JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur l'équation $\Delta u = e^u$

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 313-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__313_0>

Sur l'équation $\Delta u = e^u$;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait l'importance de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u$$

dans la théorie des fonctions fuchsiennes. J'ai fait autrefois une étude complète de cette équation, et j'ai montré comment on pouvait l'intégrer avec certaines conditions aux limites, tant sur une portion ouverte de surface de Riemann que sur une surface fermée. M. Poincaré vient de reprendre les mêmes questions en se plaçant à un tout autre point de vue. Comme l'exposition complète de ma méthode se trouve disséminée dans différents Mémoires ou Notes, je demande la permission de les rappeler en insistant sur un lemme qui peut être utile dans bien d'autres cas.

1. J'ai d'abord examiné le cas d'une surface ouverte, c'est-à-dire ayant un bord. On le trouve traité dans mon Mémoire du *Journal de Mathématiques* (1890). La question de l'intégration de cette équation, en supposant données sur un contour les valeurs de cette intégrale, est d'abord traitée en supposant que le contour enveloppe une aire suffisamment petite, puis on passe de ce cas à celui d'un contour quelconque. Cette extension était faite en étendant le procédé alterné de M. Schwarz et en considérant deux aires, ayant une partie commune, dont les bords se rencontrent. Outre que cette méthode d'extension ne s'étend pas à un nombre quelconque de variables, quelques difficultés de détail pouvaient subsister qu'il est préférable de ne pas avoir à discuter. Aussi dans les problèmes de cette nature, j'ai employé plus tard une autre méthode d'extension dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques*; 1896, et aussi dans une Note des *Comptes rendus* (juin, 1897). C'était d'ailleurs celle dont j'avais déjà fait usage pour le cas spécial de l'équation

$$\Delta u = ke^u \qquad (k > 0)$$

dans le Travail consacré spécialement aux surfaces de Riemann fermées (*Journal de Mathématiques*; 1893).

Je veux seulement revenir sur une remarque très générale qui peut être utile dans d'autres circonstances. Nous partons de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y) \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

La fonction $F(u, x, y)$ est une fonction continue de u, x et y, pour toute valeur réelle de u, quand le point (x, y) est dans une certaine région R du plan et, de plus, cette fonction croît toujours avec u. Le procédé alterné, tel que nous l'appliquons, consiste à passer d'un premier contour à un second contour enveloppant une aire plus grande, les deux contours n'ayant pas de points communs sur leurs frontières. Voici le lemme sur lequel repose cette analyse.

Prenons d'abord une équation de la forme

$$(1) \qquad \Delta u = p(x, y)u \qquad |p(x, y) > 0|;$$

on considère une aire limitée par deux courbes C *et* C′, *et soit une intégrale continue u s'annulant en tous les points de* C *et prenant sur* C′ *des valeurs comprises entre* $-$ M *et* $+$ M. *On peut, étant donné un point* A *à l'intérieur de l'aire, trouver un nombre q infé-*

rieur à l'unité, tel que l'on ait

$$|u_A| < Mq, \tag{2}$$

en désignant par u_A la valeur de u au point A.

Pour le démontrer, soit v l'intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta v = 0,$$

prenant sur C la valeur *zéro*, et sur C′ la valeur *un*; v prendra en A une valeur q inférieure à l'unité. Soit, d'autre part, U l'intégrale de l'équation

$$\Delta U = p(x, y) U,$$

prenant sur C la valeur zéro, et sur C′ la valeur *un*. L'équation

$$\Delta(U - v) = p(x, y) U$$

montre que l'on a

$$U < v$$

et, par suite,

$$U_A < q.$$

Enfin, de l'équation

$$\Delta(u - MU) = p(x, y)(u - MU),$$

on conclut

$$u < MU,$$

et, par suite,

$$u_A < Mq;$$

on démontrerait de la même manière que

$$u_A > -Mq.$$

L'inégalité (2) est donc établie. On remarquera que q ne dépend nullement de la fonction positive $p(x, y)$, ce qui est essentiel pour la suite.

Ce lemme s'étend immédiatement à l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

et peut s'énoncer, dans toute sa généralité, sous la forme suivante :

Soient u_1 et u_2 deux intégrales de cette équation prenant les mêmes valeurs sur C, et telles que $|u_1 - u_2|$ soit compris le long de C' entre $-$ M et $+$ M; on aura au point A

$$|u_1 - u_2|_A < Mq \qquad (q < 1).$$

La démonstration est immédiate, car on a

$$\Delta(u_1 - u_2) = F'_u(U, x, y)(u_1 - u_2),$$

U étant compris entre u_1 et u_2; c'est une équation de la forme (1), puisque F est une fonction croissante, et l'on peut par suite se servir du résultat précédent, ce qui achève la démonstration. L'application du procédé alterné, dans les conditions indiquées, ne présente plus alors aucune difficulté.

2. Pour ce qui concerne la surface de Riemann fermée, avec des conditions limites données par des logarithmes, je n'ai qu'à indiquer mon Travail de 1893 (*Journal de Mathématiques*), où la question est traitée, je crois, d'une manière complètement rigoureuse et très rapide. Dans l'énoncé des conditions déterminant l'intégrale figurent certaines inégalités, le cas de l'égalité se trouvant exclu. La méthode de M. Poincaré, plus longue, ce me semble, que la mienne, lui permet par contre de traiter les cas limites où certaines inégalités deviendraient des égalités, ce qui correspond à certaines particularités pour les fonctions fuchsiennes. J'espère pouvoir montrer un jour que ces cas peuvent aussi être traités par les méthodes d'approximations successives qui m'ont été si utiles dans toutes les questions de ce genre.