JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. MANNHEIM

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des centres de courbure principaux

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 51-55.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__51_0>

Sur la détermination, en un point d'une surface du second ordre, des axes de l'indicatrice et des centres de courbure principaux;

PAR M. A. MANNHEIM.

Soient (E) la surface du second ordre de centre o, m un point de cette surface, N la normale en ce point.

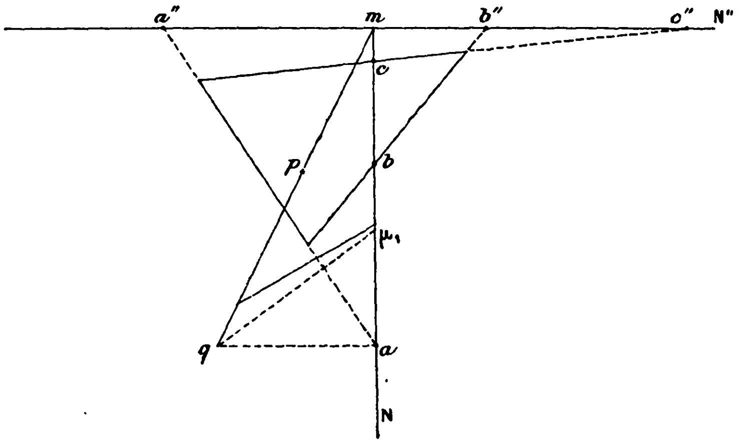
Je me propose de construire pour le point m les éléments de courbure de (E), c'est-à-dire les centres de courbure principaux de cette surface qui sont sur N et les axes de l'indicatrice N', N'' de (E) pour m. Je vais démontrer pour cela le théorème suivant :

1. *Du point a où* N *rencontre l'un des plans principaux de* (E), *on mène un plan perpendiculaire à cette droite. Il coupe le diamètre om en un point α d'où l'on abaisse, sur le plan principal qui contient a, la perpendiculaire* A. *De même les points de rencontre b, c de* N *et des plans principaux de* (E) *conduisent à des droites* B, C : *les droites* M_1, M_2, *perpendiculaires à* N *et qui rencontrent* A, B, C, *sont parallèles aux axes de l'indicatrice* N', N'' *et leurs pieds* μ_1, μ_2 *sur* N *sont les centres de courbure principaux de* (E) *pour le point m.*

Prenons pour plan de la figure le plan des droites N, N''. Sur N, on a les points a, b, c où cette droite rencontre les plans principaux de (E); de même sur N'', on a a'', b'', c''.

Les droites aa'', bb'', cc'' sont les traces du plan (N, N'') sur les plans principaux de (E), et le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par ces trois droites est la projection du centre o sur le plan de la figure.

J'ai démontré (¹) que les droites N, N″, aa'', bb'', cc'' sont tangentes à une parabole qui touche N au point μ_1 centre de courbure de la section principale faite dans (E) par le plan (N, N″). Menons à cette pa-



rabole une tangente infiniment voisine de N; elle détermine, avec cette droite et aa'', un triangle circonscrit à la parabole et dont le point de rencontre des hauteurs est sur la directrice mp de cette courbe. On obtient ce point à la rencontre de la perpendiculaire élevée de a à N et de la perpendiculaire abaissée de μ_1 sur aa''.

On peut dire alors que la perpendiculaire élevée de a à N rencontre la directrice mp en un point q, et que la perpendiculaire abaissée de ce point sur aa'' coupe N au centre de courbure μ_1.

De là résulte que le plan, élevée de a perpendiculairement à N, rencontre le diamètre mo (dont la projection est mp) en un point (dont la projection est q) et que la droite A, abaissée de ce point sur le plan principal qui contient a (droite A dont la projection est $q\mu_1$) rencontre la perpendiculaire M_1 élevée de μ_1 au plan de la figure.

On peut répéter la même chose en partant des points b, c et l'on

(¹) Dans ce *Journal*, 3ᵉ série, t. VIII, p. 167, et dans mon Ouvrage : *Principes et développements de Géométrie cinématique*, p. 451.

trouve ainsi des droites B, C qui rencontre aussi M_1. De la même manière en prenant le plan (N, N') pour plan de la figure, on arrive à une droite M_2 qui rencontre A, B, C, N et dont le pied sur cette dernière droite est le centre de courbure μ_2 de la section principale faite dans (E) par le plan (N, N').

Ainsi : les droites M_1, M_2 parallèles à N', N'' rencontrent A, B, C, N et leurs pieds μ_1, μ_2 sur cette dernière droite sont les centres de courbure demandés. Le théorème **1** est donc démontré.

On voit que cette démonstration repose sur une propriété relative à une parabole et à deux tangentes à cette courbe. Cette même propriété conduit encore dans l'espace à un autre théorème.

On peut considérer le point q comme la projection, sur le plan de la figure, de la droite d'intersection L du plan élevé de a perpendiculairement à N et du plan (o, N'). Le plan, qui projette L sur le plan principal qui contient a, coupe N au point μ_1, puisque, perpendiculaire au plan de la figure, ce plan se projette suivant $q\mu_1$.

On obtient ainsi ce théorème auquel Laguerre est arrivé analytiquement [1] :

2. *Le plan élevé de a perpendiculairement à* N *coupe le plan* (o, N') *suivant une droite : le plan mené par cette droite, perpendiculairement au plan principal de* (E) *qui contient a, coupe* N *au centre de courbure* μ_1.

Ce théorème ne permet de déterminer les centres de courbure μ_1, μ_2 que lorsqu'on connaît les axes de l'indicatrice N', N'', tandis que mon théorème donne à la fois les axes de l'indicatrice et les centres de courbure principaux. Je vais montrer que ce dernier théorème peut se déduire du théorème **2**.

J'ai appelé L la droite d'intersection du plan (o, N') et du plan élevé de a perpendiculairement à N. Pour chacun des points de rencontre de N avec les plans principaux de (E), il existe une droite telle que L et ces trois droites sont parallèles à N'. Les plans, qui les projettent respectivement sur les plans principaux de (E), comme il a été dit, passent par μ_1 ; ils se coupent alors suivant une même droite M_1 issue

[1] Dans ce *Journal*, 3e série, t. IV, p. 251.

de μ_1 et parallèle à N'. Du point α, où le plan mené de a perpendiculairement à N coupe le diamètre om, abaissons la perpendiculaire A sur le plan principal qui contient a. Puisque α est un point de L, la droite A est dans le plan projetant cette droite et dont il vient d'être parlé. La droite A rencontre alors M_1.

De même, aux autres points de rencontre de N avec les plans principaux de (E) correspondent des droites B, C qui rencontrent aussi M_1.

En employant le plan (o, N'') comme on vient d'employer le plan (o, N') on trouve que les droites A, B, C rencontrent M_2 parallèle à N'' et dont le pied sur N est le centre de courbure μ_2.

Les droites M_1, M_2, issues de μ_1 et μ_2, sont donc des perpendiculaires à N qui l'une et l'autre rencontrent A, B, C : le théorème **1** est donc obtenu en partant du théorème **2**.

En employant l'hyperboloïde qui a pour directrices A, B, C, on peut dire :

3. *Les génératrices de l'hyperboloïde* (A, B, C), *qui rencontrent* N *à angle droit, sont parallèles aux axes de l'indicatrice de* (E) *en* m *et leurs pieds sur* N *sont les centres de courbure principaux de* (E).

On n'a ainsi qu'une solution théorique du problème en question, car il reste encore à montrer comment on peut construire effectivement les éléments de courbure de (E).

Les directrices A, B, C de l'hyperboloïde étant parallèles aux axes de (E), qui sont les arêtes d'un trièdre trirectangle, cet hyperboloïde est équilatère.

Les droites M_1, M_2, génératrices de cette surface, sont perpendiculaires l'une à l'autre; comme N leur est perpendiculaire, cette droite est une génératrice de l'hyperboloïde.

Les points μ_1, μ_2 sont alors les points de rencontre de génératrices qui se rencontrent à angle droit; ils appartiennent à la sphère (S) lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'hyperboloïde. Construisons alors la sphère (S). Pour cela, menons par les droites A, B des plans parallèles à C : ces plans se coupent suivant une droite C' qui est une génératrice de l'hyperboloïde. On a de même A' et B'. Les points de rencontre de A', B', C' et de A, B, C appartiennent à (S).

Cette sphère est alors circonscrite au prisme droit dont ces six droites sont des arêtes et elle est facile à construire.

4. *Cette sphère* (S) *coupe* N *aux points* μ_1, μ_2, *centres de courbure principaux de* (E).

Ces points étant déterminés, il suffit d'ajouter :

5. *Les perpendiculaires à* N, *élevées des points* μ_1, μ_2 *et qui rencontrent* A *ou* B *ou* C, *sont parallèles aux axes de l'indicatrice de* (E) *pour le point* m.

Les éléments de courbure de (E) sont donc construits.