales considérées sont au nombre de $\frac{\delta + 2}{2}$, linéairement distinctes, et s'annulent pour les quatre demi-périodes $(32')$, $(34')$, $(42')$, $(44')$.

A ces fonctions correspond, sur la surface de Kummer $\mathfrak{K}$, une famille de courbes d'ordre $2l$ ou $4\lambda + 2\omega$, $\frac{\delta}{2}$ fois infinie, passant par les quatre points doubles dont on vient d'écrire les symboles. Parmi ces courbes, considérons celles, C, qui ont en $(11')$ un point multiple d'ordre $2(\lambda + \omega)$ et qui possèdent en outre p' points doubles variables de l'une à l'autre.

Les courbes C dépendent dès lors de

$$\frac{\delta}{2} - (\lambda + \omega)^2 - p',$$

ou, d'après (19), de p paramètres *au moins*, leur genre est *au plus* celui que donne la formule générale du n° **75**, car les conditions imposées peuvent entraîner d'autres singularités qui, nécessairement, diminuent le genre. En désignant ce genre par p_1 on a ainsi :

$$p_1 \leqq \frac{\delta}{2} - (\lambda + \omega)^2 - p',$$

c'est-à-dire

$$p_1 \leqq p.$$

Les projections des courbes C sur le plan de la figure (F) sont des courbes Σ, d'ordre $4\lambda + 2\omega - 2(\lambda + \omega)$ ou 2λ, de genre p_1, formant un système p_2 fois infini $(p_2 \geqq p)$, passant par les points $(32')$, $(34')$, (42′), (44′) de la figure, et touchant partout ailleurs les six droites; tout revient à démontrer que $p_1 = p_2 = p$, ou, en vertu des inégalités qui précèdent, que p_2 ne peut être supérieur à p_1.

Or, si $\rho_1, \rho_2, \ldots$ sont les p_2 paramètres dont dépend l'équation générale $\Sigma = 0$ des courbes Σ, le système linéaire

$$\theta_1 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_1} + \theta_2 \frac{\partial \Sigma}{\partial \rho_2} + \ldots = 0,$$

découpe (nº **114**), sur la courbe Σ de paramètres ρ_i, un système de groupes de $2(p_1 - 1)$ points mobiles et de multiplicité $p_2 - 1$. Comme sur une courbe de genre p_1 il n'y a pas de système de groupes de $2(p_1 - 1)$ points, plus de $p_1 - 1$ fois infini, il faut nécessairement que p_2 soit au plus égal à p_1. C. Q. F. D.

130. Une démonstration semblable s'applique au cas général, et aussi au cas particulier où k et le numérateur de Δ dans (17) sont nuls : la surface $\mathfrak{K}$ est alors une surface non singulière.

Applications.

131. I. Si l'on forme, par la méthode du nº **108**, l'équation modulaire pour $\Delta = 8N$, en posant $N = \lambda^2 - p$, la formule (18) et la théorie précédente montrent qu'on obtiendra en même temps les équations modulaires pour les invariants

$$\Delta' = \frac{8N - 8p' - 4\omega^2}{k^2},$$

k étant un entier impair, ω un entier quelconque, p' un entier au plus égal au nombre des points doubles d'une courbe Σ, d'ordre 2λ et de genre p, c'est-à-dire

$$p' \leqq 2\lambda^2 - 3\lambda + 1 - p.$$

On connaît ainsi les facteurs étrangers dont il faut débarrasser l'équation modulaire. Cette remarque s'applique aux autres cas,

$$\Delta = 8N + 4, \quad 8N + 1 \quad \text{ou} \quad 8N + 5.$$

132. II. Δ étant donné de la forme $8N$, par exemple, posons

$$8N = 8\lambda^2 - 8\Sigma r^2 \qquad \text{ou} \qquad N = \lambda^2 - \Sigma r^2,$$

ce qui est toujours possible, car il suffit de prendre pour λ le plus petit entier dont le carré atteigne ou surpasse N, et d'exprimer la différence $\lambda^2 - N$ par une somme de quatre carrés r_1, r_2, r_3, r_4. Alors, en exprimant qu'il existe, dans le plan de la figure (F), une courbe unicursale Σ, d'ordre 2λ, passant par les sommets d'un quadrilatère formé par quatre des six droites, ayant des points d'ordre $2r_1$, $2r_2$, $2r_3$, $2r_4$ en quatre autres des points de concours des six droites deux à deux et touchant ces droites partout ailleurs, on obtient le produit des équations modulaires pour les invariants compris dans la formule

$$\Delta = \frac{8\lambda^2 - 8p' - 8\Sigma r^2 - 4\omega^2}{k^2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{8N - 8p' - 4\omega^2}{k^2},$$

k étant un entier impair, ω un entier quelconque, p' un entier au plus égal à

$$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 - \Sigma r(r-1).$$

On voit qu'on peut obtenir ainsi les équations modulaires pour les invariants $8N$ en prenant pour Σ *une courbe unicursale*, ce qui simplifie notablement les calculs.

La même remarque s'applique aux invariants

$$8N+4, \quad 8N+1, \quad 8N+5.$$

133. III. Il est clair enfin que la théorie générale précédente donne, pour former les équations modulaires de proche en proche, d'autres procédés que ceux qui dérivent des théorèmes fondamentaux : dans chaque cas particulier, on aura à choisir le plus avantageux.

Cas particuliers et exemples.

134. Dans le cas de l'invariant $\Delta = 12$, les propositions générales donnent les énoncés suivants :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′, *de telle sorte qu'il existe un système simplement infini de cubiques passant par les sommets des trois couples et touchant en outre les six droites, la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'invariant* 12 *ou à l'invariant* 8, *et réciproquement.*

Comme on sait caractériser autrement la figure (F) qui répond à l'invariant 8, ce théorème donne la propriété modulaire caractéristique pour l'invariant 12.

On pourrait voir que dans le cas de $\Delta = 12$, il n'y a qu'*un* système de cubiques satisfaisant aux conditions de l'énoncé; dans le cas de $\Delta = 8$, il y en a *deux* : cela tient à ce que, dans les calculs du n° **129**, on peut donner à ω le signe $\pm$, mais ω étant nul pour $\Delta = 12$, le double signe n'introduit aucune différence.

De même :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A, A′; B, B′; C, C′, *de telle sorte qu'il existe une cubique passant par les sommets des trois couples, ayant un point double au point d'intersection de* A *et de* B, *et touchant en outre les droites* A′, B′, C, C′, *la surface de Kummer correspondante est singulière, et répond à l'invariant* 12 *ou à l'invariant* 8.

135. Voici d'autres exemples :

Lorsque les six droites de la figure (F) *peuvent se répartir en trois couples* A, A′; B, B′; C, C′, *de telle sorte qu'il existe une quartique unicursale passant par les* 12 *points d'intersection des trois couples deux à deux, la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'un des invariants* 16, 12, 8, 4, *et réciproquement.*

Lorsque les six droites forment un hexagone auquel on peut inscrire et circonscrire un système p fois infini de quartiques de genre p ($p = 0, 1, 2,$ ou 3), *la surface de Kummer correspondante est singulière et répond à l'invariant* $28 - 8p$, *ainsi qu'à tous les invariants pairs inférieurs, et réciproquement.*

Terminons par un exemple qui convient à une surface non singulière :

Étant données six droites tangentes à une même conique, il existe une infinité simple de cubiques planes passant par les six sommets du quadrilatère complet formé par quatre quelconques de ces droites, passant par le point de rencontre des deux autres et touchant en outre chacune de celles-ci.