JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

ERNEST DUPORCQ

Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 4 (1898), p. 121-136.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1898_5_4__121_0>

Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques;

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Ingénieur des Télégraphes.

1. Dans une Note récemment présentée à l'Académie des Sciences (¹), nous avons énoncé les principaux résultats auxquels nous sommes parvenus dans l'étude du déplacement d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques.

Ce problème n'avait été étudié jusqu'ici que dans le cas particulier où les points de la droite mobile restent sur des sphères ayant leurs centres dans un même plan, par M. Darboux et par M. Mannheim (²). On peut résumer ainsi les résultats obtenus par ces deux éminents géomètres :

1° *Si quatre points d'une droite mobile restent sur des sphères dont les centres sont dans un même plan, tous les points de cette droite restent aussi sur des sphères, dont les centres ont pour lieu une conique; par suite, deux points, réels ou imaginaires, de la droite décrivent des courbes planes.*

(¹) E. DUPORCQ, *Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques* (*Comptes rendus*, séance du 15 novembre 1897).

(²) MANNHEIM, *Principes et développ. de Géom. cin.*, p. 180.

2° *Dans le mouvement à deux paramètres d'une droite dont trois points se déplacent sur trois sphères dont les centres sont en ligne droite, tous les points de la droite décrivent des sphères ayant leurs centres en ligne droite. Un point de la droite décrit un plan.*

Ces résultats rappelés, nous allons aborder l'étude du problème général que nous avons en vue, en commençant par quelques remarques géométriques.

I.

2. Soient, dans l'espace, D_1, D_2, D_3 trois positions d'une droite D, sur lesquelles m_1, m_2 et m_3 sont les positions d'un certain point quelconque m de la droite D. Les plans normaux aux segments m_2m_3, m_3m_1 et m_1m_2 en leurs milieux passent respectivement, comme l'on sait, par trois droites fixes, Δ_{23}, Δ_{31} et Δ_{12}, quel que soit le point m sur la droite D. L'axe de la circonférence $(m_1m_2m_3)$ rencontrant évidemment ces trois droites, il a pour lieu, quand le point m décrit la droite D, l'hyperboloïde $H_{1.2.3}$ qui admet les trois droites Δ pour génératrices.

Soit maintenant D_4 une quatrième position de la droite D; considérons les hyperboloïdes $H_{1.2.3}$ et $H_{1.2.4}$: ils ont en commun la droite $\Delta_{1.2}$, et le reste de leur intersection est une cubique gauche Γ : celle-ci est le lieu des centres des sphères $(m_1m_2m_3m_4)$ (¹).

Soit enfin D_0 une nouvelle position de la droite D : la cubique gauche Γ rencontre l'hyperboloïde $H_{1.2.0}$ en six points, dont deux appartiennent à la droite $\Delta_{1.2}$; les quatre autres points sont chacun le centre d'une sphère contenant les cinq positions d'un même point de la droite D. Par suite :

Étant données cinq positions d'une même droite, il existe en général quatre points de cette droite dont les cinq positions sont sur une même sphère.

(¹) On obtient, comme cas particulier, le théorème de M. Haag, sur le lieu des centres des sphères osculatrices aux trajectoires des points d'une droite mobile.

Il en résulte que :

Si cinq points d'une droite décrivent des trajectoires sphériques, il en est de même de tous ses points.

3. Pour que tous les points de la droite D aient leurs cinq positions sur une même sphère, il faut et il suffit évidemment que l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$ contienne une infinité de points de la cubique Γ, soit qu'il la contienne tout entière, soit que, celle-ci se décomposant en une conique et une droite, l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$ contienne seulement cette conique ou cette droite. Nous en déduisons immédiatement la propriété suivante :

Si tous les points d'une droite se déplacent sur des sphères, le lieu des centres de ces sphères est une cubique gauche, une conique ou une droite.

Ces deux derniers cas sont ceux que nous avons rappelés précédemment : c'est donc du premier seulement que nous allons nous occuper.

II.

4. Nous allons donc rechercher à quelles conditions doivent être assujetties quatre positions données D_1, D_2, D_3 et D_4 de la droite D, pour qu'on puisse trouver une infinité de positions D_0 de cette droite, telles que l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$, qui contient évidemment la droite $\Delta_{1.2}$, passe aussi par tous les autres points communs aux deux hyperboloïdes $H_{1.2.3}$ et $H_{1.2.4}$.

Nous pouvons toujours supposer que la droite D est l'arête Oz d'un trièdre trirectangle $Oxyz$, et qu'elle est entraînée par un certain déplacement de ce trièdre. Soit, en outre, $\omega\xi\eta\zeta$ un trièdre trirectangle fixe dans l'espace. Désignons par x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport aux axes mobiles, et par ξ, η, ζ les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes. On peut toujours poser

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a\xi + a'\eta + a''\zeta - p, \\ y = b\xi + b'\eta + b''\zeta - q, \\ z = c\xi + c'\eta + c''\zeta - r, \end{cases}$$

$a, a', \ldots, c''$ désignant les neuf cosinus directeurs de trois directions rectangulaires. Les coordonnées du point O par rapport aux axes fixes sont

$$(2)\qquad \begin{cases} ap + bq + cr = l, \\ a'p + b'q + c'r = m, \\ a''p + b''q + c''r = n. \end{cases}$$

Posons, en outre,

$$p^2 + q^2 + r^2 = l^2 + m^2 + n^2 = h^2,$$
$$h^2 - 2(l\xi + m\eta + n\zeta) = \mathrm{P}.$$

Nous affecterons des indices 1, 2, 3 et 4 les coordonnées x, y, z et les paramètres correspondant aux positions D_1, D_2, D_3 et D_4, les lettres sans indice correspondant aux positions D_0, qui satisfont au problème proposé, supposé possible.

Ceci posé, recherchons quelle est, par rapport aux axes fixes, l'équation de l'hyperboloïde $H_{1.2.3}$; soit α un point de cette surface : il est, d'après la définition de $H_{1.2.3}$, équidistant des trois positions m_1, m_2 et m_3 d'un certain point m de la droite D; par suite, si l'on considère le mouvement inverse de celui du trièdre $Oxyz$, et si l'on désigne par α_1, α_2 et α_3 les trois positions qu'occupe alors le point α par rapport à ce trièdre, supposé immobile, il existera une sphère passant par les points α_1, α_2 et α_3, et ayant son centre sur Oz. On aura donc

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & z_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & z_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si, dans cette équation, nous remplaçons x, y, z par leurs valeurs (1) en fonction de ξ, η, ζ, nous obtiendrons l'équation cherchée de l'hyperboloïde $H_{1.2.3}$. En tenant compte des notations (2), elle se réduit à

$$H_{1.2.3} = \begin{vmatrix} P_1 & z_1 & 1 \\ P_2 & z_2 & 1 \\ P_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Or, nous voulons que l'hyperboloïde $H_{0.1.2}$ passe par tous les points communs aux hyperboloïdes $H_{1.2.3}$ et $H_{1.2.4}$; nous devons donc pouvoir trouver deux nombres λ_3 et λ_4, tels que l'on ait identiquement

$$H_{0.1.2} \equiv \lambda_3 H_{1.2.3} + \lambda_4 H_{1.2.4},$$

ce qui s'écrit

$$\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P - \lambda_3 P_3 - \lambda_4 P_4 \\ z_1 & z_2 & z - \lambda_3 z_3 - \lambda_4 z_4 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda_3 \quad - \lambda_4 \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Il faut et il suffit, pour cela, que l'on puisse déterminer deux nouveaux paramètres numériques λ_1 et λ_2 ([1]), tels qu'on ait les

---

([1]) Ce résultat n'est pas tout à fait évident : la question revient à montrer que X_1, X_2, Y_1 et Y_2 étant quatre formes linéaires données, les formes linéaires les plus générales X et Y, telles que l'on ait identiquement

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X \\ Y_1 & Y_2 & Y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

sont fournies par les égalités

$$(2) \qquad X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, \qquad Y = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2,$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres *numériques* dont la somme est égale à 1. La relation (1) peut, en effet, s'écrire

$$\frac{X - X_2}{Y - Y_2} \equiv \frac{X_1 - X_2}{Y_1 - Y_2}.$$

A moins que les coefficients des variables ne soient proportionnels dans les identités

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4,$$
$$z = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_4 z_4,$$
$$P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 + \lambda_4 P_4,$$

qui reviennent aux suivantes :

(1) $$1 = \sum_1^4 \lambda_i,$$

(2) $$c = \sum_1^4 \lambda_i c_i, \qquad c' = \sum_1^4 \lambda_i c'_i, \qquad c'' = \sum_1^4 \lambda_i c''_i.$$

(3) $$l = \sum_1^4 \lambda_i l_i, \qquad m = \sum_1^4 \lambda_i m_i, \qquad n = \sum_1^4 \lambda_i n_i.$$

(4) (5) $$r = \sum_1^4 \lambda_i r_i, \qquad h^2 = \sum_1^4 \lambda_i h_i^2.$$

On doit, de plus, avoir la relation

(6) $$c^2 + c'^2 + c''^2 = 0.$$

En portant dans les équations (4), (5) et (6) les valeurs de c, c', c'', l, m, n fournies par (2) et (3), et en y joignant l'équation (1), on aura quatre équations en λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4; elles devront avoir une infinité de systèmes de solutions communes, et, à chacun de ces sys-

deux termes de la seconde fraction, on devra donc avoir, λ_1 désignant un *nombre* quelconque,

$$X - X_2 = \lambda_1 (X_1 - X_2), \qquad Y - Y_2 = \lambda_1 (Y_1 - Y_2),$$

ce qui revient aux égalités (2). Or, dans le cas particulier qui nous occupe, si l'on suppose que les coefficients des variables ξ, η et ζ sont proportionnels dans les formes $P_1 - P_2$ et $z_1 - z_2$, quel que soit le choix du point O sur la droite D, et quelles que soient les positions D_1 et D_2 occupées par cette droite dans son déplacement, il en résulte, ou qu'un certain point de cette droite doit rester fixe, ou que toutes les positions qu'elle occupe sont parallèles : ce sont évidemment des cas dont nous ne tenons pas compte dans notre étude.

tèmes correspondra une position D_0 fournie par les équations (2) et (3). L'équation (1) permet de ramener la considération de ces quatre équations en λ à celle de trois équations homogènes : les équations (5), (6) et (4) peuvent, en effet, s'écrire

$$(5') \qquad l^2 + m^2 + n^2 = \sum_1^4 \lambda_i (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2),$$

$$(6') \qquad c^2 + c'^2 + c''^2 = \sum_1^4 \lambda_i (c_i^2 + c_i'^2 + c_i''^2),$$

$$(4') \qquad cl + c'm + c''n = \sum_1^4 \lambda_i (c_i l_i + c_i' m_i + c_i'' n_i).$$

Les relations (1), (2) et (3) permettent de mettre ces équations sous les formes homogènes suivantes :

$$\left(\sum_1^4 \lambda_i l_i\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i m_i\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i n_i\right)^2 = \left(\sum_1^4 \lambda_i\right)\left[\sum_1^4 \lambda_i (l_i^2 + m_i^2 + n_i^2)\right],$$

$$\left(\sum_1^4 \lambda_i c_i\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i'\right)^2 + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i''\right)^2 = \left(\sum_1^4 \lambda_i\right)\left[\sum_1^4 \lambda_i (c_i^2 + c_i'^2 + c_i''^2)\right],$$

$$\left(\sum_1^4 \lambda_i c_i\right)\left(\sum_1^4 \lambda_i l_i\right) + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i'\right)\left(\sum_1^4 \lambda_i m_i\right) + \left(\sum_1^4 \lambda_i c_i''\right)\left(\sum_1^4 \lambda_i n_i\right)$$
$$= \left(\sum_1^4 \lambda_i\right)\left[\sum_1^4 \lambda_i (c_i l_i + c_i' m_i + c_i'' n_i)\right],$$

qui se réduisent à

$$(7) \quad \left\{\begin{aligned} 0 &= Q = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(l_i - l_j)^2 + (m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2], \\ 0 &= Q' = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(c_i - c_j)^2 + (c_i' - c_j')^2 + (c_i'' - c_j'')^2], \\ 0 &= Q'' = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(c_i - c_j)(l_i - l_j) \\ &\qquad + (c_i' - c_j')(m_i - m_j) + (c_i'' - c_j'')(n_i - n_j)]. \end{aligned}\right.$$

Il serait facile de former les conditions pour que ces trois équations aient une infinité de solutions communes; mais, pour en tirer des conclusions, il est préférable d'interpréter géométriquement ces équations elles-mêmes.

III.

6. Le point m_0, situé sur la droite D_0 à la distance ρ du point O, a pour coordonnées

$$\alpha = l + c\rho, \qquad \beta = m + c'\rho, \qquad \gamma = n + c''\rho,$$

et, en vertu des relations (2) et (3) du paragraphe précédent, on a

$$\alpha = \sum_1^4 \lambda_i \alpha_i, \qquad \beta = \sum_1^4 \lambda_i \beta_i, \qquad \gamma = \sum_1^4 \lambda_i \gamma_i.$$

Les paramètres λ sont donc les *coordonnées barycentriques* du point m_0 par rapport au tétraèdre $m_1 m_2 m_3 m_4$. Or, le point m_0 devant rester sur la sphère circonscrite à ce tétraèdre, les paramètres λ devront satisfaire à l'*équation barycentrique* de cette sphère, rapportée au tétraèdre en question. Ils doivent, de même, satisfaire aux équations barycentriques analogues correspondant aux différents points de la droite D. Toutes ces équations barycentriques, considérées comme rapportées au même tétraèdre $m_1 m_2 m_3 m_4$, représentent des quadriques circonscrites à ce tétraèdre, qui doivent donc avoir une infinité de points communs, dont le lieu sera justement la trajectoire du point m. Nous pouvons d'ailleurs supposer que les quatre points m_1, m_2, m_3, m_4 ne sont pas dans un même plan, puisque nous avons écarté le cas où tous les points de la droite D décrivent des courbes planes : il en résulte que la courbe commune aux quadriques considérées ne peut être plane, et, comme elle est sur une surface à génératrices imaginaires, elle ne peut être qu'une biquadratique gauche : les quadriques envisagées doivent donc former un faisceau linéaire. Or l'équation barycentrique de la sphère $(m_1 m_2 m_3 m_4)$

$$(1) \qquad 0 = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j [(\alpha_i - \alpha_j)^2 + (\beta_i - \beta_j)^2 + (\gamma_i - \gamma_j)^2]$$

peut s'écrire, en tenant compte des relations (7)

$$(2) \qquad Q\rho^2 + 2Q''\rho + Q' = 0.$$

Nous retrouvons bien que les trois équations (7) doivent avoir une infinité de solutions communes, et l'analyse précédente nous a prouvé que cette condition était suffisante.

Nous pouvons, de plus, énoncer le résultat suivant :

Si tous les points d'une droite mobile se déplacent sur des sphères dont les centres appartiennent à une cubique gauche, ces points décrivent, en général, des biquadratiques gauches.

7. Supposons donc que l'on ait

$$Q'' \equiv \sigma Q + \sigma' Q'.$$

L'équation (2) de la sphère $(m_1 m_2 m_3 m_4)$ peut s'écrire

$$Q(\rho^2 + 2\sigma\rho) + Q'(2\sigma'\rho + 1) = 0.$$

Considérons les deux valeurs de ρ données par l'équation

$$(1) \qquad \theta(\rho^2 + 2\sigma\rho) + 2\sigma'\rho + 1 = 0;$$

pour ces deux valeurs, l'équation de la sphère prend la même forme

$$Q - \theta Q' = 0.$$

Il en résulte que, si m et m' sont les deux points de la droite D fournis par ces deux valeurs de ρ, les tétraèdres

$$m_1 m_2 m_3 m_4 \quad \text{et} \quad m'_1 m'_2 m'_3 m'_4$$

ont leurs arêtes correspondantes proportionnelles, puisque l'équation (1) n° **6** peut s'écrire

$$o = \sum_1^4 \lambda_i \lambda_j \overline{m_i m_j}^2 .$$

Ces tétraèdres sont donc semblables.

Réciproquement, si, pour deux valeurs de ρ, l'équation homogène (2) représente la même surface, toutes les quadriques représentées par cette équation forment un faisceau linéaire.

L'équation (1) nous montre que les points m et m' auxquels correspondent les tétraèdres semblables forment une involution sur la droite D. Nous pouvons donc énoncer les résultats suivants, qui ne s'appliquent, bien entendu, qu'au cas où les points de la droite mobile restent sur des sphères dont les centres ne sont pas dans un même plan :

Si tous les points d'une droite D *décrivent des biquadratiques sphériques, il existe sur cette droite une involution* (m, m') *telle que les trajectoires des points* m *et* m' *sont semblables.*

Réciproquement, si quatre segments égaux joignent les sommets homologues de deux tétraèdres semblables, les droites qui portent ces segments sont quatre positions d'une droite dont tous les points décrivent des biquadratiques sphériques.

Le problème que nous nous sommes proposé se trouve, dès maintenant, complètement résolu par le théorème précédent.

8. Soient $a_1 a_2 a_3 a_4$ et $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ deux tétraèdres semblables, tels que les quatre segments aa' soient égaux; prenons leur longueur commune pour unité de longueur : les coordonnées du point m, situé sur la droite aa' à la distance ρ du point a seront

$$(1-\rho)l + \rho l', \qquad (1-\rho)m + \rho m', \qquad (1-\rho)n + \rho n',$$

l, m, n et l', m', n' désignant les coordonnées des points a et a'. Soit k

le rapport de similitude des deux tétraèdres, et posons

$$Q = \sum_1^4 \lambda_i\lambda_j[(l_i - l_j)^2 + (m_i - m_j)^2 + (n_i - n_j)^2],$$

$$Q_1 = \sum_1^4 \lambda_i\lambda_j[(l_i - l_j)(l'_i - l'_j) + (m_i - m_j)(m'_i - m'_j) + (n_i - n_j)(n'_i - n'_j)].$$

L'équation barycentrique de la sphère $(m_1 m_2 m_3 m_4)$ peut alors s'écrire

$$[(1 + k^2)\rho^2 - 2\rho + 1]Q + 2\rho(1 - \rho)Q_1 = 0.$$

L'involution (m, m') est donc définie par les deux couples de points

$$(1 + k^2)\rho^2 - 2\rho + 1 = 0, \qquad \rho(1 - \rho) = 0.$$

Pour que le point central de cette involution soit rejeté à l'infini, il faut et il suffit que les deux segments ainsi définis aient le même milieu, ce qui donne

$$k^2 = 1.$$

Par suite :

Tous les points d'une droite décrivant des biquadratiques sphériques, si deux points m et m' décrivent des trajectoires directement ou inversement égales, il en est de même des extrémités de tout segment de la droite, dont le milieu coïncide avec celui du segment mm'.

IV.

9. Il nous est facile maintenant d'étudier les particularités que peut présenter le déplacement d'une droite dont tous les points décrivent des biquadratiques sphériques.

Supposons d'abord

$$k \neq 1.$$

On sait que, dans ce cas, k désignant le rapport de similitude de deux figures semblables (a) et (a'), on peut déterminer un axe $\omega\zeta$ tel que, par une rotation d'un angle φ autour de cet axe, la figure (a) vienne en coïncidence avec une figure homothétique à la figure (a') par rapport au centre ω. En désignant par ξ, η, ζ les coordonnées du point a, on a alors visiblement

$$\overline{aa'}^2 = (1 + k^2 - 2k\cos\varphi)(\xi^2 + \eta^2) + (1 - k)^2\zeta^2,$$

ce qui montre que, pour que les points a et a' se trouvent à une distance donnée, le point a doit appartenir à un certain ellipsoïde de révolution.

De ce qui précède résulte immédiatement que, si le point a décrit sur cet ellipsoïde une trajectoire sphérique (a), tous les points de la droite aa' décrivent aussi des trajectoires sphériques : la courbe (a), commune à une sphère et à une quadrique de révolution, se projette, comme on sait, suivant une parabole, sur le plan déterminé par l'axe de révolution $\omega\zeta$ et par le centre de la sphère; cette trajectoire est donc, d'après une dénomination de M. Darboux, une *cartésienne* sphérique. Par suite :

Les trajectoires de tous les points de la droite D *sont des cartésiennes sphériques.*

10. Toutes les quadriques qui passent par la courbe (a) ayant un cône asymptote de la forme

$$\xi^2 + \eta^2 + \lambda\zeta^2 = 0$$

sont de révolution : à chacun des ellipsoïdes correspond une infinité de courbes (a') fournies par les valeurs de k et de φ satisfaisant à la relation

$$\lambda(1 + k^2 - 2k\cos\varphi) = (1 - k)^2.$$

En particulier, pour $\lambda = 1$, on peut prendre k infini, φ étant alors indéterminé. Le point a est alors le point central de l'involution (m, m') sur la droite D. Le point ω devient le centre de la sphère qui passe par la trajectoire (a), et la droite D est parallèle à la position que vient occuper le rayon ωa, si on le fait tourner d'un certain angle φ autour de $\omega\zeta$.

Le déplacement de la droite D peut donc être défini de la manière suivante :

Soit (a) *une cartésienne, située sur une sphère de centre* ω *et soit* P *le plan mené par* ω *normalement à la direction commune des axes de révolution des quadriques qui passent par* (a). *Soit* α *la projection du point* a *sur le plan* P, *enfin* b *un point de ce plan tel que les segments* αO *et* αb *soient égaux et fassent entre eux un angle constant* φ. *Tous les points de la droite* ab, *dont la grandeur est invariable, décrivent des cartésiennes, quand le point* a *décrit* (a).

On voit que le point b décrit une *cartésienne plane*.

11. On peut toujours choisir les axes de coordonnées, de sorte que la courbe (a) ait pour équations

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \qquad \zeta^2 = A\xi + By + C.$$

La cubique gauche Γ, lieu des centres des sphères sur lesquelles se déplacent les points de la droite mobile, se trouve alors représentée par les équations

$$\xi = \frac{A\rho(1-\cos\varphi)(1+\rho\cos\varphi)}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}, \quad \eta = \frac{A\rho^2\sin\varphi(1-\cos\varphi)}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}, \quad \zeta = \frac{B(1-\cos\varphi)\rho}{1+\rho}.$$

On en déduit que :

Le point b *est, en général, le seul point réel de la droite mobile dont la trajectoire soit plane.*

La cubique Γ *n'a, en général, qu'une asymptote réelle, normale au plan* P; *les directions isotropes de ce plan sont les deux autres directions asymptotiques.*

Par suite :

La cubique Γ *se projette sur le plan* P *suivant une circonférence.*

12. Ce déplacement est le déplacement le plus général de la droite D, tant que le point central de l'involution (m, m') est à distance finie. Il présente des cas particuliers intéressants.

Supposons d'abord que le plan P soit un plan de symétrie de la cartésienne (a) : elle se projette alors sur ce plan suivant un cercle double; il en est de même alors de toutes les trajectoires (m); la trajectoire (b) se réduit également à un cercle double. De plus, l'axe de ce cercle (b) faisant évidemment partie du lieu des centres, la cubique Γ se décompose en cette droite et en un cercle du plan P.

13. Supposons maintenant l'angle φ égal à π : il est bien évident que le point c, symétrique de b par rapport à a, reste alors sur l'axe $\omega\zeta$; il en résulte que la droite à l'infini du plan P fait alors partie de la cubique Γ, et le lieu des centres se réduit à une hyperbole équilatère dont $\omega\zeta$ est une direction asymptotique.

Si l'on suppose les points de la droite D reliés par des tiges rigides aux points correspondants de l'hyperbole équilatère précédente, il est facile de voir que le système articulé ainsi constitué est susceptible de *deux mouvements algébriques distincts :* dans le premier, le point c restant sur l'axe $\omega\zeta$, le point b décrit une cartésienne plane dans le plan $\omega\zeta\eta$, et, dans le second déplacement du système, c'est le point b qui reste sur la droite $\omega\zeta$, tandis que le point c décrit une cartésienne plane dans le plan $\omega\eta\zeta$. On peut dire que, pour chacun de ces deux déplacements, le lieu des centres est une cubique gauche, constituée par l'hyperbole équilatère et par la droite à l'infini normale à la droite décrite.

Enfin, si, l'angle φ étant égal à π, le plan P est un plan de symétrie de (a), le point b décrit un cercle et le point c reste sur une droite normale au plan de ce cercle. Les centres des sphères passant par les trajectoires sont alors en ligne droite, et ce cas particulier peut se déduire du second théorème rappelé au n° **1**.

14. Le déplacement de la droite D ne peut être engendré par le mode indiqué au n° **10**, que si k^2 est différent de 1. Supposons donc d'abord

$$k = -1.$$

Les propriétés du n° **9** s'appliquent à ce cas et se réduisent aux suivantes :

Soit, dans un sphéroïde, aa' une corde ayant pour longueur celle de l'axe de révolution, et dont les deux extrémités se trouvent sur deux parallèles égaux : si le point a décrit sur l'ellipsoïde une trajectoire sphérique, il en est de même de tous les points de la droite aa'.

On voit que le milieu b du segment aa' décrit une cartésienne plane.

On peut toujours choisir les axes de coordonnées de sorte que la courbe (a) ait pour équations

$$(\xi^2+\eta^2)\cos^2\omega+\zeta^2=1, \qquad \zeta^2+2A\xi+2B\zeta+C=0.$$

La cubique gauche Γ, lieu des centres des sphères sur lesquelles se déplacent les points de la droite mobile, est alors représentée par les équations

$$\xi=\frac{A\tan^2\omega(\rho+\tan^2\omega)}{\rho^2+\tan^2\omega}, \qquad \eta=\frac{A\tan^3\omega(1-\rho)}{\rho^2+\tan^2\omega}, \qquad \zeta=\frac{B\tan^2\omega}{\rho}.$$

On en tire des conclusions analogues à celles du n° **11**. La cubique Γ n'a qu'une asymptote réelle et est située sur un cylindre de révolution. Elle peut se décomposer en un cercle et une droite, si la trajectoire (a) est symétrique par rapport au plan équateur du sphéroïde considéré.

15. Il ne nous reste plus enfin à examiner que le cas où

$$k=1.$$

Or, on sait qu'on peut amener une figure (a) en coïncidence avec une figure directement égale (a') par une rotation autour d'un certain axe $\omega\zeta$, suivie d'une translation parallèle à cet axe. Le lieu des points a, tels que la droite aa' ait une longueur donnée, est alors un cylindre de révolution autour de $\omega\zeta$. Si le point a décrit sur ce cylindre une ligne sphérique, il en sera de même de tous les points de la droite aa'.

Il est évident que, dans ce cas, tous les points de la figure (a) supposée entraînée par le déplacement de la droite aa', l'axe $\omega\zeta$ tournant et glissant sur lui-même, décrivent des trajectoires sphériques. Donc :

Si une figure se déplace de sorte qu'une certaine droite de cette figure tourne et glisse sur elle-même, il suffit qu'un point de la figure décrive une trajectoire sphérique, pour qu'il en soit de même de tous ses points.

Nous retrouvons ainsi un théorème déjà découvert par M. Raoul Bricard (1).

Il est facile de voir que, si la droite mobile est normale à l'axe $\omega\zeta$, les centres des sphères sur lesquelles se déplacent ses points sont situés aussi sur une droite normale à cet axe, et le produit des distances à cet axe d'un point et du centre correspondant est constant. Il en résulte que si l'on considère une figure plane dont le plan est normal à l'axe $\omega\zeta$, les points de cette figure se déplaceront sur des sphères dont les centres auront pour lieu une figure superposable à une transformée par inversion de la première, et l'on en déduit le théorème suivant (2) :

Étant données dans un même plan deux courbes (m) et (m') dont l'une s'obtient en faisant tourner autour d'un point ω une figure inverse de l'autre par rapport à ce point, si l'on joint par des tiges rigides articulées aux deux courbes les points homologues m et m', on obtient un système articulé déformable, dans lequel les plans des courbes (m) et (m') restent constamment parallèles.

Si l'on suppose fixe la courbe (m'), un des points du plan de la courbe (m) décrit la normale en ω au plan de (m').

On peut voir que le déplacement que nous venons d'étudier est le déplacement le plus général d'une figure dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques, de sorte que les centres correspondant aux points d'une droite soient les points d'une cubique gauche.

---

(1) R. Bricard, *Sur un déplacement remarquable* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, séance du 30 novembre 1896).

(2) Ce théorème a été généralisé par M. R. Bricard : *Sur le déplacement d'un plan dont les points décrivent des lignes sphériques* (*loc. cit.*, séance du 13 décembre 1897).