JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MATHY

De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 231-237.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__231_0>

De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène.

PAR M. MATHY.

I.

Pour résoudre cette question, il faut d'abord calculer *les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde homogène sur un point de sa surface;* elles se déduisent des valeurs relatives au point extérieur à l'ellipsoïde dans lesquelles on fait la limite supérieure de l'intégration $= 1$, car pour un point de la surface $a' = a$, $b' = b$, $c' = c$, il est évident qu'à la limite inférieure zéro l'intégrale est elle-même zéro; on peut alors écrire

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{3Mmx}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left[\zeta(v+\omega_3) - \eta_3 + e_3 v\right]^{pv-e_3=a^2}, \\ Y &= \frac{3Mmy}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\left[\zeta(v+\omega_2) - \eta_2 + e_2 v\right]^{pv-e_2=b^2}, \\ Z &= \frac{3Mmz}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\left[\zeta(v+\omega_1) - \eta_1 + e_1 v\right]^{pv-e_1=c^2}. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions peuvent être simplifiées.

D'abord la formule d'addition des arguments dans la formule ζ devient, au cas où l'un des arguments est ω_α,

$$\begin{aligned} \zeta(v+\omega_\alpha) &= \zeta(v) + \zeta\omega_\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{p'v - p'\omega_\alpha}{pv - p\omega_\alpha} \\ &= \zeta v + \eta_\alpha + \frac{1}{2}\,\frac{p'v}{pv - e_\alpha}. \end{aligned}$$

D'autre part, les limites supérieures dans les intégrales sont égales; ainsi dans X, de $e_3 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2)$ et de $pv - e_3 = a^2$, on déduit $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, valeur identique pour Y et Z.

Les égalités (1) se changent en (2)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{3Mmx}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \left(\zeta v + \frac{1}{2} \frac{p'v}{pv - e_3} + e_3 v \right), \\ Y &= \frac{3Mmy}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left(\zeta v + \frac{1}{2} \frac{p'v}{pv - e_2} + e_2 v \right), \\ Z &= \frac{3Mmz}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left(\zeta v + \frac{1}{2} \frac{p'v}{pv - e_1} + e_1 v \right), \end{aligned} \right.$$

avec la valeur de

$$pv = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2),$$
$$p'v = -2abc.$$

Ces formules permettent de retrouver celles qui conviennent aux deux ellipsoïdes de révolution.

Dans le cas de l'ellipsoïde de révolution aplati $a = b$, d'où $k = 0$, il y a dégénérescence des fonctions elliptiques en fonctions circulaires.

Les formules à appliquer sont les suivantes :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & g_2 = 3e_1^2, \qquad g_3 = e_1^3, \\ & pv = -\frac{3}{2}\frac{g_3}{g_2} + \frac{9}{2}\frac{g_3}{g_2} \frac{1}{\sin^2 v \sqrt{\frac{9g_3}{2g_2}}} = -\frac{e_1}{2} + \frac{3e_1}{2} \frac{1}{\sin^2 v \sqrt{\frac{3e_1}{2}}}, \\ & \zeta v = \frac{e_1}{2} v + \sqrt{\frac{3e_1}{2}} \cot v \sqrt{\frac{3e_1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Elles conduisent, dans le cas présent, à

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & a^2 = (a^2 - c^2) \frac{1}{\sin^2 v \sqrt{a^2 - c^2}}, \\ & v\sqrt{a^2 - c^2} = \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}, \\ & \zeta v = \frac{e_1}{2} v + c. \end{aligned} \right.$$

Portées dans l'expression de Z, ces valeurs la transforment successivement en

$$Z = \frac{3Mmz}{(a^2-c^2)^2}\left(\frac{e_1}{2}v + c - \frac{a^2}{c} + e_1 v\right),$$

$$Z = \frac{3Mmz}{(a^2-c^2)^2}\left[(a^2-c^2)v + \frac{c^2-a^2}{c}\right],$$

$$(6) \qquad Z = -\frac{3Mmz}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c} - \operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right).$$

Elle est identique à l'intégrale directe.

Y et Z se présentent d'abord sous la forme $\frac{0}{0}$, à cause du facteur $a-b$; il suffit d'appliquer le procédé bien connu des dérivées pour faire apparaître leurs vraies valeurs.

Dans l'ellipsoïde de révolution allongé $b=c$, il en résulte $k=1$; les fonctions elliptiques dégénèrent en fonctions hyperboliques. On se sert alors de

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} pu &= e_3 - \frac{3}{2}e_3\left(\frac{e^v+e^{-v}}{e^v-e^{-v}}\right)^2 \\ \zeta u &= \frac{e_3}{2}u - \sqrt{-\frac{3}{2}e_3}\,\frac{e^{-v}+e^v}{e^{-v}-e^v} \end{aligned}\right. \qquad v = u\sqrt{-\frac{3}{2}e_3},$$

qui deviennent, avec les hypothèses actuelles,

$$(8) \qquad \left\{\begin{aligned} a^2 &= (a^2-c^2)\left(\frac{e^v+e^{-v}}{e^v-e^{-v}}\right)^2, \\ v &= \log\left(\frac{a+\sqrt{a^2-c^2}}{c}\right), \\ \zeta u &= \frac{e_3}{2}u + a, \end{aligned}\right.$$

et permettent par substitution de vérifier les formules applicables à ce cas particulier.

II.

De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène tournant uniformément autour d'un axe fixe et dont les molécules sont soumises à leurs attractions mutuelles suivant la loi de la gravitation.

Admettons que Oz soit l'axe de rotation de la masse fluide dans son état d'équilibre relatif; d'après les formules (2) du Chapitre précédent, en désignant par

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{3Mm}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-e_3} + e_3 v\right),\\ Q &= \frac{3Mm}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-e_2} + e_2 v\right),\\ R &= \frac{3Mm}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv-e_1} + e_1 v\right),\\ n &= \text{vitesse angulaire autour de l'axe de rotation,} \end{aligned}\right.$$

nous savons que l'équation de la surface libre du liquide est

$$(2)\qquad z^2 + \frac{Q-n^2}{R}y^2 + \frac{P-n^2}{R}x^2 = \text{const.};$$

pour qu'elle coïncide avec celle de l'ellipsoïde

$$(3)\qquad z^2 + \frac{c^2}{b^2}y^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 = c^2,$$

il faut que

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} Q - n^2 &= \frac{Rc^2}{b^2},\\ P - n^2 &= \frac{Rc^2}{a^2}. \end{aligned}\right.$$

On en déduit $Q - P = \frac{Rc^2}{a^2b^2}(a^2-b^2)$; remplaçant P, Q et R par leurs valeurs (1), on obtient

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\zeta v + \frac{1}{2}\dfrac{p'v}{pv - e_2} + e_2 v}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} - \frac{\zeta v + \frac{1}{2}\dfrac{p'v}{pv - e_3} + e_3 v}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ &\quad = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2 b^2}\,\frac{\zeta v + \frac{1}{2}\dfrac{p'v}{pv - e_1} + e_1 v}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}. \end{aligned}\right.$$

Cette condition doit exister pour $pv = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$.

ζv ne renferme pas de terme constant; on peut déduire ζv de l'expression (5), et en dérivant par rapport à v, on doit retrouver pv, en quantité déterminée; cela revient à dériver l'équation (5) et à remplacer pv et ses dérivées par leurs valeurs pour reconnaître si la condition est satisfaite identiquement.

Il suffit de calculer un des termes : soit

$$\frac{-pv + \frac{1}{2}\dfrac{p''v(pv - e_2) - p'^2 v}{(pv - e_2)^2} + e_2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}.$$

Or, de

$$p''v = 6p^2 v - \frac{1}{2} g_2,$$

on a

$$\begin{aligned} p''v &= \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)^2 - \frac{1}{3}\left[(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2\right] \\ &= 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2). \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\frac{1}{2}\,\frac{p''v(pv - e_2) - p'^2 v}{(pv - e_2)^2} = \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 - a^2 c^2}{b^2};$$

d'où

$$\frac{-pv + \frac{1}{2}\dfrac{p''v(pv - e_2) - p'v^2}{(pv - e_2)^2} + e_2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} = -\frac{1}{b^2}.$$

Alors, on trouve facilement que l'équation (5) dérivée conduit, avec

$p v = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$, à l'identité

$$(6) \qquad -\frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{c^2(a^2 - b^2)}{a^2 b^2} \times -\frac{1}{c^2}.$$

Il reste à calculer la vitesse angulaire déduite de (4)

$$(7) \qquad n^2 = \frac{Q b^2 - R c^2}{b^2} = \frac{P a^2 - R c^2}{a^2},$$

ou encore

$$n^2 = \frac{3Mm}{b^2}\,\frac{-b^2(a^2-c^2)\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_2} + e_2 v\right) - c^2(a^2-b^2)\left(\zeta v + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_1} + e_1 v\right)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)(b^2-c^2)},$$

$$n^2 = \frac{3Mm}{b^2}\,\frac{\zeta v(2b^2c^2 - a^2b^2 - a^2c^2) + abc(2a^2 - b^2 - c^2) - v[e_2 b^2(a^2-c^2) + e_1 c^2(a^2-b^2)]}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)}.$$

Le signe du numérateur dépend de $2a^2 - b^2 - c^2$ qui est essentiellement positif, car $a^2 > b^2 > c^2$.

L'équilibre relatif est impossible quand la rotation se fait autour d'un autre axe; ainsi, si elle avait lieu autour du grand axe

$$(8) \qquad n^2 = \frac{Q b^2 - P a^2}{b^2} = \frac{R c^2 - P a^2}{c^2}$$

et autour de l'axe moyen

$$(9) \qquad n^2 = \frac{R c^2 - Q b^2}{c^2} = \frac{P a^2 - Q b^2}{a^2}.$$

Les valeurs de n, tirées de (8) ou de (9), sont imaginaires; on le démontre en les comparant à (7).

On peut conclure que l'ellipsoïde homogène, à trois axes inégaux, dont les molécules sont soumises à leurs attractions mutuelles, devient une figure d'équilibre relatif quand il tourne autour de son plus petit axe avec la vitesse angulaire uniforme et unique dépendant de la forme de l'ellipsoïde.

Des ellipsoïdes de révolution.

En faisant $a = b$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{aligned} pv &= \tfrac{1}{3}(2a^2 + c^2),\\ p'v &= -2a^2c,\\ e_1 &= \tfrac{2}{3}(a^2 - c^2); \qquad e_2 = e_3 = -\tfrac{1}{3}(a^2 - c^2) = -\tfrac{1}{2}e_1,\end{aligned}\right.$$

l'équation (5) se transforme en

$$(10) \qquad 2(a^2 - c^2)\left(\zeta v - c - \frac{e_1}{2}v\right) = 0.$$

Or, on satisfait à cette relation par :

1° $a = c$, ce qui donne la sphère;

2° $\zeta v = c + \frac{e_1}{2}v$, ce qui convient à l'ellipsoïde de révolution aplati d'après la formule (4) du précédent Chapitre.

Quant à la vitesse angulaire correspondante, elle devient

$$(11) \qquad n^2 = \frac{Qb^2 - Rc^2}{b^2} = \frac{3Mmc^2}{a^2(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} - \text{arc tang}\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right].$$

En prenant OX comme axe de rotation, l'équation de condition serait, après y avoir fait $b = c$,

$$(12) \qquad (a^2 - c^2)\left(\zeta v - a - \frac{e_3}{2}v\right) = 0.$$

Mais la vitesse n, ayant alors pour expression

$$n^2 = \frac{Qb^2 - Pa^2}{b^2} = -\frac{3Mma^2}{c^2}\left[\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} - \log\frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c}\right],$$

démontre que l'ellipsoïde de révolution allongé ne peut être une figure d'équilibre relatif.