JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. MATHY

**Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions θ et ζ**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 2 (1896), p. 305-316.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__305_0>

# *Expression des composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur, au moyen des fonctions* $\theta$ *et* $\zeta$;

**PAR M. E. MATHY.**

## I. — Expression par les fonctions $\theta$.

**1.** Soient $a$, $b$, $c$ les demi-axes de l'ellipsoïde et $m$ le point extérieur.

Cet ellipsoïde se décompose en couches infiniment minces à surfaces homothétiques à l'ellipsoïde extérieur; désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les demi-axes d'une quelconque de ces couches.

Par $m$, faisons passer une couche homofocale à chacune des précédentes; soient $\alpha'$ $\beta'$ $\gamma'$ les demi-axes; $mn = e$ l'épaisseur de cette couche en $m$ et $OQ = P'$ la distance du centre O de l'ellipsoïde au plan tangent en $m$, $i$ le point d'intersection du rayon $Om$ avec la surface intérieure de la couche passant par $m$.

Les deux triangles $min$ et $OQm$ donnent

$$e = \frac{OQ.\overline{mi}}{O\overline{m}} = \frac{P'd\gamma'}{\gamma'}.$$

Prenant $\frac{\gamma}{\gamma'} = u$ comme variable et désignant par X, Y, Z les composantes de l'attraction, on sait qu'on peut leur donner la forme suivante [1] :

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
X &= -\,3\mathrm{M}m\frac{x}{c^3}\int_0^{\frac{c}{c'}}\frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{3}{2}}},\\
Y &= -\,3\mathrm{M}m\frac{y}{c^3}\int_0^{\frac{c}{c'}}\frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}},\\
Z &= -\,3\mathrm{M}m\frac{z}{c^3}\int_0^{\frac{c}{c'}}\frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces formules se réduisent à

$$
X = -\,3\mathrm{M}m\frac{x}{c^3}\frac{d.l'\mathrm{F}}{dl'}, \qquad Y = -\,3\mathrm{M}m\frac{y}{c^3}\frac{d.l\mathrm{F}}{dl}, \qquad Z = -\,3\mathrm{M}m\frac{z}{c^3}.\mathrm{F},
$$

F représentant l'intégrale

$$
(2) \qquad \mathrm{F} = \int_0^{\frac{c}{c'}}\frac{u^2\,du}{(1+l^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1+l'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}.
$$

Je me propose de rechercher la valeur de F. A cet effet, je pose

$$
l'u = t,
$$

d'où

$$
du = \frac{1}{l'}dt, \qquad lu = \frac{l}{l'}t = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,t = ht;
$$

$h$ est réel et plus petit que 1, car dans l'ellipsoïde, on peut toujours supposer $a > b > c$.

Cette variable auxiliaire transforme l'expression de F qui devient

$$
(3) \qquad \mathrm{F} = \frac{1}{l'^3}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c}}\frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+h^2t^2)}}.
$$

---

[1] *Voir*, par exemple, M. H. Resal, *Mécanique céleste*, 2e édition, p. 198.

Je fais la substitution

$$(4) \qquad t = \frac{\lambda(v)}{\mu(v)} \text{ [1]},$$

d'où

$$dt = \frac{\lambda'(v)\mu(v) - \mu'(v)\lambda(v)}{\mu^2(v)}dv = \frac{\mu^2(v)\nu(v) + \lambda^2(v)\nu(v)}{\mu^2(v)}dv = \frac{\nu(v)}{\mu^2(v)}dv.$$

Comme (4) conduit à $\mu^2(v) = \frac{1}{1+t^2}$ et $\nu(v) = \sqrt{\frac{1+k'^2t^2}{1+t^2}}$, il vient

$$dt = \sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}\,dv \qquad \text{ou} \qquad dv = \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(1+k'^2t^2)}}.$$

En comparant cette formule à (3), je remarque qu'on obtient, pour le module complémentaire, $k' = h = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$; $k$ vaut $\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$.

L'intégrale (3) prend la forme

$$(5) \qquad F = \frac{1}{l'^3}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'}} \frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)}dv.$$

La fonction $\frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)}$ a pour périodes $\omega$ et $\omega'$ et possède, dans le parallélogramme des demi-périodes, un seul pôle double $v = \frac{\omega}{2}$; la formule connue de M. Hermite

$$\frac{\lambda^2(v)}{\mu^2(v)} = \frac{1}{k'^2}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} - D^2\log\theta_2(v)\right]$$

$\left(k'\text{ étant égal à } \frac{l}{l'}\right)$ permet d'écrire, après intégration,

$$(6) \qquad F = \frac{1}{l^2 l'}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - D\log\theta_2(v)\right].$$

La composante Z est donc déterminée en fonction de $\theta_2$.

---

[1] Les notations $\lambda$, $\mu$, $\nu$; $\theta$, $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ sont celles de Briot et Bouquet.

Pour obtenir Y, il faut dériver le produit $l$F par rapport à $l$, avec cette remarque que $v$ est indépendant de $l$ puisque $\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = l'u$.

Quant à X, comme F est symétrique en $l'$ et $l$, je suivrai la même règle pour déterminer sa valeur; à la limite supérieure, on aura

$$\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c'}.$$

En remplaçant $l$ et $l'$ par $\frac{(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$ et $\frac{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{c}$, il vient les formules suivantes :

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \frac{3\mathrm{M}mx}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \mathrm{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)}=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c'}}, \\ Y &= \frac{3\mathrm{M}my}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \mathrm{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'}}, \\ Z &= -\frac{3\mathrm{M}mz}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)}\left[\frac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)}v - \mathrm{D}\log\theta_2(v)\right]_{v=0}^{\frac{\lambda(v)}{\mu(v)}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c'}}. \end{aligned}\right.$$

**2.** Il est évident qu'on peut obtenir directement X et Y. Si l'on reprend la formule que suppose le calcul précédent $e = \frac{\mathrm{OQ}.\overline{mi}}{\mathrm{O}\overline{m}}$, et qu'au lieu d'égaler cette quantité $e$ à $\frac{\mathrm{P}'d\gamma'}{\gamma'}$, on l'égale à $\frac{\mathrm{P}'d\alpha'}{\alpha'}$, alors, en prenant comme variable $\frac{\alpha}{\alpha'} = u_3$, des calculs semblables à ceux qui ont fourni Z (¹) conduisent à

$$(8)\qquad X = -3\mathrm{M}m\frac{x}{a^3}\int_0^{\frac{\alpha}{\alpha'}} \frac{u_3^2\,du_3}{\left(1-\frac{a^2-b^2}{a^2}u_3^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a^2-c^2}{a^2}u_3^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

(¹) Resal, déjà cité, p. 196.

En vue de l'intégration, soit

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}u_3^2 = t_3^2,$$

d'où

$$du_3 = \frac{a}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}dt_3, \qquad \frac{a^2-b^2}{a^2}u_3^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t_3^2 = k^2 t_3^2,$$

$k^2$ ayant la même valeur que précédemment.

En ayant égard à ces valeurs, je puis écrire (8) sous la forme

$$(9) \qquad X = -3Mm\frac{x}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}} \frac{t_3^2\,dt_3}{(1-t_3^2)^{\frac{1}{2}}(1-k^2t_3^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si $t_3 = \lambda(v_3)$, cette expression devient

$$(10) \qquad X = \frac{-3Mmx}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}} \lambda^2(v_3)\,dv_3.$$

Or, dans le parallélogramme des demi-périodes, la fonction doublement périodique $\lambda^2(v_3)$ possède un pôle double $\frac{\omega'}{2}$; en vertu du théorème de M. Hermite, on a

$$\lambda^2(v_3) = \frac{1}{k^2}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)} - D^2\log\theta(v)\right].$$

Conséquemment, en intégrant et remplaçant $k^2$ par $\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$,

$$(11) \quad X = -\frac{3Mx}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}(a^2-b^2)}\left[\frac{\theta''(0)}{\theta(0)}v_3 - D\log\theta(v_3)\right]_{v_3=0}^{\lambda(v_3)=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a'}}.$$

Pour calculer Y, je choisis comme variable $\frac{\beta}{\beta'} = u_2$; ainsi

$$(12) \qquad Y = -\frac{3Mmy}{b^3}\int_0^{\frac{b}{b'}} \frac{u_2^2\,du_2}{\left(1+\frac{a^2-b^2}{b^2}u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{b^2-c^2}{b^2}u_2^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Posons encore $\frac{a^2-c^2}{b^2}u_2^2 = t_2^2$; il en résulte

$$du_2 = \frac{b}{(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}dt_2,$$

$$\frac{a^2-b^2}{b^2}u_2^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}t_2^2 = k^2 t_2^2,$$

$$\frac{b^2-c^2}{b^2}u_2^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}t_2^2 = k'^2 t_2^2,$$

d'où

$$(12') \qquad Y = \frac{-3Mm\gamma}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}} \frac{t_2^2\,dt_2}{(1+k^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}(1-k'^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

En faisant $t_2 = \frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)}$, par des calculs analogues à ceux qui ont servi dans la recherche de Z, on obtient

$$dv_2 = \frac{dt_2}{(1+k^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}(1-k'^2t_2^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Y = -\frac{3Mm\gamma}{(a^2-c^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}} \frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)}dv_2.$$

La décomposition de $\frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)}$ se fait en remarquant que le pôle double est $\frac{\omega+\omega'}{2}$ et que, par suite,

$$\frac{\lambda^2(v_2)}{\nu^2(v_2)} = -\frac{1}{k^2k'^2}\left[\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} - D^2\log\theta_3(v_2)\right],$$

d'où

$$(13) \quad Y = \frac{3Mm\gamma(a^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}\left[\frac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)}v_2 - D\log\theta_3(v_2)\right]_{v_2=0}^{\frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{b}}.$$

Les variables $v_1$, $v_2$, $v_3$ sont égales aux limites d'intégration; aux limites inférieures, elles sont nulles toutes trois; aux limites supérieures, on a

$$\lambda(v_3) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'},$$

$$\frac{\lambda(v_2)}{\nu(v_2)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{b'},$$

$$\frac{\lambda(v)}{\mu(v)} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c'},$$

et ces trois formules se ramènent aux trois suivantes :

$$\lambda(v_3) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}, \qquad \lambda(v_2) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - b^2 + b'^2}}, \qquad \lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{\sqrt{a^2 - c^2 + c'^2}},$$

qui sont égales à cause de la relation

$$a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 = c'^2 - c^2.$$

On peut rapprocher ces nouvelles formes de X et Y de celle de Z et les écrire comme suit :

$$(14)\quad \begin{cases} X = \dfrac{3\,\mathrm{M}mx}{(a^2 - c^2)(a^2 - b^2)} \left[ -\dfrac{\theta''(0)}{\theta(0)} v\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}\,\mathrm{D}\log\theta(v) \right]_{v=0}^{\lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}, \\[2ex] Y = \dfrac{3\,\mathrm{M}my}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left[ -\dfrac{\theta_3''(0)}{\theta_3(0)} v\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}\,\mathrm{D}\log\theta_3(v) \right]_{v=0}^{\lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}, \\[2ex] Z = \dfrac{3\,\mathrm{M}mz}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left[ -\dfrac{\theta_2''(0)}{\theta_2(0)} v\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{a^2 - c^2}\,\mathrm{D}\log\theta_2(v) \right]_{v=0}^{\lambda(v) = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a'}}. \end{cases}$$

## II. — Intégration par les signes $\wp$ et $\zeta$.

Dans le calcul suivant, les fonctions de M. Weierstrass ont été utilisées pour exprimer la valeur des intégrales précédentes.

Partant de

$$X = -\frac{3\,\mathrm{M}mx}{a^3} \int_0^{\frac{a}{a'}} \frac{u^2\,du}{\left(1 - \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \dfrac{a^2 - c^2}{a^2}u^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

je pose

$$\frac{u^2}{a^2} = \frac{1}{pv - e_3},$$

d'où

$$du = -\frac{1}{2}\frac{a p' v\, dv}{(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} X &= \frac{3Mmx}{a^3}\int_0^{a'^2} \frac{a^2}{pv - e_3} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{pv - e_3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{a^2 - c^2}{pv - e_3}\right)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a p' v\, dv}{2(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3Mmx}{2}\int_0^{a'^2} \frac{1}{(pv - e_3 - a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}(pv - e_3 + c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{p' v\, dv}{(pv - e_3)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

La théorie de $p$ conduit à poser

$$e_3 + a^2 - c^2 = e_1, \qquad e_3 + a^2 - b^2 = e_2,$$

puisque

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_3 = \tfrac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2).$$

En remarquant que $p'v = -2\sqrt{(pv - e_1)(pv - e_2)(pv - e_3)}$, X deviendra

$$(15)\qquad X = -3Mmx\int_0^{a'^2} \frac{dv}{pv - e_3}.$$

Cette expression s'intègre en appliquant la formule

$$p(v + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{pv - e_3};$$

alors

(16)

$$X = -\frac{3Mmx}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}\int_0^{a'^2} [p(v + \omega_3) - e_3]\,dv,$$

ou

$$X = \frac{3Mmx}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}[\zeta(v + \omega_3) - \eta_3 + e_3 v],$$

ou encore

$$X = \frac{3Mmx}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}[\zeta(v + \omega_3) - \eta_3 + e_3 v]$$

($v$ est défini par $pv - e_3 = d'^2$).

Y et Z prennent des formes analogues, en posant $\frac{u^2}{b^2} = \frac{1}{pv - e_2}$ pour le calcul de Y, et $\frac{u^2}{c^2} = \frac{1}{pv - e_1}$ pour celui de Z.

L'expression (16) de X ainsi que celles de Y et Z concordent avec celles que je déduis d'une formule donnée par Halphen ([1]).

P désignant le potentiel d'un ellipsoïde homogène sur un point extérieur; $a_1$, $a_2$, $a_3$ les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ l'un des trois nombres 1, 2, 3, on a

$$(17)\quad P = 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\left\{u + \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u]\right\},$$

la transcendante $u$ est définie par

$$pu = \tfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - r_1,$$

$r_1$ étant la racine négative de $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{a_\alpha - s} = 1$.

Je dérive (17) par rapport à $x_\alpha$ et j'obtiens

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dP}{dx_\alpha} = 2\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}\bigg\{\frac{du}{dx_\alpha} &+ \frac{2x_\alpha}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\beta - a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u] \\ &+ \frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}[-p(u+\omega_\alpha) + e_\alpha]\bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Cette valeur se simplifie, car, en remplaçant $p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha$ par $\frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{pu - e_\alpha}$ dans la troisième partie de la somme entre accolades, il vient

$$\begin{aligned} &-\frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}[p(u+\omega_\alpha) - e_\alpha] \\ &= -\frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{pu - e_\alpha} = -\frac{du}{dx_\alpha}, \end{aligned}$$

puisque $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{pu - e_\alpha} = 1$ et que $(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma) = (e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)$.

---

([1]) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, 2e Partie, p. 492.

Cette valeur étant reportée dans (18), on conclut

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dx_\alpha} = \dfrac{4\pi\sqrt{a_1 a_2 a_3}}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u] \\ \quad\;\; = \dfrac{3 M x_\alpha}{(a_\alpha - a_\beta)(a_\alpha - a_\gamma)}[\zeta(u+\omega_\alpha) - \eta_\alpha + e_\alpha u]. \end{cases}$$

M est la masse de l'ellipsoïde.

---

Note. — P a été obtenu par la considération de l'équation des potentiels avec les arguments elliptiques ; je vais établir directement cette question.

On sait que, si $x_\alpha$ est une coordonnée rectiligne, $T = f(x_\alpha)$ satisfait à l'équation des potentiels, si $\sum_\alpha \frac{d^2T}{dx_\alpha^2} = 0$. Mais, $x_\alpha$ étant fonction des arguments $u$, $v$, $w$, cette égalité se transforme en

$$(1)\quad \sum_\alpha \left[\frac{d^2T}{du^2}\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 + 2\frac{d^2T}{du\,dv}\frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} + \ldots + \frac{dT}{dx_\alpha}\frac{d^2u}{dx_\alpha^2} + \ldots\right] = 0.$$

Il faut calculer séparément $\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2$, $\frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha}$, $\frac{d^2u}{dx_\alpha^2}$, s'appuyant sur

$$(2)\quad x_\alpha^2 = \frac{(pu - e_\alpha)(pv - e_\alpha)(pw - e_\alpha)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}.$$

Comme la quantité $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2}$ entre dans ces expressions, j'en cherche la valeur. De (2), je tire

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2} = \sum_\alpha \frac{(e_\alpha - pv)(e_\alpha - pw)}{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)} \times \frac{1}{pu - e_\alpha} \\ \quad = \dfrac{(pu - pv)(pu - pw)}{(pu - e_\alpha)(pu - e_\beta)(pu - e_\gamma)} = \dfrac{4(pu - pv)(pu - pw)}{p'^2 u}. \end{cases}$$

L'équation $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{pu - e_\alpha} = 1$, dérivée par rapport à $x_\alpha$, donne

$$(3')\quad \frac{2x_\alpha}{pu - e_\alpha} - p'u\frac{du}{dx_\alpha}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^2} = 0$$

qui s'écrit, en vertu de (3),

$$(4)\qquad \frac{du}{dx_\alpha} = \frac{x\,p'u}{2(pu-e_\alpha)(pu-pv)(pu-pw)}.$$

Donc,

$$\sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)^2} \times \frac{p'u^2}{4(pu-pv)(pu-pw)^2}.$$

A cause de (3), il vient

$$(5)\qquad \sum_\alpha \left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 = \frac{1}{(pu-pv)(pu-pw)}.$$

Je reprends la formule (4) pour la multiplier par la valeur analogue $\frac{dv}{dx_\alpha}$, et j'étends le produit aux $x_\alpha$.

$$\sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} = \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)(pv-e_\alpha)}\;\frac{p'u\,p'v}{4\left(\overline{pu-pv}\right)^2(pu-pw)(pw-pv)}.$$

Mais $\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)(pv-e_\alpha)} = 0$; donc

$$(6)\qquad \sum_\alpha \frac{du}{dx_\alpha}\frac{dv}{dx_\alpha} = 0.$$

Je dérive l'équation (3') une seconde fois par rapport à $x_\alpha$, et j'obtiens

$$\begin{aligned}\frac{2}{pu-e_\alpha} - \frac{4x_\alpha p'u}{(pu-e_\alpha)^2}\frac{du}{dx_\alpha} - p''u\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)^2}& \\ + 2\overline{p'u}^2\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2 \sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)^3}& \\ - p'u\frac{d^2u}{dx_\alpha^2}\sum \frac{x_\alpha^2}{(pu-e_\alpha)^2} &= 0.\end{aligned}$$

Dans la somme relative à $x_\alpha$, le premier et le troisième terme s'annuleront; en effet, le troisième terme, déduit des valeurs précédentes, est égal à $-\frac{4p''u}{\overline{p'u}^2}$; le premier terme vaut $+\frac{4p''u}{\overline{p'u}^2}$, car

$$\overline{p'u}^2 = 4(pu-e_\alpha)(pu-e_\beta)(pu-e_\gamma)$$

et

$$p''u = 2[(pu - e_\alpha)(pu - e_\beta) + \ldots].$$

Le deuxième et le quatrième terme se réduisent à o également; en effet, si je substitue à $\frac{du}{dx_\alpha}$ sa valeur donnée par (4), le deuxième terme devient

$$-\frac{4x_\alpha p'u}{(pu - e_\alpha)^2}\frac{du}{dx_\alpha} = -\frac{2x_\alpha^2\overline{p'u}^2}{(pu - e_\alpha)^3(pu - pv)(pu - pw)},$$

et en sommant, on obtient

$$\frac{-2p'u^2}{(pu - pv)(pu - pw)}\sum_\alpha \frac{x_\alpha^2}{(pu - e_\alpha)^3},$$

et à cause de (5)

$$-2\overline{p'u}^2\sum_\alpha\left(\frac{du}{dx_\alpha}\right)^2\sum_\alpha\frac{x^2{}_\alpha}{(pu - e_\alpha)^3},$$

qui est bien égal et de signe contraire au quatrième terme qui figurera dans la somme.

Finalement,

$$\sum_\alpha \frac{d^2u}{dx_\alpha^2} = 0,$$

et (1) se transforme en

$$\frac{d^2T}{du^2}(pv - pw) + \frac{d^2T}{dv^2}(pw - pu) + \frac{d^2T}{dw^2}(pu - pv) = 0,$$

qui est l'équation des potentiels.