

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

P. DUHEM

**L'intégrale des forces vives en Thermodynamique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5<sup>e</sup> série*, tome 4 (1898), p. 5-19.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1898\\_5\\_4\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4_5_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

**JOURNAL**  
DE  
**MATHÉMATIQUES**  
PURES ET APPLIQUÉES.

---

---

*L'intégrale des forces vives en Thermodynamique;*

**PAR M. P. DUHEM.**

---

**I. — Des systèmes qui admettent une intégrale des forces vives.**

Dans ce Travail, qui fait suite à notre *Commentaire aux principes de la Thermodynamique* <sup>(1)</sup> et à notre Mémoire intitulé : *Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques* <sup>(2)</sup>, nous nous proposons d'étudier un système dont les diverses parties sont à des températures différentes. Pour simplifier les écritures nous supposerons qu'il existe seulement deux telles parties que nous désignerons par les indices 1 et 2, mais les démon-

---

<sup>(1)</sup> *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4<sup>e</sup> série, t. VIII, p. 269; 1892; — t. IX, p. 293; 1893; — t. X, p. 203; 1894.

<sup>(2)</sup> *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 5<sup>e</sup> série, t. II; 1896. Paris (A. Hermann), 1896.





$(n_1 + n_2 + k)$ , en désignant par  $n_1$  le nombre des variables normales  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$  et par  $n_2$  le nombre des variables normales  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$ .

D'autre part, nous avons à déterminer, en fonctions du temps  $t$ ,

les  $(n_1 + 1)$  variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, T_1$  ;  
 les  $(n_2 + 1)$  variables  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, T_2$  ;  
 les  $k$  variables auxiliaires  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ .

Soit, en tout,  $(n_1 + n_2 + k + 2)$  variables.

D'où la proposition suivante :

*Le nombre des équations que la Thermodynamique fournit pour déterminer le mouvement d'un système est inférieur au nombre de variables à déterminer d'autant d'unités qu'il y a, dans le système, de parties susceptibles d'être portées à des températures différentes.*

*Pour compléter la mise en équations du problème dynamique, il faudra emprunter à des hypothèses étrangères à la Thermodynamique un nombre de relations supplémentaires égal au nombre de ces parties.*

Soient

$$(5) \quad \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0$$

ces relations supplémentaires.

Multiplions respectivement les deux membres des équations (4) par  $\alpha'_1, \beta'_1, \dots, \lambda'_1$  et les deux membres des équations (4 bis) par  $\alpha'_2, \beta'_2, \dots, \lambda'_2$ . Ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte des égalités (3). Nous trouvons

$$\begin{aligned} & \Lambda_1 \alpha'_1 + \dots + \Gamma_1 \lambda'_1 + \Lambda_2 \alpha'_2 + \dots + \Gamma_2 \lambda'_2 \\ & - \left( \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \alpha_1} \alpha'_1 + \dots + \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \lambda_1} \lambda'_1 + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \alpha_2} \alpha'_2 + \dots + \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \lambda_2} \lambda'_2 \right) - E \frac{d\psi}{dt} - \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Supposons que les actions exercées sur le système par les corps

étrangers à ce système dépendent d'un potentiel

$$\Omega(\alpha_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2).$$

L'égalité précédente deviendra

$$(6) \quad \frac{d}{dt}(\Omega + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + E\Psi + \mathfrak{C}) - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} - \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2} \frac{dT_2}{dt} = 0.$$

Pour que cette relation (6) fournisse immédiatement une intégrale première (INTÉGRALE DES FORCES VIVES) des équations du second ordre (4) et (4 bis), il faut et il suffit que l'expression

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2} dT_2$$

représente, soit d'elle-même, soit en vertu des équations supplémentaires (5), la différentielle totale d'une fonction de  $\alpha_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2, T_1, T_2$ .

## II. — Des systèmes classiques.

La fonction  $\mathfrak{F}_1$  ne dépend que des variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, T_1$ ; la fonction  $\mathfrak{F}_2$  ne dépend que des variables  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, T_2$ ; pour que l'expression

$$\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2} dT_2$$

soit, par elle-même, une différentielle totale, il faut et il suffit que  $\frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial T_1}$  soit une fonction de la seule variable  $T_1$ , et que  $\frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial T_2}$  soit une fonction de la seule variable  $T_2$ . Donc :

*Pour qu'un système, soumis à des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel, admette une intégrale des forces vives, quelle que soit la forme des relations supplémentaires, il faut et il suffit*

que l'on ait

$$(7) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_1(\alpha_1, \dots, \lambda_1, T_1) = \mathcal{G}_1(T_1) + E\psi_1(\alpha_1, \dots, \lambda_1). \\ \mathcal{F}_2(\alpha_2, \dots, \lambda_2, T_2) = \mathcal{G}_2(T_2) + E\psi_2(\alpha_2, \dots, \lambda_2). \end{cases}$$

Nous donnerons le nom de *systèmes classiques* aux systèmes pour lesquels les égalités (7) sont vérifiées, et qui sont dénués de toute viscosité et de tout frottement.

Donnons un exemple de semblables systèmes; cet exemple justifiera la dénomination de *systèmes classiques* que nous leur avons attribuée.

Imaginons un nombre quelconque de corps  $c_1, c'_1, c''_1, \dots$ , tous à la même température, variable d'un instant à l'autre,  $T_1$ . Supposons que chacun de ces corps soit un solide invariable, d'état invariable, sauf la température; le potentiel thermodynamique interne de chacun d'eux est une fonction de la température seule; désignons par  $g_1(T_1), g'_1(T_1), g''_1(T_1), \dots$  les potentiels thermodynamiques internes des corps  $c_1, c'_1, c''_1, \dots$ .

Pour former le système partiel 1, prenons les corps  $c_1, c'_1, c''_1, \dots$  et laissons-les indépendants les uns des autres, ou bien unissons-les par des liaisons bilatérales sans viscosité ni frottement. Le système partiel 1 sera alors un système sans viscosité ni frottement. Si nous désignons par  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$  les variables indépendantes qui fixent la position relative des corps  $c_1, c'_1, c''_1, \dots$ , le potentiel thermodynamique interne du système partiel 1 sera

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, T_1) \\ = g_1(T_1) + g'_1(T_1) + g''_1(T_1) + \dots + E\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1). \end{aligned}$$

$E\psi_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1)$  étant le potentiel des actions mutuelles des corps  $c_1, c'_1, c''_1, \dots$ .

Ce potentiel thermodynamique interne a la forme présentée en la première égalité (7).

Formons d'une manière analogue les systèmes partiels 2, ... et laissons-les indépendants les uns des autres, ou bien associons-les par des liaisons bilatérales sans viscosité ni frottement; nous obtiendrons un système classique.

Et l'on voit, en effet, qu'un tel système, où l'on peut attribuer aux corps  $c_1, c'_1, c''_1, \dots$  des dimensions très petites telles que celles que certaines Écoles attribuent aux *molécules*, constitue bien le type général des systèmes que l'on considérait en Mécanique avant l'époque récente où la Thermodynamique est venue élargir le champ de cette Science.

Examinons les propriétés que la Thermodynamique attribue à ces systèmes classiques; cet examen sera d'importance, car il nous renseignera sur les liens qui unissent l'ancienne Mécanique à la nouvelle Thermodynamique.

Nous avons vu, tout d'abord, que, *pour qu'un système classique admette une intégrale des forces vives, il faut et il suffit qu'il soit soumis à des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel  $\Omega$ .*

Désignons, en effet, par  $G_1(T_1), G_2(T_2), \dots$  des fonctions définies par les égalités

$$(8) \quad \frac{dG_1(T_1)}{dT_1} = g_1(T_1), \quad \frac{dG_2(T_2)}{dT_2} = g_2(T_2), \quad \dots$$

L'égalité (6) deviendra, en vertu des égalités (7) et (8),

$$(9) \quad \frac{d}{dt}(\Omega + \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 - g_1 - g_2 + E\Psi + \mathfrak{C}) = 0,$$

ou bien encore

$$(10) \quad \frac{d}{dt}[\Omega + E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi) + \mathfrak{C}] = 0.$$

Appliquons cette dernière forme à l'exemple du système classique que nous avons défini tout à l'heure.

$E(\psi_1 + \psi_2 + \Psi)$  sera, dans ce cas, le potentiel de toutes les actions que les corps  $c_1, c'_1, c''_1, \dots, c_2, c'_2, \dots$  exercent les uns sur les autres. L'égalité (10) conduit donc, pour un tel système, à la proposition suivante :

*La somme de la force vive, du potentiel des actions extérieures et du potentiel des actions intérieures demeure invariable pendant tout mouvement du système.*









*pour déterminer les lois suivant lesquelles le système se déplace et se modifie, à l'exception de la loi suivant laquelle varie la température de chaque partie du système.*

*Une fois le mouvement du système connu, les relations supplémentaires déterminent la loi suivant laquelle varie la température de chaque partie du système.*

On comprend ainsi comment Lagrange a pu développer les lois de la Mécanique des systèmes formés de solides sans s'occuper des variations de la température de ces corps et Fourier traiter des variations de la température de ces mêmes corps solides sans s'occuper de leur mouvement; comment on peut étudier le mouvement de la Terre, assimilée à un solide rigide, sans se préoccuper de la température de cet astre et étudier le refroidissement du globe terrestre sans se préoccuper de son mouvement.

Une telle indépendance entre les problèmes qui ressortissent à la Mécanique et les problèmes qui ressortissent à la Théorie de la chaleur n'existe plus lorsque les systèmes auxquels on a affaire ne sont plus des *systèmes classiques*; si, par exemple, au lieu de regarder la Terre comme un solide rigide, d'état invariable, on tient compte des changements de volume, de forme, d'état physique et chimique qui accompagnent son refroidissement, on ne peut plus séparer le problème du mouvement de la Terre et le problème du refroidissement terrestre.

### III. — Des systèmes qui admettent une intégrale des forces vives en vertu des relations supplémentaires.

Lorsqu'on n'a pas affaire à un système classique, l'expression

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(x_1, \dots, \lambda_1, T_1)}{\partial T_1} dT_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_2(x_2, \dots, \lambda_2, T_2)}{\partial T_2} dT_2$$

n'est plus une différentielle totale. Mais il peut arriver que les équations supplémentaires (5) entraînent une égalité de la forme

$$(21) \quad \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} \frac{dT_1(t)}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2} \frac{dT_2(t)}{dt} = \frac{dF(t)}{dt}.$$

Dans ce cas, et dans ce cas seulement, le système admettra une intégrale des forces vives, qui, en vertu des égalités (6) et (21), sera de la forme

$$(22) \quad \Omega + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi + \mathcal{C} - F(t) = \text{const.}$$

On peut imaginer une infinité de formes des relations supplémentaires (5), telles qu'une égalité de la forme (21) soit vérifiée; citons-en quelques exemples remarquables.

Imaginons que les relations supplémentaires (5) entraînent cette conséquence :

*Toute modification du système étudié est adiabatique.*

Le système étant dénué de viscosité, la quantité de chaleur dégagée dans une modification réelle ou virtuelle a pour valeur

$$\delta Q = - (R_{\alpha_1} \delta \alpha_1 + \dots + R_{\lambda_1} \delta \lambda_1 + c_1 \delta T_1 + R_{\alpha_2} \delta \alpha_2 + \dots + R_{\lambda_2} \delta \lambda_2 + c_2 \delta T_2),$$

avec

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha_1} = - \frac{T_1}{E} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_1 \partial T_1}, \\ \dots\dots\dots \\ R_{\lambda_1} = - \frac{T_1}{E} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \lambda_1 \partial T_1}, \\ c_1 = - \frac{T_1}{E} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial T_1^2}, \end{array} \right.$$

$$(23 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha_2} = - \frac{T_2}{E} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2 \partial T_2}, \\ \dots\dots\dots \\ R_{\lambda_2} = - \frac{T_2}{E} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2 \partial T_2}, \\ c_2 = - \frac{T_2}{E} \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial T_2^2}. \end{array} \right.$$

Dire que, par suite des équations (5), toute modification réelle du système est adiabatique, c'est dire que les équations (5) entraînent

l'égalité

$$\frac{T_1}{E} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial x_1 \partial T_1} \alpha'_1 + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_1}{\partial \lambda_1 \partial T_1} \lambda'_1 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T_1^2} T'_1 \right) + \frac{T_2}{E} \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial x_2 \partial T_2} \alpha'_2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2 \partial T_2} \lambda'_2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T_2^2} T'_2 \right) = 0,$$

qui peut encore s'écrire

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} \frac{dT_1}{dt} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2} \frac{dT_2}{dt} = \frac{d}{dt} \left( T_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} + T_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2} \right).$$

Cette égalité prend la forme (21) si l'on pose

$$F = T_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} + T_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2}.$$

Il existe donc une intégrale des forces vives qui est, en vertu de l'égalité (22),

$$\Omega + \mathcal{F}_1 - T_1 \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} + \mathcal{F}_2 - T_2 \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2} + E\Psi + \mathfrak{C} = \text{const.}$$

ou bien

$$\Omega + EU + \mathfrak{C} = \text{const.},$$

relation qui, pour une modification adiabatique accomplie sous des actions extérieures qui dérivent d'un potentiel, découle immédiatement du principe de la conservation de l'énergie.

Une des formes d'équations complémentaires qui entraînent les conséquences que nous venons de détailler s'obtient en exprimant que, *durant une modification réelle du système, chacune des parties qui le composent ne reçoit ni ne cède de chaleur*; c'est-à-dire en écrivant que l'on a

$$\begin{aligned} R_{\alpha_1} \alpha'_1 + \dots + R_{\lambda_1} \lambda'_1 + c_1 T'_1 &= 0, \\ R_{\alpha_2} \alpha'_2 + \dots + R_{\lambda_2} \lambda'_2 + c_2 T'_2 &= 0 \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (23) et (23 bis),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial T_2} = 0.$$

Ce sont précisément les relations supplémentaires introduites par Laplace dans la théorie de la propagation du son au sein d'une masse d'air.

On obtient encore une relation de la forme (21) si l'on prend pour relations supplémentaires les relations

$$\frac{dT_1}{dt} = 0, \quad \frac{dT_2}{dt} = 0,$$

ou, en d'autres termes, si l'on suppose que chaque partie du système garde une température invariable pendant que le système se modifie; on a alors

$$F(t) = 0$$

et l'intégrale des forces vives (22) prend la forme

$$\Omega + \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2 + E\Psi + \mathcal{C} = \text{const.},$$

qui est ainsi la forme de l'intégrale des forces vives pour les *modifications isothermiques*.

On sait que cette forme de relations supplémentaires (1) avait été introduite par Newton et les géomètres du XVIII<sup>e</sup> siècle dans la théorie du son.

Ces considérations montrent que les questions qui ressortissent à la Thermodynamique ont dû solliciter l'attention des physiciens dès qu'on a voulu aborder l'étude de systèmes autres que des systèmes classiques; et, en fait, c'est la théorie de la propagation du son dans l'air qui a provoqué Laplace à créer la Thermodynamique.

---

(1) Au sujet de ces deux formes de relations supplémentaires, voir L. NATANSON, *Zeitschrift für physikalische Chemie*. Bd. XXIV, p. 302; 1897.

