JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

RAOUL BRICARD

Mémoire sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 409-448.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__409_0>

Mémoire sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques;

PAR M. RAOUL BRICARD.

I.

Parmi les problèmes auxquels donne lieu l'étude du déplacement d'une figure de grandeur invariable, l'un des plus intéressants consiste à rechercher si une telle figure peut se déplacer de manière que les trajectoires décrites par tous ses points jouissent de propriétés que l'on se donne *a priori*. On exigera par exemple que toutes ces trajectoires soient des courbes d'un certain ordre, ou bien qu'elles soient tracées sur des surfaces de natures déterminées. En général, l'existence d'un déplacement satisfaisant aux conditions imposées, qui sont en nombre infini, n'est point évidente; c'est de là que provient l'attrait et en même temps la difficulté du problème.

Les travaux relatifs aux questions de cette nature sont encore peu nombreux, croyons-nous. Nous allons rappeler ici ceux dont nous avons connaissance.

M. Darboux a recherché le premier si une figure de grandeur invariable peut se déplacer de telle manière que tous les points de l'espace lié à cette figure restent sur des plans fixes. Il a montré qu'un tel déplacement est possible et que, s'il a lieu, les trajectoires de tous les points de la figure mobile sont des coniques.

M. Mannheim s'est attaché à l'étude du déplacement inverse du précédent, en traitant, par une méthode purement géométrique et d'une grande élégance, un problème qui s'énonce ainsi : *Rechercher si une figure de grandeur invariable peut se déplacer de telle manière que tous les plans liés à cette figure passent par des points fixes*. Il montre encore qu'un tel déplacement existe, et il en donne plusieurs définitions qui permettent de le concevoir de la façon la plus nette (¹).

En dernier lieu, M. Ernest Duporcq a obtenu, sur le déplacement d'une droite dont tous les points restent sur des sphères fixes, des résultats sur lesquels je reviendrai un peu plus loin.

Après les déplacements qui permettent à tous les points d'une figure de grandeur invariable de décrire des lignes planes, il est naturel d'étudier ceux dans lesquels tous les points d'une telle figure ont pour trajectoires des lignes sphériques.

Le problème le plus général qui se pose à ce sujet peut être énoncé ainsi :

Étant donnée une figure de grandeur invariable, reconnaître si l'on peut la déplacer de telle manière que tous ses points restent sur des sphères fixes et, si le fait est possible, déterminer les conditions les plus générales dans lesquelles il a lieu.

Deux éventualités sont à considérer : ou bien chaque point de la figure mobile peut être amené en un point quelconque (aux imaginaires près) de la surface sphérique sur laquelle il reste constamment; ou bien il est astreint à décrire une certaine ligne tracée sur cette surface sphérique. Suivant le cas, on aura affaire à un déplacement à deux paramètres, ou à un seul.

Dans tous les cas chaque point de la figure mobile pourra être réuni par une tige de longueur invariable au centre de la sphère sur laquelle il reste constamment, et l'on sera ainsi amené à la connaissance d'un

(¹) Les travaux de ces deux éminents Géomètres sont exposés dans les Ouvrages suivants : MANNHEIM, *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 389 et suiv.; KOENIGS, *Traité de Cinématique;* Note III de M. DARBOUX, *Sur les mouvements algébriques.*

système articulé constitué de deux figures invariables, réunies point par point par des tiges rigides, et qui peut être déformé, malgré le nombre infini de ses liaisons.

La question posée se relie donc étroitement à la théorie des systèmes articulés, et c'est en cela que nous paraît résider son principal intérêt.

Remarquons enfin que la figure mobile peut être formée, soit de tous les points d'un solide, soit d'une surface, soit d'une ligne. On pourrait aussi examiner le cas où elle se compose d'un nombre fini de points invariablement liés ([1]).

Le travail de M. Ernest Duporcq, auquel nous avons fait allusion plus haut, est relatif au cas où la figure mobile est une droite : dans un très intéressant Mémoire paru récemment dans ce *Journal*, ce géomètre a examiné les conditions les plus générales dans lesquelles les points d'une droite qui se déplace restent tous sur des sphères fixes. Il a montré que les centres de ces sphères doivent appartenir à une cubique gauche. MM. Darboux et Mannheim avaient précédemment signalé les cas où la cubique gauche se réduit à une droite (M. Darboux) et à une conique (M. Mannheim).

Nous avons l'intention de revenir, dans une autre occasion, sur l'étude du problème général énoncé plus haut, étude qui n'est pas sans présenter des difficultés assez sérieuses. La question particulière que nous traiterons ici est la suivante :

Quel est le mode de déplacement le plus général d'un plan, tel que tous les points de ce plan décrivent des lignes appartenant à des sphères dont les centres sont sur un plan fixe?

Ce problème a deux solutions évidentes et qui ne présentent pas d'intérêt.

La première est donnée par la rotation d'un plan autour d'un point fixe, la seconde par la translation d'un plan dont tous les points restent sur des sphères égales.

Une troisième solution, de nature un peu moins intuitive, résulte des

([1]) M. Duporcq a récemment énoncé un théorème intéressant relatif à ce dernier cas (*Comptes rendus*, t. CXXVI, p. 1405).

considérations suivantes : on sait qu'une droite L peut se déplacer de telle manière que tous ses points restent sur des sphères dont les centres sont en ligne droite; ce déplacement est à deux degrés de liberté, de sorte qu'on peut en compléter la définition en astreignant la droite L à une condition supplémentaire, à celle, par exemple, de faire un angle constant avec une direction fixe Δ.

Ayant ainsi défini le déplacement de la droite L, lions à cette droite un plan (P) qui reste constamment parallèle à Δ. On voit immédiatement que tous les points de (P) décrivent des lignes sphériques, qui se déduisent des lignes sphériques décrites par les points de L, au moyen de translations parallèles à Δ.

Nous dirons qu'un tel déplacement présente un cas de *demi-dégénérescence*, et nous en donnerons un exemple à la fin de ce travail.

Il n'est nullement certain, *a priori*, qu'à part ces trois solutions du problème, il existe d'autres modes de déplacement d'un plan qui satisfassent aux conditions énoncées.

Pour résoudre la question, nous supposerons qu'un tel déplacement existe réellement, et nous déterminerons les conditions, de plus en plus précises, auxquelles doivent satisfaire les éléments du système constitué par le plan fixe et par le plan mobile.

II.

Soient (P) le plan fixe et (P′) le plan mobile. Si le déplacement cherché est possible, tout point m' du plan (P′) reste à distance invariable d'un point m du plan (P).

Il existe donc, entre les points du plan (P′) et ceux du plan (P), une correspondance au sujet de laquelle on peut faire diverses hypothèses :

1° A un point m' du plan (P′) correspond un point *unique* m du plan (P), sauf peut-être pour un nombre fini de positions du point m', et réciproquement;

2° A un point m' correspond plus d'un point m, et réciproquement;

3° Enfin à un point m' correspond un point unique m, mais la réciproque n'a pas lieu.

On va voir que les deux dernières hypothèses sont inadmissibles. Observons d'abord que, si au point m' correspondent deux points m_1 et m_2 du plan (P), tels que les distance $m'm_1$, $m'm_2$ soient invariables, m' décrit une circonférence dont l'axe est m_1m_2.

Dans la deuxième hypothèse, un point quelconque du plan (P′) décrit une circonférence dont l'axe est une droite du plan (P).

Dans la troisième hypothèse, considérons le déplacement inverse du déplacement étudié; alors le plan (P′) reste fixe et le plan (P) se déplace de manière qu'une infinité de ses points décrivent des circonférences dont les axes appartiennent au plan (P′).

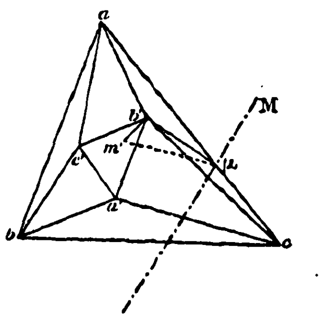
Ces points peuvent d'ailleurs occuper le plan (P) tout entier, ou être répartis sur une certaine courbe de ce plan. En tout cas, ils ne sont pas en ligne droite, car le déplacement direct du plan (P′) se réduirait à une rotation autour de cette droite, solution évidente que nous avons écartée.

En résumé, si l'une des deuxième et troisième hypothèses était vraie, un plan pourrait se déplacer de telle manière qu'une infinité de ses points, non en ligne droite, décriraient des circonférences dont les axes appartiendraient à un plan fixe.

Or, cela est impossible.

Soient, en effet, a', b', c' trois points non en ligne droite d'un plan mobile (P′), qui décrivent des circonférences dont les axes sont les côtés du triangle fixe abc, situé dans le plan (P) (*fig.* 1).

Fig. 1.



Les diverses droites tracées sur la figure sont de longueurs invariables, et l'on a en $abca'b'c'$ un octaèdre qui se déforme sans altération de ses arêtes. (Nous avons déterminé, dans un précédent travail ([1]), les conditions auxquelles peut avoir lieu cette déformation, impossible en général.)

Supposons maintenant que le point m', appartenant au plan (P′), décrive une circonférence dont l'axe M est une droite de (P). Soit μ le point où M rencontre ca. La distance $m'\mu$ est invariable et il en est de même des angles $a'b'm'$, $m'b'\mu$, $\mu b'c'$.

On a alors en $b'.ca'm'\mu$, $b'.ca'c'a$, *deux angles tétraèdres à faces de grandeurs invariables*, qui se déforment en ayant constamment en commun deux dièdres adjacents, à savoir $b'c$ et $b'a'$. Or nous avons démontré ([2]) qu'une telle déformation est impossible, si les faces des deux angles tétraèdres ne sont pas égales deux à deux. Le point m' appartient donc à la droite $b'c'$, et l'on voit tout de suite qu'il doit se confondre avec le point b'.

Nous avons supposé que le point μ était distinct des points a et c. Dans le cas contraire, on verrait que le point m' se confond nécessairement avec a' ou avec c'.

Ainsi, dans un plan mobile, il y a *trois* points au plus qui décrivent des circonférences dont les axes appartiennent à un plan fixe. Il faut donc rejeter la deuxième et la troisième hypothèses sur la nature de la correspondance qui existe entre les points m et les points m', et adopter la première : cette correspondance est uniforme (sauf peut-être pour un nombre limité de points), et, comme elle est algébrique, elle résulte d'une transformation *birationnelle* de plan à plan, ou transformation de *Cremona*, que nous désignerons par T.

III.

Voilà un premier résultat acquis, mais il est encore d'un caractère trop général. Pour le préciser davantage, nous nous appuierons sur l'important théorème suivant, dû à M. Mannheim ([3]) :

Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur des sphères

---

([1]) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1897.

([2]) *Loc. cit.*

([3]) *Principes et développements*, etc., p. 180.

fixes dont les centres sont dans un même plan, un point quelconque de la droite décrit une ligne qui appartient à une sphère dont le centre est aussi sur ce plan. Les centres des sphères qui contiennent les lignes ainsi décrites appartiennent à une conique.

D'après ce théorème, aux points du plan (P'), qui appartiennent à une droite, correspondent les points du plan (P), qui appartiennent à une conique. *La transformation* T *fait donc correspondre à toute droite du plan* (P') *une conique du plan* (P). De même, à toute droite du plan (P) elle fait correspondre une conique du plan (P'). On reconnaît là les caractères de la *transformation quadratique*, dont je vais rappeler les propriétés bien connues ([1]).

Toutes les coniques du plan (P'), qui sont les transformées des droites du plan (P), passent par trois points fixes a', b', c', qui sont distincts en général. De même, toutes les coniques du plan (P), qui sont les transformées des droites du plan (P'), passent par les points fixes a, b, c.

Si l'on prend pour triangles de référence, respectivement dans le plan (P) et dans le plan (P'), les triangles abc et $a'b'c'$, les coordonnées normales de deux points homologues $m(x, y, z)$ et $m'(x', y', z')$ sont reliées par les relations

$$Axx' = Byy' = Czz',$$

où A, B, C sont des constantes.

Un point du plan (P) admet, en général, pour homologue un point unique du plan (P'). Il n'y a d'exception que pour les points a, b, c, auxquels correspondent respectivement tous les points des droites $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$. De même, aux points a', b', c' correspondent, respectivement, tous les points des droites bc, ca, ab.

Enfin la conique du plan (P'), qui est la transformée d'une droite du plan (P), se décompose quand cette dernière passe par l'un des sommets du triangle abc. Ainsi une droite D, passant par le point a, se transforme en deux droites dont l'une, $b'c'$, correspond tout entière au point a, et dont l'autre, qui passe par le point a', correspond point par point à D.

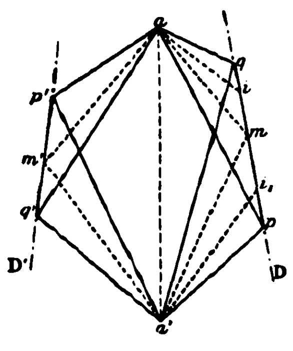
([1]) V. SALMON, *Higher plane Curves*, Ch. VIII.

Les points a, b, c, avons-nous dit, sont distincts, en général. Il peut cependant arriver que deux d'entre eux, ou même tous les trois, soient confondus. Dans tous les cas, il existe, dans le plan (P), *au moins* un point a (trois au plus) auquel correspondent tous les points d'une droite située dans le plan (P'), et toute droite issue du point a a pour transformée une droite du plan (P') qui passe par un point fixe a'. Ce point a' joue, dans le plan (P'), le même rôle que le point a joue dans le plan (P).

IV.

Appliquons ces considérations au déplacement qui fait l'objet de cette étude : marquons dans le plan (P) et dans le plan (P') le point a et le point a', puis traçons la droite D' qui correspond tout entière au point a et la droite D qui correspond au point a' (*fig.* 2).

Fig. 2.



Soient enfin ap et aq deux droites quelconques issues du point a, $a'p'$ et $a'q'$ les droites correspondantes du plan (P').

Tous les points de la droite $p'q'$ restent à des distances invariables du point a; par suite, ap' et aq' sont des droites de longueurs constantes. Il en est de même des droites $a'p$ et $a'q$.

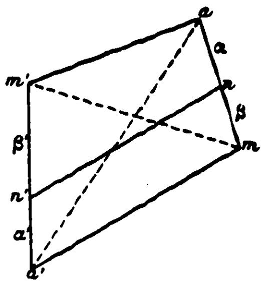
On a donc en apq, $a'pq$, $a'p'q'$, $ap'q'$ un système de quatre triangles de grandeurs invariables, articulés aux points a, a', et suivant les droites pq, $p'q'$. Ce système doit se déformer dans les conditions suivantes : si am est une droite quelconque, menée par le point a

dans le plan abc, et liée à ce plan, il existe une droite $a'm'$, menée par le point a' dans le plan $a'b'c'$ et liée à ce plan, telle que, pendant la déformation, un point quelconque de am reste à distance invariable d'un certain point de $a'm'$.

Je transformerai encore cette condition en faisant intervenir une propriété élémentaire du *quadrilatère gauche articulé*.

Soit (*fig.* 3) $ama'm'$ un tel quadrilatère. S'il se déforme de telle manière que deux points, n et n' appartenant respectivement aux

Fig. 3.



côtés opposés am, $a'm'$, restent à distance invariable l'un de l'autre, *il existe une relation linéaire entre les carrés des diagonales* aa' *et* mm'.

Posons en effet

$$an = \alpha, \qquad nm = \beta, \qquad m'n' = \beta', \qquad n'a' = \alpha',$$

on a, d'après une propriété bien connue (théorème de Stewart),

$$\overline{nn'}^2 = \frac{\alpha'\,\overline{nm'}^2 + \beta'\,\overline{na'}^2}{\alpha' + \beta'} + k_1,$$

puis

$$\overline{nm'}^2 = \frac{\alpha\,\overline{mm'}^2 + \beta\,\overline{m'a}^2}{\alpha + \beta} + k_2 = \frac{\alpha\,\overline{mm'}^2}{\alpha + \beta} + k_3,$$

$$\overline{na'}^2 = \frac{\beta\,\overline{aa'}^2}{\alpha + \beta} + k_4,$$

en désignant par k_1, k_2, k_3, k_4 des quantités constantes. En remplaçant, dans l'expression de $\overline{nn'}^2$, $\overline{nm'}^2$ et $\overline{na'}^2$ par leurs valeurs, il vient

$$(1) \qquad \overline{nn'}^2 = \frac{\alpha\alpha'\overline{mm'}^2 + \beta\beta'\overline{aa'}^2}{(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')} + k,$$

d'où une relation de la forme

$$(2) \qquad A\overline{mm'}^2 + B\overline{aa'}^2 + C = 0.$$

Réciproquement, si le quadrilatère se déforme de manière que la relation (2) soit satisfaite, un point quelconque de am reste à distance invariable d'un certain point de $a'm'$. En effet, on peut identifier (1) et (2) en se donnant arbitrairement le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ce théorème se rattache à la théorie de l'*hyperboloïde articulé* de M. Greenhill, théorie qui a fait, comme on le sait, l'objet d'études approfondies. Je me contente d'indiquer ce point, étranger à la question traitée ici.

Revenons à la *fig.* 2. Le quadrilatère $ama'm'$ se déforme, avons-nous dit, de manière qu'un point quelconque de am reste à distance constante d'un certain point de $a'm'$: on a donc, d'après ce qui précède, une relation linéaire entre les carrés des longueurs $\overline{aa'}^2$ et $\overline{mm'}^2$.

On en conclut donc ceci : *le système des quatre triangles apq, $a'pq$, $a'p'q'$, $ap'q'$, doit pouvoir se déformer de manière que, m étant un point quelconque de pq, il existe sur $p'q'$ un point correspondant m' tel que l'on ait une relation linéaire entre $\overline{aa'}^2$ et $\overline{mm'}^2$.*

V.

Nous supposerons d'abord que les éléments de la *fig.* 2 sont tous de *grandeurs finies*.

Des conditions auxquelles doit satisfaire notre système de quatre triangles, conservons seulement celle-ci : on doit avoir une relation linéaire entre $\overline{pp'}^2$ et $\overline{aa'}^2$.

La déformation est alors possible et dépend d'un seul paramètre arbitraire.

En effet, donnons-nous la longueur $aa' = x$, ce qui fait connaître la longueur pp'. On peut construire successivement les trois tétraèdres $aa'pq$, $aa'pp'$, $aa'p'q'$, dont toutes les arêtes sont connues.

La construction de chaque tétraèdre est possible de *deux* manières, qui diffèrent par l'orientation; de la sorte, à une valeur de x correspondent *huit* déterminations du système (qui, naturellement, sont deux à deux symétriques). Ces déterminations dépendent donc d'une équation du huitième degré, dont les coefficients sont fonctions de x.

Pour l'une au moins de ces déterminations, il faut, d'après la forme donnée à l'énoncé du problème, que $\overline{mm'}^2$ soit une fonction linéaire de x^2 à coefficients constants, m et m' étant deux points correspondants quelconques de pq et $p'q'$.

On pressent que toutes les déterminations ne peuvent satisfaire à cette condition, et que, par suite, l'équation du huitième degré dont il est parlé plus haut doit se décomposer. Mais il faut donner à cette idée une forme plus nette. Nous y parviendrons à l'aide des considérations suivantes :

1° *En aucun cas, la détermination du tétraèdre $aa'pq$ ne peut être rationnelle en x.*

La démonstration même de cet énoncé en précisera le sens : nous connaissons toutes les arêtes du tétraèdre $aa'pq$; l'une d'entre elles, aa', est égale à x. Pour le construire, fixons la face apq. Le point a' se trouve alors sur une circonférence dont l'axe est pq, et la position du point a' sur cette circonférence correspond uniformément, comme on sait, *à la tangente de la moitié du dièdre pq*. Pour que le tétraèdre fût déterminé rationnellement en fonction de x, il faudrait que cette tangente fût une fonction rationnelle de x.

Or il est aisé de voir que cela est impossible; abaissons en effet sur pq les perpendiculaires ai et $a'i_1$, désignons par h, h_1, k les longueurs connues ai, $a'i_1$, ii_1 et soit enfin φ le dièdre pq. On a

$$x^2 = k^2 + h^2 + h_1^2 - 2hh_1 \cos\varphi,$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{k^2 + h^2 + h_1^2 - x^2}{2hh_1};$$

on tire de là

$$\operatorname{tang}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{x^2 - k^2 - (h - h_1)^2}{-x^2 + k^2 + (h + h_1)^2}.$$

Il faudrait que le second membre fût le carré d'une fonction rationnelle en x, ce qui exigerait

$$k^2 + (h - h_1)^2 = k^2 + (h + h_1)^2,$$

d'où

$$hh_1 = 0,$$

ce qui n'a pas lieu (¹).

2° Étudions à présent la détermination du tétraèdre $aa'pp'$. La question est analogue à la précédente; la différence se trouve dans le fait qu'il y a maintenant deux arêtes variables, $aa' = x$ et pp', reliées à la première par une relation de la forme

$$\overline{pp'}^2 = l\overline{aa'}^2 + m.$$

On peut faire sur cette détermination deux hypothèses :

1° Ou bien elle est rationnelle en x; il n'est pas difficile de montrer que ce fait est impossible, par un raisonnement analogue au précédent, bien qu'un peu plus long. Mais cela n'est pas utile, comme on le verra par la suite;

2° Ou bien elle est irrationnelle en x; on peut alors se demander si cette détermination ne dépendrait pas, pour un choix convenable des éléments de la figure, d'un radical identique à celui dont dépend la détermination du tétraèdre $aa'pq$; il y aurait *correspondance uniforme* entre les deux tétraèdres, et le premier étant choisi, le second serait déterminé sans ambiguïté.

(¹) Pour abréger une étude déjà longue, j'admets ici, sans démonstration, un résultat que le lecteur pourra établir sans peine, à l'aide de raisonnements tout à fait analogues à ceux employés dans le texte.

Posons

$$ap = p, \quad aq = q, \quad a'p = p_1, \quad a'q = q_1, \quad ap' = p'_1, \quad a'p' = p'.$$

Soient aussi φ et ψ les dièdres en aa' des tétraèdres $aa'pq$ et $aa'pp'$.

La formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique, appliquée à l'angle trièdre en a du tétraèdre $aa'pq$, donne

$$\cos\widehat{paq} = \cos\widehat{paa'}\cos\widehat{qaa'} + \sin\widehat{paa'}\sin\widehat{qaa'}\cos\varphi.$$

Les termes $\cos\widehat{paq}$, $\cos\widehat{paa'}$, $\cos\widehat{qaa'}$ sont ou bien des constantes, ou bien des fonctions rationnelles de x. On a, par exemple,

$$\cos\widehat{paa'} = \frac{x^2 + p^2 - p_1^2}{2px}.$$

On voit ainsi que $\cos\varphi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sin\widehat{paa'}\sin\widehat{qaa'}.$$

Mais on a

$$\sin\widehat{paa'} = \frac{1}{2px}\sqrt{(x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x)},$$

et de même

$$\sin\widehat{qaa'} = \frac{1}{2qx}\sqrt{(x+q+q_1)(x+q-q_1)(x+q_1-q)(q+q_1-x)}.$$

Donc $\cos\varphi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sqrt{\begin{Bmatrix} (x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x) \\ (x+q+q_1)(x+q-q_1)(x+q_1-q)(q+q_1-x) \end{Bmatrix}}.$$

On voit de même que $\cos\psi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sqrt{\left\{\begin{array}{l}(x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x)\\(x+p'+p'_1)(x+p'-p'_1)(x+p'_1-p')(p'+p'_1-x)\end{array}\right\}}.$$

Si $\tang\frac{\varphi}{2}$ et $\tang\frac{\psi}{2}$ dépendaient du même radical, il en serait de même *a fortiori* de $\cos\varphi$ et $\cos\psi$, et les deux radicaux écrits ci-dessus devraient être identiques. Il faudrait pour cela que les quantités

$$q+q_1,\quad q-q_1,\quad q_1-q$$

fussent égales, à l'ordre près, aux quantités

$$p'+p'_1,\quad p'-p'_1,\quad p'_1-p'.$$

Remarquons à présent que les points p et q sont deux points *quelconques* de la droite D; ayant placé arbitrairement le point p, on peut supposer le point q choisi de manière que les égalités en question n'aient pas lieu. En effet, s'il en était autrement, le point q pourrait se déplacer sur la droite D, de manière qu'on ait

$$q+q_1=\text{const.},\qquad q-q_1=\text{const.},$$

d'où

$$q=\text{const.},\qquad q_1=\text{const.},$$

ce qui est absurde.

Nous pouvons donc conclure qu'*il n'existe pas de correspondance uniforme entre les tétraèdres $aa'pq$ et $aa'pp'$.*

D'après cela, si l'on construit, pour une valeur donnée de x, le tétraèdre $aa'pp'$, les deux positions que peut occuper le point q sont *algébriquement inséparables.* Il en est de même des deux positions que peut occuper le point q'. Si l'on désigne alors par q_1 et q_2 les deux positions du point q, par q'_1 et q'_2 les deux positions du point q', *toute propriété du système* (q_1, q'_1) *appartient aussi au système* (q_2, q'_2).

D'une façon plus précise, on peut former une équation du second degré

$$(1) \qquad A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

aux racines de laquelle, λ_1 et λ_2, correspondent uniformément les deux positions du point q, quand on a construit le tétraèdre $aa'pp'$ $\left(\lambda\right.$ désigne, par exemple, tang $\left.\frac{\varphi}{2}\right)$. De même, les deux positions du point q' correspondent uniformément aux racines λ'_1 et λ'_2 de l'équation

$$(2) \qquad A'\lambda'^2 + B'\lambda' + C' = 0.$$

Les coefficients A, B, C, A′, B′, C′ des équations (1) et (2) sont des fonctions rationnelles de x et de tang $\frac{\psi}{2}$, ou bien, en employant le langage de la Théorie des équations, appartiennent *au domaine de rationalité* $\left(x, \text{tang}\,\frac{\psi}{2}\right)$. D'après ce qu'on vient de dire, ces deux équations sont irréductibles dans ce domaine.

Supposons alors qu'une certaine propriété des points q_1 et q'_1 s'exprime par une relation, rendue rationnelle, entre les racines λ_1 et λ'_1

$$(3) \qquad \varphi(\lambda_1, \lambda'_1) = 0,$$

et dont les coefficients appartiennent au domaine de rationalité précédemment défini. Les équations (2) et (3) ont une racine commune λ'_1; il s'ensuit que leur résultant est nul, et l'on a

$$\psi(\lambda_1) = 0,$$

les coefficients de ψ appartenant toujours au même domaine de rationalité. L'équation précédente, satisfaite par une racine de l'équation (1), irréductible dans ce domaine, doit être satisfaite aussi par la seconde racine λ_2 de la même équation. On a donc

$$\psi(\lambda_2) = 0,$$

et l'équation

$$\varphi(\lambda_2, \lambda') = 0$$

a une racine commune avec l'équation (2). Si cette racine est λ'_2, on a

$$\varphi(\lambda_2, \lambda'_2) = 0,$$

et, par suite, la propriété qu'on a supposée appartenir au système (q_1, q') appartient aussi au système (q_2, q'_2). Si la racine commune est λ'_1, on a

$$\varphi(\lambda_2, \lambda'_1) = 0,$$

l'équation (1) et l'équation

$$\varphi(\lambda, \lambda'_1) = 0$$

ont deux racines communes. En répétant le même raisonnement, on verra que ces deux racines appartiennent aussi à l'équation

$$\varphi(\lambda, \lambda'_2) = 0.$$

Dans ce dernier cas, la même propriété appartient aux *quatre* couples de points

$$(q_1, q'_1), \quad (q_2, q'_1), \quad (q_1, q'_2), \quad (q_2, q'_2).$$

Quoi qu'il arrive, la proposition énoncée plus haut se trouve établie.

Revenons alors au système des quatre triangles. D'après les conditions dans lesquelles ce système doit se déformer, $\overline{qq'}^2$ doit être une fonction linéaire de x^2, à coefficients constants, q et q' étant convenablement choisis parmi les positions que ces points peuvent occuper. Il résulte des développements précédents que, si l'on a

$$\overline{q_1 q'_1}^2 = lx^2 + m,$$

on a aussi

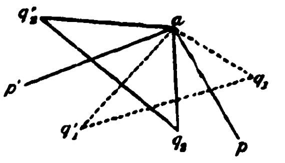
$$\overline{q_2 q'_2}^2 = lx^2 + m,$$

et, par suite,

$$q_1 q'_1 = q_2 q'_2.$$

Ceci nous conduit à un résultat d'un énoncé fort simple : Projetons le système sur un plan perpendiculaire à la droite aa' (*fig.* 4). Les plans $aa'p$, $aa'p'$ ont pour projections deux droites ap, ap'. Les

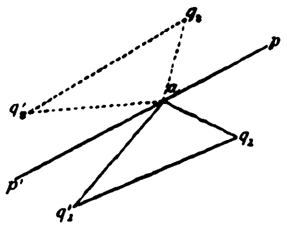
Fig. 4.



points q_1 et q_2 se projettent en deux points symétriques par rapport à ap, et les points q'_1 et q'_2, en deux points symétriques par rapport à ap'. Les droites $q_1 q'_1$ et $q_2 q'_2$ sont égales dans l'espace et font le même angle avec le plan de projection. Elles sont donc égales aussi en projection.

On a, par suite, en $q_1 a q'_1$, $q_2 a q'_2$ deux triangles égaux. Si ces deux triangles étaient inversement orientés (*fig.* 5), on voit sans peine

Fig. 5.



que les points p, a, p' seraient en ligne droite, et le dièdre en aa' du tétraèdre $aa'pp'$ serait constamment égal à o ou à π, ce qui est inadmissible. Il faut donc que ces deux triangles soient orientés de même, comme sur la *fig.* 4. On alors

$$\widehat{q_1 a q'_1} = \widehat{q_2 a q'_2},$$

d'où

$$\widehat{q_1 a q_2} = \widehat{q'_1 a q'_2}$$

et

$$\widehat{q_1 a p} = \widehat{q'_1 a p'},$$

ce qui s'exprime ainsi : *pendant la déformation, les dièdres en aa' des tétraèdres $aa'pq$, $aa'p'q'$ sont constamment égaux.*

Il faut ajouter qu'une rotation du même sens doit amener le plan apa' sur le plan aqa', et le plan $ap'a'$ sur le plan $aq'a'$.

Le dièdre en aa' du tétraèdre $aa'pq$ est celui que nous avons déjà désigné par φ. On a vu que $\cos\varphi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sqrt{\begin{Bmatrix}(x+p+p_1)(x+p-p_1)(x+p_1-p)(p+p_1-x)\\(x+q+q_1)(x+q-q_1)(x+q_1-q)(q+q_1-x)\end{Bmatrix}}.$$

De même, en appelant ψ le dièdre en aa' du tétraèdre $aa'p'q'$, $\cos\psi$ est le quotient d'une fonction rationnelle de x par l'expression

$$\sqrt{\begin{Bmatrix}(x+p'+p'_1)(x+p'-p'_1)(x+p'_1-p')(p'+p'_1-x)\\(x+q'+q'_1)(x+q'-q'_1)(x+q'_1-q')(q'+q'_1-x)\end{Bmatrix}}.$$

Appelons Q et R les deux polynomes du huitième degré qui figurent sous les radicaux précédents. On peut supposer qu'aucun d'eux ne contient de facteur qui soit carré parfait, car cela entraînerait entre les p et q, ou entre les p' et q' des relations que l'on peut supposer n'être pas satisfaites, puisque, nous le répétons, le choix des points p et q sur la droite D est arbitraire.

Cela posé, l'égalité

$$\cos\varphi = \cos\psi$$

entraîne la suivante

$$\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{Q}} = \text{fonction rationnelle de } x,$$

d'où l'on tire aisément

$$\begin{aligned} QR &= \text{carré d'une fonction rationnelle de } x,\\ &= \text{carré d'un polynome en } x. \end{aligned}$$

Comme Q et R n'ont pas de facteurs carrés parfaits, il faut que ces deux polynomes soient identiques. En écrivant que leurs facteurs linéaires sont égaux deux à deux, on voit que les quantités

$$p+p_1,\quad p-p_1,\quad q+q_1,\quad q-q_1$$

et

$$p'+p'_1,\quad \pm(p'-p'_1),\quad q'+q'_1,\quad \pm(q'-q'_1)$$

forment, à l'ordre près, deux suites identiques.

Toujours à cause du choix arbitraire des points p et q, on ne doit pas écrire d'égalité où figurent à la fois des p et des q. Il faut aussi remarquer que les quantités p et q étant essentiellement positives, $p+p_1$ est toujours supérieur à la valeur absolue de $p-p_1$, etc. Il résulte de ces deux considérations que les seuls systèmes possibles d'égalités sont les suivants :

$$\text{(I)}\quad \left\{\begin{array}{l} p+p_1=p'+p'_1,\qquad q+q_1=q'+q'_1,\\ p-p_1=p'-p'_1,\qquad q-q_1=q'-q'_1,\\ \text{d'où}\\ p=p',\quad p_1=p'_1,\quad q=q',\quad q_1=q'_1; \end{array}\right.$$

$$\text{(II)}\quad \left\{\begin{array}{l} p+p_1=p'+p'_1,\qquad q+q_1=q'+q'_1,\\ p-p_1=p'_1-p',\qquad q-q_1=q'_1-q',\\ \text{d'où}\\ p=p'_1,\quad p_1=p',\quad q=q'_1,\quad q_1=q'; \end{array}\right.$$

$$\text{(III)}\quad \left\{\begin{array}{l} p+p_1=p'+p'_1,\qquad q+q_1=q'+q'_1,\\ p-p_1=p'-p'_1,\qquad q-q_1=q'_1-q',\\ \text{d'où}\\ p=p',\quad p_1=p'_1,\quad q=q'_1,\quad q_1=q'; \end{array}\right.$$

$$\text{(IV)}\quad \left\{\begin{array}{l} p+p_1=p'+p'_1,\qquad q+q_1=q'+q'_1,\\ p-p_1=p'_1-p',\qquad q-q_1=q'_1-q',\\ \text{d'où}\\ p=p'_1,\quad p_1=p',\quad q=q',\quad q_1=q'_1. \end{array}\right.$$

On peut se dispenser d'examiner les systèmes (III) et (IV).

En effet, lorsque le point q vient à se confondre avec le point p, le point q' doit, en même temps, se confondre avec le point q.

En d'autres termes, les égalités

$$q = p, \qquad q_1 = p_1$$

entraînent les suivantes :

$$q' = p', \qquad q'_1 = p'_1.$$

D'après cela, le système (III) ou le système (IV) ne peuvent être satisfaits que si l'on a

$$p = p_1 = p' = p'_1,$$
$$q = q_1 = q' = q'_1,$$

et les quantités satisfaisant à ces égalités satisfont à chacun des systèmes (I) et (II). Il n'y a donc lieu de retenir que ces deux-là et nous allons les examiner successivement.

VI.

Commençons par étudier le système des égalités (I).

Les quatre triangles sont représentés de nouveau (*fig.* 6). On a

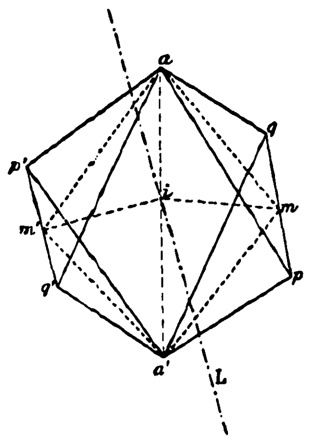
$$ap = ap' = p, \qquad aq = aq' = q,$$
$$a'p = a'p' = p_1, \qquad a'q = a'q' = q_1.$$

Comme les dièdres en aa' des deux tétraèdres $aa'pq$, $aa'p'q'$ doivent être égaux, on voit immédiatement que ces deux tétraèdres eux-mêmes sont égaux : le second résulte de la rotation du premier autour de aa' d'un certain angle φ.

A chaque système de valeurs des paramètres φ et $aa' = x$ correspond une position de la figure formée par les quatre triangles.

Faisons maintenant intervenir la condition à laquelle doit satisfaire le système articulé : il faut que, m, m' étant deux points correspondants quelconques de pq et de $p'q'$, la déformation soit telle que l'on ait une relation linéaire entre $\overline{mm'}^2$ et $\overline{aa'}^2$.

Fig. 6.



Nous devons rechercher s'il est possible d'établir, entre x et φ, une relation telle que cette condition soit remplie.

Il est clair, tout d'abord, que les points m et m' sont homologues sur les deux tétraèdres égaux $aa'pq$, $aa'p'q'$: en effet, les dièdres en aa' des tétraèdres $aa'pm$, $aa'p'm'$ doivent être égaux. On a donc

$$am = am' = m, \qquad a'm = a'm' = m_1.$$

En outre, le dièdre en aa' du tétraèdre $aa'mm'$ est égal à φ.

Calculons $\overline{mm'}^2$. Abaissons à cet effet sur aa' les perpendiculaires mi, $m'i$. L'angle $\widehat{mim'}$ est égal à φ et l'on a

$$\overline{mm'}^2 = \overline{mi}^2 + \overline{m'i}^2 - 2\,mi.m'i\cos\varphi = 2\overline{mi}^2\,(1 - \cos\varphi).$$

Le triangle ama' fournit de plus l'égalité

$$\begin{aligned}\overline{mi}^2 &= \frac{(x+m+m_1)(x+m-m_1)(x+m_1-m)(m+m_1-x)}{4x^2}\\ &= \frac{-x^4 + 2(m^2+m_1^2)^2x^2 - (m^2-m_1^2)^2}{4x^2}.\end{aligned}$$

Substituant cette valeur dans l'expression de $\overline{mm'}^2$, et égalant à une fonction linéaire de x^2, on trouve la relation qui doit exister entre x et φ :

$$(4)\qquad \frac{-x^4+2(m^2+m_1^2)^2x^2-(m^2-m_1^2)^2}{2x^2}(1-\cos\varphi)=Ax^2+B.$$

Soient n et n' deux autres points correspondants; ils donnent lieu à la relation analogue

$$(5)\qquad \frac{-x^4+2(n^2+n_1^2)^2x^2-(n^2-n_1^2)^2}{2x^2}(1-\cos\varphi)=Cx^2+D.$$

Il faut, pour que la déformation soit possible, que les relations (4) et (5) définissent le même angle φ en fonction de x. Cela exige que l'on ait *identiquement*

$$(6)\qquad \frac{-x^4+2(m^2+m_1^2)^2x^2-(m^2-m_1^2)^2}{-x^4+2(n^2+n_1^2)^2x^2-(n^2-n_1^2)^2}=\frac{Ax^2+B}{Cx^2+D}.$$

Une telle identité ne peut avoir lieu que si les polynomes bicarrés qui figurent au premier membre ont un facteur commun du second degré. En comparant leurs facteurs, et en tenant compte de l'indépendance des points m et n, on voit que ce fait se présente au seul cas où l'on a

$$m=m_1,\qquad n=n_1.$$

On a alors aussi

$$p=p_1,\qquad q=q_1.$$

Les quatre triangles de la fig. 6 sont égaux.

Faisons $m=m_1$, $n=n_1$ dans l'égalité (6), et identifions. Il vient

$$A=k,\qquad B=-2k(m^2+m_1^2),$$

k étant une constante indépendante de la position du point m.

La relation (4) devient alors

$$\frac{-x^2+2(m^2+m_1^2)}{2}(1-\cos\varphi)=k[x^2-2(m^2+m_1^2)],$$

ou

$$\cos\varphi = 1 + 2k.$$

Ainsi l'angle φ est de grandeur constante.

Réciproquement, supposons que les quatre triangles de la *fig.* 6 soient égaux ($ap = ap' = a'p = a'p'$, $aq = aq' = a'q = a'q'$), que la figure formée par les triangles apq, $a'pq$ soit superposable à celle formée par les deux autres, et qu'enfin le système se déforme de telle manière que les plans $aa'p$, $aa'p'$ fassent entre eux un angle constant φ; dans ces conditions, *un point quelconque du plan de l'un des triangles reste à distance invariable d'un point convenablement déterminé sur le plan du triangle opposé.*

Soit en effet m un point quelconque de la droite pq, et m' le point de la droite $p'q'$ tel que $mp = m'p'$. La figure $ama'm'$ constitue un quadrilatère gauche articulé dont les côtés ont même longueur m. Si l'on désigne par i le milieu de aa', les droites mi, $m'i$ sont perpendiculaires à aa', et l'angle en i du triangle mim' est égal à φ.

On a donc

$$\overline{mm'}^2 = 2\overline{mi}^2(1-\cos\varphi) = 2\left(m^2 - \frac{\overline{aa'}^2}{4}\right)(1-\cos\varphi),$$

ou

$$\overline{mm'}^2 + \frac{1-\cos\varphi}{2}\overline{aa'}^2 = 2(1-\cos\varphi)m^2.$$

Il existe donc une relation linéaire entre $\overline{mm'}^2$ et $\overline{aa'}^2$, diagonales du quadrilatère $ama'm'$; d'après le lemme utilisé plusieurs fois, on en conclut que *tout point de am reste à distance invariable d'un point convenablement choisi sur $a'm'$, et réciproquement.* Comme enfin le point m est pris arbitrairement sur pq, la proposition se trouve établie.

Si l'on fixe le triangle apq, on peut donner une nouvelle définition du déplacement du triangle $a'p'q'$.

Nous pouvons d'abord supposer que les points p et q sont choisis de telle manière que l'on ait $ap = aq$. Joignons alors le point i au point de rencontre des droites pq, $p'q'$, et soit L la droite obtenue. On reconnaît immédiatement les propriétés suivantes :

1° Les points a, p, q sont respectivement symétriques des points a',

p', q' par rapport à la droite L. En d'autres termes, le triangle $a'q'p'$ se déplace de manière à rester constamment symétrique du triangle apq par rapport à la droite L, de sorte que, pour définir le déplacement du premier triangle, il suffit de définir le déplacement de L.

2° m étant le milieu de pq, le plan am est perpendiculaire au plan apq et le point i décrit dans ce plan une circonférence décrite sur am comme diamètre;

3° Enfin la droite L rencontre pq et fait avec cette droite un angle moitié de l'angle $(pq, p'q')$; mais ce dernier angle, égal au supplément de l'angle φ, est constant.

On peut donc définir ainsi qu'il suit le déplacement de la droite L et celui du triangle $a'p'q'$.

Soient apq un triangle fixe, m la projection du point a sur le côté pq, C un cercle décrit sur am comme diamètre, dans un plan perpendiculaire au plan apq. Une droite L se déplace en s'appuyant sur le cercle C et sur la droite pq, que de plus elle rencontre sous un angle constant.

Si, pour chaque position de L, on construit le triangle a'q'p', symétrique du triangle apq par rapport à cette droite, ce triangle a'q'p' se déplace de telle manière que tous les points de son plan décrivent des lignes sphériques dont les centres appartiennent au plan apq.

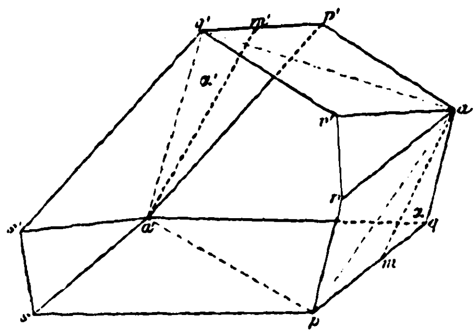
Nous retrouverons plus loin ce déplacement par une méthode qui permettra de donner à son sujet quelques détails complémentaires. Indiquons cependant tout de suite comment on peut le réaliser au moyen d'un modèle facile à construire.

Reportons (*fig.* 7) les triangles de la *fig.* 6 et construisons les parallélogrammes $aqpr$, $ap'q'r'$, $a'qps$, $a'p'q's'$.

Les angles rar', sas', égaux tous deux à l'angle des droites pq, $p'q'$, sont constants pour cette raison, et, par suite, les triangles rar', $sa's'$ sont invariables.

On peut donc construire ces triangles, ainsi que les quatre parallélogrammes désignés ci-dessus, en les découpant dans du carton. On assemblera ensuite ces six polygones au moyen de charnières de papier gommé et le système articulé, constitué de cette manière, jouit de cette propriété que, pendant sa déformation, les points du plan $aqpr$ restent tous à des distances constantes de points de la face $a'p'q's'$,

Fig. 7.



qui leur correspondent un à un. On met le fait en évidence en reliant les points correspondants par des fils qui restent tendus pendant la déformation.

Voici maintenant comment on déterminera les points correspondants. Soit α un point du plan $aqpr$, dont on veut déterminer le correspondant α' dans le plan $a'p'q's'$. Menons la droite $a\alpha$ qui rencontre en m la droite pq. En prenant sur $p'q'$ la longueur $p'm' = pm$, le point α' se trouve sur la droite $a'm'$, et sa position sur cette droite est déterminée par la relation

$$\frac{m'\alpha'.m\alpha}{a'\alpha'.a\alpha} = \frac{1+\cos\psi}{2},$$

ψ désignant l'angle rar', c'est-à-dire le supplément de l'angle que nous avons précédemment désigné par φ. On tire de là

$$a'\alpha' = \frac{ma.m\alpha}{ma - a\alpha\sin^2\frac{\psi}{2}},$$

relation qui permet de déterminer facilement le point a'.

VII.

Nous passons à l'examen du système d'égalités (II) de la fin du § V.

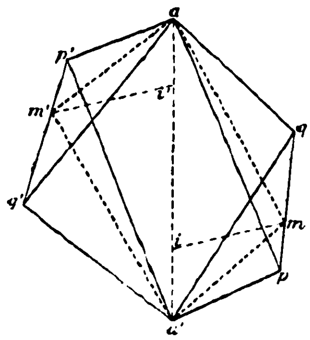
Construisons (*fig.* 8) le système des quatre triangles articulés, de manière à satisfaire aux relations

$$ap = a'p' = p, \qquad ap' = a'p = p_1.$$
$$aq = a'q' = q, \qquad aq' = a'q = q_1.$$

Cette fois les deux tétraèdres $aa'pq$ et $aa'p'q'$ sont, non plus égaux, mais symétriques.

Si m et m' sont deux points correspondants appartenant respectivement à pq et $p'q'$, on a $pm = p'm'$. Les plans ama' et $am'a'$ forment

Fig. 8.



entre eux le même angle φ, quel que soit le point m, et la détermination du système dépend des deux variables φ et $aa' = x$.

Il faut encore rechercher si l'on peut trouver entre φ et x une relation telle que $\overline{mm'}^2$ soit une fonction linéaire de x^2, quel que soit le point m.

Abaissons des points m et m' les perpendiculaires mi et $m'i'$ sur aa'. On a

$$\overline{mm'}^2 = 2\overline{mi}^2(1 - \cos\varphi) + \overline{ii'}^2.$$

D'ailleurs, en posant $am = a'm' = m$, $a'm = am' = m'$,

$$\overline{mi}^2 = \frac{(x+m+m_1)(x+m-m_1)(x+m_1-m)(-x+m+m_1)}{4x^2}$$

et

$$ii' = ai - ia' = \frac{\overline{ai}^2 - \overline{ia'}^2}{aa'} = \frac{m'^2 - m^2}{x}.$$

On a donc, en égalant $\overline{mm'}^2$ à une fonction linéaire de x^2,

$$(7)\quad \frac{(x+m+m_1)(x+m-m_1)(x+m_1-m)(-x+m+m_1)}{2x^2}(1-\cos\varphi) + \frac{(m'^2-m^2)^2}{x^2} = Ax^2 + B.$$

En éliminant $\cos\varphi$ entre cette relation et la relation analogue qui fournit un second point n, il vient

$$\frac{(x+m+m_1)(x+m-m_1)(x+m_1-m)(-x+m+m_1)}{(x+n+n_1)(x+n-n_1)(x+n_1-n)(-x+n+n_1)} = \frac{Ax^4 + Bx^2 - (m'^2-m^2)^2}{A'x^4 + B'x^2 - (n'^2-n^2)^2}.$$

Si l'on n'a pas, quels que soient m et n, les égalités $m = m_1$, $n = n_1$, on peut supposer ces points choisis de telle manière que les polynomes bicarrés figurant au premier membre de la relation précédente n'admettent pas de facteur commun. Les deux polynomes figurant au second membre doivent alors leur être respectivement identiques, et l'on a par un calcul facile

$$A = -1, \qquad B = 2(m^2 + m_1^2),$$

et la relation (7) se réduit à

$$\cos\varphi = -1.$$

On voit immédiatement que, en supposant cette égalité satisfaite, le déplacement du triangle $a'p'q'$ par rapport au triangle apq rentrerait dans ceux que nous avons signalés au début de cette étude, et qui donnent des solutions sans intérêt du problème : ce déplacement se réduirait, en effet, à une translation telle que tous les points du triangle resteraient sur des sphères égales.

Revenant à la relation (8), on peut supposer que l'on a constamment $m = m_1$, $n = n_1$: on retombe ainsi sur la solution obtenue au § VI.

Ainsi l'étude du système II ne fournit rien de nouveau.

VIII.

Nous avons, au début du § V, supposé que les éléments de la *fig.* 2 sont de longueurs finies. S'il en est autrement, les raisonnements que nous avons faits ne peuvent plus s'appliquer sans modifications.

Supposons que, dans cette figure, les droites D et D' s'éloignent à l'infini. Les plans apq et $a'pq$ deviennent parallèles et le déplacement du second par rapport au premier est une *translation* telle que le point a' décrive une droite perpendiculaire à ce plan apq.

Tous les quadrilatères, tels que $ama'm'$, ont maintenant leurs côtés de longueurs infinies, et le lemme relatif au quadrilatère gauche articulé, qui a joué un rôle fondamental dans les paragraphes précédents, cesse d'avoir un sens : on le remplace aisément par le suivant : *il doit exister une relation linéaire entre* $\overline{aa'}^2 = x^2$ *et le cosinus de l'angle* mam'.

En appliquant le lemme, ainsi modifié, au nouveau système, on trouve aisément les résultats suivants, semblables à ceux qui ont été obtenus dans le cas où les éléments de la figure étaient de grandeurs finies :

1° La détermination du système $(apq, a'pq)$ dépend d'une équation du second degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, et cette équation est toujours irréductible;

2° Il ne peut y avoir correspondance uniforme entre les systèmes précédent et le système $(app', a'pp')$. En d'autres termes, pour une valeur donnée de x, les déterminations de ces deux systèmes dépendent d'irrationnelles qui ne peuvent être identiques;

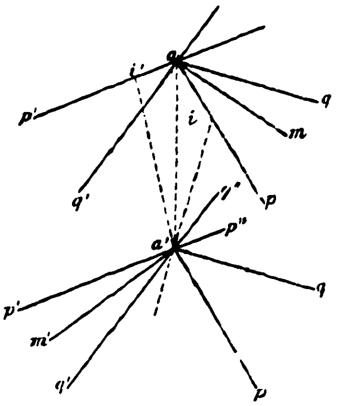
3° Quelles que soient les directions ap, aq, le dièdre formé par les plans apa', aqa' est toujours égal au dièdre formé par les plans $ap'a'$, $aq'a'$. On en déduit les égalités

$$\widehat{paq} = \widehat{p'aq'} = \widehat{pa'q} = \widehat{p'a'q'}.$$

Comme précédemment, il y a deux cas de figure possibles : ou bien le système $aa'pq$ est superposable au système $aa'p'q'$, et s'en déduit par une rotation autour de aa'; ou bien le premier système est superposable à la figure symétrique de celle formée par le système $aa'p'q'$.

Il est aisé de voir que, en réalité, ces deux cas n'en font qu'un seul. Supposons, par exemple, que le premier se présente (*fig.* 9); il suffit de remplacer les droites ap', aq', $a'p'$, $a'q'$ par leurs prolongements

Fig. 9.



ap'', aq'', $a'p''$, $a'q''$, et la figure $aa'p''q''$ est superposable à la figure symétrique de $aa'pq$.

Cela posé, la détermination du système dépend de deux variables, dont l'une est $aa' = x$, et l'autre, l'angle φ que font entre eux les plans $aa'p'$ et $aa'p$.

Il faut examiner si l'on peut former une relation entre ces deux variables, telle que, am et $a'm'$ étant deux droites homologues quelconques des plans apq et $a'p'q'$, il existe une relation linéaire entre x^2 et le cosinus de l'angle de ces deux droites.

Le point a', nous le rappelons, décrit, par rapport au plan apq, une droite qui lui est perpendiculaire. Soit i le pied de cette perpendiculaire; on peut supposer que ap contient le point i. Désignons par a la longueur constante ai.

On a dans le trièdre $aa'mm'$, dont le dièdre en aa' est égal à φ.

$$\begin{aligned}\cos\widehat{mam'} &= \cos\widehat{a'am}\cos\widehat{a'am'} + \sin\widehat{a'am}\sin\widehat{a'am'}\cos\varphi\\ &= \cos^2\widehat{a'am} + \sin^2\widehat{a'am}\cos\varphi.\end{aligned}$$

Mais le trièdre $aa'pm$, dont le dièdre en ap est droit, donne la relation

$$\cos\widehat{a'am} = \cos\widehat{a'ai}\cos\widehat{iam} = \frac{a\cos\theta}{x^2},$$

en désignant par θ l'angle $\widehat{iam}$. On obtient ainsi

$$\cos\widehat{mam'} = \frac{a^2\cos^2\theta}{x^2} + \left(1 - \frac{a^2\cos^2\theta}{x^2}\right)\cos\varphi,$$

d'où, en égalant cette expression à une fonction linéaire de x^2,

$$(x^2 - a^2\cos^2\theta)\cos\varphi + a^2\cos^2\theta = \mathrm{A}x^4 + \mathrm{B}x^2.$$

La relation cherchée entre φ et x doit être telle qu'une semblable égalité ait lieu, quel que soit θ. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est, comme on le voit aisément, que cette relation ait la forme

$$\cos\varphi = kx^2 + 1.$$

Il est aisé de donner à cette relation une forme géométrique. A cet effet, abaissons sur ap' la perpendiculaire $a'i_1$: cette droite est perpendiculaire aux plans $ap'q'$ et $a'p'q'$, et par suite l'angle $\widehat{iai_1} = \gamma$ est égal à celui que font entre eux les plans apq et $a'p'q'$.

Le trièdre $aa'i_1$ donne alors

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \cos\widehat{aa'i}\cos\widehat{aa'i_1} + \sin\widehat{aa'i}\sin\widehat{aa'i_1}\cos\varphi \\ &= \cos^2\widehat{aa'i} + \sin^2\widehat{aa'i}\cos\varphi \\ &= 1 - \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^2}{x^2}(kx^2 + 1) = 1 + ka^2 = \text{const.}\end{aligned}$$

Ainsi l'angle des deux plans apq, $a'p'q'$ est de grandeur constante.

En résumé, si l'on fixe le plan apq ou (P), le déplacement du plan $a'p'q'$ ou (P′) est ainsi défini :

Un point a' appartenant au plan (P′) décrit une droite perpendiculaire au plan (P), et dans le déplacement inverse, un point a, *appartenant au plan* (P) *décrit une droite perpendiculaire au plan* (P') (*on a* $ai = a'i'$, *en désignant par* i *et* i' *les pieds des deux perpendiculaires*). *Enfin l'angle que font entre eux les deux plans est de grandeur constante.*

Ce déplacement est bien déterminé, étant assujetti à cinq conditions. *Quand il y a lieu, tous les points du plan* (P') *décrivent des lignes sphériques dont les centres appartiennent au plan* (P).

Cette réciproque est établie par les développements qui précèdent. Nous en donnerons cependant une démonstration analytique, qui mettra en évidence les propriétés du déplacement, avec moins d'efforts que n'en exige la voie géométrique que nous avons suivie.

IX.

Rapportons le plan (P) à trois axes fixes rectangulaires Ox, Oy, Oz choisis de telle manière que l'origine soit en a, que le plan des xy coïncide avec le plan (P), et que la droite décrite par le point a' ait pour équations

$$x = 2a, \qquad y = 0.$$

Rapportons de même le plan (P') à trois axes mobiles $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, choisis d'une façon analogue. Soient ξ, η, ζ les coordonnées du point O' dans le système fixe, et soit

	x'	y'	z'
x	α	α'	α''
y	β	β'	β''
z	γ	γ'	γ''

le tableau des cosinus formés par les axes des deux trièdres pris deux à deux.

Ces cosinus peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de trois paramètres $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, au moyen des formules bien connues d'Olinde

Rodrigues; ces formules sont les suivantes :

$$\alpha = \frac{\lambda^2-\mu^2-\nu^2+\rho^2}{p^2}, \qquad \alpha' = \frac{2(\lambda\mu-\nu\rho)}{p^2}, \qquad \alpha'' = \frac{2(\lambda\nu+\mu\rho)}{p^2},$$
$$\beta = \frac{2(\lambda\mu+\nu\rho)}{p^2}, \qquad \beta' = \frac{-\lambda^2+\mu^2-\nu^2+\rho^2}{p^2}, \qquad \beta'' = \frac{2(\mu\nu-\lambda\rho)}{p^2},$$
$$\gamma = \frac{2(\lambda\nu-\mu\rho)}{p^2}, \qquad \gamma' = \frac{2(\mu\nu+\lambda\rho)}{p^2}, \qquad \gamma'' = \frac{-\lambda^2-\mu^2+\nu^2+\rho^2}{p^2},$$
$$p^2 = \lambda^2+\mu^2+\nu^2+\rho^2.$$

Cela posé, exprimons successivement les conditions dans lesquelles se déplace le plan P'. On a d'abord

$$(8) \qquad \xi = 2a, \qquad \eta = 0.$$

Écrivons ensuite que le point O décrit, par rapport au système mobile, la droite

$$x' = 2a, \qquad y' = 0.$$

Il vient

$$-\alpha\xi - \beta\eta - \gamma\zeta = 2a,$$
$$-\alpha'\xi - \beta'\eta - \gamma'\zeta = 0,$$

ou, en tenant compte des relations (8),

$$2a(\alpha+1)+\gamma\zeta = 0,$$
$$2a\alpha'+\gamma'\zeta = 0;$$

l'élimination de ζ entre les deux relations précédentes donne

$$2a(\alpha\gamma' - \gamma\alpha' + \gamma') = 0,$$

ou

$$\gamma' - \beta'' = 0,$$

et, en remplaçant γ' et β'' par leurs valeurs,

$$\lambda\rho = 0.$$

Nous supposerons

$$\rho = 0,$$

en laissant au lecteur le soin de vérifier que l'hypothèse

$$\lambda = 0$$

ne mènerait pas à des résultats différents de ceux que nous allons obtenir.

Il reste à égaler le cosinus γ'' à une constante. Il vient ainsi

$$\frac{-\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2}{\lambda^2 - \mu^2 + \nu^2} = k.$$

Il y a avantage à introduire la quantité h, définie par la relation

$$k = \frac{2a^2 - h^2}{h^2}.$$

En outre, comme λ, μ, ν interviennent d'une façon homogène, nous pouvons faire $\nu = 1$, ce qui simplifie l'écriture. Le tableau des cosinus devient alors, après des réductions faciles,

$$(9)\qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{h^2}(2a^2\lambda^2 - h^2), & \beta = \alpha' = \dfrac{2a^2\lambda\mu}{h^2}, \\ \beta' = \dfrac{1}{h^2}(-2a^2\lambda^2 + h^2 - 2a^2), & \gamma = \alpha'' = \dfrac{2a^2\lambda}{h^2}, \\ \gamma' = \beta'' = \dfrac{2a^2\mu}{h^2}, & \gamma'' = \dfrac{2a^2 - h^2}{h^2}, \end{cases}$$

les paramètres λ et μ étant reliés par la relation

$$(10)\qquad \lambda^2 + \mu^2 = \frac{h^2 - a^2}{a^2}.$$

Ces relations, jointes aux relations (8) et à la suivante

$$(11)\qquad \zeta = -\frac{2a\alpha'}{\gamma'} = -2a\lambda,$$

déterminent un déplacement du trièdre $O'x'y'z'$ et, par suite, du plan $O'x'y'$, qui s'effectue dans les conditions prescrites.

Soient $x'y'z'$ les coordonnées d'un point m' lié au trièdre $O'x'y'z'$, par rapport à ce trièdre. Cherchons s'il existe un point fixe m, de coordonnées x, y, z, par rapport au trièdre $Oxyz$, tel que la distance mm' soit constante pendant le déplacement.

Les coordonnées du point m', dans le système fixe, sont

$$X = \xi + \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z',$$
$$Y = \eta + \beta x' + \beta' y' + \beta'' z',$$
$$Z = \zeta + \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z',$$

et la condition

$$mm' = \text{const.}$$

s'exprime par l'égalité

$$(X - x)^2 + (Y - y)^2 + (Z - z)^2 = A,$$

dont le second membre doit être fonction seulement de x, y, z, x', y', z'.

En tenant compte des relations (8), (9), (10) et (11), on met facilement l'égalité précédente sous la forme

$$4a^2\left(1 - \frac{xx' - yy'}{h^2}\right)\lambda^2 + \frac{4a^2}{h^2}(xy' + yx')\lambda\mu + 4a\left[z + z' + \frac{a(xz' + zx')}{h^2}\right]\lambda$$
$$+ \frac{4a^2}{h^2}(yz' + zy')\mu = B,$$

où B désigne encore une quantité constante pendant le déplacement. Ceci doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de λ et μ satisfaisant à la relation (10). Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi sont que les coefficients de λ^2, $\lambda\mu$, λ et μ soient nuls. En d'autres termes, si l'on se donne x', y', z', les coordonnées x, y, z doivent pouvoir être déterminées de manière à satisfaire aux relations

$$xx' - yy' = h^2,$$
$$xy' + yx' = 0,$$
$$h^2(z + z') + a(xz' + zx') = 0,$$
$$yz' + zy' = 0.$$

Ces équations sont au nombre de *quatre*. Ainsi, x', y', z' ne peuvent être choisis arbitrairement.

L'étude du système précédent est extrêmement simple, et il suffit d'en indiquer le résultat : parmi les divers points entraînés avec le trièdre $O'x'y'z'$, il n'y a que ceux appartenant aux plans $O'x'y'$ et $O'x'z'$ qui décrivent des lignes sphériques :

1° Le point $(x', y', 0)$ du plan $O'x'y'$ décrit une ligne sphérique dont le centre a pour coordonnées dans le système fixe

$$x = \frac{h^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \qquad y = \frac{-h^2 y'}{x'^2 + y'^2}, \qquad z = 0;$$

c'est la vérification du résultat énoncé à la fin du paragraphe précédent. En outre, les formules précédentes expriment que la correspondance des points m et m' est identique à celle que définirait une *inversion* de module h^2.

2° Le point $(x', 0, z')$ du plan $O'x'z'$ décrit une ligne sphérique dont le centre a pour coordonnées dans le plan fixe

$$x' = \frac{h^2}{x}, \qquad y' = 0, \qquad z' = \frac{-h^2 z(x+a)}{x(ax+h^2)}.$$

Ces formules définissent une transformation quadratique qui, à toute droite de l'un des plans, fait correspondre une hyperbole équilatère de l'autre plan. Au point

$$z' = 0, \qquad x' = -\frac{h^2}{a},$$

correspondent tous les points de la droite

$$x = -a.$$

Il existe donc, dans le plan $O'x'z'$, un point qui décrit une *circonférence de rayon fini*. Le déplacement du plan $O'x'z'$ est nécessairement identique, par conséquent, à celui que nous avons étudié au § VI.

Le fait se vérifie de la manière suivante :

Si l'on a égard à l'interprétation cinématique des formules d'Olinde

Rodrigues ([1]), on reconnaît que le trièdre $O'x'y'z'$ est symétrique du trièdre $Oxyz$ par rapport à la droite ayant pour équations

$$\frac{x-a}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = z + a\lambda.$$

Et, comme on le voit en tenant compte de la relation (10), cette droite se déplace aux conditions suivantes : elle s'appuie constamment sur la droite parallèle à Oz

$$x = a, \qquad y = 0;$$

elle rencontre aussi constamment le cercle

$$z = 0, \qquad a(x^2 + y^2) - (a^2 + h^2)x + ah^2 = 0,$$

qui a son centre sur Ox et passe par le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Enfin elle fait avec Oz un angle constant.

Or, ces conditions sont identiques à celles que nous avons obtenues au § VI, pour le déplacement de l'axe de symétrie des plans (P) et (P').

X.

Nous avons à présent résolu complètement le problème que nous avons en vue, et il ne nous semble pas mauvais d'en résumer ici les résultats.

Il existe *deux cas* dans lesquels un plan se déplace de manière que tous ses points décrivent des lignes appartenant à des sphères ayant leurs centres dans un plan fixe, et, circonstance assez remarquable, ces deux cas sont réalisés *en même temps* dans le déplacement d'un système qu'on peut définir ainsi qu'il suit :

Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle fixe. Imaginons une droite L qui se déplace dans les conditions suivantes : elle s'appuie sur Oz

---

([1]) Kœnigs, *loc. cit.*

et sur une circonférence située dans le plan Oxy *et tangente au point* O *à* Oy, *de plus, elle fait un angle constant avec* Oz.

Pour chaque position de L, *construisons le trièdre* $O'x'y'z'$ *symétrique du trièdre fixe par rapport à cette droite. Tous les points du plan* $O'x'y'$ *restent sur des sphères dont les centres appartiennent au plan* Oxy *et tous les points du plan* $O'x'z'$ *restent sur des sphères dont les centres appartiennent au plan* Oxz.

La correspondance qui existe entre les points du plan mobile et les points du plan fixe qui sont les centres des lignes sphériques décrites est très différente, suivant que l'on considère le système $(O'x'y', Oxy)$ ou le système $(O'x'z', Oxz)$. Dans le premier cas, cette correspondance est une *inversion* (en supposant qu'on amène le plan $O'x'y'$ à coïncider avec le plan Oxy, et dans une position convenable (1). Dans le second cas, cette correspondance résulte d'une *transformation quadratique* qui change une droite quelconque en hyperbole équilatère.

En faisant varier les constantes qui interviennent dans les formules de ces deux correspondances, on ne pourra jamais faire qu'elles soient identiques. Il faut en conclure que les déplacements de $O'x'y'$ et de $O'x'z'$ appartiennent à des types différents.

Je terminerai en signalant les propriétés les plus simples qui se déduisent aisément des équations (8), (9), (10) et (11), et qu'il suffit d'énoncer ici : Chacun des plans $O'x'y'$ et $O'x'z'$ passe par un point fixe; de plus, le premier enveloppe un cône de révolution.

Les lignes sphériques décrites par les points du plan $O'x'y'$ sont des biquadratiques gauches projetées suivant des cercles sur le plan Oxy; les trajectoires des points du plan $O'x'z'$ sont des courbes de même nature, qui se projettent sur le plan Oxz suivant des paraboles.

Enfin, comme nous l'avons reconnu dès le commencement de ce

(1) Dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXXV, p. 1026), j'avais signalé le déplacement de $O'x'y'$ par rapport à Oxy comme étant le seul qui permette aux points d'un plan d'avoir pour trajectoires des lignes sphériques. Une étude plus complète m'a fait reconnaître l'existence du second cas.

Mémoire, la question qui en fait l'objet est intimement liée à la Théorie de l'octaèdre articulé.

Dans le plan $O'x'y'$, il existe trois points à chacun desquels l'inversion fait correspondre tous les points d'une ligne droite située dans le plan Oxy : ce sont le point O et les points cycliques du plan $O'x'y'$, I' et J'. De même le point O et les points cycliques I et J du plan Oxy correspondent chacun à tous les points d'une droite.

On peut donc considérer le déplacement d'un plan $O'x'y'$ comme s'effectuant de manière que les points O', I' et J' décrivent des circonférences ayant pour axes respectifs IJ, OJ et OI, et la figure $OIJO'I'J'$ constitue un octaèdre articulé imaginaire.

Le déplacement du plan $O'x'z'$, par rapport au plan Oxz, donne lieu aussi à la considération d'un octaèdre articulé; mais celui-ci présente un cas de dégénérescence, parce que les triangles fondamentaux de la transformation quadratique qui fait correspondre entre eux les points des deux plans ont chacun deux sommets confondus.

XI.

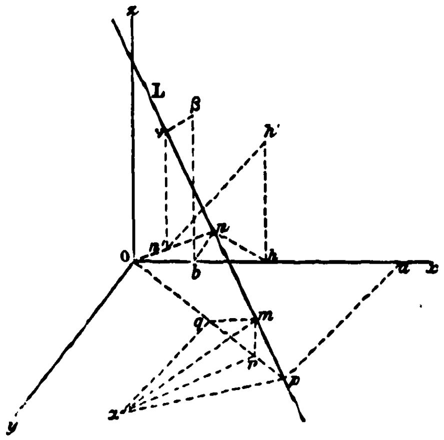
Au courant de cette étude, nous avons rencontré, à deux reprises, le déplacement d'une droite L assujettie aux conditions suivantes : $Oxyz$ étant un trièdre trirectangle fixe, cette droite rencontre, sous un angle constant, l'axe Oz et s'appuie sur un cercle tracé dans le plan des xy et tangent à Oy au point O. Ce déplacement jouit de propriétés remarquables qui résultent immédiatement de celles que nous avons reconnues au déplacement du trièdre $O'x'y'z'$, mais dont nous allons donner des démonstrations directes et élégantes, qu'a bien voulu nous communiquer M. Mannheim.

Tout d'abord, *le lieu des projections sur la droite* L *d'un point quelconque du plan* Oxy *ou du plan* Oxz *est toujours une courbe sphérique.*

Établissons d'abord cette propriété dans le cas où le point fixe, dont on prend la projection sur la droite L, appartient au plan Oxy. Soit α ce point (*fig.* 10).

Désignons par p la trace de L sur le plan Oxy; soient q la projection du point α sur Op, m la projection du point q sur L : le point m est aussi la projection du point α sur L. Soit enfin r la projection du point m sur Op.

Fig. 10.



Le triangle rectangle qmp a ses angles de grandeurs constantes, d'après l'hypothèse : il en résulte que le point r divise le segment pq dans un rapport constant; d'autre part, les points q et p décrivent des circonférences dont les diamètres sont respectivement $O\alpha$ et Oa, a étant un point fixe de Ox. Donc, en vertu d'un théorème connu, le point r décrit un cercle; ainsi la courbe (m) se trouve déjà sur un cylindre de révolution dont l'axe est parallèle à Oz.

Soit maintenant i le point de rencontre, autre que O, des circonférences (p) et (q) (ce point i, projection du point O sur la droite $a\alpha$, n'est pas marqué sur la figure). Le triangle piq a ses angles de grandeur constante; par conséquent la figure $ipmq$ est toujours semblable à elle-même, et l'angle $\widehat{rim}$ est de grandeur constante. En d'autres termes, la courbe (m) appartient à un cône de révolution de sommet i et dont l'axe est parallèle à Oz.

Cette courbe, intersection de deux surfaces de révolution dont les axes sont parallèles, appartient donc à une sphère dont le centre est dans le plan Oxy, par raison évidente de symétrie.

Soient maintenant β un point du plan Oxz, et ν sa projection sur L. Nous devons montrer que le point ν décrit encore une courbe sphérique.

A cet effet, projetons le point β sur Ox au point b, et le point b sur L au point n. Comme le point b appartient au plan Oxy, le point n reste sur une sphère. On voit facilement que le centre de cette sphère est un point h de la droite Ox, et, de plus, que la droite On fait un angle constant avec les droites Oz et L : il suffit pour cela d'appliquer les résultats précédemment obtenus au cas où le point α vient en b.

Le segment νn fait un angle constant avec la droite $b\beta$, et sa projection sur cette droite est le segment $b\beta$, de longueur constante. On a, par suite, en $\nu n n'$ un triangle de grandeur invariable, comme ayant un côté de longueur constante compris entre deux angles également de grandeurs constantes.

Le segment $\nu n'$ est donc de longueur constante, et la courbe (ν) s'obtient en donnant à la courbe (n') une translation parallèle à Oz. Il suffit donc de démontrer que la courbe (n') est tracée sur une sphère.

Or, la démonstration de ce fait est immédiate : le plan mené par le point n', perpendiculairement à On coupe la parallèle à Oz menée par le point h en un point h' qui est fixe, puisque nn', segment de longueur constante, est la projection du segment hh' sous un angle de grandeur constante.

La courbe (n') appartient donc à une sphère de diamètre Oh'. On en déduit immédiatement la construction de la sphère sur laquelle se trouve la courbe (ν).

Remarque. — On déduit immédiatement de l'étude du déplacement de la droite L un mode de déplacement d'un plan tel que tous les points de ce plan décrivent des lignes sphériques; ce déplacement rentre dans ceux que nous avons signalés au § I, comme cas de *demi-dégénérescence*. Il suffit de remarquer que si l'on déplace cette droite en l'assujettissant aux conditions prescrites, et en astreignant le point n à rester sur une sphère de centre h (plus généralement, ayant son centre en un point quelconque du plan Oxz), tout point ν de la droite L, lié au point n, décrit aussi une courbe sphérique : cela résulte, en effet, directement des raisonnements qui précèdent.

Or, la droite L fait un angle constant avec Oz; on voit donc (§ I) qu'en liant à cette droite un plan passant constamment par Oz, tous les points de ce plan décrivent des lignes sphériques.