JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

HADAMARD

Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 27-73.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__27_0>

Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques;

Par M. HADAMARD.

Dans un Mémoire précédent [1], nous avons appliqué les considérations élémentaires de maximum et de minimum à l'étude des géodésiques réelles sur des surfaces quelconques et considéré, en particulier, un cas où les énoncés obtenus prennent une forme particulièrement simple : celui des surfaces à courbure partout positive. Je me propose actuellement de traiter, en me plaçant au même point de vue, c'est-à-dire en restant dans le domaine réel et faisant complètement abstraction de la nature analytique de la surface, le cas où la courbure est partout négative. Dans ce nouveau cas, il est possible d'arriver à des résultats beaucoup plus complets que dans le premier et d'établir sans difficulté une discussion générale des géodésiques.

Les principes mis en œuvre sont d'ailleurs les mêmes que dans le Mémoire précédent. Toutefois, j'ai reconnu que le théorème de Gauss sur les polygones géodésiques est susceptible de remplacer, dans la plupart des démonstrations, les considérations de Calcul différentiel dont je m'étais servi à cet endroit; de sorte que, dans presque toute la suite de ce travail, nous disposerons de deux voies, toutes deux extrêmement élémentaires, pour établir chacune de nos propositions. Une seule théorie exige d'être approfondie d'une façon spéciale pour

---

[1] Ce *Journal*, même série, t. III, p. 331-388; 1897.

servir de base au travail actuel : c'est l'*Analysis situs* (¹), laquelle, ainsi qu'on devait s'y attendre après la lecture des travaux de M. Poincaré, joue un rôle essentiel dans tout ce qui va suivre.

Si la méthode employée est simple, par contre les résultats auxquels nous parviendrons sont compliqués ou, du moins, très différents de ceux que l'on est habitué à rencontrer. C'est cette complication même qui est instructive, en mettant en évidence ce qu'a d'exceptionnel la simplicité des discussions obtenues par l'intégration directe, dans les cas où elle est possible, et en montrant combien ces discussions simples donnent une idée fausse de ce qui se passe dans le cas général.

I. — Forme générale de la surface. Nappes infinies évasées et non évasées.

1. Les surfaces que nous considérerons seront supposées dépourvues de singularités à distance finie. Une telle surface est divisible en régions empiétant les unes sur les autres de manière que tout point de la surface soit intérieur au moins à l'une d'entre elles, et telles que les points d'une quelconque de ces régions aient leurs coordonnées cartésiennes exprimables à l'aide de deux paramètres α, β et cela *régulièrement*, c'est-à-dire par des fonctions continues et dérivables au moins jusqu'à un ordre déterminé, les déterminants fonctionnels

$$\frac{D(y,z)}{D(\alpha,\beta)}, \quad \frac{D(z,x)}{D(\alpha,\beta)}, \quad \frac{D(x,y)}{D(\alpha,\beta)}$$

n'étant pas tous nuls. Cette dernière condition revient d'ailleurs à celle-ci : qu'ayant mis l'élément linéaire sous la forme

$$E\,d\alpha^2 + 2F\,d\alpha\,d\beta + G\,d\beta^2,$$

la quantité $EG - F^2$ doit être différente de zéro.

(¹) Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Brunel, que sa connaissance profonde de cette partie de la Science a mis à même de me fournir une aide précieuse, particulièrement en démontrant le théorème que j'invoque au n° 33.

Aux paramètres α, β on peut d'ailleurs substituer d'autres paramètres α_1, β_1 donnés par les relations

$$(1) \qquad \alpha = \varphi(\alpha_1, \beta_1), \qquad \beta = \psi(\alpha_1, \beta_1),$$

pourvu que, dans la région considérée, les fonctions φ et ψ soient continues et dérivables, le déterminant fonctionnel de (α, β) par rapport à (α_1, β_1) étant différent de zéro : condition qui sera vérifiée si, en remplaçant α, β par leurs valeurs (1) dans l'élément linéaire, de manière que celui-ci prenne la forme

$$E_1\, d\alpha_1^2 + 2F_1\, d\alpha_1\, d\beta_1 + G_1\, d\beta_1^2,$$

le nouveau discriminant $E_1 G_1 - F_1^2$ est différent de zéro $\left\{\text{puisqu'on a } \frac{E_1 G_1 - F_1^2}{EG - F^2} = \left[\frac{D(\alpha, \beta)}{D(\alpha_1, \beta_1)}\right]^2\right\}$.

Rappelons que, dans ces conditions, si $\alpha_1^{(0)}$, $\beta_1^{(0)}$ sont les valeurs de α_1, β_1 correspondant aux valeurs $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ de α, β, à tout système de valeurs α, β suffisamment voisines de $\alpha^{(0)}$, $\beta^{(0)}$ correspondra un système de valeurs de α_1, β_1 très voisin de $\alpha_1^{(0)}$, $\beta_1^{(0)}$ et *un seul;* de sorte que si l'on fait varier le point (α, β) continûment sur un chemin déterminé, compris tout entier dans la région, les quantités α_1, β_1 varieront aussi continûment et seront déterminées sans ambiguïté par cette condition, en un point quelconque de ce chemin (en supposant données leurs valeurs initiales); et si, de plus, α, β sont dérivables par rapport à la variable dont ils dépendent, il en sera de même de α_1, β_1.

2. Nous ne supposons pas, d'ailleurs, que nos surfaces soient algébriques, ni même analytiques; toutefois nous ferons, chemin faisant, sur la forme générale de ces surfaces, des hypothèses simples qui sont toujours vérifiées sur les surfaces algébriques.

3. En outre, nos surfaces seront à courbure partout négative : les points de courbure nulle, s'il y en a, seront isolés et en nombre fini, de sorte que l'on pourra prendre un nombre positif ε assez petit pour que, dans une position limitée quelconque de la surface, la courbure soit partout plus petite (algébriquement) que $-\varepsilon$, à l'exception d'un certain nombre d'aires dont toutes les dimensions seront inférieures à une quantité donnée quelconque. On verra, d'ailleurs, aisément que nos théorèmes fondamentaux subsistent dans des conditions un peu plus générales; il peut exister certaines lignes de courbure nulle ou même des régions où la courbure est positive, pourvu que ces régions soient suffisamment restreintes et que la courbure y soit suffisamment petite.

4. A l'inverse des surfaces à courbure positive et non infiniment petite, lesquelles sont toujours fermées, les surfaces dont il est question actuellement ont nécessairement des nappes infinies. Cette proposition s'établit immédiatement en remarquant que si la coordonnée x, par exemple, avait un maximum ou un minimum en un point de la surface, la courbure en ce point serait positive ([1]).

5. Plus généralement, on voit que, pour une portion limitée quelconque S′ de la surface, le maximum et le minimum de la distance à un plan déterminé quelconque ont lieu sur les contours limites, de sorte qu'un plan ne peut couper S′ sans couper ceux-ci.

Cette remarque, qui présente une certaine analogie avec les faits qui se rencontrent dans la théorie des fonctions harmoniques, paraît imposer à la forme des surfaces à courbures opposées, des lois assez précises. Nous aurons à l'utiliser un peu plus loin.

6. Il est intéressant de remarquer que l'existence de nappes infinies peut également s'établir en partant de la relation de Gauss-Bonnet

$$\int d\omega - \int \frac{ds}{\rho_g} = \int\int \frac{d\sigma}{RR'}. \tag{2}$$

Rapportons à cet effet la sphère de rayon 1 à un système de méridiens et de parallèles de pôles a, a' (ces pôles n'ayant point de situation exceptionnelle par rapport à la représentation sphérique de la surface

([1]) Le raisonnement semble être mis en défaut par les points de courbure nulle. Il est aisé de voir que le maximum ou le minimum ne peuvent avoir lieu même en ces points, du moins s'ils sont isolés.

considérée); si nous entourons les points a, a' de deux parallèles infiniment petits s, s', ces parallèles serviront de représentation sphérique à un certain nombre de courbes très petites $S_1, S_2, \ldots, S_n$, entourant autant de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de la surface donnée; soit Σ ce qui reste de la surface donnée quand on enlève les petites aires intérieures aux courbes $S_1, S_2, \ldots, S_n$. En tout point de Σ, nous prendrons, suivant la méthode de M. Darboux, un trièdre attaché à la surface, en lui donnant pour axe des x la tangente correspondant à la tangente au parallèle sphérique, c'est-à-dire la conjuguée de la tangente parallèle à la tangente (T) au méridien sphérique. Si la courbure est partout négative et non nulle, nous aurons ainsi un trièdre mobile vérifiant, sur toute la surface Σ, les conditions moyennant lesquelles a lieu la relation (2). Or, en appliquant celle-ci à l'aire Σ, nous devrons faire d'abord $\int d\omega = 0$, sur tous les contours limites, puisque la tangente en chaque point de ceux-ci est l'axe des x du trièdre correspondant. D'autre part, l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$, prise le long d'un contour infiniment petit tel que S_i, considéré comme limitant l'aire Σ, est approximativement égale à l'intégrale $-\int \frac{ds}{\rho}$ étendue à la projection d'une aire infiniment petite sur son plan tangent, c'est-à-dire à -2π. L'équation (2), où le premier membre est positif et le second négatif, met alors en évidence la contradiction.

7. Relativement aux nappes infinies dont nous venons de constater l'existence, nous allons faire une des hypothèses que nous avons annoncées au n° **2**.

Soit encore S' une partie finie de la surface, limitée par certaines courbes fermées $C_1, C_2, \ldots, C_n$. *Nous supposerons que, si ces courbes ont été convenablement choisies, on peut les faire varier continûment de manière à les éloigner toutes à l'infini* (par conséquent à faire tendre S' vers la surface entière S), *sans que, dans cette variation, la surface* S' *cesse de rester identique à elle-même, au point de vue de la Géométrie de situation.*

Il est clair que, dans ces conditions, ce qui reste de S après enlèvement de S', se compose (du moins si les courbes C ont été convenablement choisies) de n parties infinies indépendantes entre elles, les *nappes* infinies, chacune de ces nappes étant limitée par une des courbes C et pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement de cette courbe lorsque, partant de sa position initiale, elle s'éloigne à l'infini.

Moyennant l'hypothèse précédente, nous pourrons appliquer à notre surface l'*Analysis situs* ordinaire, les propriétés topologiques de S étant, *par définition,* celles de la surface S′ à un moment quelconque de sa variation.

8. En particulier, une nappe infinie devra être considérée, au point de vue topologique, comme limitée, d'une part par la courbe C correspondante dans sa position première; d'autre part, par cette même courbe dans une position très éloignée. Nous noterons ce fait, essentiel pour la suite, qu'une telle aire a son ordre de connexion égal à 2. Elle équivaut, pour la Géométrie de situation, à une couronne circulaire.

On voit, de plus, qu'*à chaque nappe infinie correspond un bord de la surface* (¹).

On connaît certaines surfaces à courbures opposées pour lesquelles l'hypothèse du n° 7 n'est pas vérifiée. Telle est, par exemple, la surface minimum de Neovius (²), qui présente une infinité de trous équidistants les uns des autres dans trois directions rectangulaires. Nous écarterons de telles surfaces, auxquelles, d'ailleurs, la théorie qui va suivre pourrait sans doute se généraliser sans trop de difficulté.

9. La représentation sphérique de S se composera en général de plusieurs feuillets. Elle sera topologiquement équivalente à S si celle-ci est à deux côtés, puisqu'alors il y aura entre elles correspondance univoque.

La courbure gardant un signe invariable, les feuillets (ainsi que cela

---

(¹) Il est bien entendu que nous n'établissons aucune connexion entre deux nappes infinies qui se rejoindraient si l'on ramenait le plan de l'infini à distance finie par une transformation homographique. Ainsi, à notre point de vue, la surface gauche de révolution sera dite avoir *deux* nappes infinies.

(²) Helsingfors, 1883.

arrivait déjà dans le cas de la courbure positive) ne se raccorderont par aucun pli ni aucun autre mode de connexion, tel que les aires changent de sens quand on passe d'un feuillet à l'autre. Ils ne présenteront même aucun raccordement ni aucune autre singularité tant que la courbure sera négative. Il n'en sera pas de même si la courbure s'annule en certains points particuliers : par exemple, si en un point O (supposé, bien entendu, non singulier sur la surface), les deux courbures s'annulent, il est aisé de voir qu'à ce point correspond, pour la représentation sphérique, une ramification riemannienne.

10. A chaque bord C de la surface limitée S′ correspondra un bord c de la représentation sphérique. Mais il y a plus : si le nombre des feuillets de cette représentation sphérique est fini (ce qui lui assigne une aire finie), elle a un bord bien déterminé correspondant à chaque nappe infinie de la surface *illimitée* S. Car, puisque le signe de la courbure est invariable, si la courbe C va toujours en s'éloignant, l'aire limitée par c ira toujours en s'étendant : cette courbe coupera donc une ligne quelconque en des points qui se déplaceront dans un sens invariable sans pouvoir s'éloigner indéfiniment. Elle tendra, par conséquent, vers une courbe limite $\mathfrak{F}$.

Celle-ci peut d'ailleurs fort bien se réduire à un point : c'est ce qui arrive, par exemple, pour une surface de révolution dont la méridienne a une direction asymptotique perpendiculaire à l'axe.

L'aire sphérique délimitée par la courbe c ayant une limite, il en est de même pour l'intégrale

$$\int \frac{ds}{\rho_g}$$

étendue à la courbe C, sur la surface donnée.

11. On obtient des relations dont l'étude présenterait peut-être quelque intérêt en prenant pour direction de l'axe des x du trièdre mobile, considéré au n° **6**, la direction de la tangente (T) au méridien sphérique et non la direction conjuguée. Rien ne sera changé dans les diverses quantités qui figurent dans la relation (2), à l'exception de l'angle ω qui est changé en un autre angle ω_1. Si l'on retranche membre à membre la nouvelle relation ainsi obtenue de la primitive, il vient

$$(3) \qquad \int d(\omega - \omega_1) = 0,$$

l'intégrale étant étendue, d'une part aux contours infiniment petits S_1, S_2, ..., S_n, dont il a été question au n° **6**, d'autre part aux nappes infinies.

Cette équation ne contient évidemment que des nombres entiers, chaque intégrale étant un multiple de 2π, puisqu'elle exprime la variation de l'angle que fait la tangente (T) avec sa conjuguée.

Le long de chaque contour S_i, cette variation est égale à -4π, puisque la tangente à ce contour tourne de -2π et que la tangente (T) tourne en sens contraire de la première.

On voit que la conclusion serait toute différente si, au point A_i, la courbure était positive. Alors, en effet, les deux tangentes tourneraient dans le même sens et la variation serait nulle. Si donc on appliquait la formule (3) à une surface à courbure de signe variable, il n'y aurait à tenir compte que des contours S_i tracés autour de points où la courbure est négative. Mais, par contre, il conviendrait d'ajouter des termes correspondant à certains points de courbure nulle, ceux pour lesquels la direction de courbure nulle est parallèle à (T). On constate aisément que les points paraboliques doivent être divisés en deux classes et qu'à chaque point où une direction de courbure nulle est parallèle à (T) correspond, dans le premier membre de la formule (3), le terme $\pm 2\pi$, suivant la classe à laquelle appartient ce point.

Des termes additionnels doivent également être introduits dans la formule si la représentation sphérique présente les singularités indiquées au n° **9**.

12. Les remarques des n^{os} **9-11** ne nous seront pas nécessaires au point de vue de la théorie des lignes géodésiques. Il n'en est pas de même d'une distinction essentielle qu'il nous reste à établir relativement à la forme des nappes infinies.

Considérons encore une telle nappe comme engendrée par le déplacement d'une courbe mobile C. En général, quelle que soit la loi de variation de cette courbe sur la surface, sa longueur totale augmentera indéfiniment à mesure qu'elle s'éloignera. C'est ce qui a lieu pour les nappes infinies du paraboloïde hyperbolique, de l'hyperboloïde à une nappe, de l'alysséide, etc. De telles nappes infinies seront dites *évasées*.

Au contraire, nous nommerons nappes *non évasées* celles sur lesquelles on peut faire occuper à la courbe C une série de positions de plus en plus éloignées dans chacune desquelles son périmètre reste inférieur à une limite déterminée (¹). Telle est, par exemple, une surface de révolution dont la méridienne a une asymptote parallèle à l'axe.

13. Dans l'exemple précédent, on voit qu'il existe une direction asymptotique. La remarque fondamentale du n° 8 va nous permettre de montrer qu'il y a là un fait général.

Soit, en effet, C_0 la position primitive de la courbe C,

$$C_\nu \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \infty)$$

la même courbe dans une série de positions, très éloignées pour ν très grand, telles que les longueurs des courbes C_ν soient toutes inférieures à une même quantité donnée.

Plus généralement, il nous suffira de supposer que l'angle maximum sous lequel une courbe C_ν est vue de l'origine soit nul pour ν infini. Dans ces conditions, en effet, il existera au moins une direction δ telle que la droite joignant l'origine à un point quelconque de C_ν fasse avec δ un angle plus petit qu'un angle quelconque donné η, et cela pour une infinité de valeurs (convenablement choisies) de ν, valeurs que nous considérerons à l'exclusion des autres. Mettons que cette direction soit la verticale ascendante.

Soit Γ un cylindre vertical convexe qui contient C_0 à son intérieur; nous le limiterons par une section droite qui laisse C_0 en dessus et nous

(¹) Cette série de positions n'est pas nécessairement continue : nous n'excluons pas l'hypothèse où la courbe C, dans son mouvement, aurait tantôt une longueur très grande et tantôt une longueur finie. Il apparaîtra que cette hypothèse est inadmissible.

ferons tourner chaque plan tangent au cylindre, autour de son intersection avec le plan de section, d'un angle très petit ε, vers l'extérieur. La courbe C_0 sera du même côté que Γ par rapport à chacun des plans ainsi obtenus, et il en sera de même de la courbe C_v pour $\eta < \varepsilon$. Donc la nappe infinie est d'un seul côté d'un quelconque de ces plans et, comme ceci a lieu quelque petit que soit ε, toute la nappe infinie est intérieure à Γ : δ est donc une direction asymptotique. On peut même ajouter que les cylindres verticaux convexes, circonscrits aux positions successives de la courbe C, sont tous intérieurs les uns aux autres, de sorte qu'ils tendent vers une position limite.

En particulier, si les projections horizontales des C_v sont des courbes convexes, il y a un cylindre asymptote. Il est probable que le même résultat doit pouvoir se démontrer lorsque ces projections présentent des arcs concaves.

14. Il en est de même pour une propriété voisine, mais qui concerne le plan tangent.

Soient (C) une section horizontale de la nappe infinie non évasée, M un point de (C) situé sur le contour convexe de la courbe, c'est-à-dire tel que la tangente (t) en ce point laisse toute la courbe d'un seul côté que nous appellerons, pour abréger, le *côté intérieur*.

Le plan vertical V qui projette horizontalement (t) coupera nécessairement C_0 (puisque le point M est intérieur à tout cylindre vertical convexe contenant cette courbe), et la tangente (t) divise ce plan en deux demi-plans, l'un V' inférieur, l'autre V'' supérieur. Nous ferons tourner le demi-plan V' autour de (t), vers l'extérieur, d'un angle tel qu'il vienne à toucher C_0 et le plus grand possible d'ailleurs : cet angle sera évidemment très petit si la courbe (C) a été prise très éloignée. Le plan P ainsi obtenu laisse d'un seul et même côté les courbes (C) et C_0 et par suite aussi toute la portion de surface comprise entre elles. Donc le demi-plan tangent inférieur en M [nous voulons dire la portion du plan tangent en M située au dessous de (t)] est, par rapport à P, du côté intérieur.

Mais, d'autre part, le demi-plan tangent supérieur est, comme nous le savons, à l'intérieur de V''.

Donc le demi-plan tangent inférieur est compris dans le dièdre $V'P$

et, par conséquent, *l'angle de ce plan avec la verticale tend vers zéro.*

Il ne paraît pas douteux que ce fait ne subsiste même lorsqu'on choisit le point M sur une partie rentrante de (C). En tout cas, nous pouvons admettre qu'il en est ainsi ; cette hypothèse est une de celles que nous nous sommes réservé le droit de faire, puisque, sur une surface algébrique, l'angle du plan tangent avec la droite qui joint l'origine au point de contact tend vers zéro.

Le bord de la représentation sphérique, correspondant à une nappe infinie non évasée, se compose d'un grand cercle ou d'une série d'arcs appartenant à un même grand cercle.

13. Il résulte de là que la limite vers laquelle tend (n° **10**) l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ prise le long de la courbe C, lorsque celle-ci s'éloigne indéfiniment, est nulle.

Pour le voir, on prendra comme courbes C les sections horizontales. Dans l'expression $\frac{ds}{\rho_g} = \frac{ds}{\rho} \sin \varpi$ (¹), l'angle ϖ, compris entre la normale en un point M de C et le plan horizontal, n'est autre que la hauteur (au sens astronomique du mot) de la représentation sphérique m de M, pendant que le facteur $\frac{ds}{\rho}$ est égal à l'angle élémentaire dont tourne la tangente horizontale à la surface, c'est-à-dire à la variation élémentaire de l'azimut θ du point m.

L'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ est donc égale à $\int \sin \varpi \, d\theta$, c'est-à-dire à l'aire comprise entre la courbe c et le grand cercle horizontal, aire qui est infiniment petite dans les conditions actuelles.

Les nappes non évasées se présentent dans la théorie actuelle comme un cas singulier, une sorte de cas limite offrant des particularités et des difficultés analogues à celles qu'introduisent les racines multiples de l'équation caractéristique dans la réduction des substitutions linéaires. En raison de ce fait que la limite de $\int \frac{ds}{\rho_g}$ est nulle, on doit les considérer comme ayant une géodésique fermée rejetée à l'infini.

(¹) DARBOUX, *Leçons*, Livre V.

16. La nature de la surface, au point de vue de la Géométrie de situation, dépend, comme on sait, du nombre des bords (c'est-à-dire, pour nous, des nappes infinies) et du nombre des *trous*, caractérisés par les contours fermés qu'on peut tracer sur elle sans la démembrer.

Les surfaces à courbures opposées généralement connues ont toutes leur ordre de connexion égal à 1 (paraboloïde hyperbolique) ou à 2 (hyperboloïde à une nappe).

Mais on peut former des surfaces à courbures opposées ayant un nombre quelconque de nappes infinies. Telles sont, entre autres, les surfaces représentées par des équations du type

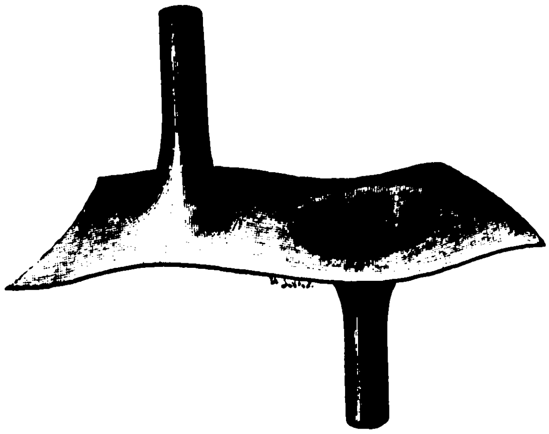
$$z = k \log \frac{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m}{\delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n}, \tag{4}$$

où (k étant une constante) les quantités $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m; \delta'_1, \delta'_2, \ldots, \delta'_n$ sont les distances du point (x, y), projection d'un point quelconque de l'espace sur un plan horizontal pris comme l'un des plans coordonnés, à autant de points fixes $P_1, P_2, \ldots, P_m, P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ de ce plan. Cette surface est à courbures partout opposées, car le second membre est la partie réelle d'une fonction de la variable complexe $x + iy$; elle a d'ailleurs $m + n + 1$ nappes infinies, dont m dirigées du côté des z positifs, n du côté des z négatifs, et une s'étalant dans le sens horizontal. Par exemple, la surface

$$z = k \log \frac{\delta}{\delta'}, \tag{4'}$$

correspondant à $m = n = 1$, a la forme générale représentée par la *fig.* 1. Elle possède un plan de symétrie, le plan vertical mené par PP'; un axe de symétrie, la perpendiculaire au milieu de PP', et un centre de symétrie. A ce dernier point correspond, sur la sphère, un point O qui est une ramification riemannienne de la représentation sphérique (**9**); effectivement, celle-ci se compose de deux feuillets correspondant aux deux moitiés de la surface, séparées l'une de l'autre par l'axe de symétrie et qui se croisent suivant l'arc de grand cercle qui va du pôle supérieur au point O; elle présente trois bords, l'un (correspondant à la nappe horizontale) constitué par un contour infiniment petit tournant deux fois autour du pôle supérieur, les deux autres tracés, dans chacun des feuillets, suivant le grand cercle horizontal.

Fig. 1.



Les nappes infinies verticales ne sont pas évasées; si l'on désirait qu'elles le devinssent, il suffirait d'augmenter le rayon de chaque section horizontale d'une quantité proportionnelle à z^p (p étant un nombre impair) sans changer le centre de cette section. La même opération pourrait s'appliquer à la surface plus générale (4); les nappes situées d'un même côté du plan horizontal se rencontreraient; mais ceci ne constitue pas une singularité de nature à empêcher nos raisonnements d'être valables : il suffira de regarder comme entièrement indépendantes l'une de l'autre les nappes qui se croisent.

17. Un cas limite de la surface (4') est évidemment la suivante :

$$(5) \qquad z = \frac{kx}{x^2 + y^2} = \text{partie réelle de } \frac{k}{x + iy}.$$

Mais cette dernière peut être envisagée à un point de vue tout différent : son équation résulte, en effet, de l'élimination de u entre les relations

$$(6) \qquad x^2 + y^2 = xu,$$

$$(7) \qquad z = \frac{k}{u},$$

dont la première (x, y, u étant comme des coordonnées cartésiennes) représente un cône, c'est-à-dire une surface de courbure nulle. Ceci conduit à envisager, plus généralement, la surface résultant de l'élimination de u entre les relations

$$u = f(x, y), \tag{8}$$

$$z = \varphi(u). \tag{9}$$

Si l'on désigne, comme d'ordinaire, par p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de z, par p', q', r', s', t' les dérivées correspondantes de u, il vient aisément

$$rt - s^2 = (r't' - s'^2)\varphi'^2 + \varphi'\varphi''(r'q'^2 - 2s'p'q' + t'p'^2);$$

par conséquent on voit que la surface considérée est à courbure négative, si : 1° la surface (8) est à courbure nulle ou négative ; 2° la courbe plane représentée par l'équation $u =$ const. tourne partout sa concavité du côté des u croissants ou du côté des u décroissants, suivant que la fonction φ' est elle-même croissante ou décroissante en valeur absolue, c'est-à-dire suivant que la courbe représentée (en coordonnées rectilignes z et u) par l'équation (9) tourne sa concavité du côté des u négatifs ou du côté des u positifs.

Si, par exemple, la fonction $u = f(x, y)$ est celle qui est définie par l'équation (6), les courbes $u =$ const. tournent leur concavité vers les u décroissants en valeur absolue. Il suffira donc que l'équation (9) représente une courbe tournant partout sa convexité vers l'axe $u = 0$; nous pourrons, par exemple, d'une infinité de manières, prendre

$$u = \mathrm{R}(z),$$

R étant une fraction rationnelle convenablement choisie. La surface algébrique ainsi obtenue aura autant de nappes infinies que la fonction R a de discontinuités, plus deux ; et toutes ces nappes seront évasées si cette fonction devient infinie en même temps que z.

La surface aura, il est vrai, une ligne de courbure nulle. On fera disparaître cet inconvénient en déplaçant chaque section $z =$ const.

parallèlement à l'axe des x, d'une quantité égale à une fonction convenablement choisie de z.

18. Nous venons d'obtenir des surfaces à courbure négative présentant un nombre quelconque de nappes infinies; le procédé suivant va nous fournir, au contraire, des surfaces offrant un nombre plus ou moins grand de trous.

Soient $U = 0$, $V = 0$ les équations de deux surfaces à courbures opposées. L'équation

$$(10) \qquad UV = \varepsilon, \qquad \varepsilon > 0$$

représente une surface composée de deux surfaces partielles, l'une située dans la région $U > 0$, $V > 0$; l'autre dans la région $U < 0$, $V < 0$. Comme nous n'avons à nous occuper ici que de surfaces connexes, nous ne considérerons qu'une seule de ces deux surfaces partielles : la première, par exemple, et même une partie connexe de cette première. Nous aurons ainsi une surface qui sera évidemment à courbures opposées en tout point situé à distance finie et non dans le voisinage d'une courbe d'intersection des deux surfaces primitives, et que l'on pourra même supposer à courbures opposées à l'infini en prenant, au besoin, pour ε, non pas une constante, mais une fonction toujours positive et diminuant plus ou moins rapidement lorsque x, y, z augmentent; par exemple

$$\varepsilon = \frac{\eta}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^\mu},$$

η étant une constante très petite.

Pareillement, si les surfaces $U = 0$, $V = 0$ ont des points de courbure nulle, on fera figurer dans ε ou dans η un facteur s'annulant en ces points ainsi que ses dérivées, jusqu'à un ordre convenable.

Reste le voisinage d'une courbe d'intersection des deux surfaces primitives. On constate aisément que la courbure de la surface (10) reste négative même aux environs d'une telle courbe, si celle-ci tourne sa convexité vers la région $U > 0$, $V > 0$, c'est-à-dire si sa tangente passe dans cette région.

Considérons, par exemple, les deux hyperboloïdes

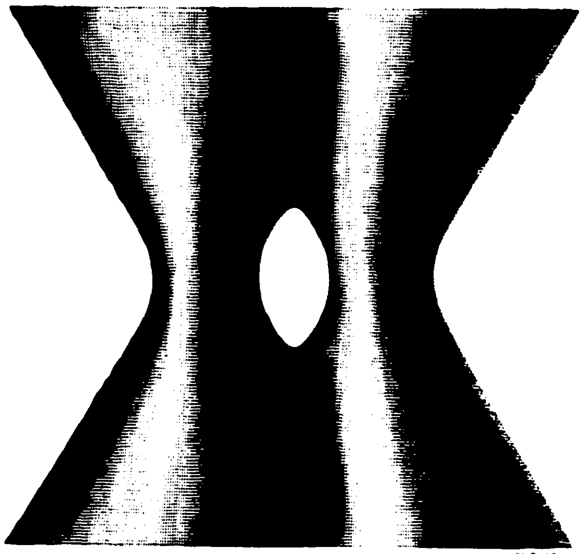
$$U \equiv \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$V \equiv \frac{(x+\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

qui se coupent suivant une hyperbole. La partie de la surface $UV = \varepsilon$ située dans la région $U > 0$, $V > 0$ est à courbure négative. Sa forme générale est représentée *fig.* 2 ; elle a deux nappes infinies et un trou.

En associant de même un nombre quelconque d'hyperboloïdes

Fig. 2.



égaux ayant un axe transverse suivant une même droite, on aurait une surface à un nombre quelconque de trous, avec deux nappes infinies.

On obtient un résultat analogue en associant la surface

$$z = k \log \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m$$

[cas particulier de la surface (4)] avec sa symétrique par rapport à un plan parallèle au plan des xy et de z positif. On a ainsi deux nappes infinies et $m-1$ trous.

Enfin, on peut obtenir un nombre plus élevé de nappes infinies, jointes à des trous, en combinant la surface

$$z = \frac{k \log \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_m}{\delta'}$$

avec ses symétriques successives par rapport à un certain nombre de plans parallèles.

19. On obtient encore une surface à courbures opposées et à plus de deux nappes infinies en partant, comme l'indique M. Brunel (¹), de l'hyperboloïde de révolution à une nappe coupant cette surface par les différents plans qui passent par un diamètre déterminé Oy du cercle de gorge et faisant tourner chaque section, autour de Oy, d'un angle égal à la moitié de l'angle φ que fait son plan primitif avec le plan équatorial.

Plus généralement, au lieu de diminuer l'angle que fait une section quelconque avec le plan équatorial dans le rapport de 1 à 2, on peut diminuer ce même angle dans le rapport de 1 à p (p entier); la nouvelle surface ainsi obtenue est représentée paramétriquement, en fonction de φ et d'un rayon vecteur ρ, par les formules

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi, \\ y^2 &= a^2 + \rho^2 \cos 2p\varphi, \\ z &= \rho \cos\varphi. \end{aligned}$$

L'équation du plan tangent sera

$$(dx \sin\varphi + dz \cos\varphi) \cos 2p\varphi + p(dz \sin\varphi - dx \cos\varphi) \sin 2p\varphi - \frac{y\,dy}{\rho} = 0,$$

(¹) *Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 4 mars 1897.

et les quantités D, D′, D″ de Gauss (¹) pourront être prises égales à

$$D = -\frac{\cos 2p\varphi}{\rho}\left(1 - \frac{\rho^2}{y^2}\cos 2p\varphi\right) = -\frac{a^2\cos 2p\varphi}{\rho y^2},$$

$$D' = p\sin 2p\varphi\left(1 - \frac{\rho^2}{y^2}\cos 2p\varphi\right) = \frac{a^2 p\sin 2p\varphi}{y^2},$$

$$D'' = \rho\left[\cos 2p\varphi(2p^2 - 1) + \frac{p^2\rho^2}{y^2}\sin^2 2p\varphi\right];$$

d'où

$$\begin{aligned} DD'' - D'^2 = \frac{a^2}{y^2}\Big[&- \cos^2 2p\varphi(2p^2 - 1) \\ &- \frac{p^2\rho^2}{y^2}\cos 2p\varphi\sin^2 2p\varphi - \frac{p^2 a^2}{y^2}\sin^2 2p\varphi\Big] \\ = -\frac{a^2}{y^2}&[p^2\sin^2 2p\varphi + (2p^2 - 1)\cos^2 2p\varphi]. \end{aligned}$$

La surface est donc à courbures partout opposées. Elle admet comme seuls points singuliers (à distance finie) les points $x = z = 0$, $y = \pm a$; mais, ainsi qu'on s'en assurera sans difficulté, ces singularités ne sont point de nature à empêcher la validité des raisonnements qui vont suivre. Enfin cette surface possède $2p$ nappes infinies.

II. — Considérations d'Analysis situs.

20. Ayant reconnu, dans les numéros précédents, l'existence de surfaces à courbures opposées et à connexion quelconque, nous avons à rappeler les principes qui gouvernent l'étude des lignes tracées sur de telles surfaces : principes posés par M. Jordan dans un Mémoire bien connu (²).

Nous dirons que deux contours fermés tracés sur la surface appartiennent à la même *espèce* s'ils sont réductibles l'un à l'autre par une déformation continue, effectuée sur cette surface.

(¹) *Leçons sur la Théorie des surfaces*, Liv. V, Chap. II, et Liv. VII, Chap. III.

(²) Ce Journal, année 1866. Comme le fait M. Jordan, nous supposerons, pour simplifier, nos surfaces à deux côtés.

L'énumération des différentes espèces de contours fermés repose sur la considération des *contours élémentaires*. Ceux-ci sont de deux sortes :

1° Ceux qui équivalent respectivement aux différents bords de la surface ;

2° Ceux qui correspondent par paires aux différents trous (s'il en existe).

Les premiers joueront, à notre point de vue, un rôle spécial. Nous les désignerons sous le nom de *contours simples*.

On sait que, dans beaucoup de questions, le choix des contours élémentaires comporte un certain degré d'arbitraire, ces contours pouvant être remplacés par d'autres en nombre égal, tels que chacun des deux systèmes puisse se déduire de l'autre. Il en sera encore de même ici, mais non pas pour ce qui concerne les contours simples. Il reste entendu que chacun de ceux-ci équivaut à un bord déterminé (correspondant à une nappe infinie déterminée) de la surface.

Un contour quelconque est réductible à une suite de contours élémentaires parcourus dans des sens déterminés et dans un ordre déterminé, autrement dit représentable par un symbole (produit) de la forme

$$\text{ABC}\ldots, \tag{11}$$

chacune des lettres (facteurs) A, B, C, ... étant le symbole C_i d'un contour élémentaire ou le symbole C_i^{-1} d'un contour C_i décrit en sens inverse, et ces symboles étant ou non distincts les uns des autres : expression qui peut encore s'écrire

$$C_i^m C_{i'}^{m'} C_{i''}^{m''}, \tag{12}$$

chaque indice étant, cette fois, distinct du précédent et du suivant et les exposants m, m', ... étant des entiers positifs ou négatifs, mais qu'on peut supposer non nuls (sauf dans le cas où l'espèce considérée est celle des contours réductibles à un point).

Le symbole C^m (C étant un contour quelconque), qui représente le contour C décrit m fois dans un sens déterminé si m est positif et ce même contour décrit $|m|$ fois en sens inverse si m est négatif, sera dit correspondre à un *multiple* de C.

21. Les contours élémentaires ne sont pas tous indépendants. Il existe entre eux une relation, et une seule, qui permet de regarder l'un quelconque des contours élémentaires comme une combinaison des autres et, par conséquent, de l'éliminer de l'une quelconque des expressions (11) ou (12).

C'est ainsi que, dans le cas de la connexion simple, il n'y a aucun contour non réductible à un point; et que, sur une surface à connexion double, les contours élémentaires se réduisent à un seul.

Mais, une fois l'un des contours éliminé comme il vient d'être dit, *l'expression* (12) *est parfaitement déterminée à une permutation circulaire près.*

22. Il nous arrivera, dans certains cas, de ne pas considérer comme essentiellement distincts d'un contour déterminé ses différents multiples. A ce point de vue, une surface à connexion double n'aurait, comme on le voit, qu'une seule espèce de contours non réductibles.

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse deux, *les contours essentiellement distincts les uns des autres sont en nombre infini.*

Par contre, *il n'y a qu'un nombre fini d'espèces de contours dont la longueur soit inférieure à une longueur donnée quelconque.*

23. Soient maintenant a, b deux points quelconques de la surface.

Nous dirons que deux chemins qui vont de a en b appartiennent au même *type* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue dans laquelle les points a, b restent fixes.

Nous employons le mot *type* au lieu du mot *espèce,* qui nous a servi pour les contours fermés, afin d'éviter certaines confusions, en particulier dans la circonstance suivante :

Supposons que le point b coïncide avec le point a. Les chemins que nous aurons alors à comparer seront des contours fermés partant du point a et y aboutissant.

Or, une infinité de ces chemins peuvent être de même *espèce,* lorsqu'on les considère comme contours fermés, tout en étant de *types* différents, si on les considère comme lignes joignant le point a à lui-même.

La déformation continue par laquelle on passe d'un de ces chemins à l'autre peut, en effet, être telle que le point a ne puisse rester fixe pendant cette déformation, mais décrive forcément un contour non réductible à un point ([1]).

24. Les différents types de chemins joignant entre eux deux points (différents ou non) a et b se représentent par des symboles de la forme (11) ou (12); mais ces symboles se distinguent de ceux qui servent aux contours ouverts par cette circonstance que la permutation circulaire des facteurs n'y est pas légitime. Cette différence met bien en évidence le fait que nous venons de signaler au numéro précédent.

25. Il y a une infinité de types de chemins joignant deux points (du moins sur une surface à connexion multiple); mais, *les types auxquels correspondent des chemins de longueur finie sont en nombre fini.*

26. Donnons-nous enfin, sur la surface, un point a et une ligne L. Nous dirons que deux chemins ab, ac, qui partent du point a pour aboutir à la ligne L, sont du même type, si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue dans laquelle l'extrémité a reste fixe, pendant que l'autre extrémité décrit la ligne L. Cela revient manifestement à dire que le deuxième chemin ac forme, avec l'arc cb de la ligne L, une ligne allant de a en b et du même type que le premier chemin ab. La notion que nous venons d'introduire n'offre donc rien d'essentiellement nouveau : on représentera un type de chemin allant de a à la ligne L par le symbole d'un type de chemin allant de a à un point déterminé b de L.

Il y a toutefois une remarque importante à faire lorsque la ligne L est fermée. Dans ce cas, en effet, il existe une infinité de manières

([1]) Cette remarque ne s'applique pas au cas où l'espèce en question est celle des contours réductibles à un point.

différentes d'aller du point b à un autre point c de cette ligne sans la quitter. Si cette ligne est réductible à un point, tous les arcs ainsi obtenus sont équivalents. Mais il n'en est pas ainsi dans le cas général et l'on voit qu'*on ne doit pas considérer le type comme modifié si l'on fait suivre son symbole du symbole de* L (pris en traitant L comme une ligne joignant le point b à lui-même) *ou d'un de ses multiples.*

27. En particulier, *sur une surface à connexion double tous les chemins qui vont d'un point donné à une ligne fermée donnée* (*sans point double*) *sont réductibles les uns aux autres.*

28. Supposons que le point a se déplace sur une ligne déterminée λ aboutissant en un point a'. A chaque type de chemins allant de a à L correspondra évidemment un type déterminé de lignes joignant a' à L, type qui dérivera du premier par continuité.

Si la ligne L′ est fermée, de manière que le point a' coïncide avec a, rien ne permet d'affirmer que le type ainsi dérivé coïncidera avec le type primitif. Cette circonstance se produira toutefois dans deux cas :

1° Si la ligne fermée L′ est réductible à un point;

2° Si cette ligne est de même espèce que L, le type considéré étant celui du chemin que suit le point a lorsque L′ vient, par une déformation continue, coïncider avec L.

III. — Théorèmes fondamentaux. Lignes géodésiques fermées.

29. Une géodésique de la surface est bien déterminée par un de ses *éléments*, c'est-à-dire par un point M (dont les coordonnées curvilignes sont α, β) et l'angle ω que fait la tangente en ce point avec l'axe des x du trièdre (T) attaché à la surface en ce point; α, β et ω seront dits les *coordonnées de l'élément.* Nous pourrons supposer que, dans une région déterminée où nous ferons varier cet élément, la surface soit représentée régulièrement à l'aide des coordonnées α, β et que la position du trièdre (T) y varie continûment.

Dès lors si, sur la géodésique considérée, nous portons, à partir du point M, une longueur $MM' = u$, les coordonnées de l'élément situé en M' (lesquelles ne seront pas nécessairement rapportées au même système que celles du point M) seront des fonctions de α, β, ω, u : fonctions continues et dérivables, au moins jusqu'à un certain ordre.

Supposons que le point M varie sur une ligne déterminée L, les coordonnées de ce point étant des fonctions d'un paramètre v, et que la géodésique issue de ce point soit constamment orthogonale à L. Les coordonnées, curvilignes ou cartésiennes, du point M' seront des fonctions continues et dérivables de u et de v ; à des variations infiniment petites de ces quantités correspondra pour M' un déplacement infiniment petit de longueur

$$ds = \sqrt{du^2 + C^2 dv^2},$$

C étant encore une fonction dérivable de u et de v. On sait que cette quantité est liée à la courbure $K = \frac{1}{RR'}$ de la surface par l'équation

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = -CK. \tag{13}$$

Cette dernière entraîne une conséquence fondamentale pour notre objet. Sur les surfaces à courbures opposées, en supposant (ainsi qu'on peut le faire) C positif, il vient

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} \geqq 0. \tag{14}$$

30. Les quantités u, v sont-elles, à leur tour, au moins dans une région suffisamment petite, déterminées par la position du point M'? Autrement dit, toute variation infiniment petite du premier ordre de ces quantités entraîne-t-elle un déplacement, infiniment petit du premier ordre, de ce point? Les principes rappelés au n° **1** montrent qu'il en sera nécessairement ainsi toutes les fois que C sera différent de zéro. La région de la surface qui entoure le point M' sera alors représentée régulièrement par les coordonnées u, v : celles-ci pourront être considérées comme variant continûment lorsque le point M' se déplacera continûment en décrivant un chemin quelconque et seront déterminées sans ambiguïté par cette condition.

31. Supposons, en premier lieu, que la ligne L se réduise à un point a : v sera l'angle que fait, avec l'axe des x du trièdre attaché à la surface en a, une géodésique issue de ce point; u, qui sera essentiellement positif, représentera un arc porté, à partir du point a, sur cette ligne (coordonnées polaires géodésiques). On aura, en a,

$$C = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = 1;$$

donc, pour toute autre valeur de u,

$$\frac{\partial C}{\partial u} > 1, \tag{15}$$

$$C > u. \tag{16}$$

Voilà donc un cas où la condition $C \neq 0$ est nécessairement vérifiée et nous pouvons dès lors établir notre premier théorème fondamental.

Théorème. — *A chaque type de lignes joignant deux points a et b, correspond un arc de géodésique appartenant à ce type, et il n'en correspond qu'un seul* (1).

1° Considérons un point m qui va de a en b par une ligne quelconque A appartenant au type donné. Dans toutes les positions successives de ce point, la géodésique am sera déterminée sans ambiguïté par la double condition de varier continûment et d'avoir une lon-

(1) La proposition d'après laquelle, *sur une surface à courbure négative, deux géodésiques infiniment voisines ne peuvent se couper deux fois*, proposition énoncée par Jacobi (*Vorles. über Dynamik*), a été démontrée par plusieurs géomètres. *Voir* à ce sujet le Mémoire de M. Von Mangoldt (*Journal de Crelle*, t. 91, p. 23; 1881). M. Von Mangoldt donne, d'après MM. Thomson et Tait, la démonstration, à l'aide du théorème de Gauss, de ce fait que, si la surface est à convexion simple, deux géodésiques qui se coupent sous un angle fini ne peuvent pas non plus se couper à nouveau; il remarque (p. 28) que cette conclusion n'est pas nécessairement exacte s'il y a connexion multiple.

gueur infiniment petite lorsque le point m est infiniment voisin de a.

Le point m venant en b, on obtient la géodésique cherchée.

2° Observons que toute géodésique répondant à la question peut s'obtenir par le procédé qui vient d'être expliqué; il suffira évidemment, à cet effet, de prendre pour la ligne A cette géodésique elle-même.

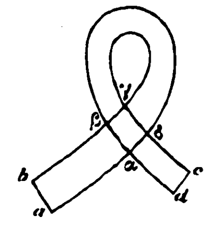
Or les valeurs que prennent les coordonnées u, v du point m, quand ce point vient en b, varient continûment lorsqu'on déforme continûment la ligne A; elles ne changent donc en aucune façon, car le point b ne peut avoir, relativement au point a, plusieurs systèmes de coordonnées polaires géodésiques infiniment voisins les uns des autres.

32. La première partie de la proposition précédente serait évidente si l'on admettait que la longueur d'un chemin joignant ab et appartenant au type donné a nécessairement un minimum.

Quant à la seconde, il est à observer qu'on pourrait la démontrer en employant le théorème de Gauss sur les polygones géodésiques, moyennant certaines précautions nécessaires pour l'application de ce théorème aux contours géodésiques qui présentent des points doubles.

Considérons, par exemple, le polygone $abcd$ représenté *fig.* 3. Il est clair qu'un tel polygone peut être considéré comme une somme de polygones géodésiques ordinaires et que le théorème de Gauss peut lui être appliqué sans aucune difficulté, sous la simple condition de compter deux fois la courbure totale du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ (*fig.* 3).

Fig. 3.



Un fait analogue aura lieu pour tout polygone géodésique réductible, quels que soient ses points doubles. On devra alors multiplier respectivement les courbures totales des différentes régions que détermine ce contour par des entiers convenablement choisis, qui ne sont autres que les *indices* de Gauss relatifs à ces régions.

Nous raisonnerons exclusivement, dans ce qui va suivre, sur des contours tels que les indices des différentes régions qu'ils délimitent soient tous positifs, autrement dit, sur des aires polygonales formées de parties additives, que l'on peut regarder comme des *sommes* de polygones ordinaires.

33. Pour démontrer que deux points a, b ne peuvent être joints par deux géodésiques différentes du même type, autrement dit, qu'*un biangle géodésique réductible à un point ne peut exister sur une surface à courbures opposées*, nous remarquerons que cette conclusion est évidente s'il s'agit d'un biangle formé de parties toutes additives, car alors l'égalité qui exprime le théorème de Gauss aurait pour premier membre une quantité positive (la somme des angles du biangle) et pour second membre une courbure totale négative.

Mais, d'autre part, d'après un théorème démontré par M. Brunel [1], si les indices relatifs à un contour réductible ne sont pas tous positifs, celui-ci est décomposé, par l'un au moins de ses points doubles c, en deux contours partiels, tous deux réductibles. L'un au moins de ces derniers ne comprendra pas les deux sommets a, b du biangle et sera, par conséquent, soit un nouveau biangle réductible, soit un *monangle* ou biangle dont un angle est égal à π. Nous sommes donc ramenés au cas précédent.

34. Supposons, en second lieu, que la ligne L, mentionnée aux nos **29-30**, soit une géodésique, de sorte que, u étant la distance normale géodésique d'un point M à L (comptée en grandeur et signe suivant son sens), on ait, pour $u = 0$,

$$C = 1, \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = 0,$$

et, par conséquent, pour toute valeur de u différente de zéro

$$C > 1, \tag{17}$$

$$u\frac{\partial C}{\partial u} > 0. \tag{18}$$

---

(1) *Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, séance du 1er juillet 1897.

La première inégalité montre encore que la surface est représentée régulièrement par les coordonnées u, v et nous permet, moyennant des raisonnements identiques à ceux du n° **31**, d'énoncer notre second théorème fondamental.

Théorème. — *A tout type de lignes joignant un point donné à une géodésique donnée, il correspond une géodésique normale de ce type et il n'en correspond qu'une seule.*

35. La première partie de ce théorème est évidente, une fois établi le théorème du n° **31**. La seconde peut encore s'établir à l'aide du théorème de Gauss. Il suffit, à cet effet, de remarquer que la géodésique du type considéré, qui joint le point donné a à un point variable m de la géodésique donnée L, tourne toujours dans le même sens lorsque ce point décrit L (le contraire entraînant manifestement la production d'un biangle réductible). Il en résulte qu'un triangle géodésique est toujours formé de parties additives et, par suite, ne peut être birectangle, d'après le théorème de Gauss.

36. Les coordonnées u, v d'un point, rapportées à une géodésique, étant des fonctions bien déterminées de la position de ce point et du type du chemin qui joint ce point à un point déterminé, les raisonnements donnés au n° 521 (t. II, liv. V) des *Leçons sur la Théorie des surfaces,* de M. Darboux, s'appliquent d'une façon entièrement générale et montrent qu'*un arc de géodésique est plus court que tout autre chemin terminé aux mêmes points et de même type.*

37. Si maintenant, au lieu de l'inégalité (17), qui nous a servi à établir notre second théorème fondamental, nous envisageons l'inégalité (18), celle-ci nous montre, par une conséquence tout analogue à celle qui s'offre dans le cas des surfaces à courbure positive ([1]), que *lorsqu'un point décrit une géodésique* L', *sa distance normale (d'un type déterminé quelconque) à une géodésique* L *ne peut avoir de*

([1]) Voir le Mémoire cité : *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique* (ce Journal, 5e série, t. III; n° 18, p. 346-347; 1897).

maximum et croît indéfiniment en valeur absolue, si elle est croissante à quelque moment.

Ce fait essentiel va tout d'abord nous permettre d'énumérer complètement les géodésiques fermées.

THÉORÈME. — *A chaque espèce de contours fermés correspond une géodésique de cette espèce, et il n'en correspond qu'une seule.*

Il n'y a exception que pour les contours simples correspondant aux nappes infinies non évasées.

1° On peut joindre un point quelconque a de la surface à lui-même par une ligne géodésique appartenant à l'espèce donnée. Cela se peut même d'une infinité de façons, puisqu'à cette espèce correspondent une infinité de types de lignes partant du point a et y aboutissant; mais, parmi tous les chemins ainsi obtenus, il n'y en a qu'un nombre fini dont la longueur ne dépasse pas une limite déterminée quelconque (**25**). Donc, il existe un de ces chemins dont la longueur est minimum. Soit l ce minimum, l est une fonction continue de la position du point a, laquelle a par conséquent un minimum lorsque ce point varie sur la surface limitée S'.

Mais, en général, l augmente indéfiniment lorsque le point a s'éloigne indéfiniment.

Donc, l a un minimum sur la surface entière S et ce minimum donne la géodésique fermée cherchée.

Le raisonnement n'est en défaut que si l n'augmente pas indéfiniment avec l'éloignement du point a, ce qui ne peut se présenter que pour les contours correspondant aux nappes infinies non évasées. Nous verrons plus loin qu'il y a réellement exception dans ce cas.

2° Supposons qu'il y ait deux géodésiques fermées L, L' appartenant à l'espèce donnée. Soient m' un point quelconque de L', u sa distance à L, comptée suivant le type du chemin que décrit ce point lorsque L' vient coïncider avec L par une déformation continue. Nous savons (**28**) que la distance u reprend sa valeur initiale lorsque le point M' revient à sa position primitive après description de la ligne L'. Cette distance devrait donc avoir un maximum en valeur absolue, ce dont nous avons démontré l'impossibilité.

Pour obtenir le même résultat par l'application du théorème de Gauss, on remarquerait que les géodésiques abaissées, normalement à L, des positions successives du point M' ne sauraient s'entre-croiser, sans quoi il se produirait un biangle réductible ou un triangle birectangle réductible; autrement dit, les deux géodésiques L et L' pourraient être considérées comme délimitant une aire formée de parties additives. L'application du théorème de Gauss à cette aire conduirait à une contradiction.

Remarque I. — Il résulte, soit du n° **31**, soit d'une démonstration analogue à la précédente, qu'*il n'existe pas, sur les surfaces à courbures opposées, de géodésiques fermées réductibles.*

Remarque II. — La géodésique fermée correspondant à l'espèce $\mathcal{S}^m$ n'est évidemment autre que la géodésique fermée d'espèce $\mathcal{S}$, parcourue $|m|$ fois dans son sens primitif ou en sens inverse, suivant le signe de m.

Ainsi, au point de vue de l'obtention des géodésiques fermées, nous n'aurons pas à considérer d'espèce qui soit multiple d'une autre.

En particulier, *une surface à connexion double n'admet qu'une seule géodésique fermée.*

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse deux, les géodésiques fermées sont en nombre infini. Cette infinité est d'ailleurs évidemment *dénombrable*.

38. On peut remarquer que ces géodésiques fermées en nombre infini forment un ensemble condensé en soi, au sens de Cantor; c'est-à-dire qu'étant donnée une géodésique fermée L, d'espèce $\mathcal{S}$, il existe une infinité d'autres géodésiques fermées ayant au moins un élément aussi voisin qu'on veut d'un élément déterminé quelconque de L.

IV. — Géodésiques asymptotiques.

39. D'après le n° **37**, si L, L' sont deux géodésiques, lorsqu'un point m' se meut indéfiniment (dans un sens déterminé) sur L', sa distance à L, relative à un type déterminé quelconque, ne peut varier que d'après les trois lois suivantes :

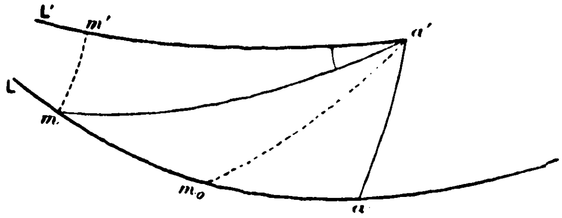
1° Croître constamment depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, ou décroître constamment de $+\infty$ à $-\infty$ (on peut dire alors que les deux lignes *se coupent suivant le type considéré*);

2° Partir de $\pm\infty$ et y revenir après un minimum de valeur absolue;

3° Partir de $\pm\infty$ pour tendre vers zéro sans jamais changer de signe ni de sens de variation (ou la variation inverse).

La possibilité des deux premiers cas est évidente. Celle du troisième s'établit par les considérations bien connues qui s'offrent dans la Géométrie non euclidienne. Soit a' un point de la surface, A une géodésique joignant ce point à un point a d'une géodésique L. Considérons un point m qui s'éloigne indéfiniment sur L, dans un sens déterminé, à partir du point a (*fig.* 4) et traçons la géodésique $a'm$ du type A.

Fig. 4.



L'angle $\widehat{ma'a}$ va constamment en croissant; il reste constamment inférieur à une limite déterminée, à savoir l'angle extérieur en a du triangle maa'. Donc *$a'm$ tend vers une limite* L'.

La géodésique L' présente évidemment avec L la relation indiquée en dernier lieu. Nous dirons qu'elle est *asymptote* à L. Nous voyons qu'à chaque type de lignes allant d'un point à une géodésique correspondent deux asymptotes de ce type; on peut considérer ces dernières comme les géodésiques qui, appartenant au type en question, joignent le point donné aux points à l'infini sur la géodésique donnée.

40. Réciproquement, si deux géodésiques L, L' sont asymptotes l'une à l'autre, c'est-à-dire si leur distance mutuelle comptée suivant un type déterminé (par exemple celui d'une certaine ligne joignant entre eux deux points a, a' pris sur ces géodésiques) tend vers zéro, *la ligne* L' *est l'asymptote à* L *menée par a' à l'aide de la méthode précédente.*

Soit, en effet, mm' une ligne joignant deux points pris respectivement sur L, L' et dont la longueur λ tend vers zéro à mesure qu'elle s'éloigne indéfiniment (*fig.* 4). Les deux points m, m' sont supposés se déplacer d'une façon continue et la ligne mm' dériver par continuité de la ligne donnée aa'. Il en résulte que le quadrilatère $aa'mm'$ est réductible.

Joignons les deux points a', m par la géodésique qui, considérée comme ligne allant du point a' à la ligne mm', est du type $a'm'$. L'angle α des deux lignes $a'm'$, $a'm$ est infiniment petit, car (u et v désignant des coordonnées polaires géodésiques rapportées au point a, C^2 le coefficient de dv^2 dans l'élément linéaire relatif à ces coordonnées) on a

$$\lambda = \int_{mm'} \sqrt{du^2 + C^2\,dv^2} > \int_{mm'} C\,dv > (\overline{a'm'} - \lambda)\,\alpha,$$

à cause de l'inégalité $C > u$, établie au n° **31**.

Donc $a'm'$ est bien la limite de $a'm$; ce qui démontre la conclusion, car la réductibilité du quadrilatère $aa'mm'$ et celle du triangle $a'mm'$ entraînent celle du triangle $a'am$.

Corollaires. — *Si une géodésique* L' *est asymptote à une géodésique* L, *réciproquement celle-ci est asymptote à la première suivant le même type.*

Deux géodésiques asymptotes à une même troisième sont asymptotes entre elles.

41. Au contraire, *les asymptotes menées par un même point à deux géodésiques non asymptotes l'une à l'autre ne peuvent coïncider.*

Toutefois, cette dernière proposition n'est exacte que moyennant une convention spéciale.

Lorsque nous comparerons entre elles les géodésiques issues d'un même point a, nous aurons dorénavant égard à leurs éléments en a, et nous dirons qu'il y a deux géodésiques distinctes s'il y a deux éléments distincts; de sorte qu'une seule et même géodésique pourra figurer à double titre dans l'énumération des géodésiques issues de a, si elle a un point double en a.

Deux points a, a' étant joints par une ligne déterminée, les asymptotes menées par a, suivant le type aa', à deux géodésiques distinctes issues de a ne peuvent coïncider.

42. Deux asymptotes menées d'un même point a à une même géodésique L, mais différant par le type, peuvent-elles coïncider?

Supposons qu'une ligne ax soit asymptote à la géodésique L' de deux manières différentes et soient mm', mm'' deux lignes de types différents joignant le point m de ax à L', variant d'une manière continue et tendant vers zéro à mesure que le point m s'éloigne indéfiniment. La ligne $m'mm''$, jointe à l'arc $m'm''$ de L', forme un contour fermé d'espèce invariable $\mathfrak{S}$, puisque ce contour se déforme continûment.

De considérations développées un peu plus loin (n^{os} **33**, **34**) et qui ne supposent en rien les présentes [1], il résulte que L' est asymptote à la géodésique fermée L'_0 d'espèce $\mathfrak{S}$.

Réciproquement, dans ce cas, il y a effectivement coïncidence, car les asymptotes de L' sont les mêmes que celles de L'_0, lesquelles ne changent pas quand on multiplie les types par le symbole de l'espèce $\mathfrak{S}$.

Si la ligne L' est elle-même la géodésique fermée d'espèce $\mathfrak{S}$, une même asymptote ne peut provenir de deux types différents, puisqu'ici deux types différant entre eux par le symbole L' doivent être regardés comme identiques.

43. Nous avons étudié au Chapitre précédent les géodésiques fermées. Les considérations actuelles nous conduisent à envisager les géodésiques asymptotiques aux géodésiques fermées. On voit qu'une telle géodésique L sera déterminée lorsqu'on aura donné :

1° L'espèce de la géodésique fermée correspondante L_0;

2° Un point a de L;

3° Un type de lignes allant du point a à L_0.

Nous réunirons dans une même catégorie les géodésiques fermées et leurs asymptotes. Les premières peuvent évidemment, en effet, être regardées comme un cas particulier des secondes.

---

[1] Toutefois il est supposé en cet endroit, et par conséquent ici, que L' ne sort pas d'une portion finie de la surface.

Cette réunion est d'ailleurs imposée par les corollaires du n° **40**, lesquels nous conduisent à ranger dans une même classe les géodésiques asymptotes entre elles.

44. L étant de nouveau une *géodésique* quelconque, reprenons le triangle $aa'm$ (*fig.* 4) considéré au n° **39**. aa' désignant, pour fixer les idées, une géodésique normale à L, soient λ la longueur aa', l l'arc am (ou, si L est fermée, celui des arcs am qui correspond à une position actuellement considérée de la géodésique variable $a'm$).

Donnant d'abord à l une valeur déterminée am_0, nous aurons

$$\widehat{am_0a'} < \frac{\lambda}{l}.$$

Supposons que, dans toute l'étendue du triangle ama', la courbure soit inférieure en valeur absolue à une limite déterminée, ce qui aura lieu nécessairement si ce triangle est dans une partie finie de la surface. Si alors u, v désignent, comme au n° **34**, des coordonnées géodésiques rapportées à L, la quantité C sera, en vertu de l'équation (13), inférieure à $\frac{1}{2}(e^{k\lambda}+e^{-k\lambda})$. Ceci fournit une limite supérieure de l'aire du triangle et, par suite, de sa courbure, laquelle est plus petite que

$$\frac{k}{2}(e^{k\lambda}+e^{-k\lambda})\, l\lambda;$$

il en sera encore de même pour la courbure du triangle géodésique $aa'm_1$ où m_1 est un point de l'arc am. D'autre part, si m_1 est situé au delà de m_0, il suffira, pour obtenir la courbure du triangle $aa'm_1$, d'ajouter à la courbure du triangle $aa'm_0$ celle du triangle $a'm_0m_1$, laquelle est inférieure à l'angle $\widehat{am_0a'}$.

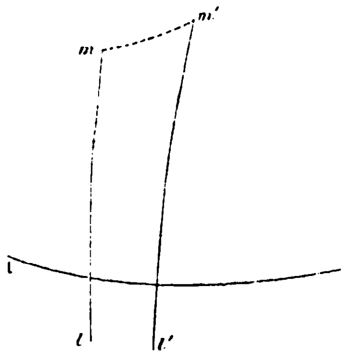
Donc *la courbure du triangle* $aa'm_1$ *est inférieure à une quantité fixe que l'on peut assigner dès que l'on connaît* λ, *sans connaître la position du point* a *ni celle de la géodésique* L (pourvu que le premier soit dans une région finie de la surface) *et qui tend vers zéro avec* λ.

Il en est de même, par conséquent, pour la différence entre l'angle $\widehat{a'ay}$ (*fig.* 4) et l'angle que fait l'asymptote L' avec aa' : car cette différence est la limite de la courbure qui vient d'être étudiée.

45. A ce résultat nous en rattacherons un autre qui nous sera utile plus loin.

Soient m, m' deux points très voisins l'un de l'autre (*fig.* 5). De ces deux points, abaissons sur une géodésique quelconque L des géo-

Fig. 5.



désiques normales l, l' qui dérivent l'une de l'autre lorsqu'on va de m en m' par le chemin très petit qui joint ces deux points.

On peut assigner à l'angle que font entre elles les tangentes menées à l, l' respectivement aux points m, m' une limite supérieure dépendante de la distance mm' et tendant vers zéro avec cette distance, mais indépendante du choix de la géodésique L et des points m, m', pourvu qu'on sache que ceux-ci sont dans une région finie et déterminée de la surface.

En effet, la différence des angles que font respectivement l, l' avec la géodésique très petite mm' est plus petite que la limite supérieure trouvée au numéro précédent.

V. — Géodésiques qui s'éloignent à l'infini.

46. Nous savons qu'à chaque nappe infinie $\mathfrak{N}_i$ correspond un contour simple, et par conséquent (si cette nappe est évasée, ce que nous supposerons) une géodésique fermée γ_i.

C'est cette ligne que nous prendrons désormais pour position initiale de la courbe C_i dont il a été question en commençant (n° **8**), position initiale qui limite la nappe $\mathfrak{N}_i$.

Ainsi qu'il a été remarqué (**27**), il n'existe sur $\mathfrak{N}_i$ qu'un seul type de lignes allant d'un point quelconque m à la courbe limite γ_i, de sorte que *la distance géodésique u du point m à cette courbe est une fonction parfaitement déterminée et univoque de la position de ce point.*

Comme cette distance ne peut avoir de maximum sur une géodésique et doit croître constamment et indéfiniment si elle est croissante à un moment quelconque, *une géodésique qui a pénétré dans la nappe $\mathfrak{N}_i$ ne peut plus en ressortir : elle s'éloigne forcément à l'infini sur cette nappe,* et cela régulièrement (c'est-à-dire sans alternatives de retour à distance finie).

47. De ce qui précède résulte que, si une géodésique s'éloigne à l'infini, il en est de même de toute géodésique infiniment voisine de la première.

48. Soit une géodésique issue d'un point O, non situé sur la nappe $\mathfrak{N}_i$, et qui pénètre dans cette nappe en coupant γ_i en un point m. Lorsque ce point se déplace continûment en décrivant γ_i dans un sens ou dans l'autre, la géodésique Om tourne autour du point O sans cesser de s'éloigner à l'infini sur la nappe $\mathfrak{N}_i$.

En supposant que le point m se meuve indéfiniment dans un sens, puis dans le sens opposé, on voit que Om occupera successivement toutes les positions comprises dans l'angle $\mathfrak{A}$ que font entre elles les deux asymptotes menées par le point O à γ_i et du type de Om.

Les angles $\mathfrak{A}$ vont jouer un rôle fondamental dans les considérations qui seront présentées un peu plus loin. Ils sont en nombre infini autour d'un même point, si l'ordre de connexion de la surface est supérieur à 2.

Deux propriétés de ces angles nous seront principalement utiles :

1° *Les côtés d'un angle $\mathcal{A}$ sont des géodésiques qui restent à distance finie* (ce sont des asymptotes à une courbe γ_i);

2° *Deux angles $\mathcal{A}$ différents ne peuvent avoir un côté commun* (**41**, **42**).

49. Supposons que toutes les nappes infinies soient évasées : alors à chacune d'elles correspondra une géodésique fermée γ. Ces n lignes n'ont évidemment, d'après ce qui précède, aucun point commun. Elles divisent la surface en n nappes infinies et une partie S' limitée en tous sens. C'est cette dernière que nous nommerons, dans ce qui va suivre, la *partie finie* de la surface : en sorte que cette locution aura pour nous dorénavant un sens parfaitement précis.

Nous voyons que, *si une géodésique quelconque ne s'éloigne pas à l'infini régulièrement sur une nappe déterminée, elle reste constamment comprise dans la partie finie de la surface.*

50. Nous dirons quelques mots du cas où les nappes infinies ne sont pas toutes évasées. Dans ce cas, les conclusions précédentes ne subsistent plus.

Soient, en effet, $\mathfrak{N}_i$ une nappe non évasée, $\mathcal{C}_i$ l'espèce de contours simples correspondante.

Il n'existe pas de géodésique fermée de cette espèce $\mathcal{C}_i$; car, s'il y en avait une et qu'on rapportât les points de $\mathfrak{N}_i$ aux coordonnées u, v relatives à cette géodésique, la quantité C augmenterait indéfiniment avec u, et il en serait, par conséquent, de même de l'intégrale

$$\int \sqrt{du^2 + C^2 dv^2}$$

étendue à une courbe indéfiniment éloignée d'espèce $\mathcal{C}_i$.

Le même fait résulte, d'ailleurs, du théorème de Gauss appliqué à l'aire comprise entre la géodésique supposée et une courbe indéfiniment éloignée d'espèce $\mathcal{C}_i$, si l'on part, conformément à ce qui a été dit au n° 15, de ce que l'intégrale $\int \frac{ds}{\rho_g}$ étendue à cette dernière courbe est infiniment petite.

Cette dernière démonstration a l'avantage de mettre clairement en évidence ce fait que *la géodésique fermée située sur la nappe non évasée doit être considérée comme rejetée à l'infini.*

31. On voit aussi (ce qui était à peu près évident d'après les remarques faites au n° **15**) que l'on peut faire varier la courbe C considérée en cet endroit de manière que son périmètre aille constamment en décroissant. Autrement dit, ($\mathfrak{S}$) étant une position quelconque de cette courbe, il existe au delà de ($\mathfrak{S}$) des courbes de même espèce et de périmètre plus petit que celui de toute autre courbe analogue située en deçà de ($\mathfrak{S}$). Dans le cas contraire, en effet, les raisonnements du n° **37** continueraient à s'appliquer et montreraient l'existence d'une géodésique fermée d'espèce ($\mathfrak{S}$).

On en conclut que, si $\mathfrak{S}'$ est un contour quelconque distinct de $\mathfrak{S}$, la géodésique fermée d'espèce $\mathfrak{S}^n\mathfrak{S}'$ (laquelle a forcément des parties à distance finie) s'éloigne autant qu'on veut sur la nappe non évasée si l'on prend le nombre n assez grand.

En un mot, la distinction que nous avons pu faire, en général, entre les nappes infinies et la partie finie de la surface cesse d'être possible dans ce cas spécial.

Nous nous bornerons à ces indications sur les nappes non évasées, et, dans tout ce qui va suivre, nous exclurons expressément leur existence.

32. Les considérations qui précèdent permettent d'étudier la distribution des géodésiques lorsque la surface est à connexion simple ou double.

Si, en effet, l'ordre de connexion est égal à 1, il ne peut y avoir de géodésique fermée, et la distance d'un point M à un point fixe quelconque O (distance qui est une fonction parfaitement déterminée de la position de M) augmente indéfiniment lorsque M décrit une géodésique. Toutes les géodésiques s'en vont, par conséquent, à l'infini, et *la distribution est entièrement analogue à celle des droites d'un* *plan* (¹). C'est un résultat qu'on peut vérifier aisément sur le paraboloïde hyperbolique.

Supposons, maintenant, que l'ordre de connexion soit égal à 2. Alors il n'y aura qu'un *contour élémentaire*, le contour simple correspondant à l'une quelconque des nappes infinies : la géodésique fermée correspondante divise la surface en deux nappes infinies. La partie finie de la surface n'existe pas. Donc toutes les géodésiques s'éloignent à l'infini, sauf celles qui sont asymptotes à la géodésique fermée : ces dernières passent, au nombre de 2, par chaque point de la surface.

C'est en particulier ce qui se passe sur l'hyperboloïde à une nappe, et notre résultat est conforme à celui qu'obtient Halphen sur la surface gauche de révolution.

On remarquera que la nature du résultat obtenu tient : 1° à ce qu'il n'y a qu'une seule espèce de contours fermés essentiellement distincts; 2° en particulier, à ce que les contours simples correspondant aux deux nappes infinies sont équivalents.

Au contraire, si l'ordre de connexion dépasse 2 :

1° Les contours fermés essentiellement distincts sont en nombre *infini*;

2° Les contours simples relatifs aux différentes nappes infinies sont tous distincts les uns des autres.

Grâce à cette double circonstance, les résultats obtenus en général vont être fort différents de ceux qui s'offrent dans les deux cas particuliers que nous venons d'examiner.

VI. — Géodésiques de troisième catégorie; classification générale.

53. Ainsi que nous l'avons dit au n° **51**, nous supposerons que les nappes infinies sont toutes évasées.

Nous avons, dans les Chapitres précédents, considéré deux classes de géodésiques : celles qui sont fermées ou asymptotiques aux géodésiques fermées, et celles qui s'éloignent indéfiniment. Nous allons maintenant étudier les géodésiques qui ne rentrent dans aucune des deux catégories précédentes.

(¹) Plus exactement, d'un plan non euclidien.

Envisageons une géodésique L, définie par un élément initial (soit un point O et la tangente en ce point). Si cette géodésique ne s'éloigne pas à l'infini, elle reste constamment comprise dans la partie finie de la surface. Dès lors on peut évidemment trouver sur cette ligne, d'une infinité de façons, deux éléments infiniment voisins, autrement dit deux points m, m', tels que :

1° L'arc mm' compris entre ces deux points, sur la ligne L, soit supérieur à une longueur déterminée quelconque λ;

2° La plus courte ligne géodésique l qui joint ces deux points soit inférieure à une quantité quelconque donnée ε;

3° L'angle des deux tangentes en m, m' soit également inférieur à ε.

La ligne l forme, avec l'arc mm' de L, un contour fermé $\mathfrak{S}$, lequel n'est pas réductible à un point, puisque c'est un biangle géodésique. Soit L_0 la géodésique fermée d'espèce $\mathfrak{S}$.

Considérons la distance normale u d'un point quelconque de L à la ligne L_0, distance comptée suivant un type tel qu'elle revienne à sa valeur primitive lorsque ce point décrit le contour $\mathfrak{S}$ (**28**). La différence des deux valeurs de u au point m et au point m' est très petite, et il en est de même (**45**) de la différence des deux valeurs de $\frac{du}{ds}$.

Je dis que u et $\frac{du}{ds}$ sont très petits en valeur absolue tout le long de l'arc mm'.

Pour le démontrer, supposons d'abord que u change de signe sur l'arc mm' de L et, par conséquent, aussi sur la ligne l : u sera très petit en m et en m', donc aussi tout le long de l'arc mm'. D'ailleurs, $\frac{d^2u}{ds^2}$ étant fini, $\frac{du}{ds}$ sera également très petit, en vertu d'un lemme démontré dans le Mémoire précédemment cité (¹).

Supposons, en second lieu, que u garde un signe invariable sur le contour; alors il en sera de même de $\frac{d^2u}{ds^2}$; comme la différence des valeurs de $\frac{du}{ds}$ en m et en m' est très petite, $\frac{d^2u}{ds^2}$ devra être très petit en valeur absolue (sauf tout au plus pour des arcs de longueur totale très

---

(¹) *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique*, n° 4, p. 334.

petite). D'ailleurs, $\frac{du}{ds}$ est aussi très petit, car u varie toujours dans le même sens; ce fait résulte de ce que la variation de u est très petite et, si u a un minimum, de ce que les deux valeurs initiale et finale de $\frac{du}{ds}$, lesquelles sont très peu différentes, comprennent entre elles zéro.

Dès lors, l'équation de L, rapportée à la géodésique L_0,

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u} \left[1 - \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \right],$$

montre que $\frac{1}{C} \frac{\partial C}{\partial u}$ doit être très petit. L'équation

$$\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = - CK \tag{13}$$

prouve aisément qu'il doit en être de même de u, si la courbure (prise en valeur absolue) ne descend jamais au-dessous d'une limite déterminée, ou du moins ne devient très petite que dans des aires suffisamment petites dans toutes leurs dimensions et séparées par des intervalles non très petits.

Notre conclusion est donc démontrée dans tous les cas.

34. Si u continue à décroître en valeur absolue, notre géodésique est asymptote à L_0; sinon, nous devons supposer que u a un certain minimum, après lequel L s'éloigne à nouveau de L_0.

D'après cela, si, outre les deux catégories de géodésiques rencontrées dans les Chapitres précédents, il en existe une troisième, chacune des lignes de cette dernière catégorie correspondra à une série infinie de géodésiques fermées L_0, L_1, ..., L_i, de chacune desquelles elle s'approchera successivement pour l'abandonner ensuite; elle serrera ces géodésiques successives de plus en plus près, et cela sur des longueurs de plus en plus considérables.

En un mot, la géodésique en question possède la propriété indiquée par M. Poincaré ([1]), à savoir que les équations du problème admet-

---

([1]) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 82.

tent « une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence des deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut ».

53. La suite des géodésiques L_i suffit-elle à définir la géodésique L?

Pour nous en rendre compte, considérons, sur L, un point m séparé du point O par un arc très grand et, d'autre part, très voisin d'un point m' d'une des géodésiques L_i, de manière que les tangentes menées en ces deux points aux deux lignes fassent un angle très petit. Joignons Om' par la géodésique qui équivaut à l'arc Om joint à la ligne infiniment petite mm'. Cette géodésique fera avec L un angle très petit, comme on le démontre par le raisonnement déjà invoqué au n° **40**. Elle fera aussi un angle très petit avec L_i et, par suite, aussi avec l'asymptote menée du point O à cette ligne, suivant le même type; car la différence des angles que font Om, Om' avec mm' est sensiblement égale à la courbure totale du triangle Omm', laquelle est très petite (**44**), et, d'autre part, les angles de L et de L_i avec mm' sont aussi très peu différents.

Donc L *est la limite d'asymptotes menées du point* O *aux lignes* L_i.

On voit, par conséquent, que, s'il existe une géodésique de la troisième catégorie, on devra, pour l'obtenir, considérer :

1° Une série de géodésiques fermées L_i correspondant à des espèces de plus en plus compliquées;

2° Un point O;

3° Une série de types $\mathfrak{T}_i$ de chemins allant respectivement du point O à chacune des lignes L_i.

Les asymptotes menées du point O à chacune des lignes L_i, suivant le type $\mathfrak{T}_i$ correspondant, tendront (du moins si les L_i, $\mathfrak{T}_i$ ont été choisis convenablement) vers une position limite qui sera la géodésique demandée L.

On remarquera que toute géodésique asymptote à L sera définie par la même suite de symboles L_i, $\mathfrak{T}_i$, le point O changeant seul; de sorte que cette suite de symboles, lorsque le point O reste indéterminé, définit une *classe* de géodésiques, en prenant ce mot avec le sens qui lui a été donné au n° **43**.

56. Il reste à savoir si les trajectoires dont nous venons de supposer l'existence se présentent véritablement.

La réponse à cette question est affirmative; nous allons constater, en effet, que les géodésiques fermées et leurs asymptotes ne peuvent constituer à elles seules la totalité des géodésiques qui restent à distance finie.

Soit O un point que nous supposerons, pour fixer les idées, situé dans la partie finie de la surface; nous désignerons par E l'ensemble formé par les directions initiales des lignes géodésiques qui en partent ([1]) et ne s'éloignent pas indéfiniment.

D'après ce que nous avons vu précédemment, cet ensemble est formé par les lignes qui ne sont intérieures à aucun des angles que nous avons désignés (**48**) par la lettre $\mathcal{A}$, les côtés de ces angles faisant partie de l'ensemble.

Je dis qu'un tel ensemble est *parfait :*

1° *Toute ligne qui appartient à l'ensemble* E *appartient aussi à son dérivé.*

En effet, si une géodésique L appartenant à l'ensemble E sert de côté à un angle tel que toutes les directions intérieures à cet angle soient celles de géodésiques qui s'éloignent indéfiniment, cet angle ne peut être qu'un angle $\mathcal{A}$. Mais alors, de l'autre côté de L se trouveront des lignes appartenant à l'ensemble E : le contraire exigerait, en effet, que L serve de côté commun à deux angles $\mathcal{A}$ différents, ce qui ne peut être (**48**).

2° *Toute ligne qui n'appartient pas à l'ensemble* E *n'appartient pas à son ensemble dérivé.*

C'est ce que nous avons remarqué au n° **47**.

Donc l'ensemble E est bien parfait et, comme tel, *de seconde puissance.*

Or les asymptotes menées par le point O aux différentes géodésiques fermées forment un ensemble numérable.

Donc l'existence des géodésiques de la troisième catégorie est démontrée.

([1]) Il est clair que nous adoptons ici la convention du n° **41**.

57. La génération de l'ensemble E rappelle évidemment celle de ces ensembles rencontrés par M. Poincaré, introduits plus explicitement dans la Science par M. Bendixson, puis étudiés par M. Cantor et qui, tout en étant parfaits, ne sont *condensés* dans aucun intervalle. Les angles $\mathfrak{A}$ jouent ici le rôle des intervalles nommés (a_ν, b_ν) par M. Cantor (¹).

Nous allons montrer que l'ensemble E appartient effectivement à la catégorie dont nous venons de parler.

Pour cela, soit P un second point quelconque de la surface et désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble des directions initiales des différentes géodésiques qui vont du point O au point P.

Je dis que l'ensemble $\mathcal{E}$ a pour dérivé E.

Tout d'abord, une géodésique L, issue du point O et qui s'éloigne à l'infini sur une nappe quelconque $\mathfrak{N}_i$, n'appartient pas au dérivé de $\mathcal{E}$. Prenons, en effet, sur cette ligne un arc déterminé $Om = l$: une géodésique suffisamment voisine de L, mais non coïncidente avec elle, ne passera, assurément pas, par le point P, de manière que l'arc OP soit inférieur à l. Mais le point P ne peut pas non plus être l'extrémité d'un arc supérieur à l, porté sur une géodésique voisine de L, si l'arc l a été pris assez grand pour que son extrémité m soit sur la nappe $\mathfrak{N}_i$ et (dans le cas où le point P serait également sur cette nappe) à une distance de γ_i plus grande que celle de P.

Nous avons maintenant à démontrer la conclusion réciproque, à savoir que si la géodésique L est tout entière à distance finie, il existe des géodésiques faisant avec elle, en O, un angle aussi petit qu'on veut et passant par le point P.

Supposons d'abord que L soit asymptote à une géodésique fermée $\mathfrak{L}$, d'espèce $\mathfrak{C}$ (ce cas comprenant celui où L serait elle-même une géodésique fermée). L est la limite de géodésiques joignant O à un point déterminé quelconque m de $\mathfrak{L}$ et dérivant de l'une d'entre elles par un nombre de plus en plus grand de circulations du point m suivant $\mathfrak{L}$: soit $L^{(k)}$ la géodésique Om correspondant à k circulations et dont la longueur λ_k augmente indéfiniment avec k. Imaginons que le point m se rende en P par un chemin déterminé une fois pour toutes et de lon-

(¹) *Acta mathem.*, t. IV, p. 381; 1884.

gueur l : la géodésique OP qui, dans ce déplacement, dérive par continuité de $L^{(k)}$, fait avec celle-ci (**40**) un angle inférieur à $\frac{l}{\lambda_k - l}$. Elle est donc infiniment voisine de $L^{(k)}$ et, par suite, de L pour k infini.

La conclusion demandée est ainsi établie si L est fermée ou asymptote à une géodésique fermée. Dès lors, elle s'étend d'elle-même aux géodésiques de troisième catégorie, puisque celles-ci sont des limites de lignes telles que la ligne L qui vient d'être considérée.

Le théorème est donc complètement démontré.

58. Les considérations précédentes nous permettent de prouver, comme nous l'avons annoncé, que l'ensemble E, quoique parfait, n'est condensé dans aucun intervalle : c'est-à-dire que, près de toute ligne appartenant à cet ensemble, se trouvent une infinité de lignes qui n'y appartiennent point.

Il suffit en effet, dans le raisonnement précédent, de prendre le point P sur une nappe infinie, puisque toutes les géodésiques qui passent par un tel point s'éloignent indéfiniment.

Il est donc bien prouvé que *l'ensemble* E *est un ensemble parfait, qui n'est nulle part continu.*

Mais de ce que nous venons de dire se dégagent des conclusions plus étendues à certains égards. Nous voyons, en effet :

1° *Que, dans le voisinage d'une ligne* L *faisant partie de l'ensemble* E, *on trouve des géodésiques allant à l'infini sur telle nappe infinie qu'on veut,* puisque le point P peut être pris sur n'importe quelle nappe infinie ;

2° Que, dans le voisinage de cette même ligne, existent aussi d'autres lignes restant à distance finie, en particulier *des asymptotes à toutes les géodésiques* γ_i, puisque ces asymptotes servent de côtés aux angles $\mathcal{A}$, *et des géodésiques de troisième catégorie :* celles-ci sont, en effet, distribuées dans tout angle contenant des éléments de E, puisque les asymptotes aux géodésiques fermées ne forment qu'une partie numérable de l'ensemble parfait E.

En un mot, tandis que toute géodésique qui s'éloigne à l'infini est entouré d'un continuum de géodésiques jouissant de la même propriété, au contraire, *tout changement, si minime qu'il soit, apporté* *à la direction initiale d'une géodésique qui reste à distance finie suffit pour amener une variation absolument quelconque dans l'allure finale de la courbe,* la géodésique troublée pouvant affecter n'importe laquelle des formes énumérées précédemment.

---

59. Les circonstances que nous venons de rencontrer se retrouveront-elles dans d'autres problèmes de Mécanique? Se présenteront-elles, en particulier, dans l'étude des mouvements des corps célestes? C'est ce qu'on ne saurait affirmer. Il est probable, cependant, que les résultats obtenus dans ces cas difficiles seront analogues aux précédents, au moins par leur complexité.

S'il en était ainsi, il importe de remarquer que l'un des principaux problèmes de la Mécanique céleste, la question de la stabilité du système du monde, même sous son aspect théorique (c'est-à-dire réduite au mouvement de n points matériels s'attirant suivant la loi de Newton), cesserait d'avoir un sens.

Certes, lorsqu'un système se meut sous l'action de forces données et que les conditions initiales du mouvement ont des valeurs *données, au sens mathématique du mot,* le mouvement ultérieur et, par conséquent, la manière dont il se comporte, lorsque t augmente indéfiniment, sont par cela même connus. Mais, dans les problèmes astronomiques, il ne saurait en être ainsi : les constantes qui définissent le mouvement sont données *physiquement,* c'est-à-dire avec des erreurs dont l'amplitude se réduit à mesure que la puissance de nos moyens d'observation augmente, mais qu'il est impossible d'annuler.

Si l'on ne suit les trajectoires que pendant un temps déterminé, quelconque d'ailleurs, on peut imaginer que les erreurs sur les données initiales aient été rendues assez minimes pour ne pas altérer sensiblement la forme de ces trajectoires pendant le susdit intervalle de temps. Ce qui précède nous montre qu'il n'est en aucune façon légitime d'en tirer une conclusion analogue relativement à l'allure *finale* de ces mêmes courbes. Celle-ci peut fort bien dépendre (et dépend, en effet, dans les problèmes relativement simples auxquels est consacré le présent Mémoire) de propriétés discontinues, *arithmétiques* des constantes d'intégration.

60. De quelle nature sont ces propriétés? Pour nous borner aux cas que nous avons traités, dans quelle voie doit-on chercher à compléter la discussion que nous avons donnée des géodésiques sur les surfaces à courbures opposées et à connexion multiple? La première question qui se pose à cet égard est la suivante :

Nous avons vu que les géodésiques issues d'un point quelconque O sont :

1° Les géodésiques fermées ou leurs asymptotiques, dont chacune est caractérisée par une espèce $\mathcal{E}$ de contours fermés, un type $\mathcal{T}$ de lignes joignant le point O à la géodésique fermée d'espèce $\mathcal{E}$;

2° Les géodésiques qui vont à l'infini, distribuées dans les différents angles $\mathcal{A}$: chacun de ces angles est caractérisé par une nappe infinie et un type de lignes menées de O à la géodésique fermée correspondant à cette nappe;

3° Les géodésiques de la troisième catégorie, qui sont des limites de celles que nous avons nommées en premier lieu.

Il y aurait lieu d'étudier l'*ordre circulaire* dans lequel ces lignes sont rangées autour de O.

Il est d'ailleurs clair qu'il suffit de trouver la distribution des géodésiques de la première sorte, car entre celles-là viendront évidemment se placer d'eux-mêmes les angles $\mathcal{A}$ d'une part, les géodésiques de la troisième catégorie de l'autre.

61. L'étude de cet ordre circulaire est d'ailleurs simplifiée par cette circonstance que *cet ordre ne dépend pas de la position du point* O.

En effet, lorsque ce point se déplace, deux lignes de symboles différents ne peuvent coïncider et, par conséquent, leur ordre reste invariable.

Il résulte presque évidemment de ce fait que, si deux symboles correspondent à deux géodésiques infiniment voisines, issues d'un point O, ils donneront encore deux géodésiques infiniment voisines en un second point O'; et, effectivement, l'on peut démontrer directe-ment que les asymptotes menées du point O′ (suivant le type d'un chemin OO′ déterminé) à deux géodésiques très voisines issues du point O, sont aussi très voisines l'une de l'autre.

Supposons maintenant que le point O revienne à sa position primitive après s'être déplacé le long d'un certain contour fermé non réductible. Notre ordre circulaire ne sera pas altéré par cette opération, qui consiste à multiplier tous les types $\mathfrak{S}$ envisagés tout à l'heure par celui du contour en question (considéré comme joignant le point O à lui-même).

Ainsi l'on devra trouver, entre les symboles énumérés en 1° (numéro précédent), *un ordre circulaire qui ne change pas lorsqu'on multiplie tous les types par un même facteur quelconque.* La détermination générale des ordres jouissant de cette propriété est, par conséquent, un problème dont la solution importerait à notre objet.

62. Quant à la méthode que nous avons employée, on peut la considérer comme une application de deux principes posés par M. Poincaré, dans ses études sur les équations différentielles.

En premier lieu, nos conclusions mettent en évidence, une fois de plus, le rôle fondamental que joue dans ces questions l'*Analysis situs*. Qu'il soit absurde d'étudier des courbes intégrales tracées dans un domaine déterminé sans faire entrer en ligne de compte la forme même de ce domaine, c'est une vérité sur laquelle il peut sembler inutile d'insister longuement. Cette vérité est cependant restée insoupçonnée jusqu'aux travaux de M. Poincaré.

En second lieu, l'importance que ce géomètre a reconnue aux solutions périodiques, dans son *Traité de Mécanique céleste*, s'est manifestée également dans la question actuelle. Ici encore, elles se sont montrées « la seule brèche par laquelle nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable (¹). »

D'une façon plus précise, elles ont joué pour nous le rôle d'une sorte de système de coordonnées auquel nous avons rapporté toutes les autres géodésiques.

(¹) *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 82.