JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 295-304.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__295_0>

Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles par ses valeurs sur un contour fermé;

PAR M. ÉMILE PICARD.

J'ai démontré autrefois (*voir* ce Journal, 4ᵉ série, t. VI, 1890) qu'une intégrale continue d'une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre est complètement déterminée, dans une région du plan où les caractéristiques sont imaginaires, par ses valeurs le long d'un contour fermé, *pourvu que ce contour soit suffisamment petit*, et j'ai montré comment, dans ces conditions, on pouvait obtenir l'intégrale par une méthode rigoureuse d'approximations successives. Dans quelques parties de mes raisonnements, je m'appuie sur la possibilité de faire une représentation conforme de l'aire envisagée sur un cercle, mais cet artifice a seulement pour but de simplifier et n'est pas indispensable; c'est ce qu'a, d'ailleurs, montré récemment M. Zaremba dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1896), au moins pour un des points de la démonstration, et il est aisé de voir qu'il en est de même pour les autres points. Cette remarque a son importance parce qu'elle établit que les considérations dont j'ai fait usage ne sont pas bornées au cas de deux variables indépendantes, mais s'étendent à un nombre quelconque de variables.

Une autre remarque est à faire relativement à l'expression de *contour suffisamment petit*. J'ai toujours entendu par là un contour dont tous les points s'éloignent suffisamment peu d'un certain point. Tous les résultats obtenus sont cependant encore applicables, si l'on élargit la définition précédente, en entendant par contour suffisamment petit, un contour *enveloppant une aire suffisamment petite,* comme nous le montrerons facilement dans un moment.

Considérons maintenant, comme je l'ai fait en 1890 dans le *Journal de l'École Polytechnique*, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

les coefficients d, e, f étant des fonctions analytiques de x et y, continues dans une aire A; nous supposons, de plus, que l'on ait, dans cette région,

$$f < 0.$$

Il n'y a qu'une seule intégrale continue prenant sur tout contour fermé (tracé, bien entendu, dans A) une succession donnée de valeurs. Il s'agissait d'obtenir cette intégrale; la méthode indiquée d'approximations successives le permet seulement si l'aire limitée par le contour est assez petite. J'ai montré que l'on pouvait encore employer le procédé alterné, ce qui permet de traiter le problème pour un très grand nombre de contours C, mais (sauf le cas où d et e sont nuls) il peut subsister, au point de vue d'une rigueur complète, quelques difficultés à cause des discontinuités que présentent nécessairement les dérivées des valeurs données sur les contours. Il me paraît donc utile de reprendre le même problème par une autre voie beaucoup plus facile. Nous y trouverons d'ailleurs un autre avantage : *la méthode s'étendra d'elle-même au cas de plus de deux variables,* circonstance qui ne se présentait pas pour ma première méthode, car il faudrait, auparavant, faire une étude complète du procédé alterné pour l'espace à trois dimensions, étude qui semble n'avoir jamais été faite.

I.

J'ai dit plus haut que, au lieu de *contour suffisamment petit,* nous pouvons parler *d'aire suffisamment petite.* Il suffira de montrer (c'est le seul point qui puisse embarrasser) qu'une intégrale continue d'une équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

est déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé (simple ou non), pourvu que ce contour enveloppe une aire suffisamment petite. J'ai démontré seulement ce théorème (*Journal de Mathématiques*, 1890, p. 151) en supposant que le contour restait dans le voisinage d'un point. Pour bien préciser l'énoncé du théorème généralisé, nous pouvons dire que, étant donnée une courbe fermée quelconque C, on peut tracer une seconde courbe fermée C′ limitant avec C une aire assez petite, de telle sorte qu'une intégrale continue s'annulant sur C et C′ soit identiquement nulle dans l'aire.

Qu'on veuille bien se reporter au passage cité, et l'on verra de suite qu'il suffit d'établir qu'on peut satisfaire à l'inégalité

$$(1) \qquad B^2 + B'^2 < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{d y} + \theta$$

par des fonctions B et B′ de x et y continues dans l'aire limitée par la courbe C et par une courbe C′ voisine de C. En désignant, en effet, par m^2 le maximum de $|\theta|$, l'inégalité sera vérifiée si

$$B^2 + B'^2 + m^2 = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}.$$

Or, on peut trouver des fonctions B et B′ de x et y, bien déterminées et continues dans une aire annulaire limitée par deux courbes fermées Γ et Γ', suffisamment voisines et comprenant entre elles la courbe C. Ce problème est indéterminé; en voici une solution qui n'est sans doute pas la plus simple que l'on puisse citer; posons

$$B = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad B' = \frac{\partial V}{\partial y}.$$

On aura l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + m^2.$$

Or, d'après ce que j'ai précédemment établi (Mémoire cité du *Journal de Mathématiques*, p. 162), on pourra trouver, si l'aire annulaire que limitent Γ et Γ' est suffisamment petite, une intégrale V de cette équation prenant des valeurs données sur Γ et Γ', continue et bien déterminée entre ces deux courbes. Cette valeur de V nous donne les valeurs de B et B' dont nous avons besoin pour terminer le raisonnement.

Nous avons supposé que nous avions seulement deux variables; l'extension au cas de trois variables, par exemple, à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + 2f\frac{\partial u}{\partial z} + gu = 0$$

se fait sans aucune difficulté.

II.

J'arrive maintenant au principal objet de cet article. Considérons d'abord une équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Dans toute région du plan, où les coefficients d et e sont bien déterminés et continus, une intégrale continue est bien déterminée par ses valeurs sur un contour fermé, car on démontre facilement (voir *Journal de l'École Polytechnique*, 1890) qu'une telle intégrale ne peut avoir ni maximum ni minimum. Il s'agit d'obtenir l'intégrale, prenant des valeurs données sur un contour. Nous allons montrer, à cet effet, que si l'on peut obtenir cette intégrale pour un contour C, on pourra l'obtenir pour un contour C' suffisamment rapproché de C, mais enveloppant une aire plus grande, de telle sorte que l'on pourra passer de proche en proche à un contour quelconque, après être parti d'un contour enveloppant une aire suffisamment petite, pour lequel nous savons résoudre le problème.

Je commencerai par un lemme préliminaire : *Soit une aire limitée par deux contours* C *et* C', *et considérons une intégrale u de l'équa-*

tion proposée, continue dans l'aire, s'annulant en tous les points de C et prenant le long de C′ des valeurs comprises entre $-$M *et* $+$M. *Je dis que, pour un point* A *pris à l'intérieur de l'aire, on peut déterminer un nombre* q *inférieur à l'unité, tel que l'on ait*

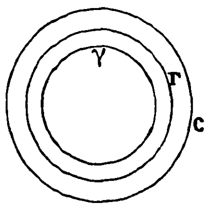
$$|u_A| < Mq.$$

En effet, soit v l'intégrale de l'équation prenant sur C la valeur *zéro* et sur C′ la valeur *un*; on aura évidemment en tout, point de l'aire,

$$-Mv < u < Mv.$$

Or, au point A, l'intégrale v prend une valeur q plus petite que l'unité, et le lemme est par suite établi. On voit que ce lemme suppose essentiellement que l'aire est limitée par plusieurs courbes; il subsiste pour le cas où il y a plus de deux courbes, les intégrales considérées prenant toujours la valeur zéro sur une des courbes.

Ceci posé, soit un contour Γ (que je suppose simple pour fixer les idées) pour lequel nous sachions résoudre le problème; je veux mon-



trer qu'on pourra le résoudre pour un contour C enveloppant Γ, si C est suffisamment rapproché de Γ.

Donnons-nous donc des valeurs sur C. Nous tracerons d'abord, à l'intérieur de Γ, une courbe fermée γ qui en soit très rapprochée; nous pouvons alors supposer que l'on sait résoudre le problème proposé pour l'aire suffisamment petite comprise entre γ et C. Fixons sur Γ une succession de valeurs arbitraires; nous formerons une intégrale u_1 continue dans Γ et prenant ces valeurs sur Γ. Cette fonction prendra certaines valeurs sur γ. On formera une fonction v_1, continue entre γ et C, prenant les mêmes valeurs que u_1 sur γ et prenant sur C les valeurs données. Considérons ensuite la fonction u_2 prenant sur Γ les mêmes valeurs que v_1 et continue dans Γ, et continuons ainsi indéfiniment. Nous obtenons deux suites de fonctions

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n,$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n,$$

et l'on a

$$(2) \qquad \begin{cases} u_n = v_{n-1} & (\text{sur } \Gamma), \\ u_n = v_n & (\text{sur } \gamma). \end{cases}$$

Tous les u sont continus dans Γ, les v sont continus entre γ et C et prennent tous sur cette dernière courbe les valeurs données.

Le lemme démontré plus haut permet aisément d'établir que u_n et v_n ont des limites u et v; on a alors

$$u = v$$

dans l'intervalle compris entre Γ et γ, et, à l'aide de ces deux fonctions, le problème est résolu.

Pour établir l'existence des limites, désignons par q le plus grand nombre (inférieur à 1) correspondant au lemme pour tous les points de Γ considérée comme courbe intérieure à l'aire limitée par γ et C.

On aura, d'après le lemme,

$$\text{max. de} \, |v_2 - v_1| \, \text{sur } \Gamma < q \times \text{max. de} \, |v_2 - v_1| \, \text{sur } \gamma,$$

et par conséquent

$$\text{max. de} \, |v_2 - v_1| \, \text{sur } \Gamma < q \times \text{max. de} \, |u_2 - u_1| \, \text{sur } \gamma.$$

Or

$$\text{max. de} \, |u_2 - u_1| \, \text{sur } \gamma < \text{max. de} \, |u_2 - u_1| \, \text{sur } \Gamma,$$

sans mettre de facteur q dans le second membre, car, pour l'aire simple limitée par Γ, nous ne pouvons pas appliquer le lemme. Il résulte de là, puisque

$$\text{max. de} \, |u_3 - u_2| \, \text{sur } \Gamma = \text{max. de} \, |v_2 - v_1| \, \text{sur } \Gamma$$

que l'on peut écrire

$$\text{max. de } |u_3 - u_2| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |u_2 - u_1| \text{ sur } \Gamma,$$

et l'on aura ainsi, d'une manière générale,

$$\text{max. de } |u_n - u_{n-1}| \text{ sur } \Gamma < q \times \text{max. de } |u_{n-1} - u_{n-2}| \text{ sur } \Gamma.$$

Il est clair alors que, sur la courbe Γ, la fonction

$$u_n = u_1 + (u_2 - u_1) + \ldots + (u_n - u_{n-1})$$

tend vers une limite représentée par une série qui converge comme une progression géométrique décroissante, quand n augmente indéfiniment. La fonction u_n a donc une limite parfaitement déterminée u dans l'aire limitée par Γ, et il en est évidemment de même alors pour v_n qui aura une limite v définie dans l'aire que limitent γ et C. Des égalités (2), il résulte que $u = v$ dans l'intervalle compris entre Γ et γ.

On voit donc qu'en partant d'une aire (simple ou non) suffisamment petite, on peut, de proche en proche, étendre le champ d'intégration, et l'on arrive ainsi à une aire quelconque limitée par un nombre quelconque de contours.

On remarquera encore, et c'est là pour nous un point important, que *toute cette analyse s'applique, sans aucune modification, à l'espace à trois dimensions,* l'équation différentielle étant de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + 2f\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

et les courbes fermées étant remplacées par des surfaces fermées.

III.

Considérons maintenant une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

en supposant que le point (x, y) reste dans une région du plan où l'on a partout

$$f < 0.$$

Une intégrale continue est alors toujours déterminée par ses valeurs le long d'un contour fermé. Les considérations que nous venons de développer peuvent s'appliquer presque sans modifications.

Il arrive même ici que le lemme prend une forme plus simple que dans le cas précédent. Désignons par u l'intégrale prenant sur un contour C (qui ici peut être simple) des valeurs comprises entre $-$ M et $+$ M. Je dis que, pour un point A à l'intérieur de l'aire, on peut trouver un nombre q inférieur à l'unité, tel que l'on ait

$$|u_A| < Mq.$$

Pour l'établir, rappelons d'abord qu'une intégrale u de l'équation précédente ne peut avoir de maximum positif ni de minimum négatif. Soit l'intégrale v prenant la valeur *un* sur C. Puisque v ne peut avoir de maximum positif, elle ne surpassera pas *un* à l'intérieur de l'aire; elle n'atteindra pas non plus cette valeur, car on aurait (¹), au voisinage d'un point (x_0, y_0) où v prendrait la valeur *un* :

$$v = 1 + \alpha(x - x_0)^2 + 2\beta(x - x_0)(y - y_0) + \gamma(y - y_0)^2 + \ldots.$$

On a nécessairement

$$\alpha \leqq 0, \quad \gamma \leqq 0, \quad \beta^2 - \alpha\gamma \leqq 0,$$

et la substitution donne

$$2(\alpha + \gamma) + f_0 = 0,$$

en désignant par f_0 la valeur de f en (x_0, y_0); cette inégalité est im-

(¹) Nous supposons ici que les coefficients sont analytiques et que, par suite (Mémoire cité du *Journal de l'École Polytechnique*), l'intégrale est analytique. On pourrait se passer de cette hypothèse en faisant des raisonnements analogues à ceux que développe M. Paraf dans sa thèse (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1892). Je rappelle que j'ai indiqué récemment des classes très étendues d'équations aux dérivées partielles de tout ordre dont *toutes* les intégrales sont analytiques [*Comptes rendus* (juillet 1895)].

possible puisque f_0 est différent de zéro et négatif. L'intégrale v est donc moindre que *un* à l'intérieur de l'aire, et elle est d'ailleurs positive, ne pouvant avoir de minimum négatif. Soit q sa valeur au point A ; la fonction

$$Mv - u,$$

étant positive sur C, sera positive dans l'aire, et par suite

$$u < Mv.$$

Pareillement, la différence

$$Mv + u$$

est positive sur C, et l'on aura, par suite,

$$u > -Mv.$$

Il résulte des deux inégalités précédentes

$$-Mq < u_A < Mq,$$

ce qui démontre le lemme énoncé.

Une fois le lemme établi, on peut répéter l'analyse développée plus haut. On pourra seulement employer, en quelque sorte, deux fois le lemme, et alors, si l'on désigne par q le plus grand nombre (inférieur à 1) correspondant au lemme, d'une part, pour tous les points de γ considérée comme courbe intérieure à l'aire limitée par Γ, et, d'autre part, pour tous les points de Γ considérée comme courbe intérieure à l'aire limitée par γ et C, on aura

$$\text{max. de } |u_n - u_{n-1}| \text{ sur } \Gamma < q^2 \times \text{max. de } |u_{n-1} - u_{n-2}| \text{ sur } \Gamma,$$

les notations étant par ailleurs les mêmes; on voit que nous avons ici q^2 au lieu de q dans le second membre.

Il est presque inutile de faire encore la remarque que tout ceci s'applique immédiatement dans le cas d'un nombre quelconque de variables.

Je remarque, en terminant, que le procédé dont je viens de me servir, appliqué avec précautions, peut être utile dans beaucoup de cas; c'est ainsi que je l'ai employé (*Journal de Mathématiques*, 1893) pour l'étude des intégrales de l'équation non linéaire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u \qquad (k > 0);$$

mais des difficultés réelles se présentaient, pour cette équation, qui ne se rencontrent pas dans les équations linéaires que nous venons d'étudier. Ici encore, on passe immédiatement de deux à trois variables, et nous pouvons par exemple obtenir de cette manière l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = ke^u \qquad (k > 0),$$

prenant des valeurs données sur une surface fermée.