JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GUICHARD

# Sur la déformation des surfaces

*Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série*, tome 2 (1896), p. 123-215.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__123_0>

# *Sur la déformation des surfaces* (¹);

**Par M. GUICHARD,**

Professeur à la Faculté de Clermont.

## Introduction.

Nous avons cherché surtout à mettre en évidence les propriétés des lignes conjuguées qui se conservent dans la déformation. Nous avons suivi deux méthodes : dans la première Partie, nous faisons correspondre une congruence type (congruence dont les foyers sont conjugués par rapport à une quadrique) à tout couple de surfaces applicables. Tous les couples qui correspondent à une même congruence ont les mêmes propriétés comme direction d'éléments. Dans la deuxième Partie, c'est une surface qui correspond à un couple de surfaces applicables, les lignes asymptotiques de la surface correspondant aux lignes conjuguées. Tous les couples qui correspondent à une même surface ont encore mêmes directions. Nous avons donné d'abord la propriété caractéristique de ces systèmes conjugués, puis étudié les cas où ils se projettent sur un plan suivant un système orthogonal, suivant un système de courbes également inclinées sur deux directions fixes; le cas où la projection de l'un des systèmes est formé de droites; puis le cas où ces courbes sont courbes de contact de cylindres circonscrits à la surface; enfin le cas où ces lignes se coupent sous un angle constant, etc.

(¹) Ce Mémoire a obtenu la mention très honorable au concours du grand prix des Sciences mathématiques en 1894.

Nous avons fait usage de considérations sur l'espace à quatre dimensions. Nous appelons *surfaces* les variétés de points doublement indéterminés, *plan* les systèmes linéaires doublement infinis de points. La recherche des couples de surfaces applicables revient à celle des surfaces de l'espace à quatre dimensions qui sont applicables sur un plan. Ces surfaces jouissent de cette propriété caractéristique : c'est que leurs plans tangents sont normaux à une série de surfaces.

Nous avons dit quelques mots des théories qui se rattachent à la déformation. Nous avons montré que les systèmes conjugués qui se conservent dans la correspondance par orthogonalité des éléments sont à invariants égaux en coordonnées tangentielles.

Parmi les résultats obtenus, signalons les deux suivants :

1° Trouver tous les couples de surfaces applicables telles que la distance $d$ d'un point de la première à un point fixe et la distance $z$ du point correspondant de la seconde à un plan fixe soient liées par la relation

$$d^2 - z^2 = \text{const.};$$

nous montrons qu'on peut obtenir ces surfaces sous forme finie;

2° Trouver deux surfaces applicables, telles que les normales aux points correspondants forment un angle constant.

---

# PREMIÈRE PARTIE.

## MÉTHODE DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE.

---

### I. — Indication des notations employées.

Je me place ici au point de vue de M. Cayley. Je prendrai pour quadrique fondamentale la sphère dont l'équation en coordonnées ordinaires est

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Soit M un point, pris en dehors de cette sphère; on choisit le facteur de proportionnalité qui entre dans les quatre coordonnées, de telle sorte que la somme des carrés des quatre coordonnées soit égale à l'unité. Si $x$, $y$, $z$ sont les coordonnées ordinaires du point M, $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ les coordonnées non euclidiennes, on aura

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}, \qquad x_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}},$$
$$x_3 = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}, \qquad x_4 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}.$$

Si le point M décrit une courbe, la différentielle de l'arc de courbe sera donnée par

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Supposons en particulier que le point M décrive une droite D, prenons sur cette droite deux points conjugués

$$\mathrm{A}(x_1 x_2 x_3 x_4), \quad \mathrm{B}(y_1 y_2 y_3 y_4)$$

par rapport à la quadrique fondamentale. On aura d'abord

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 = 0,$$

et les coordonnées du point $\mathrm{M}(\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \mathrm{X}_3 \mathrm{X}_4)$ seront, en supprimant les indices,

$$\mathrm{X} = x\cos\varphi + y\sin\varphi.$$

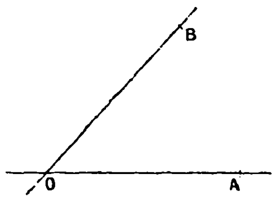
On trouve alors, en faisant varier $\varphi$,

$$ds = d\varphi.$$

La distance de deux points de la droite est égale à la différence des valeurs de $\varphi$ qui y correspondent. La distance de deux points conjugués est toujours égale à $\frac{\pi}{2}$.

*Angle de deux droites qui se coupent.* — Soient A, B les points qui, sur les droites, sont les conjugués de leur point de rencontre O; l'angle des deux droites est par définition égal à la distance AB.

Fig. 1.




Dans un triangle ABC, il y a six éléments, trois angles et trois côtés; entre ces éléments existent les relations de la Trigonométrie sphérique; on en déduit :

*Dans un triangle, un côté est plus petit que la somme des deux autres;*

*Le plus court chemin d'un point à un autre est la droite qui joint ces deux points.*

On appelle *normale* en un point d'un plan la droite qui joint ce point au pôle du plan. Cette droite est perpendiculaire à toutes celles qui passent par son pied dans le plan.

L'angle d'une droite et d'un plan est le complément de l'angle que fait cette droite avec la normale menée au point de rencontre de la droite et du plan.

Enfin, l'angle de deux plans est égal à la distance de leurs pôles.

La distance d'un point à un plan ou à une droite est la longueur de la perpendiculaire menée du point à la droite ou au plan.

La distance rectiligne de deux points

$$(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

est donnée par la formule

$$\cos\varphi = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4.$$

Il en résulte que le lieu des points $(x)$ situés à une distance $\varphi$ d'un point $(y)$ a pour équation

$$\cos^2\varphi(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2.$$

C'est une quadrique circonscrite à la quadrique fondamentale. Nous donnerons le nom de *sphère* à ces quadriques.

*Remarque.* — Aux quatre nombres $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, on peut faire correspondre soit un point M de l'espace non euclidien, soit un point N' situé dans l'espace à quatre dimensions sur la sphère

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=1.$$

Comme l'a remarqué M. Klein, on peut projeter stéréographiquement ce point N' dans l'espace à trois dimensions. On obtient ainsi un point N ayant pour coordonnées

$$X=\frac{2x_1}{1+x_4},\qquad Y=\frac{2x_2}{1+x_4},\qquad Z=\frac{2x_3}{1+x_4},$$

$$X^2+Y^2+Z^2=4\frac{1-x_4}{1+x_4}.$$

Appelons $ds$ la différentielle de l'arc décrit par M, $dS$ de celui décrit par N; on trouve

$$dS^2=4\frac{ds^2}{(1+x_4)^2}.$$

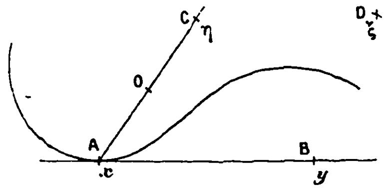
On voit facilement que l'angle de deux courbes qui se coupent en N est égal à l'angle non euclidien des courbes correspondantes qui se coupent en M.

## II. — Notions sur les courbes.

Je laisse de côté les cas particuliers où la courbe est une droite, où elle est située sur la quadrique fondamentale et enfin le cas où les tangentes à la courbe sont aussi tangentes à la quadrique fondamentale.

Soit $A(x_1x_2x_3x_4)$ un point de la courbe; sur la tangente en A, je prends le point $B(y_1y_2y_3y_4)$ conjugué de A; dans le plan osculateur, je mène la normale AC à la tangente. Cette droite AC est la *normale principale* en A; le point $C(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)$ est le conjugué de A. Enfin, je désigne par $D(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ le pôle du plan osculateur. La droite AD

Fig. 2.




sera la *binormale* à la courbe. Choisissons comme variable indépendante l'arc de courbe décrit par le point A et remarquons que les éléments du déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{vmatrix}$$

sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à quatre dimensions; on en déduit les formules

$$\frac{dx}{ds} = y, \qquad \frac{dy}{ds} = -x - a\eta, \qquad \frac{d\eta}{ds} = ay - b\xi, \qquad \frac{d\xi}{ds} = b\eta,$$

où nous avons supprimé les indices; il y entre deux fonctions $a$ et $b$ de $s$; $a$ est ce qu'on appelle la *courbure*, $b$ la *torsion*. Si $b$ est nul, le point D est fixe, la courbe est plane.

Le centre de courbure O est un point de la droite OC, dont les coordonnées sont

$$x \cos\varphi + \eta \sin\varphi.$$

La distance $AO = \varphi$ est donnée par l'équation

$$\cos\varphi + a \sin\varphi = 0.$$

On vérifie facilement que la caractéristique du plan normal ACD est la droite OD.

Soit maintenant $M(X_1 X_2 X_3 X_4)$ un point de la tangente. On pourra poser

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi.$$

On trouve en différentiant

$$dX = ds(y\cos\varphi - x\sin\varphi - a\sin\varphi\eta) + d\varphi(-x\sin\varphi + y\cos\varphi).$$

On voit que, si

$$d\varphi + ds = 0,$$

le point M décrit une courbe normale à AB; on tombe ainsi sur la théorie des *développantes*. On constituerait de même la théorie des *développées*. Comme dans la Géométrie ordinaire, les tangentes à deux développées forment un angle constant.

Enfin on trouve pour le $dS^2$ de la développable décrite par M

$$dS^2 = ds^2(1 + a^2\sin^2\varphi) + 2\,ds\,d\varphi + d\varphi^2;$$

$b$ n'entre pas dans cette expression. On en conclut que les développables sont aussi applicables sur le plan quand on se place au point de vue non euclidien.

## III. — Notions sur les surfaces.

Nous appellerons encore *géodésiques* les lignes les plus courtes qu'on peut tracer sur la surface. Ces géodésiques jouissent des mêmes propriétés que dans la Géométrie ordinaire : leur plan osculateur est normal à la surface; les tangentes à un système de géodésiques sont normales à une série de surfaces.

Les asymptotiques sont identiques dans les deux Géométries.

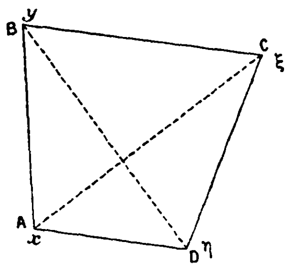
En un point d'une surface, on peut mener dans le plan tangent deux couples de droites : 1° les tangentes aux asymptotiques; 2° les tangentes à la quadrique fondamentale. Le faisceau qui divise harmoniquement ces deux couples est formé de tangentes conjuguées (sens de Dupin) rectangulaires (sens non euclidien). Ces droites sont tangentes à un système de courbes que nous appellerons *lignes de courbure*.

Nous développerons la théorie des lignes de courbure qui joue un rôle important dans la théorie de la déformation des surfaces.

### IV. — Surfaces rapportées à leurs lignes de courbure.

Soit $A(x_1 x_2 x_3 x_4)$ un point d'une surface; sur les tangentes aux lignes de courbure prenons les points $C(\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4)$ et $D(\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4)$ qui sont conjugués de A. Soit en outre $B(y_1 y_2 y_3 y_4)$ le pôle du plan ACD; B décrit la surface polaire réciproque de la surface décrite par A. Soient $u$ et $v$ les paramètres de la surface (A) rapportée à ses lignes

Fig. 3.




de courbure; quand $u$ varie seul, le point A décrit une courbe qui a pour tangente AC; la tangente à la courbe décrite par le point B sera BC, puisque cette droite est la polaire réciproque de AD qui est la conjuguée de AC (sens de Dupin). De même, quand $v$ varie seul, les points A et B décrivent des courbes qui ont respectivement pour tangentes AD et BD; si l'on remarque de plus que les coordonnées des points A, B, C, D sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à quatre dimensions, on aura les formules suivantes, où nous supprimons les indices :

$$
\text{(I)} \quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = a\xi, && \frac{\partial x}{\partial v} = b\eta, \\
&\frac{\partial y}{\partial u} = c\xi, && \frac{\partial y}{\partial v} = f\eta, \\
&\frac{\partial \xi}{\partial u} = -ax - cy - m\eta, && \frac{\partial \xi}{\partial v} = n\eta, \\
&\frac{\partial \eta}{\partial u} = m\xi, && \frac{\partial \eta}{\partial v} = -bx - fy - n\xi.
\end{aligned}
\right.
$$

En égalant les dérivées secondes par rapport à $u$ et $v$ des coordonnées, on trouve que les quantités $a$, $b$, $e$, $f$, $m$, $n$ doivent satisfaire aux relations

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, & \dfrac{\partial e}{\partial v} = fm, \\[2ex] \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, & \dfrac{\partial f}{\partial u} = en, \end{array}\right. \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial v} + ab + ef = 0.$$

La droite AB décrit une congruence rapportée à ses développables; les plans focaux de cette congruence sont les plans ABC, ABD; *ils sont conjugués*, par rapport à la quadrique fondamentale. De même, la droite CD décrit une congruence rapportée à ses développables; les foyers sont les points C et D; *ils sont conjugués* par rapport à la quadrique fondamentale. Il est facile de voir qu'on obtient ainsi toutes les congruences jouissant de ces propriétés.

Prenons maintenant sur AB deux points $M(X_1, X_2, X_3, X_4)$ et $N(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ conjugués. On pourra poser

$$X = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \qquad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

On aura alors, si l'on tient compte des relations (1),

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \phantom{-}Y\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \xi(a\cos\varphi + e\sin\varphi), \\ \frac{\partial Y}{\partial u} &= -X\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \xi(-a\sin\varphi + e\cos\varphi), \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \phantom{-}Y\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \eta(b\cos\varphi + f\sin\varphi), \\ \frac{\partial Y}{\partial v} &= -X\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \eta(-b\sin\varphi + f\cos\varphi). \end{aligned}\right.$$

On voit d'abord que, si $\varphi$ est constant, les points M et N décrivent des surfaces normales à AB. Ces surfaces sont rapportées à leurs lignes de courbures; les tangentes de courbure en M sont MC et MD. Ces surfaces seront dites *parallèles* à la surface décrite par A.

Si l'on remplace les points A et B par les points M et N ($\varphi$ constant), les quantités $m$ et $n$ ne changent pas, mais $a$, $b$, $e$, $f$ prennent les valeurs

$$a_1 = a\cos\varphi + e\sin\varphi, \qquad e_1 = -a\sin\varphi + e\cos\varphi,$$
$$b_1 = b\cos\varphi + f\sin\varphi, \qquad f_1 = -b\sin\varphi + f\cos\varphi.$$

On voit que l'on a

$$a_1^2 + e_1^2 = a^2 + e^2, \qquad b_1^2 + f_1^2 = b^2 + f^2,$$
$$a_1 f_1 - b_1 e_1 = af - be, \qquad a_1 b_1 + e_1 f_1 = ab + ef.$$

Ces quantités, qui ne changent pas quand on remplace la surface par une surface parallèle, ou, ce qui revient au même, ne dépendent que de la congruence décrite par AB, seront les *invariants* de cette congruence. Nous donnerons la signification géométrique de l'annulation des deux derniers.

Les formules (3) permettent de déterminer facilement les foyers de la congruence décrite par AB. Ces foyers $C_1$, $C_2$ sont appelés les *centres de courbure* de la surface (A). Les valeurs de $\varphi$ qui y correspondent sont données par les formules : pour $C_1$,

$$a\cos\varphi + e\sin\varphi = 0;$$

pour $C_2$,

$$b\cos\varphi + f\sin\varphi = 0.$$

Les rayons de courbure $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont donnés par les formules

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{a}{e}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_2 = -\frac{b}{f}.$$

Si $af - be = 0$, les deux rayons de courbure sont égaux ; les formules (11) montrent alors que

$$a\frac{\partial e}{\partial v} - e\frac{\partial a}{\partial v} = 0, \qquad \text{et} \qquad b\frac{\partial f}{\partial u} - f\frac{\partial b}{\partial u} = 0.$$

Les deux rapports égaux $\frac{a}{e}$, $\frac{f}{b}$ sont constants. Les formules (3) montrent alors que $C_1$ est fixe ; la surface (A) est une sphère.

Si $ab+ef=0$, on a

$$\varphi_2-\varphi_1=\frac{\pi}{2}.$$

Les surfaces (A), qui correspondent à ce cas, surfaces que nous appellerons *surfaces* $\Sigma$, jouissent de propriétés spéciales au point de vue de la déformation. Elles sont étudiées en détail plus loin. Dans ce cas, la droite AB décrit une congruence dont les plans focaux et les foyers sont conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. Il en est de même de la congruence décrite par CD.

Cherchons maintenant les lignes asymptotiques de la surface (A). En différentiant les formules (1), on trouve

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}&=-x(b^2)-ybf-\xi\,bn+\eta\frac{\partial b}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}&=\xi\frac{\partial a}{\partial v}+\eta\frac{\partial b}{\partial u}.\\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}&=-x(a^2)-yae+\xi\frac{\partial a}{\partial u}+\eta(-am),\end{aligned}\right.$$

On obtiendra l'équation différentielle des lignes asymptotiques en écrivant que, dans l'expression

$$d^2x=\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2+2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv+\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2,$$

le coefficient de $y$ est nul, ce qui donne

$$ae\,du^2+bf\,dv^2=0,$$

ou

$$\frac{du}{\sqrt{bf}}=\frac{dv}{\pm i\sqrt{ae}}.$$

Les points où les tangentes asymptotiques rencontrent CD ont leurs coordonnées proportionnelles aux quantités

$$\xi a\sqrt{bf}\pm i\eta b\sqrt{ae},$$

ou

$$\xi\sqrt{af}\pm i\eta\sqrt{be}.$$

Si les tangentes asymptotiques sont tangentes à la quadrique fondamentale, on a

$$af = be;$$

la surface est une sphère. Tous les systèmes conjugués sont orthogonaux.

Si ces tangentes sont conjuguées par rapport à la quadrique fondamentale, ou orthogonales, on aura

$$af + be = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang}\varphi_1 + \operatorname{tang}\varphi_2 = 0.$$

Ces rayons de courbure sont égaux et de signes contraires. Ce sont les *surfaces minima* non euclidiennes.

Cherchons dans quels cas les lignes asymptotiques se correspondent sur toutes les surfaces parallèles. On devra avoir, quel que soit $\varphi$,

$$\frac{a_1 e_1}{b_1 f_1} = \frac{ae}{bf},$$

ce qui donne, en effectuant,

$$(af - be)(ab + ef) = 0.$$

Le fait peut donc se produire, soit dans le cas des sphères, soit dans le cas des surfaces $\Sigma$.

L'équation différentielle des asymptotiques de la surface des centres décrite par $C_1$ est

$$\left(a\frac{\partial e}{\partial u} - e\frac{\partial a}{\partial u}\right)du^2 + \left(f\frac{\partial b}{\partial u} - b\frac{\partial f}{\partial u}\right)dv^2 = 0,$$

et, pour la surface $C_2$,

$$\left(a\frac{\partial e}{\partial v} - e\frac{\partial a}{\partial v}\right)du^2 + \left(f\frac{\partial b}{\partial v} - b\frac{\partial f}{\partial v}\right)dv^2 = 0.$$

Si les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface des centres, $\frac{a}{e}$ est fonction de $\frac{b}{f}$. Les deux rayons de courbure de la surface (A) sont liés par une relation. Ces surfaces seront appelées les *surfaces non euclidiennes de M. Weingarten*.

### V. — Projection stéréographique des lignes de courbure.

Des équations (1) du paragraphe précédent on déduit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \tag{1}$$

et, de même,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{e}\frac{\partial e}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{1'}$$

L'équation (1) admet pour solutions

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4.$$

Cela posé, faisons la projection stéréographique indiquée dans la remarque du § I.

L'équation (1) admet évidemment les solutions

$$2x_1, \quad 2x_2, \quad 2x_3, \quad 1-x_4, \quad 1+x_4.$$

On en conclut que les quantités (§ I)

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad X^2+Y^2+Z^2, \quad 1$$

satisfont à une équation de Laplace. La projection stéréographique de la surface (A) est donc rapportée à ses lignes de courbure (sens ordinaire). Réciproquement, à toute surface rapportée à ses lignes de courbure on peut faire correspondre le système étudié dans le paragraphe précédent.

La transformation ponctuelle indiquée (§ I) transforme donc les lignes de courbure (sens ordinaire), en lignes de courbure non euclidiennes.

Le $dS^2$ de la projection stéréographique sera

$$dS^2 = \frac{4}{(1+x_4)^2}(a^2\,du^2 + b^2\,dv^2).$$

Si $a = \pm b$, on obtient une surface isotherme.

### VI. — Sur un cas particulier de couples de surfaces applicables.

On voit que la recherche des couples de surfaces applicables revient à celle des surfaces de l'espace à quatre dimensions, qui sont applicables sur le plan. Cherchons parmi ces surfaces celles qui sont situées sur l'hypersphère

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1.$$

On peut remplacer la surface cherchée par la surface correspondante de l'espace non euclidien et supposer cette dernière rapportée à ses lignes de courbure. Il faut exprimer alors que

$$a^2\,du^2 + b^2\,dv^2$$

est le $ds^2$ d'un plan; ce qui donne

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial b}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{b}\frac{\partial a}{\partial v}\right),$$

ou, en tenant compte des formules (2) (§ IV),

$$(1) \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} = 0, \qquad ab + ef = 0,$$

on tombe sur les surfaces $\Sigma$, que nous allons déterminer. La seconde des relations (1) permet de poser

$$\begin{aligned} a &= \rho\cos\varphi, & e &= \rho\sin\varphi,\\ b &= r\sin\varphi, & f &= -r\cos\varphi. \end{aligned}$$

Les relations (2) (§ IV) donnent ensuite

$$\cos\varphi\frac{\partial\rho}{\partial v}-\rho\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}=mr\sin\varphi,\qquad \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial u}+r\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}=n\rho\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi\frac{\partial\rho}{\partial v}+\rho\cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v}=-mr\cos\varphi,\quad -\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial u}+r\sin\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial u}=n\rho\sin\varphi.$$

On en déduit

$$\frac{\partial\rho}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial r}{\partial u}=0.$$

On peut, en choisissant convenablement les variables $u$ et $v$, supposer

$$\rho=1,\qquad r=1.$$

On trouve ensuite

$$m=-\frac{\partial\varphi}{\partial v},\qquad n=\frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

d'où la condition

$$\frac{\partial^2\varphi}{dv^2}-\frac{d^2\varphi}{du^2}=0,$$

ce qui donne

$$\varphi=F(u+v)+F_1(u-v),$$

F et $F_1$ étant deux fonctions arbitraires.

Les formules (1) (§ IV) deviennent

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u}=\cos\varphi\xi, && \frac{\partial x}{\partial v}=\sin\varphi\eta,\\
&\frac{\partial y}{\partial u}=\sin\varphi\xi, && \frac{\partial y}{\partial v}=-\cos\varphi\eta,\\
&\frac{\partial\xi}{\partial u}=-\cos\varphi x-\sin\varphi y+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\eta, && \frac{\partial\xi}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\eta,\\
&\frac{\partial\eta}{\partial u}=-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\xi, && \frac{\partial\eta}{\partial v}=-x\sin\varphi+y\cos\varphi-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\xi.
\end{aligned}\right.$$

Pour achever la détermination de ces surfaces, il faudrait intégrer le système (2); mais nous les obtiendrons plus loin, sous forme finie, par une autre méthode (§ X).

Les lignes asymptotiques de la surface (A) sont

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

On trouve aussi la même équation pour celles des surfaces des centres. Toutes les surfaces parallèles à (A) jouissent de la même propriété. Nous verrons plus loin qu'il en est de même des surfaces des centres. Nous étudierons, dans le paragraphe suivant, les principales propriétés des surfaces $\Sigma$; nous allons indiquer ici les formules qui donnent les deux surfaces applicables.

La première surface a pour coordonnées

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3;$$

la deuxième,

$$+ix_4, \quad X, \quad Y:$$

X et Y sont données à l'aide de quadratures

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \cos\theta \cos\varphi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial u} = \sin\theta \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \sin\theta \sin\varphi, \qquad \frac{\partial Y}{\partial v} = -\cos\theta \sin\varphi,$$

où

$$\varphi = F(u+v) + F_1(u-v), \qquad \theta = -F(u+v) + F_1(u-v).$$

Ces deux couples de surfaces jouissent des propriétés suivantes :

1° *Le carré de la distance d'un point fixe* O *à un point quelconque* M *de la première surface est égal au carré de la distance du point correspondant* M' *de la seconde à un plan fixe* $\pi$, *augmenté de l'unité* (ou d'une constante, ce qui revient au même en prenant des surfaces homothétiques).

Nous obtenons ainsi tous les couples de surfaces applicables jouissant de cette propriété.

2° *Ces surfaces sont rapportées à leur système conjugué com-*

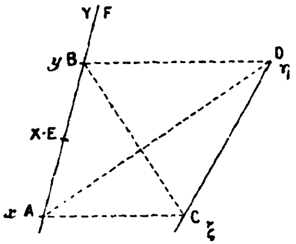
*mun; le système conjugué de la deuxième surface se projette sur le plan $\pi$ suivant un système orthogonal.*

Cette deuxième propriété appartient aussi à d'autres couples de surfaces applicables, ainsi que nous le verrons plus loin.

## VII. — Sur quelques propriétés des surfaces $\Sigma$.

Conservons le tétraèdre ABCD, mais prenons pour variables indé-

Fig. 4.




pendantes $u$, $v$ les paramètres des lignes asymptotiques de la surface A. Les formules du paragraphe précédent deviennent

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \xi \sin\varphi - \eta \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \xi \cos\varphi - \eta \sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \xi \sin\varphi + \eta \cos\varphi;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -x\cos\varphi - y\sin\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -x\sin\varphi + y\cos\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial u}\xi;$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = -x\cos\varphi - y\sin\varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial v}\eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = \quad x\sin\varphi - y\cos\varphi + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\xi,$$

avec la seule condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \varphi = F(u) + F_1(v).$$

Les centres de courbure $E(X_1 X_2 X_3 X_4)$, $F(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ de la surface A ont pour coordonnées

$$X = x\sin\varphi + y\cos\varphi, \qquad Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi.$$

On obtient des formules plus symétriques en introduisant le tétraèdre EFCD, c'est-à-dire les foyers des congruences (AB) et (CD). On obtient

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = Y\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \xi, & \dfrac{\partial Y}{\partial u} = -X\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - \eta, \quad \dfrac{\partial\xi}{\partial u} = -X + \eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial\eta}{\partial u} = \quad Y - \xi\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = Y\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \xi, & \dfrac{\partial Y}{\partial v} = -X\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \eta, \quad \dfrac{\partial\xi}{\partial v} = -X - \eta\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial\eta}{\partial v} = -Y + \xi\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}. \end{cases}$$

Sous cette forme, on vérifie facilement que les quatre surfaces (E), (F), (C), (D) sont rapportées à leurs asymptotiques. En effet, pour la surface E, on trouve

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = Y\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - X\left[1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right],$$

ce qui montre que $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}$ est un point du plan tangent, et par suite que les courbes $u$ variables sont des asymptotiques. Si de plus $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}$ est nul, $\dfrac{\partial^2 X}{\partial u^2}$ est proportionnel à X, ces courbes sont des droites. Les quatre surfaces E, F, C, D sont des surfaces réglées.

Nous allons montrer, en outre, que ces surfaces sont des surfaces $\Sigma$. Cherchons les centres de courbure de la surface E, c'est-à-dire les foyers de la congruence ED. Un point M $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ de la droite ED a pour coordonnées

$$x = X\cos\theta + \eta\sin\theta.$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial\theta}{\partial u}(-X\sin\theta + \eta\cos\theta) + Y\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \sin\theta\right) + \xi\left(\cos\theta - \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial\theta}{\partial v}(-X\sin\theta + \eta\cos\theta) + Y\left(\cos\theta\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \sin\theta\right) + \xi\left(\cos\theta + \sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

Les valeurs de $\theta$ correspondant aux foyers sont donnés

$$\begin{vmatrix} \cos\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \sin\theta, & \cos\theta - \sin\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} \\ \cos\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \sin\theta, & \cos\theta + \sin\theta\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(2)\quad \cos^2\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+2\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+1\right)-\sin^2\theta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)=0,$$

ce qui montre que ces foyers sont conjugués par rapport à la quadrique fondamentale et que (E) est une surface $\Sigma$.

On obtiendra donc un tétraèdre analogue au tétraèdre EFCD, en prenant les foyers des deux droites ED, CF. La fonction $\varphi$ est remplacée par la fonction $\theta$ donnée par l'équation (2). Pour trouver la valeur de $\theta$, posons

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\operatorname{tang}\alpha,\qquad \frac{\partial\varphi}{\delta v}=\operatorname{tang}\beta,$$

$\alpha$ est fonction de $u$ seul, $\beta$ de $v$ seul; l'équation (2) donne ensuite

$$\operatorname{tang}(\alpha-\beta)+\operatorname{tang}2\theta=0,$$

d'où

$$\theta=\frac{\beta-\alpha}{2}.$$

On voit que d'une surface $\Sigma$ on peut en déduire une infinité d'autres.

On vérifierait aussi facilement que la droite EC est normale à une série de surfaces, comme les foyers de cette droite, qui sont E et C, sont conjugués; cette série est formée de surfaces $\Sigma$.

Tous ces résultats pouvaient être prévus de la façon suivante. Considérons une surface dans l'espace non euclidien, rapportée à un système de géodésiques et à ses trajectoires orthogonales. Le $ds^2$ est de la forme

$$ds^2=du^2+a^2\,dv^2.$$

Les tangentes aux courbes $v=$ const. sont normales à une série de surfaces; la distance $\varphi$ des deux centres de courbure est donnée par la formule

$$\operatorname{tang}\varphi=-\frac{a}{\dfrac{\partial a}{\partial u}}.$$

Si la série est formée de surfaces $\Sigma$, on aura

$$\frac{\partial a}{\partial u} = 0, \qquad a = 1.$$

La surface des centres est elle-même applicable sur un plan. Les géodésiques $v = \text{const.}$ correspondent à une série de droites parallèles du plan. Les courbes $u = \text{const.}$ correspondent à la série de droites rectangulaires, c'est ce qui explique que les droites EC sont normales à un système de surfaces $\Sigma$.

## VIII. — Surfaces minima non euclidiennes.

On doit avoir dans ce cas (§ IV)

$$af + be = 0.$$

On peut donc poser

$$e = a\rho, \qquad f = -b\rho.$$

Les formules du § IV donnent ensuite

$$\rho \frac{\partial a}{\partial v} + a \frac{\partial \rho}{\partial v} = -\rho bm = -\rho \frac{\partial a}{\partial v},$$

$$-b \frac{\partial \rho}{\partial u} - \rho \frac{\partial b}{\partial u} = an\rho \quad = \rho \frac{\partial b}{\partial u},$$

ou

$$2\rho \frac{\partial a}{\partial v} + a \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(a^2\rho) = 0,$$

$$2\rho \frac{\partial b}{\partial u} + b \frac{\partial \rho}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial u}(b^2\rho) = 0.$$

On peut poser

$$a^2\rho = 1, \qquad b^2\rho = 1.$$

Prenons comme inconnue $\varphi$, en faisant

$$\rho = e^{-2\varphi},$$

on trouve alors

$$a = e^{\varphi}, \qquad e = e^{-\varphi},$$
$$b = e^{\varphi}, \qquad f = -e^{-\varphi},$$

puis ensuite

$$m = \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad n = \frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

On arrive enfin à la condition

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0.$$

Cette équation intervient dans la recherche des surfaces à courbure totale constante. M. Darboux a déjà indiqué que la recherche de ces deux groupes de surfaces est identique.

On a donc pour ces surfaces les formules

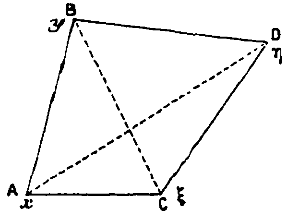
$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = e^{\varphi}\xi, & \dfrac{\partial x}{\partial v} = e^{\varphi}\eta, \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} = e^{-\varphi}\xi, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = -e^{-\varphi}\eta, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -e^{\varphi}x - e^{-\varphi}y - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\eta, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\eta, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\xi, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = -e^{\varphi}x + e^{-\varphi}y - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\xi. \\ \multicolumn{2}{c}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} + \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0.} \end{array} \right.$$

On peut remarquer que les projections stéréographiques des surfaces (A) et (B) sont des surfaces isothermiques.

Il nous sera utile, dans la suite, d'avoir ces mêmes surfaces rapportées à leurs asymptotiques; soient toujours $A(x)$ et $B(y)$ les points correspondants des deux surfaces, par $C(\xi)$ et $D(\eta)$ les points où les tangentes asymptotiques coupent la polaire réciproque de AB.

Quand $u$ varie seul, le point A décrit une ligne asymptotique dont la tangente est AC, le point B décrit une asymptotique, dont la tangente est la polaire réciproque BD; de même, quand $v$ varie seul, les tangentes aux courbes décrites par A et B sont AD et AC. On doit

Fig. 5.




donc avoir des formules de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\xi, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = e\eta, \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -ax - m\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -ey + m\xi,$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = by, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = f\xi, \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -fy + n\eta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = -bx - n\xi.$$

En écrivant que ces formules sont compatibles, on trouve

$$\frac{\partial a}{\partial v} = bm, \quad \frac{\partial e}{\partial v} = -fm$$
$$\frac{\partial b}{\partial u} = an, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = -en$$
$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab - ef = 0$$
$$af = be.$$

On peut poser

$$e = a\rho, \quad f = b\rho.$$

Les premières relations donnent ensuite

$$\frac{\partial}{\partial v}(a^2\rho) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}(b^2\rho) = 0.$$

On peut prendre

$$a^2\rho = 1, \quad b^2\rho = 1.$$

Faisons $\rho = e^{-2\varphi}$, on trouve

$$a = e^{\varphi}, \quad b = e^{\varphi},$$
$$e = e^{-\varphi}, \quad f = e^{-\varphi},$$

puis

$$m = \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad n = \frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

avec la condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0.$$

On a alors le Tableau de formules

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial x}{\partial u} = e^{\varphi}\xi, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = e^{-\varphi}\eta, & \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = -e^{\varphi}x - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\eta, & \dfrac{\partial \eta}{\partial u} = -e^{-\varphi}y + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\xi, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = e^{\varphi}\eta, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = e^{-\varphi}\xi, & \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = -e^{-\varphi}y + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\eta, & \dfrac{\partial \eta}{\partial v} = -e x - \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\xi. \\ \multicolumn{4}{c}{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + e^{2\varphi} - e^{-2\varphi} = 0.} \end{array}\right.$$

### IX. — Les ooordonnées de la ligne droite.

Soit une droite D; prenons sur cette droite deux points A $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ et B $(y_1 y_2 y_3 y_4)$ conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. Nous prendrons comme coordonnées plukériennes de D six quantités, dont les trois premières sont proportionnelles aux projections (sens ordinaire) de AB sur les trois axes de coordonnées; les trois secondes proportionnelles aux projections du moment de AB par rapport à l'origine. (Dans la suite, nous écrirons toujours en première ligne les premières coordonnées d'une droite, ensuite les secondes coordonnées.) Nous fixons le facteur de proportionnalité, *au signe près*, en écrivant les coordonnées de D ainsi

$$\begin{aligned} X &= x_1 y_4 - y_1 x_4, & L &= x_2 y_3 - y_2 x_3, \\ Y &= x_2 y_4 - y_2 x_4, & M &= x_3 y_1 - y_3 x_1, \\ Z &= x_3 y_4 - y_3 x_4, & N &= x_1 y_2 - y_1 x_2. \end{aligned}$$

Quand on déplace les points A et B sur D, les quantités X, Y, Z, L, M, N restent fixes au signe près. Ces quantités vérifient, outre la relation

$$LX + MY + NZ = 0,$$

qui existe entre les coordonnées d'une droite, la relation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 1,$$

ou

$$(X \pm L)^2 + (Y \pm M)^2 + (Z \pm N)^2 = 1,$$

qui tient au choix du facteur de proportionnalité. Dans la dernière relation, il faut faire correspondre les signes.

Cela posé, soit $A(x)$, $B(y)$, $C(\xi)$, $D(\eta)$ un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique fondamentale, choisissons les signes des coordonnées de telle sorte que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}$$

soit égal à $+1$. On sait que, dans ce cas, chaque élément est égal à son coefficient dans le déterminant; de même, chaque mineur à deux éléments est égal au mineur qui le multiplie dans l'expression du déterminant. Il en résulte que, pour passer des coordonnées d'une arête à celle de ses polaires réciproques, il suffit d'échanger les premières et les secondes coordonnées.

Les coordonnées des six arêtes du tétraèdre ABCD sont alors

$$\text{AB}\left\{\begin{array}{ll} L = x_1 y_4 - y_1 x_4, & X = x_2 y_3 - y_2 x_3, \\ M = x_2 y_4 - y_2 x_4, & Y = x_3 y_1 - y_3 x_1, \\ N = x_3 y_4 - y_3 x_4, & Z = x_1 y_2 - y_1 x_2, \end{array}\right.$$

$$\text{AC}\left\{\begin{array}{ll} L_1 = x_1 \xi_4 - \xi_1 x_4, & X_1 = x_2 \xi_3 - \xi_2 x_3, \\ M_1 = x_2 \xi_4 - \xi_2 x_4, & Y_1 = x_3 \xi_1 - \xi_3 x_1, \\ N_1 = x_3 \xi_4 - \xi_3 x_4. & Z_1 = x_1 \xi_2 - \xi_1 x_2, \end{array}\right.$$

$$\text{AD}\left\{\begin{array}{ll} L_2 = x_1 \eta_4 - \eta_1 x_4, & X_2 = x_2 y_3 - x_3 \eta_2, \\ M_2 = x_2 \eta_4 - \eta_2 x_4, & Y_2 = x_3 \eta_1 - x_1 \eta_3, \\ N_2 = x_3 \eta_4 - \eta_3 x_4, & Z_2 = x_1 \eta_2 - x_2 \eta_1, \end{array}\right.$$

$$
\mathrm{CD}\left\{\begin{array}{ll}
X = \xi_1\eta_1 - \eta_1\xi_1, & L = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2, \\
Y = \xi_2\eta_1 - \eta_2\xi_1, & M = \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3, \\
Z = \xi_3\eta_1 - \eta_3\xi_1, & N = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1,
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{DB}\left\{\begin{array}{ll}
X_1 = \eta_2 y_1 - y_1\eta_1, & L_1 = \eta_2 y_3 - y_2\eta_3, \\
Y_1 = \eta_1 y_1 - y_2\eta_1, & M_1 = \eta_3 y_1 - y_3\eta_1, \\
Z_1 = \eta_3 y_1 - y_3\eta_1, & N_1 = \eta_1 y_2 - y_1\eta_2,
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{BC}\left\{\begin{array}{ll}
X_2 = y_1\xi_1 - \xi_1 y_1, & L_2 = y_2\xi_3 - \xi_2 y_3, \\
Y_2 = y_2\xi_1 - \xi_2 y_1, & M_2 = y_3\xi_1 - \xi_3 y_1, \\
Z_2 = y_3\xi_1 - \xi_3 y_1, & N_2 = y_1\xi_2 - \xi_1 y_2.
\end{array}\right.
$$

En écrivant que AB rencontre AC et DB, on a

$$LX_1 + MY_1 + NZ_1 + XL_1 + YM_1 + ZN_1 = 0,$$

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 + XX_1 + YY_1 + ZZ_1 = 0,$$

d'où

$$(L \pm X)(L_1 \pm X_1) + (M \pm Y)(M_1 \pm Y_1) + (N \pm Z)(N_1 \pm Z_1) = 0.$$

On en conclut que les quantités

$$
\begin{array}{lll}
X \pm L, & Y \pm M, & Z \pm N, \\
X_1 \pm L_1, & Y_1 \pm M_1, & Z_1 \pm N_1, \\
X_2 \pm L_2, & Y_2 \pm M_2, & Z_2 \pm N_2,
\end{array}
$$

où les signes se correspondent, sont les coefficients d'une substitution orthogonale dans l'espace à trois dimensions.

Il y a beaucoup de relations entre ces quantités; nous signalerons seulement celles qui nous seront utiles. On a d'abord

$$YZ_1 - ZY_1 = \eta_1[y_1(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) - \eta_1(\xi_2 y_3 - \xi_3 y_2) + \xi_1(\eta_2 y_3 - \eta_3 y_2) = \eta_1 x_1,$$

en remarquant que $x_1$ est égal au déterminant

$$x_1 = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_1 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_1 \\ \eta_2 & \eta_3 & \eta_3 \end{vmatrix}.$$

On a donc les formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} YZ_1 - ZY_1 &= \eta_1 x_1,\\ ZX_1 - XZ_1 &= \eta_1 x_2,\\ XY_1 - YX_1 &= \eta_1 x_3,\\ LX_1 + MY_1 + NZ_1 &= \eta_1 x_4. \end{aligned}\right.$$

Les premiers membres sont les coordonnées homogènes de A; on aurait encore ces coordonnées en remplaçant l'indice 1 par l'indice 2; le facteur de proportionnalité serait $\xi_1$ au lieu de $\eta_1$.

Nous donnerons, en outre, la valeur des déterminants à trois éléments que l'on peut former avec les coordonnées des droites. (Nous n'écrivons que la première colonne de chaque déterminant, les deux autres s'en déduisent en remplaçant X et L soit par Y et M, soit par Z et N et en mettant les mêmes indices.) Nous obtenons les résultats suivants :

$$\begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} \begin{vmatrix} L \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = y_1^2, & \begin{vmatrix} L_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = y_1 \xi_1, & \begin{vmatrix} L_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = y_1 \eta_1, \\[2ex] \begin{vmatrix} L \\ X_2 \\ X \end{vmatrix} = \xi_1 y_1, & \begin{vmatrix} L_1 \\ X_2 \\ X \end{vmatrix} = \xi_1^2, & \begin{vmatrix} L_2 \\ X_2 \\ X \end{vmatrix} = \xi_1 \eta_1, \\[2ex] \begin{vmatrix} L \\ X \\ X_1 \end{vmatrix} = y_1 \eta_1, & \begin{vmatrix} L_1 \\ X \\ X_1 \end{vmatrix} = \xi_1 \eta_1, & \begin{vmatrix} L_2 \\ X \\ X_1 \end{vmatrix} = \eta_1^2. \end{array}\right.$$

$$\begin{vmatrix} L \\ L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} = x_1^2,$$

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned}
&\begin{vmatrix} X \\ L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} = 0, &\quad &\begin{vmatrix} X_1 \\ L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} = x_1\eta_1, &\quad &\begin{vmatrix} X_2 \\ L_1 \\ L_2 \end{vmatrix} = -x_1\xi_1, \\
&\begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L \end{vmatrix} = -x_1\eta_1, &\quad &\begin{vmatrix} X_1 \\ L_2 \\ L \end{vmatrix} = 0, &\quad &\begin{vmatrix} X_2 \\ L_2 \\ L \end{vmatrix} = x_1 y_1, \\
&\begin{vmatrix} X \\ L \\ L_1 \end{vmatrix} = x_1\xi_1, &\quad &\begin{vmatrix} X_1 \\ L \\ L_1 \end{vmatrix} = -x_1 y_1, &\quad &\begin{vmatrix} X_2 \\ L \\ L_1 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned} \right.$$

## X. — Détermination des surfaces $\Sigma$.

Appliquons les formules du paragraphe précédent en prenant comme tétraèdre conjugué le tétraèdre E, F, C, D (§ VII). En tenant compte des formules (I, § VII), on trouve

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -X_2 - L_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial u} = -L_2 - X_2,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = X_2 - L_2, \qquad \frac{\partial L}{\partial v} = L_2 - X_2,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(L_2 + X_2), \qquad \frac{\partial L_1}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(X_2 + L_2),$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(-X_2 + L_2), \qquad \frac{\partial L_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(-L_2 + X_2),$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial u} = X + L + \frac{\partial \varphi}{\partial u}(X_1 + L_1), \qquad \frac{\partial L_2}{\partial u} = L + X - \frac{\partial \varphi}{\partial u}(L_1 + X_1),$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial v} = -X + L + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(X_1 - L_1), \qquad \frac{\partial L_2}{\partial v} = -L + X + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(L_1 - X_1)$$

avec les formules analogues obtenues en remplaçant X et L soit par Y et M, soit par Z et N. On en déduit

$$\frac{\partial}{\partial u}(X+L) = -2(X_2+L_2), \qquad \frac{\partial}{\partial u}(X-L) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(X+L) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(X-L) = 2(X_2-L_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(X_1+L_1) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(X_2+L_2), \qquad \frac{\partial}{\partial u}(X_1-L_1) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(X_1+L_1) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(X_1-L_1) = -2\frac{\partial\varphi}{\partial v}(X_2-L_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(X_2+L_2) = 2(X+L) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial u}(L_1+X_1), \qquad \frac{\partial}{\partial u}(X_2-L_2) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(X_2+L_2) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(X_2-L_2) = -2(X-L)+2\frac{\partial\varphi}{\partial v}(X_1-L_1).$$

On en conclut que les quantités

$$\begin{array}{lll} X+L, & Y+M, & Z+N, \\ X_1+L_1, & Y_1+M_1, & Z_1+N_1, \\ X_2+L_2, & Y_2+M_2, & Z_2+N_2 \end{array}$$

ne dépendent que de $u$, et comme ces quantités sont les coefficients d'une substitution orthogonale, on obtient leurs valeurs ainsi : Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées d'un point $m$, d'une courbe $c$ tracée sur la sphère de rayon 1 ; $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ les cosinus directeurs de la tangente en $m$ à la courbe $c$; $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ ceux de la normale au cône qui a pour sommet l'origine et pour base la courbe $c$. On aura

$$\begin{array}{lll} X+L=\alpha, & Y+M=\beta, & Z+N=\gamma, \\ X_1+L_1=\alpha_2, & Y_1+M_1=\beta_2, & Z_1+N_1=\gamma_2, \\ X_2+L_2=\alpha_1, & Y_2+M_2=\beta_1, & Z_2+N_2=\gamma_1, \end{array}$$

et pour l'arc de courbe décrit par $m$, on trouve

$$ds = 2du,$$

ce qui fixe le sens de la variable $u$; enfin on voit que la courbure géodésique de $c$ est $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$.

De même, en traçant sur la sphère de rayon 1 une courbe $c'$, tel que

$$ds' = 2 dv,$$

et dont la courbure géodésique est $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$, on aura

$$\begin{array}{lll} X - L = \alpha', & Y - M = \beta', & Z - N = \gamma', \\ X_1 - L_1 = \alpha'_2, & Y_1 - M_1 = \beta'_2, & Z_1 - N_1 = \gamma'_2, \\ X_2 - L_2 = \alpha'_1, & Y_2 - M_2 = \beta'_1, & Z_2 - N_2 = \gamma'_1. \end{array}$$

On a donc déjà les coordonnées des six arêtes du tétraèdre EFCD. En appliquant les formules (1) (§ IX), on obtiendra des quantités proportionnelles aux coordonnées $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ du point E. On trouve

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= (\beta + \beta')(\gamma_1 + \gamma'_1) - (\gamma + \gamma')(\beta_1 + \beta'_1), \\ \lambda x_2 &= (\gamma + \gamma')(\alpha_1 + \alpha'_1) - (\alpha + \alpha')(\gamma_1 + \gamma'_1), \\ \lambda x_3 &= (\alpha + \alpha')(\beta_1 + \beta'_1) - (\beta + \beta')(\alpha_1 + \alpha'_1), \\ \lambda x_4 &= (\alpha - \alpha')(\alpha_1 + \alpha'_1) + (\beta - \beta')(\beta_1 + \beta'_1) + (\gamma - \gamma')(\gamma_1 + \gamma'_1). \end{aligned}$$

On en déduit facilement $\lambda$, et ensuite $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Il est facile de former les deux surfaces applicables. Les formules (1) (§ VIII) donnent, pour le $ds^2$ du point E,

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 \\ &= \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) du\, dv + \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right] dv^2 \\ &= [d(u + v)]^2 + d\varphi^2. \end{aligned}$$

Les coordonnées des deux surfaces applicables sont :

Pour la première,

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3;$$

Pour la seconde,

$$ix_4, \quad u+v, \quad \varphi.$$

*Remarque.* — Si la courbe $c$, par exemple, est un petit cercle, $\Sigma$ est une surface réglée, car alors $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$ est constant.

La première surface $(x_1, x_2, x_3)$ sera, en général, un lieu de coniques ayant leur centre à l'origine.

## XI. — Sur certains couples de surfaces applicables.

Nous avons déterminé (§ VIII et X) les courbes de surfaces applicables $S_1(x, y, z)$, $S_2(x', y', z')$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 = 1.$$

On peut, par une homographie, remplacer l'unité par une constante quelconque différente de zéro.

Nous allons étudier directement le cas où le second membre est nul; la solution, que nous rattachons à la théorie des surfaces minima, sera présentée sous forme synthétique. On verrait facilement que la relation donnée est la plus générale.

La recherche d'une surface minima, rapportée à ses asymptotiques, revient à trouver quatre solutions d'une équation de M. Moutard,

$$\text{(1)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta,$$

liées par la relation

$$\text{(2)} \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \rho^2 = 0.$$

On en déduit

$$\text{(3)} \qquad \left\{\begin{aligned} \xi\frac{\partial\xi}{\partial u} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial u} + \zeta\frac{\partial\zeta}{\partial u} - \rho\frac{\partial\rho}{\partial u} &= 0,\\ \xi\frac{\partial\xi}{\partial v} + \eta\frac{\partial\eta}{\partial v} + \zeta\frac{\partial\zeta}{\partial v} - \rho\frac{\partial\rho}{\partial v} &= 0.\end{aligned}\right.$$

En différentiant la première de ces équations par rapport à $v$ et en tenant compte de 1 et 2, on trouve

$$(4)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}-\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial v}=0.$$

Posons maintenant

$$\mathrm{E}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2-\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\right)^2,$$

$$\mathrm{G}=\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2-\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}\right)^2.$$

En tenant compte de 1 et 3, on trouve

$$\frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}=0,\qquad \frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}=0,$$

En choisissant convenablement les variables $u$ et $v$ on peut poser

$$\mathrm{E}=1,\qquad \mathrm{G}=1.$$

Il en résulte que l'on a

$$d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2=d\rho^2+du^2+dv^2.$$

Les coordonnées des points correspondants des surfaces applicables :

Pour la première,

$$\xi,\quad \eta,\quad \zeta.$$

Pour la seconde,

$$\rho,\quad u,\quad v.$$

Ce couple jouit de la propriété suivante :

*La distance d'un point de la première surface à un point fixe est égale à la distance du point correspondant de la seconde à un plan fixe.*

On peut, d'ailleurs, rattacher ce cas particulier à la recherche des surfaces $\Sigma$. Prenons une surface $\Sigma$ rapportée à ses lignes de courbure; l'un des points M, où CD rencontre la quadrique fondamentale, a pour coordonnées,

$$X_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad X_2 = \xi_2 + i\eta_2, \quad X_3 = \xi_3 + i\eta_3, \quad X_4 = \xi_4 + i\eta_4,$$

on a bien

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 0.$$

Les formules (1) (§ VI) donnent ensuite

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -(x\cos\varphi + y\sin\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(\eta - i\xi),$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = i(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\eta - i\xi).$$

En faisant la somme des carrés et ajoutant, on trouve

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 = du^2 - dv^2.$$

Les deux surfaces cherchées ont pour coordonnées :
La première,

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3.$$

La seconde,

$$iX_4, \quad u, \quad iv.$$

## XII. — Les surfaces qui ont des lignes de courbure dans l'espace à quatre dimensions.

Soit $M(X_1, X_2, X_3, X_4)$ un point d'une surface dans l'espace à quatre dimensions. En laissant de côté le cas où il existe une relation linéaire entre $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$, on sait que ces quantités vérifient une seule équation de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + 2D\frac{\partial\theta}{\partial u} + 2E\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

Les caractéristiques de cette équation définissent ce qu'on appelle le *système conjugué* tracé sur la surface. Si la surface est rapportée à son système conjugué les quatre coordonnées vérifient une équation de la forme

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Si, de plus, ce système conjugué est formé de courbes qui se coupent à angles droits, nous dirons que la surface admet des *lignes de courbure*. Dans ce cas, l'équation (1) admet, en outre, la solution

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2,$$

et réciproquement.

Voici comment on peut obtenir de telles surfaces. Reprenons les équations du § IV et posons

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = h\xi, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial v} = l\eta. \end{cases}$$

Écrivons que ces équations sont compatibles, on trouve

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial v} = lm, \\[2mm] \dfrac{\partial l}{\partial u} = hn. \end{cases}$$

Les quatre coordonnées X vérifient en outre l'équation

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}.$$

La surface M est donc rapportée à un système conjugué, et les formules (2) montrent que ce système est orthogonal. Nous dirons que la surface A ou B (§ IV) est la représentation sphérique de la surface M. Pour obtenir toutes les surfaces qui ont une représentation sphérique donnée, il suffit d'intégrer les équations (3).

Réciproquement, sauf un cas d'exception que nous signalons plus loin, on obtient ainsi toutes les surfaces qui ont des lignes de courbure. Soit (M) une surface rapportée à ses lignes de courbure, désignons par $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe de paramètre $v$; par $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, ceux de la tangente à la courbe de paramètre $u$; prenons en outre deux directions perpendiculaires entre elles et perpendiculaires aux tangentes. Soient $(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ et $(y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)$ les cosinus de ces deux directions.

En vertu des hypothèses faites, on peut déjà écrire les équations (2). Cela posé, le système étant conjugué, $\frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v}$ doit être linéaire et homogène en $\xi$ et $\eta$, c'est-à-dire que $\frac{\partial \xi}{\partial v}$ ne peut contenir que $\eta$, $\frac{\partial \eta}{\partial u}$ que $\xi$. Il en résulte que $\frac{\partial x'}{\partial u}$, $\frac{\partial y'}{\partial u}$ ne contiennent pas $\eta$, que $\frac{\partial x'}{\partial v}$, $\frac{\partial y'}{\partial v}$ ne contiennent pas $\xi$. On doit donc avoir un Tableau de la forme

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x'}{\partial u} &= a\xi + py', & \frac{\partial y'}{\partial u} &= e\xi - px',\\
\frac{\partial x'}{\partial v} &= b\eta + qy', & \frac{\partial y'}{\partial v} &= f\eta - qx',\\
\frac{\partial \xi}{\partial u} &= -ax' + ey' - m\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial u} &= m\xi.\\
\frac{\partial \xi}{\partial v} &= n\eta, & \frac{\partial \eta}{\partial v} &= -bx' - fy' - n\xi.
\end{aligned}
$$

En écrivant que ces formules sont compatibles, on trouve entre autres formules la suivante :

$$(4) \qquad \frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial q}{\partial u}.$$

Si l'on pose alors

$$
\begin{aligned}
x &= \phantom{-}x' \cos\varphi + y' \sin\varphi,\\
y &= -x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,
\end{aligned}
$$

les dérivées de $x$ ne contiendront pas $y$ (et, par suite, celles de $y$ ne contiennent pas $x$) si l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -p, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -q,$$

qui sont compatibles en vertu de (4). On retombe alors sur les formules (1) (§ IV).

*Cas d'exception.* — La démonstration qui précède suppose que les lignes de courbure ne sont pas des lignes de longueur nulle. Il existe des surfaces qui admettent des lignes de courbure dont l'un des systèmes est formé de lignes de longueur nulle. Nous laissons de côté pour le moment ce cas particulier.

On peut, au lieu d'intégrer le système (3), suivre la marche suivante pour trouver les surfaces qui ont une représentation sphérique donnée. Posons

$$X = px + qy + \alpha\xi + \beta\eta.$$

On trouve

$$\frac{\partial X}{\partial u} = x\left(\frac{\partial p}{\partial u} - a\alpha\right) + y\left(\frac{\partial q}{\partial u} - c\alpha\right) + \xi\left(ap + cq + \frac{\partial \alpha}{\partial u} + m\beta\right) + \eta\left(-m\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = x\left(\frac{\partial p}{\partial v} - b\beta\right) + y\left(\frac{\partial q}{\partial v} - f\beta\right) + \xi\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - n\beta\right) + \eta\left(bp + fg + n\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial v}\right).$$

En identifiant avec les formules (2), on aura

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial u} - a\alpha = 0, &&\frac{\partial q}{\partial u} - c\alpha = 0, &&\frac{\partial \beta}{\partial u} - m\alpha = 0,\\ &\frac{\partial p}{\partial v} - b\beta = 0, &&\frac{\partial q}{\partial v} - f\beta = 0, &&\frac{\partial \alpha}{\partial v} - n\beta = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} h &= ap + cq + m\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial u},\\ l &= bp + fq + n\alpha + \frac{\partial \beta}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

De (5) on tire

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \alpha\frac{\partial a}{\partial v} + \alpha\frac{\partial \alpha}{\partial v} = \alpha\frac{\partial a}{\partial v} + an\beta = \alpha\frac{\partial a}{\partial v} + \beta\frac{\partial b}{\partial u},$$

ou

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 p}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial p}{\partial u} + \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v}.$$

Si $p$ est une relation de cette équation, $\alpha$ et $\beta$ seront connus par les deux premières formules (5), $q$ sera ensuite donné par une quadrature. On obtient ainsi une surface (M).

*Remarque.* — L'équation (7) est celle à laquelle satisfont $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. Cette équation s'intègre en même temps que celle que vérifient les coordonnées X, Y, Z de la projection stéréographique de la surface (A) (§ V). On en conclut que la recherche d'une surface (M) est équivalente à la recherche de deux surfaces qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure. Ce fait sera expliqué plus loin.

*Remarque.* — Si la représentation sphérique est une sphère, la surface M est située sur un hyperplan.

En effet, nous savons que, dans ce cas, la droite AB (§ IV) passe par un point fixe. Soient ($z_1$, $z_2$, $z_3$, $z_4$) les coordonnées de ce point, on aura

$$z_1 \frac{\partial X_1}{\partial u} + z_2 \frac{\partial X_2}{\partial u} + z_3 \frac{\partial X_3}{\partial u} + z_4 \frac{\partial X_4}{\partial u} = 0,$$

$$z_1 \frac{\partial X_1}{\partial v} + z_2 \frac{\partial X_2}{\partial v} + z_3 \frac{\partial X_3}{\partial v} + z_4 \frac{\partial X_4}{\partial v} = 0,$$

d'où

$$z_1 X_1 + z_2 X_2 + z_3 X_3 + z_4 X_4 = \text{const.}$$

## XIII. — Étude du cas d'exception.

Dans ce cas, on doit avoir

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 = H^2 \, dv^2.$$

Si l'on considère dans l'espace ordinaire la surface (S) qui a pour coordonnées $X_1$, $X_2$, $X_3$, les courbes $v = \text{const.}$ seront des géodésiques. Réciproquement, supposons la surface S rapportée à un système de géodésiques et à ses trajectoires orthogonales; on aura

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 = du^2 + G^2 \, dv^2;$$

posons $X_4 = -iu$.

Si nous formons l'équation de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+2B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+2D\frac{\partial\theta}{\partial u}+2E\frac{\partial\theta}{\partial v}=0,$$

à laquelle satisfont $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$, on trouve que D et C sont nuls. On vérifie facilement que

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2$$

est solution de l'équation qui reste. On obtient ainsi toutes les surfaces cherchées. Les lignes de courbure de ces surfaces (M) correspondent : les lignes de longueur nulle aux géodésiques de S ; les autres aux trajectoires conjuguées de ces géodésiques. A cette surface (M) on peut faire correspondre une seconde surface ($M_1$) qui correspond à la seconde nappe $S_1$ de la congruence formée par les tangentes aux asymptotiques de S.

Le plan tangent à $M_1$ est normal au plan tangent à M et réciproquement. La surface M jouit donc des deux propriétés suivantes :

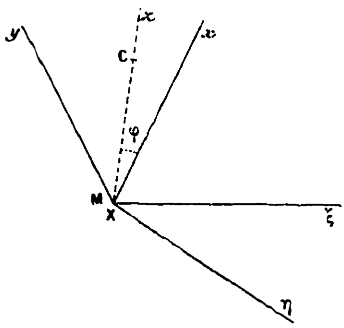
1° Son plan normal enveloppe une surface;

2° Son plan tangent est normal à une surface.

### XIV. — Propriété caractéristique des surfaces qui ont des lignes de courbure.

Reprenons la surface (M) rapportée à ses lignes de courbure; le

Fig. 6.




plan $M\xi\eta$ est le plan tangent, le plan $Mxy$ le plan normal. Menons une normale $Mz$ faisant un angle constant $\varphi$ avec $Mx$; un point

$C(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$ pris sur cette normale a pour coordonnées

$$Y = X + \rho(x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial Y}{\partial u} = \xi[h + \rho(a\cos\varphi + e\sin\varphi)] + \frac{\partial\rho}{\partial u}(x\cos\varphi + y\sin\varphi),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial v} = \eta[l + \rho(b\cos\varphi + f\sin\varphi)] + \frac{\partial\rho}{\partial v}(x\cos\varphi + y\sin\varphi).$$

On en déduit que la droite $Mz$ est tangente à deux surfaces, aux points $C_1$ et $C_2$ définis,

$$C_1 \qquad h + \rho_1(a\cos\varphi + e\sin\varphi),$$

$$C_2 \qquad l + \rho_2(b\cos\varphi + f\sin\varphi).$$

$C_1$ et $C_2$ sont les centres de courbure; quand $\varphi$ varie, $C_1$ et $C_2$ décrivent des droites $D_1$, $D_2$, qui ont pour équation

$$D_1 \qquad h + ax + ey = 0,$$

$$D_2 \qquad l + bx + fy = 0.$$

Dans le cas où la représentation sphérique de $(M)$ est une sphère, ces droites sont parallèles. Dans tous les autres cas, elles se coupent en un point N. Nous allons montrer que le point N décrit une surface tangente au plan $xy$.

Un point quelconque $N(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)$ du plan de $xy$ a des coordonnées de la forme

$$Z = X + \rho x + ry,$$

d'où

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \xi(h + a\rho + er) + x\frac{\partial\rho}{\partial u} + y\frac{\partial r}{\partial u},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = \eta(l + b\rho + fr) + x\frac{\partial\rho}{\partial v} + y\frac{\partial r}{\partial v}.$$

On voit que, si l'on détermine $r$ et $\rho$ par les conditions

$$(1) \qquad \begin{cases} h + a\rho + er = 0, \\ l + b\rho + fr = 0, \end{cases}$$

la surface décrite par N est tangente au plan des $xy$. Il reste ensuite

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} &= x\frac{\partial \rho}{\partial u} + y\frac{\partial r}{\partial u}, \\ \frac{\partial Z}{\partial v} &= x\frac{\partial \rho}{\partial v} + y\frac{\partial r}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

*Ainsi le plan normal à* M *a une enveloppe.* Cette propriété caractérise les surfaces M. En effet, supposons qu'elle existe pour une surface $(M)(X_1X_2X_3X_4)$; supposons cette surface rapportée à un système conjugué, $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ vérifieront une équation de la forme

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Posons

$$2\rho = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2.$$

Les équations du plan normal à M sont

$$Z_1\frac{\partial X_1}{\partial u} + Z_2\frac{\partial X_2}{\partial u} + Z_3\frac{\partial X_3}{\partial u} + Z_4\frac{\partial X_4}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u},$$
$$Z_1\frac{\partial X_1}{\partial v} + Z_2\frac{\partial X_2}{\partial v} + Z_3\frac{\partial X_3}{\partial v} + Z_4\frac{\partial X_4}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

Si ce plan admet une enveloppe, le point de contact vérifiera aussi l'équation

$$Z_1\frac{\partial^2 X_1}{\partial u\, \partial v} + Z_2\frac{\partial^2 X_2}{\partial u\, \partial v} + Z_3\frac{\partial^2 X_3}{\partial u\, \partial v} + Z_4\frac{\partial^2 X_4}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v}.$$

De ces trois équations et de l'équation (3) on déduit

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = P\frac{\partial \rho}{\partial u} + Q\frac{\partial \rho}{\partial v},$$

ce qui montre que le système conjugué est formé de lignes de courbure.

## XV. — Les surfaces de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan.

Les formules (2) du paragraphe précédent montrent que

$$dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2 = d\rho^2 + dr^2.$$

La surface (N) est applicable sur un plan; cette surface est telle que son plan tangent est normal à une série de surfaces. Il résulte d'ailleurs du paragraphe précédent que si cette propriété existe, la surface est applicable sur un plan (sauf le cas d'exception du § XIII). Réciproquement si une surface est applicable sur un plan, son plan tangent est normal à une série de surfaces.

Prenons une telle surface $(N)(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4)$ et choisissons les variables $u$, $v$, de telle sorte que

$$dZ_1^2 + dZ_2^2 + dZ_3^2 + dZ_4^2 = du^2 + dv^2.$$

Prenons dans le plan tangent un point $M(X_1 X_2 X_3 X_4)$, tel que

$$X = Z - p\frac{\partial Z}{\partial u} - q\frac{\partial Z}{\partial v},$$

où

$$p = u + \alpha, \qquad q = v + \beta,$$

$\alpha$ et $\beta$ étant des constantes. On aura

$$\frac{\partial X}{\partial u} = -p\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} - q\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -p\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} - q\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2}.$$

Or, on a évidemment

$$\sum \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial^2 Z}{\partial v^2} = 0.$$

On en déduit

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que la surface (M) est normale au plan tangent à la surface (N). Toutes les surfaces applicables sur un plan sont les surfaces (N) du paragraphe précédent. (Nous laissons de côté le cas où la surface est réglée, ce qui correspond à l'application de deux surfaces réglées l'une sur l'autre.) Étudions ces surfaces (N). Des formules (1) (§ XIV) on déduit

$$\frac{\partial h}{\partial v} + \rho\frac{\partial a}{\partial v} + r\frac{\partial e}{\partial v} + a\frac{\partial \rho}{\partial v} + e\frac{\partial r}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial b}{\partial u} + r\frac{\partial f}{\partial u} + b\frac{\partial \rho}{\partial u} + f\frac{\partial r}{\partial u} = 0.$$

En tenant compte des formules (2) (§ IV), (3) (§ XII), (1) (§ XIV), on trouve

$$(1) \qquad \begin{cases} a\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + e\dfrac{\partial r}{\partial v} = 0, \\[2ex] b\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + f\dfrac{\partial r}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

En différentiant les équations (2) (§ XIV), on trouve, en tenant compte de la relation précédente,

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = x\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + y\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}.$$

Ce qui montre que les six quantités $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$, $\rho$, $r$ satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial \theta}{\partial u} + Q\frac{\partial \theta}{\partial v};$$

c'est l'équation à laquelle satisfont $r$ et $\rho$. La surface (N) est rapportée à son système conjugué.

Les tangentes aux courbes conjuguées de (N) ont leurs cosinus directeurs proportionnels aux quantités

$$x\frac{\partial\rho}{\partial u}+y\frac{\partial r}{\partial u},\quad x\frac{\partial\rho}{\partial v}+y\frac{\partial r}{\partial v},$$

ou

$$fx-by,\quad ex-ay.$$

Ces courbes sont rectangulaires si

$$ab+ef=0;$$

c'est le cas où la représentation sphérique de (M) est une surface $\Sigma$. Dans ce cas, la surface (N) a des lignes de courbure et est applicable sur un plan. Nous étudions plus loin (§ XIX) ce cas particulier.

On obtient ainsi deux surfaces $S_1$ et $S_2$ applicables l'une sur l'autre.

Les coordonnées de $S_1$,

$$Z_1,\quad Z_2,\quad Z_3;$$

les coordonnées de $S_2$,

$$iZ_4,\quad \rho,\quad r.$$

Ces deux surfaces sont rapportées au système conjugué qui se conserve dans la déformation.

## XVI. — Projection sur un plan fixe du système conjugué qui se conserve dans la déformation.

Il résulte de ce qui précède que la projection d'un tel système sur un plan fixe a pour coordonnées les quantités $\rho$ et $r$ définies dans le paragraphe précédent. On aura alors

$$\frac{\dfrac{\partial r}{\partial v}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial v}}=-\frac{a}{e},$$

$$\frac{\dfrac{\partial r}{\partial u}}{\dfrac{\partial\rho}{\partial u}}=-\frac{b}{f}.$$

L'angle $\varphi_1$ que fait la courbe $u =$ const. avec l'axe des $x$ est donné par la formule

$$\tang\varphi_1 = -\frac{a}{e};$$

il est égal au premier rayon de courbure de la surface (A) (§ IV); de même l'angle de la courbe $v =$ const. est égal au second rayon de courbure de la surface (A). Donc :

*Pour que le système conjugué se projette sur un plan fixe suivant un système orthogonal, il faut et il suffit que la surface* (A) *soit une surface* $\Sigma$.

D'une manière plus générale, *si ces projections se coupent sous un angle constant, la différence des rayons de courbure de* A *est constante.*

*Si enfin ces deux projections sont également inclinées sur deux directions fixes, la surface* (A) *est une surface minima* (sens non euclidien).

Nous allons chercher les cas dans lesquels l'un de ces systèmes de courbes est formé de lignes droites. Si les courbes de paramètre $u$ sont des droites, on doit avoir

$$\frac{\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}}{\frac{\partial \rho}{\partial v}} = \frac{\frac{\partial^2 r}{\partial v^2}}{\frac{\partial r}{\partial v}},$$

ou

$$a\frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} + e\frac{\partial^2 r}{\partial v^2} = 0.$$

En différentiant par rapport à $v$ la relation

$$a\frac{\partial \rho}{\partial v} + e\frac{\partial r}{\partial v} = 0.$$

On en déduira

$$m\left(b\frac{\partial \rho}{\partial v} + f\frac{\partial r}{\partial v}\right) = 0.$$

A cause de la relation

$$b\frac{\partial \rho}{\partial u}+f\frac{\partial r}{\partial v}=0,$$

on ne peut avoir

$$b\frac{\partial \rho}{\partial v}+f\frac{\partial r}{\partial v}=0.$$

On aura donc

$$m=0.$$

Il en résulte que $a$ et $e$ sont des fonctions de $u$ seul, et, par un choix convenable de la variable $u$, on peut poser

$$a=\sin u, \qquad e=\cos u.$$

Pour déterminer $b$ et $f$, prenons deux inconnues auxiliaires $p$ et $q$ et posons

$$b=p\sin u+q\cos u, \qquad f=p\cos u-q\sin u.$$

Les relations

$$\frac{\partial b}{\partial u}=na, \qquad \frac{\partial f}{\partial u}=ne$$

donnent

$$\left(p+\frac{\partial q}{\partial u}\right)\cos u+\left(\frac{\partial p}{\partial u}-q\right)\sin u=n\sin u,$$

$$-\left(p+\frac{\partial q}{\partial u}\right)\sin u+\left(\frac{\partial p}{\partial u}-q\right)\cos u=n\cos u,$$

d'où

$$p=-\frac{\partial q}{\partial u}, \qquad n=\frac{\partial p}{\partial u}-q=-\frac{\partial^2 q}{\partial u^2}-q.$$

La relation

$$\frac{\partial m}{\partial v}+\frac{\partial n}{\partial u}+ab+ef=0$$

devient

$$-\frac{\partial^3 q}{\partial u^3}-\frac{\partial q}{\partial u}+p=0$$

ou

$$\frac{\partial^3 q}{\partial u^3}+2\frac{\partial q}{\partial u}=0,$$

d'où

$$q = A\cos\sqrt{2}u + B\sin\sqrt{2}u + C,$$

A, B, C étant fonction de $v$ seul.

Pour déterminer les coordonnées $\rho$, $r$ de la projection, nous poserons

$$\rho = \alpha\sin u + \beta\cos u,$$

$$r = \alpha\cos u - \beta\sin u.$$

La relation

$$a\frac{\partial\rho}{\partial v} + c\frac{\partial r}{\partial v} = 0$$

donne

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = 0;$$

$\alpha$ est une fonction de $u$ seul.

La relation

$$b\frac{\partial\rho}{\partial u} + f\frac{\partial r}{\partial u} = 0$$

donne

$$\beta\frac{\partial q}{\partial u} - \frac{\partial\alpha}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u} + q\alpha + q\frac{\partial\beta}{\partial u} = 0,$$

ce qui donne $\beta$ par une quadrature.

## XVII. — Propriétés des systèmes conjugués en coordonnées tangentielles.

Cherchons les cosinus directeurs des normales aux deux surfaces applicables $S_1$ et $S_2$. Les tangentes conjuguées de $S_1$ ont leurs cosinus directeurs proportionnels aux quantités

$$x_1\frac{\partial\rho}{\partial u} + y_1\frac{\partial r}{\partial v},\quad x_2\frac{\partial\rho}{\partial u} + y_2\frac{\partial r}{\partial u},\quad x_3\frac{\partial\rho}{\partial u} + y_3\frac{\partial r}{\partial u},$$

$$x_1\frac{\partial\rho}{\partial v} + y_1\frac{\partial r}{\partial v},\quad x_2\frac{\partial\rho}{\partial v} + y_2\frac{\partial r}{\partial v},\quad x_3\frac{\partial\rho}{\partial v} + y_3\frac{\partial r}{\partial v}.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels aux mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Ce sont les quantités X, Y, Z (§ IX); la normale à $S_1$ est parallèle à la droite CD.

Les tangentes conjuguées de $S_2$ ont leurs cosinus directeurs proportionnels aux quantités

$$\frac{\partial\rho}{\partial u}, \quad \frac{\partial r}{\partial u}, \quad i\left(x_4\frac{\partial\rho}{\partial u} + y_4\frac{\partial r}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial v}, \quad \frac{\partial r}{\partial v}, \quad i\left(x_4\frac{\partial\rho}{\partial v} + y_4\frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

La normale à $S_2$ a donc ses cosinus directeurs proportionnels

$$ix_4, \quad iy_4, \quad -1.$$

Formons l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces cosinus directeurs.

Or on a

$$\frac{\partial x_4}{\partial u} = a\xi_4, \qquad \frac{\partial x_4}{\partial v} = b\eta_4, \qquad \frac{\partial^2 x_4}{\partial u\,\partial v} = \xi_4 bm + a\frac{\partial\xi_4}{\partial v} = a\frac{\partial\xi_4}{\partial v} + b\frac{\partial\eta_4}{\partial u}.$$

De même

$$\frac{\partial y_4}{\partial u} = e\xi_4, \qquad \frac{\partial y_4}{\partial v} = f\eta_4, \qquad \frac{\partial^2 y_4}{\partial u\,\partial v} = e\frac{\partial\xi_4}{\partial v} + f\frac{\partial\eta_4}{\partial u}.$$

On en conclut que l'équation cherchée est

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\xi_4}\frac{\partial\xi_4}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta_4}\frac{\partial\eta_4}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

C'est l'équation à laquelle satisfont les coordonnées tangentielles de $S_2$. Nous allons en déduire la propriété caractéristique des systèmes conjugués qui se conservent dans la déformation. Soient $\alpha$, $\beta$, $-1$ les cosinus directeurs de la normale à la surface rapportée à son système conjugué; formons l'équation de Laplace à laquelle satisfont ces coordonnées; écrivons-la sous la forme

$$(1') \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

Si ce système se conserve dans la déformation, on pourra poser

$$(2) \qquad x_4 = -i\alpha, \qquad y_4 = -i\beta, \qquad \xi_4 = Q\varphi(v), \qquad \eta_4 = Pf(u).$$

Il faudra donc que l'on puisse déterminer les fonctions $f$ et $\varphi$ de telle sorte que l'on ait

$$(3) \qquad 1 + \alpha^2 + \beta^2 = P^2 f^2(u) + Q^2 \varphi^2(v).$$

Réciproquement, cette condition est suffisante. Si elle est remplie, les formules (2) donneront $x_4$, $y_4$, $\xi_4$, $\eta_4$.

*Remarque.* — La condition (3) peut évidemment être remplacée par la suivante :

Soient $x$, $y$, $z$ des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la surface rapportée à un système conjugué. Formons l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + R\theta,$$

qui admet comme solutions $x$, $y$, $z$. Pour que le système conjugué se conserve dans la déformation, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer $f$ et $\varphi$ de telle sorte que

$$x^2 + y^2 + z^2 = P^2 f^2(u) + Q^2 \varphi^2(v).$$

On déterminera ensuite $a$, $b$, $c$, $f$, $m$, $n$ par les équations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{\partial x_4}{\partial u} = a\xi_4, & \dfrac{\partial y_4}{\partial u} = c\xi_4, & \dfrac{\partial \eta_4}{\partial u} = m\xi_4, \\ \dfrac{\partial x_4}{\partial v} = b\eta_4 & \dfrac{\partial y_4}{\partial v} = f\eta_4, & \dfrac{\partial \xi_4}{\partial v} = n\eta_4. \end{array} \right.$$

A cause de la relation $x_1^2+y_1^2+\xi_1^2+\eta_1^2=1$, on aura aussi

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\xi_1}{\partial u} = -ax_1 - cy_1 - m\eta_1, \\ \dfrac{\partial\xi_1}{\partial v} = -bx_1 - fy_1 - n\xi_1. \end{cases}$$

Il est facile de voir que toutes les relations qui doivent exister en $a$, $b$, $e$, $f$, $m$, $n$ sont vérifiées. En effet, $x_1$ étant solution de l'équation (1), on aura

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = a\frac{\partial\xi_1}{dv} + bm\xi_1.$$

D'autre part, en différentiant la première des équations (4),

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u\,\partial v} = a\frac{\partial\xi_1}{\partial v} + \xi_1\frac{\partial a}{\partial v};$$

donc, on a bien

$$\frac{\partial a}{\partial v} = bm.$$

On vérifie de même les relations

$$\frac{\partial b}{\partial u} = an,\qquad \frac{\partial e}{\partial v} = fm,\qquad \frac{\partial f}{\partial u} = en.$$

En égalant les deux valeurs de $\dfrac{\partial^2\xi_1}{\partial u\,\partial v}$ tirées de (4) et (5), et en tenant compte des formules qui viennent d'être établies, on trouvera

$$\frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab + ef = 0.$$

Cela posé, la résolution du système (1) (§ IV) se ramènera à une équation de Riccati, puisqu'on en connaît déjà la solution particulière $x_1$, $y_1$, $\xi_1$, $y_1$.

La surface $S_1$ étant connue, on connaîtra $\frac{\partial \rho}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial \rho}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v}$. La surface $S_2$ se déterminera par les quadratures

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial z_i}{\partial u} &= x_i \frac{\partial \rho}{\partial u} + y_i \frac{\partial r}{\partial u}\\ \frac{\partial z_i}{\partial v} &= x_i \frac{\partial \rho}{\partial v} + y_i \frac{\partial r}{\partial v}\end{aligned}\right\}, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Toutes les surfaces $S_2$ qu'on peut obtenir ainsi sont égales.

Nous allons former l'équation de Laplace à laquelle satisfont les quantités X, Y, Z, c'est-à-dire les cosinus directeurs de la normale à $S_1$. En différentiant les formules qui donnent les coordonnées des arêtes du tétraèdre ABCD (§ IX) et en tenant compte des équations (1) (§ IV), on trouve

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= -aL_2 + eX_1, & \frac{\partial L}{\partial u} &= -aX_2 + eL_1,\\
\frac{\partial X}{\partial v} &= bL_1 + fX_2, & \frac{\partial L}{\partial v} &= bX_1 + fL_2,\\
\frac{\partial X_1}{\partial u} &= -eX - mX_2, & \frac{\partial L_1}{\partial u} &= -eL - mL_2,\\
\frac{\partial X_1}{\partial v} &= -bL + nX_2, & \frac{\partial L_1}{\partial v} &= -bX + nL_2,\\
\frac{\partial X_2}{\partial u} &= aL + mX_1, & \frac{\partial L_2}{\partial u} &= aX + mL_1,\\
\frac{\partial X_2}{\partial v} &= -fX - nX_1, & \frac{\partial L_2}{\partial v} &= -fL - nL_1.
\end{aligned}\right.$$

Avec les formules analogues obtenues en remplaçant X et L, soit par Y et N, soit par Z et N. On en déduit

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u\, \partial v} = fmX_1 + enX_2 + (af - be)L + anL_1 - bmL_2.$$

Cela posé, désignons par A, B, C, D les déterminants

$$(8)\quad A = \begin{vmatrix} X \\ \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} X \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} X \\ \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix},$$

où nous n'écrivons qu'une seule colonne, les deux autres s'en déduisent en remplaçant X soit par Y, soit par Z. En tenant compte des relations (6) et (7), on décomposera ces déterminants en d'autres qui ont été calculés (formules 2, § IX). On trouve

$$A = -ab \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} - af \begin{vmatrix} X \\ L_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + eb \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} + ef \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix},$$

$$A = -(af - be)\xi_4 \eta_4,$$

$$B = bfm \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} + ben \begin{vmatrix} X \\ X_2 \\ L_1 \end{vmatrix} + b(af - be) \begin{vmatrix} X \\ L \\ L_1 \end{vmatrix} + ban \begin{vmatrix} X \\ L_1 \\ L_1 \end{vmatrix} - b^2 m \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix}$$

$$+ f^2 m \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + fen \begin{vmatrix} X \\ X_2 \\ X_2 \end{vmatrix} + f(af - be) \begin{vmatrix} X \\ L \\ X_2 \end{vmatrix} + fan \begin{vmatrix} X \\ L_1 \\ X_2 \end{vmatrix} - fbm \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix},$$

$$B = -(af - be)\xi_4(n\xi_4 + bx_4 + fy_4) = -(af - be)\xi_4 \frac{\partial \eta_4}{\partial v},$$

$$C = -afm \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ X_1 \end{vmatrix} - aen \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix} - a(af - be) \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L \end{vmatrix} - a^2 n \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} + abm \begin{vmatrix} X \\ L_2 \\ L_2 \end{vmatrix}$$

$$+ efm \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_1 \end{vmatrix} + e^2 n \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + e(af - be) \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L \end{vmatrix} + ean \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} - ebm \begin{vmatrix} X \\ X_1 \\ L_2 \end{vmatrix},$$

$$C = -(af-be)\eta_1(ax_1+ey_1+m\eta_1) = -(af-be)\eta_1\frac{\partial\xi_1}{\partial u},$$

$$D = \left\{\begin{aligned}
&-abfm\begin{vmatrix} X_1 \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} - aben\begin{vmatrix} X_2 \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} - ab(af-be)\begin{vmatrix} L \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} - aban\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} + ab\,bm\begin{vmatrix} L_2 \\ L_2 \\ L_1 \end{vmatrix} \\
&-affm\begin{vmatrix} X_1 \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix} - afen\begin{vmatrix} X_2 \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix} - af(af-be)\begin{vmatrix} L \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix} - afan\begin{vmatrix} L_1 \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix} + afbm\begin{vmatrix} L_2 \\ L_2 \\ X_2 \end{vmatrix} \\
&+ebfm\begin{vmatrix} X_1 \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} + eben\begin{vmatrix} X_2 \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} + eb(af-be)\begin{vmatrix} L \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} + eban\begin{vmatrix} L_1 \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} - eb\,bm\begin{vmatrix} L_2 \\ X_1 \\ L_1 \end{vmatrix} \\
&+effm\begin{vmatrix} X_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + efen\begin{vmatrix} X_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + ef(af-be)\begin{vmatrix} L \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} + efan\begin{vmatrix} L_1 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} - efbm\begin{vmatrix} L_2 \\ X_1 \\ X_2 \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

$$D = (af-be)[bmx_1\eta_1 + anx_1\xi_1 + abx_1^2 + (af+be)x_1y_1 + eny_1\xi_1 + fmy_1\eta_1 + efy_1^2],$$

$$D = (af-be)[(ax_1+ey_1+m\eta_1)(bx_1+fy_1+n\xi_1) - mn\xi_1\eta_1],$$

$$= (af-be)\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\frac{\partial\eta_1}{\partial v} - mn\xi_1\eta_1\right).$$

L'équation de Laplace, à laquelle satisfont X, Y, Z, étant

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{B}{A}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{C}{A}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{D}{A}\theta,$$

devient

$$(9)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial\eta_1}{\partial v}\right)\theta.$$

## XVIII. — Systèmes conjugués qui se conservent sur une infinité de surfaces applicables.

Si un système est conjugué sur plusieurs déformées d'une surface, il faut qu'on puisse déterminer de plusieurs manières différentes le tétraèdre ABCD (§ IV) correspondant à ce système. Supposons qu'on puisse le faire de deux manières. Pour la deuxième on aura

$$x_1 = -i\alpha, \qquad y_1 = -i\beta, \qquad \xi'_1 = Q\varphi_1(v), \qquad \eta'_1 = Pf_1(u).$$

La condition (3) du paragraphe précédent donne

$$P^2 f^2(u) + Q^2\varphi^2(v) = P^2 f_1^2(u) + Q^2\varphi_1^2(v),$$
$$\frac{P^2}{Q^2} = \frac{\varphi^2 - \varphi_1^2}{f_1^2 - f^2}.$$

Le rapport $\frac{P}{Q}$ étant le produit d'une fonction de $u$ par une fonction de $v$, on aura

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{Q}\frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$

L'équation ($i'$) est à invariants égaux.

Réciproquement, s'il en est ainsi, on aura

$$\frac{P}{Q} = \frac{\theta(v)}{\psi(u)}.$$

On pourra alors poser

$$\varphi_1^2 = \varphi^2 + h^2\theta^2,$$
$$f_1^2 = f^2 - h^2\psi^2,$$

$h$ étant une constante arbitraire. Le système conjugué se conserve sur une infinité de surfaces applicables (M. Cosserat, *Annales de Toulouse*).

Supposons l'équation (1) du paragraphe précédent ramenée à la forme canonique de M. Moutard

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M\theta.$$

Soient $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les solutions qui correspondent à $\alpha$, $\beta$, 1 :

$$\alpha = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad \beta = \frac{\eta}{\zeta}, \qquad \text{ou} \qquad x_1 = -\frac{i\xi}{\zeta}, \qquad y_1 = \frac{-i\eta}{\zeta}.$$

L'équation à laquelle satisfont $\alpha$ et $\beta$ sera

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

En comparant avec l'équation (1), on aura

$$\xi_1 = \frac{f(u)}{\zeta}, \qquad \eta_1 = \frac{\varphi(v)}{\zeta}.$$

La condition (3) devient

$$(1) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = f^2(u) + \varphi^2(v).$$

Cette relation caractérise les systèmes conjugués qui se conservent sur une infinité de surfaces applicables.

Les diverses surfaces applicables s'obtiennent alors en remplaçant $f$ et $\varphi$ par $f_1$ et $\varphi_1$,

$$(2) \qquad f_1^2 = f^2 + h, \qquad \varphi_1^2 = \varphi^2 - h.$$

Ramenons de même l'équation (9) à sa forme canonique

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = M_1\theta.$$

Soient

$$\xi_1 = \rho X, \qquad \eta_1 = \rho Y, \qquad \zeta_1 = \rho Z$$

les solutions; X, Y, Z satisferont à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + \left(M_1 - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}\right)\theta.$$

En comparant avec l'équation (9), on aura

$$\xi_1 = \frac{\Phi(v)}{\rho}, \qquad \eta_1 = \frac{F(u)}{\rho}.$$

La comparaison des deux systèmes de valeurs de $\xi_1$, $\eta_1$ donne

$$fF = \varphi\Phi = \text{const.}$$

On peut prendre la constante égale à l'unité. On a

$$\rho = \frac{f\varphi}{\zeta}.$$

On aura alors

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \rho^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = \rho^2(\xi_4^2 + \eta_4^2) = \Phi^2 + F^2,$$

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \frac{1}{f^2} + \frac{1}{\varphi^2}.$$

La comparaison des coefficients de $\theta$ donne ensuite

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + mn - \frac{1}{\xi_4}\frac{\partial \xi_4}{\partial u}\frac{1}{\eta_4}\frac{\partial \eta_4}{\partial v} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \frac{1}{\xi_4 \eta_4}\left(\frac{\partial \xi_4}{\partial v}\frac{\partial \eta_4}{\partial u} - \frac{\partial \xi_4}{\partial u}\frac{\partial \eta_4}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

En effectuant les calculs, on trouve

$$M_1 = M.$$

Les équations (1) et (9) proviennent d'une même équation de M. Moutard.

On arrive donc à ce résultat :

Si une équation de M. Moutard admet trois solutions $\xi$, $\eta$, $\zeta$ liées par la relation

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 0,$$

elle admet une infinité de systèmes analogues.

Considérons le cas particulier où les fonctions $f$ et $\varphi$ se réduisent à des constantes; dans ce cas, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont les cosinus directeurs d'une surface à courbure totale constante rapportée à ses asymptotiques; il en est de même de $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$. Les couples de surfaces applicables sont rapportés à un système de géodésiques conjuguées (M. Cosserat, *Annales de Toulouse*).

On peut remarquer que, dans ce cas, le passage de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ à $\xi_1$, $\eta_1$, $\zeta_1$ donne une transformation des surfaces à courbure totale constante.

Si l'on poursuit les calculs, on voit que cette transformation n'est autre que celle qui a été indiquée par M. Lie.

Dans ce cas particulier, le rapport $\frac{\xi_1}{\eta_1}$ est constant, ce qui revient à dire que le rapport des puissances des foyers C et D (§ IV) par rapport à la sphère fondamentale est constant.

Si l'on suppose que ce rapport constant est égal à l'unité, on obtient une congruence (CD) qui jouit des propriétés suivantes :

1° Ses foyers sont conjugués par rapport à la sphère fondamentale.

2° Cette congruence est une congruence cyclique et de Ribaucour (pour la définition de ces congruences cycliques et de Ribaucour, *voir* Cosserat, *Annales de Toulouse*).

3° Le plan central de cette congruence passe par le centre de la sphère.

Nous reviendrons sur ces congruences spéciales (2e Partie, § IV).

### XIX. — Cas où la représentation sphérique est une surface Σ.

Dans ce cas, la surface (M) est applicable sur un plan. En effet, on a pour le $ds^2$ de cette surface

$$ds^2 = h^2\,du^2 + l^2\,dv^2.$$

La condition d'applicabilité sur le plan est

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial l}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{l}\frac{\partial h}{\partial v}\right) = \frac{\partial n}{\partial u} + \frac{\partial m}{\partial v}.$$

Il résulte de là que, pour qu'une surface ait des lignes de courbure et soit applicable sur un plan, il faut et il suffit que la représentation sphérique de la surface soit une surface Σ.

Nous savons que, dans ce cas, la surface (N) enveloppe des plans normaux à (M) a des lignes de courbure (§ XV). La représentation sphérique de (N) est une autre surface Σ; la surface (N) est analogue à (M).

On pourra continuer ainsi, l'enveloppe des plans normaux de (N) sera encore une surface applicable ayant des lignes de courbure; on pourra continuer jusqu'à ce qu'on tombe sur une surface réduite à un point.

On peut aussi opérer en sens inverse. Le plan tangent à (M) est orthogonal à une série de surfaces. Soit $(M_1)$ l'une d'elles. Le plan normal à $M_1$, enveloppant une surface qui a des lignes de courbure $M_1$, est applicable sur un plan.

La détermination de l'une de ces surfaces exige l'intégration de l'équation (7) (§ XII). En général, on ne sait pas intégrer cette équation; mais on peut toujours, à l'aide de quadratures seulement, déterminer une infinité de ces surfaces. Il suffit de partir d'une surface $\Sigma$ et de prendre la surface orthogonale à ses plans tangents.

Nous savons que la recherche des surfaces qui font l'objet de ce paragraphe permet de déterminer tous les couples de surfaces applicables, telles que le système conjugué de l'une d'elles se projette sur un plan fixe suivant un système orthogonal (§ XVI).

## XX. — Autre cas particulier.

Considérons d'une manière générale une surface S dans l'espace à quatre dimensions. Soient M un point de cette surface; MT l'une des tangentes en M à la surface $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ les cosinus directeurs de cette tangente, cosinus qui sont liés par la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = 1.$$

A cette tangente MT nous pouvons faire correspondre le point $t$ de l'espace non euclidien qui a pour coordonnées $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$. Il est clair que quand la tangente MT tourne autour du point M, le point $t$ décrit une droite $m$. Cette droite $m$ sera ce que nous appellerons la *représentation sphérique* du point M de la surface S. A la surface S correspond un ensemble de droites $(m)$, qui forment une congruence; cette congruence est la *représentation sphérique* de la surface S.

Soient $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$, $Z_4$ les coordonnées de M exprimées en fonction de deux variables $u$ et $v$. Supposons que ces variables soient les paramètres du système conjugué tracé sur (S). Soient de plus MS et MT les tangentes conjuguées; $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ les cosinus de MS; $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$, $Y_4$ ceux de MT. On aura des formules de la forme

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = hX,$$

$$\frac{\partial Z}{\partial v} = lY$$

(où nous supprimons les indices); le système étant conjugué, $\frac{\partial^2 Z}{\partial u\, \partial v}$ doit être linéaire et homogène en X, Y; il en sera de même par conséquent de $\frac{\partial X}{\partial v}$ et de $\frac{\partial Y}{\partial u}$. Il en résulte que les points $s$ et $t$, qui correspondent aux directions MS, MT, sont les foyers de la droite $(m)$. Ainsi :

*Au système conjugué de* S *correspondent les foyers de la représentation sphérique.*

On peut aller plus loin, la droite MS touche une seconde surface en un point N. La surface N, qui se déduit de M par la transformation de Laplace, est rapportée à son système conjugué. A la tangente NS correspond le point $s$; il en résulte que la représentation sphérique de N est la congruence déduite de $(m)$ par la méthode de Laplace, cette méthode étant appliquée à la surface $(s)$. Donc, *si deux surfaces ont même représentation sphérique, il en est de même de celles qu'on en déduit par la méthode de Laplace.*

*L'angle formé par les tangentes conjuguées d'une surface est égal à la distance* (non euclidienne) *des foyers de la représentation sphérique.*

Il résulte d'ailleurs de tout ce qui précède :

*Si la surface* S *a des lignes de courbure, sa représentation sphérique est une congruence dont les foyers sont conjugués par rapport à la quadratique fondamentale.*

*Si la surface* S *est applicable sur un plan, sa représentation sphérique est une congruence dont les plans focaux sont conjugués par rapport à la quadratique fondamentale.*

Si donc, on veut chercher les surfaces applicables sur un plan qui, par la méthode de Laplace, se transforme en une surface analogue, il suffit de chercher les congruences AB (§ IV), qui se transforment, par la méthode de Laplace, en une congruence ayant ses plans focaux conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. S'il en est ainsi, le système conjugué découpé sur l'une des focales de la congruence (AB) est formé de géodésiques (non euclidiennes).

Si, de même, on veut trouver les surfaces qui ont des lignes de courbure, et qui se transforment en surfaces analogues par la méthode de Laplace, il suffit de trouver les congruences (CD) (§ IV), qui se transforment en congruences ayant leurs foyers conjugués par rapport à la quadrique fondamentale.

Ces deux problèmes sont équivalents. En effet, soient $F_1$, $F_2$ les foyers de la congruence (AB). La surface focale $(F_1)$ est la polaire réciproque de la surface engendrée par C. Les tangentes conjuguées découpées par les développables de la congruence (AB) sur $F_1$ ont pour polaires conjuguées (en intervertissant les variables) les tangentes conjuguées découpées sur (C) par les développables de la congruence (CD).

Si donc les deux congruences formées par les tangentes conjuguées sur $F_1$ ont leurs plans focaux rectangulaires (sens non euclidien), de même, les congruences formées par les tangentes aux lignes conjuguées de (C) auront leurs foyers conjugués par rapport à la sphère fondamentale.

Nous allons traiter le second problème. La tangente à la courbe de paramètre $v$ tracée sur la surface (C) passe par le point dont les coordonnées sont proportionnelles à

$$ax + ey + m\eta\,;$$

posons alors

$$a = \rho\alpha, \qquad e = \rho\beta, \qquad m = \rho\gamma,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant liés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Le point D' $(\eta'_1, \eta'_2, \eta'_3, \eta'_4)$, qui est le conjugué de $e$ sur cette tangente, a pour coordonnées

$$\eta' = \alpha x + \beta y + \gamma \eta.$$

Exprimons que D′ est le second foyer de la congruence (CD′), il faut que $\frac{\partial \eta'}{\partial v}$ ne contienne ni $x$, $y$, $\eta$.

Or, on a

$$\frac{\partial \eta'}{\partial v} = x\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - b\gamma\right) + y\left(\frac{\partial \beta}{\partial v} - f\gamma\right) + \eta\left(\alpha b + \beta f + \frac{\partial \gamma}{\partial v}\right) + \xi(-\gamma n).$$

On doit donc avoir

$$(1) \qquad \frac{\partial \alpha}{\partial v} - b\gamma = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial v} - f\gamma = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha b + \beta f + \frac{\partial \gamma}{\partial v} = 0.$$

Les relations (1), en tenant compte des relations

$$\frac{\partial a}{\partial v} = bm, \qquad \frac{\partial e}{\partial v} = fm,$$

donnent

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

En choisissant convenablement la variable $u$, on peut supposer

$$\rho = 1.$$

On a alors

$$a = \alpha, \qquad b = \beta, \qquad m = \gamma,$$

puis

$$b = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad f = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \beta}{\partial v}.$$

La relation (2) peut alors s'écrire

$$ab + ef + \frac{\partial m}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre que

$$\frac{\partial n}{\partial u} = 0.$$

On peut distinguer deux cas :

1° $n = 0$, c'est un cas qui a été étudié § XVI ; le point C décrit une courbe, il est impossible d'appliquer la méthode de Laplace ;

2° En choisissant convenablement la variable $v$, on peut faire

$$n = 1.$$

Posons alors

$$a = \cos\theta \cos\varphi, \qquad e = \cos\theta \sin\varphi, \qquad m = \sin\theta ;$$

puis écrivons que

$$\frac{\partial b}{\partial u} = a, \qquad \frac{\partial f}{\partial u} = e.$$

On aura les deux équations aux dérivées partielles qui déterminent $\theta$ et $\varphi$. Une solution remarquable, c'est de supposer $\theta$ constant, $\varphi$ est de la forme $pu + qv$, $p$ et $q$ étant constants. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, les deux congruences qui se déduisent de la congruence (CD) sont des congruences de normales.

Cela posé, considérons dans l'espace à quatre dimensions une surface (M) jouissant de la deuxième propriété ; on en déduira une surface analogue ($M_1$), par la méthode de Laplace. A cette surface $M_1$ correspond une enveloppée ($N_1$) qui jouit de la première propriété. On en déduit, par la méthode de Laplace, une surface analogue $N_2$ ; prenons la surface $M_2$ orthogonale aux plans tangents de $N_2$, elle jouira de la seconde propriété. On pourra opérer sur $M_2$ comme sur M, et ainsi de suite.

Considérons le couple $N_1$, $N_2$, soient $S_1$ et $S_2$ les projections de ces surfaces dans l'espace à trois dimensions. $S_1$ et $S_2$ sont les focales d'une congruence ; les lignes conjuguées tracées par les développables sur $S_1$ et $S_2$ se conservent dans la déformation de ces surfaces. Nous obtenons donc une solution du problème suivant :

*Trouver une congruence telle que les systèmes conjugués, dé-*

*coupés par les développables sur les focales, sont encore conjugués sur une déformée de chacune de ces focales.*

La solution obtenue est telle qu'on peut, par quadrature, en déduire une infinité d'autres.

## XXI. — Troisième cas particulier.

Cherchons de même le cas où une surface (N), applicable sur un plan, se transforme, par la méthode de Laplace, en une surface (M) qui a des lignes de courbure. Il faut, d'après ce qui précède, trouver les congruences (CD), telles que celles qu'on en déduit par la méthode de Laplace soient des congruences de normales (sens non euclidien). Il faut et il suffit pour cela que les courbes de paramètre $v$ tracées sur la surface (C) (§ IV) soient des géodésiques, c'est-à-dire que les quatre points dont les coordonnées sont proportionnelles aux quantités

$$\xi, \quad \frac{\partial\xi}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}, \quad ay - ex$$

(le dernier est un point de la normale à $c$) soient dans un même plan. Or, on a

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = -ax - ey - m\eta,$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} = -(a^2 + e^2 + m^2)\xi - x\frac{\partial a}{\partial u} - y\frac{\partial e}{\partial u} - \eta\frac{\partial m}{\partial u}.$$

La condition cherchée est donc

$$\begin{vmatrix} -e & a & 0 \\ a & e & m \\ \dfrac{\partial a}{\partial u} & \dfrac{\partial e}{\partial u} & \dfrac{\partial m}{\partial u} \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$-(a^2 + e^2)\frac{\partial m}{\partial u} + m\left(a\frac{\partial a}{\partial u} + e\frac{\partial e}{\partial u}\right),$$

d'où

$$a^2 + e^2 = m^2 f^2(v).$$

On en déduit, en prenant la dérivée par rapport à $v$,

$$m\left[\frac{\partial m}{\partial v}f^2(v)+mf(v)f'(v)\right]=a\frac{\partial a}{\partial v}+c\frac{\partial c}{\partial v}=m(ab+cf),$$

ou

$$\frac{\partial m}{\partial v}f^2+mff'=ab+cf=-\frac{\partial m}{\partial v}-\frac{\partial n}{\partial u}.$$

$$\frac{\partial m}{\partial v}\sqrt{1+f^2}+m\frac{ff'}{\sqrt{1+f^2}}=\frac{-\frac{\partial n}{\partial u}}{\sqrt{1+f^2}}.$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(m\sqrt{1+f^2})=-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{n}{\sqrt{1+f^2}}\right).$$

On peut alors poser

$$m=\frac{1}{\sqrt{1+f^2}}\frac{\partial\theta}{\partial u},\qquad n=-\sqrt{1+f^2}\,\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

On posera alors

$$a=mf(v)\sin\varphi,\qquad c=mf(v)\cos\varphi.$$

On en déduira $b$ et $f$ par les relations

$$\frac{\partial a}{\partial v}=mb,\qquad \frac{\partial c}{\partial v}=mf.$$

Puis, en écrivant que les relations

$$\frac{\partial b}{\partial u}=na,\qquad \frac{\partial f}{\partial u}=nc$$

sont satisfaites, on aura les deux équations aux dérivées partielles qui donnent $\theta$ et $\varphi$.

Comme dans le paragraphe précédent, on peut déduire d'un couple (M), (N) une infinité de couples analogues.

**XXII. — Sur quelques propriétés générales des congruences.**

Nous allons indiquer ici quelques propriétés générales des congruences, dont quelques-unes nous semblent nouvelles, et qui nous seront utiles dans la suite.

Considérons d'abord deux surfaces (A) et (B) qui se correspondent par parallélisme des plans tangents. Les développables engendrées par la congruence AB découpent sur ces surfaces des réseaux conjugués, dont les tangentes sont parallèles. Toutes les surfaces (M), décrites par un point M qui partage la droite AB dans un rapport constant, ont leurs plans tangents parallèles à (A). Si donc deux points d'une droite d'une congruence décrivent des surfaces dont les plans tangents sont parallèles, les développables de la congruence découpent sur ces surfaces des réseaux conjugués. Cette propriété est bien connue.

Inversement, *soit* (D) *une congruence, qui découpe sur une surface* (S) *un réseau conjugué, il y aura une infinité de points de la droite* D *qui décrivent des surfaces parallèles à* (S).

En effet, soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point S de la surface (S) rapportée à un système conjugué, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la droite D. Un point M de la droite D a pour coordonnées X, Y, Z :

$$X = x + \alpha\rho,$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \alpha\frac{\partial \rho}{\partial u} + \rho\frac{\partial \alpha}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \alpha\frac{\partial \rho}{\partial v} + \rho\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Puisque la congruence D est rapportée à ses développables, il faut qu'on puisse choisir $\rho$ de telle sorte que $\frac{\partial X}{\partial u}$ ne contienne que $\alpha$; de même, on doit pouvoir choisir une autre valeur de $\rho$ telle que $\frac{\partial X}{\partial v}$ ne contienne que $\alpha$. On doit donc avoir des équations de la forme

$$\frac{\partial\alpha}{\partial u} = p\frac{\partial x}{\partial u} + m\alpha,$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = q\frac{\partial x}{\partial v} + n\alpha.$$

En écrivant qu'elles sont compatibles, on trouve

$$p\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + m\left(q\frac{\partial x}{\partial v} + n\alpha\right) + \alpha\frac{\partial m}{\partial v}$$
$$= q\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + n\left(p\frac{\partial x}{\partial u} + m\alpha\right) + \alpha\frac{\partial n}{\partial u}.$$

En remarquant que $\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$ ne contient que $\frac{\partial x}{\partial v}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$, on conclut :

(1) $$\frac{\partial m}{\partial v} = \frac{\partial n}{\partial u}.$$

Remplaçons $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les quantités proportionnelles $\xi$, $\eta$, $\zeta$

$$\alpha = \theta\xi, \qquad \beta = \theta\eta, \qquad \gamma = \theta\zeta,$$

on aura

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{p}{\theta}\frac{\partial x}{\partial u} + \left(m - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)\xi,$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial v} = \frac{q}{\theta}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(n - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)\xi.$$

D'après la condition (1), on peut choisir $\theta$ de telle sorte que

$$m - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0, \qquad n - \frac{1}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0.$$

On aura alors

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = P\dfrac{\partial\xi}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = Q\dfrac{\partial\xi}{\partial v}. \end{cases}$$

On voit alors que si $\rho$ est constant, et dans ce cas seulement, le point de la droite D qui a pour coordonnées

$$X = x + \rho\xi, \qquad Y = y + \rho\eta, \qquad Z = z + \rho\zeta$$

décrit une surface parallèle à (S).

On voit facilement que :

*Si* D *est une congruence,* S *un réseau conjugué de cette congruence,* $\Sigma$ *un réseau conjugué parallèle à* S, *les droites* $\Delta$, *menées par les points de* $\Sigma$ *parallèles à* D, *forment une congruence rapportée à ses développables.*

En effet, si $x', y', z'$ sont les coordonnées de $\Sigma$, $\frac{\partial x'}{\partial u}$ est proportionnel à $\frac{\partial x}{\partial u}$, par suite à $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, de même $\frac{\partial x'}{\partial v}$ est proportionnel à $\frac{\partial \xi}{\partial v}$. On a donc

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = P_1 \frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x'}{\partial v} = Q_1 \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Le point (X′, Y′, Z′)

$$X' = x' + \rho\xi$$

sera foyer si $\rho = -P_1$ ou $\rho = -Q_1$.

Nous indiquerons encore la propriété suivante :

*Si deux congruences ont même représentation sphérique de leurs développables, à tout réseau conjugué de la première correspond un réseau parallèle dans la deuxième.*

Soient ($\Delta$) une congruence parallèle à la congruence D; $F_1(x_1, y_1, z_1)$ l'un des foyers. On aura

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = h\xi,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = l\xi + m\frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Écrivons que ces formules sont compatibles et remarquons que

$$(P - Q)\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} - \frac{\partial Q}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0.$$

On obtiendra, entre autres relations, la suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial u}. \tag{3}$$

Cela posé, un point $M(X, Y, Z)$ de la droite $\Delta$ a pour coordonnées

$$X = x_1 + \rho\xi,$$

d'où

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \xi\left(\frac{\partial\rho}{\partial u} + l\right) + \rho\frac{\partial\xi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \xi\left(\frac{\partial\rho}{\partial v} + h\right) + (\rho + m)\frac{\partial\xi}{\partial v}.$$

Si l'on choisit $\rho$ de telle sorte que

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} = -l, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial v} = -h,$$

ce qui est possible à cause de (3), le point M décrit un réseau conjugué parallèle à S.

## XXIII. — Propriétés des congruences AB.

La congruence AB (§ IV) a ses plans focaux conjugués par rapport à la quadrique fondamentale. M. Ribaucour a démontré que, dans ce cas, les développables de AB découpent, à l'entrée et à la sortie, un réseau conjugué sur la quadrique. Il est facile de vérifier ce fait. Les points $M_1(X_1 X_2 X_3 X_4)$, $M_2(Y_1 Y_2 Y_3 Y_4)$, où la droite AB coupe la sphère, ont pour coordonnées

$$X = x + iy, \qquad Y = x - iy,$$

et l'on a

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(a + ie)}{a + ie}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\frac{\partial}{\partial u}(b + if)}{b + if}\frac{\partial X}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial u\,\partial v} = \frac{\frac{\partial}{\partial v}(a - ie)}{a - ie}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\frac{\partial}{\partial u}(b - if)}{b - if}\frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Ces deux réseaux conjugués $(M_1)$ et $(M_2)$ sont rectangulaires (sens ordinaire).

D'après le paragraphe précédent, il y aura une série de réseaux conjugués parallèles à $M_1$, une autre série parallèle à $M_2$; ces réseaux conjugués sont formés de lignes de courbure, donc :

*Il y a deux séries de surfaces qui sont découpées suivant leurs lignes de courbure par les développables de* AB.

La même propriété subsiste pour les congruences parallèles à AB.

On peut construire les congruences AB de la façon suivante. On prendra un réseau rectangulaire $M_1$ sur la sphère; soit S une surface dont les lignes de courbure ont pour représentation sphérique $M_1$; la congruence formée par les droites qui joignent les points correspondants de la sphère et de S est une congruence AB. Si l'on ne veut pas mettre en évidence les développables de AB, on pourra dire simplement : on établit une correspondance par parallélisme des plans tangents entre une surface et la sphère. Les congruences cherchées sont formées des droites qui joignent les points correspondants des deux surfaces.

Il est clair que toutes les congruences dont les développables découpent sur la sphère un réseau orthogonal sont des congruences AB.

Cela posé, nous allons établir la propriété suivante :

*Si une surface* S *est coupée suivant ses lignes de courbure par les développables d'une congruence, cette congruence* (D) *est parallèle à une congruence* AB; *il y a, par conséquent, deux séries de surfaces qui jouissent de la même propriété que* S.

En effet, soit M le réseau orthogonal de la sphère fondamentale qui est la représentation sphérique des lignes de courbure de S; $\Delta$ la congruence formée par les parallèles à D; cette congruence est rapportée à ses développables; c' est une congruence AB, ce qui démontre le théorème.

Considérons d'une manière générale une congruence parallèle à AB, soient $P(x, y, z)$ et $Q(x_1, y_1, z_1)$ deux points qui décrivent des lignes de courbure parallèles; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les cosinus directeurs de la normale aux surfaces (P) et (Q). On aura

$$\frac{\partial x}{\partial u} = - R \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = - R_1 \frac{\partial \alpha}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = - R' \frac{\partial \alpha}{\partial v}. \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = - R'_1 \frac{\partial \alpha}{\partial v}.$$

R et R′ sont les rayons de courbure de (P), $R_1$, $R'_1$ ceux de (Q). Un point de la droite PQ a pour coordonnées

$$X = x + \rho(x_1 - x);$$

donc

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial \rho}{\partial u}(x_1 - x) + \frac{\partial \alpha}{\partial u}[- R + \rho(R - R_1)],$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial v}(x_1 - x) + \frac{\partial \alpha}{\partial v}[- R' + \rho(R' - R_1)].$$

Les valeurs de $\rho$ correspondant aux foyers F et F′ sont

$$\rho = \frac{R}{R - R_1}, \qquad \rho' = \frac{R'}{R' - R'_1}.$$

Les coordonnées de ces foyers sont alors

$$X = x(1 - \rho) + \rho x_1, \qquad X'_1 = x(1 - \rho') + \rho' x_1.$$

Supposons que la surface P soit une sphère de rayon $l$, on aura

$$R = R' = - l, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$
$$x x_1 + y y_1 + z z_1 = l p, \qquad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = d^2.$$

$p$ est la distance du plan tangent de Q à l'origine, $d$ la distance du point Q à l'origine. Écrivons que les deux foyers sont conjugués par rapport à la sphère P,

$$l^2(1 - \rho)(1 - \rho') + l p[\rho(1 - \rho') + \rho'(1 - \rho)] + d^2 \rho\rho' - l^2 = 0$$

ou

$$l^2(\rho\rho' - \rho - \rho') + l p(\rho + \rho' - 2\rho\rho') + d^2 \rho\rho' = 0;$$

en remplaçant $\rho$ et $\rho'$ par leurs valeurs

$$d^2 - l^2 + (R_1 + R'_1)(p - l) = 0.$$

La recherche des surfaces $\Sigma$(§ VI) revient à trouver des surfaces telles que l'on ait

$$d^2 + 1 + (R + R')(p - i) = 0.$$

## XXIV. — Congruences cycliques.

Prenons une congruence parallèle à AB; soient P et Q deux points qui décrivent des lignes de courbure de systèmes distincts. Les tangentes de courbure correspondantes se rencontrent en R et S. Le tétraèdre PQRS est semblable au tétraèdre ABCD (§ IV). Le plan passant par RS et le milieu de PQ est perpendiculaire à PQ. Ce plan touche une surface en un point O où se rencontrent les normales en P et Q aux surfaces P, Q. La sphère de centre O et de rayon OP, enveloppe les surfaces P et Q, sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent; la surface des centres O est rapportée à un cylindre conjugué dont les tangentes sont OR, OS. Enfin, le cercle qui passe par P et Q et qui a pour axe RS est normal à une série de surfaces (Darboux, *Leçons*, 2$^e$ Partie, Liv. IV, Chap. IV).

La droite RS engendre une congruence dont les foyers sont R et S. Cette congruence est appelée *congruence cyclique*. Cette congruence est parallèle à la congruence CD, et réciproquement, toute congruence parallèle à une congruence CD est une congruence cyclique.

On sait que les coordonnées $x$, $y$, $z$ du point O et le rayon R de la sphère OP (Darboux, *loc. cit.*) satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

et que l'on a

$$\frac{\partial x}{du}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} = 0.$$

Il en résulte que le point de l'espace à quatre dimensions, qui a pour coordonnées $x$, $y$, $z$, $i$R, décrit une surface rapportée à ses lignes de courbure.

La surface des centres est la projection, dans l'espace à trois dimensions, d'une surface de l'espace à quatre, qui admet des lignes de courbure. Les lignes conjuguées sont les projections des lignes de courbure.

Dans le cas d'exception (§ XIII), les deux nappes P et Q sont confondues, la sphère mobile est osculatrice à une surface. L'un des systèmes de lignes conjuguées est formé de géodésiques.

Nous allons résoudre divers problèmes :

1° *Un système conjugué étant donné, reconnaître si ce système est le système conjugué découpé sur la surface des centres et, dans ce cas, déterminer les sphères.*

L'équation à laquelle satisfont $x$, $y$, $z$ et R est (§ XII)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Le système conjugué étant donné, $h$ est déterminé à une fonction près de $u$, $l$ de $v$; les formules

$$\frac{\partial x}{\partial u} = h\xi_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = h\xi_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = h\xi_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = l\eta_1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = l\eta_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = l\eta_3,$$

donneront $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ ; $\eta_1$, $\eta_2$, $\eta_3$, les premières sont déterminées à un facteur près qui est fonction de $u$, les secondes à un facteur près qui est fonction de $v$. On aura ensuite

$$\xi_4 = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2}, \qquad \eta_4 = \sqrt{1 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2};$$

il faudra alors qu'on puisse déterminer les facteurs qui entrent dans $\xi$ et $\eta$, de telle sorte que

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 + \xi_4\eta_4 = 0.$$

Réciproquement, cette condition est suffisante. Supposons-la remplie, $x$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial h}{\partial v}\xi_1 + \frac{\partial l}{\partial u}\eta_1 = \frac{\partial h}{\partial v}\xi_1 + ln\eta_1;$$

d'autre part, on a, par différentiation directe,

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \xi_1\frac{\partial h}{\partial v} + h\frac{\partial \xi_1}{\partial v}.$$

On en conclut

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = n\eta_1.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} = n\eta_1, \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial v} = n\eta_2, \qquad \frac{\partial \xi_3}{\partial v} = n\eta_3,$$

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial u} = m\xi_1, \qquad \frac{\partial \eta_2}{\partial u} = m\xi_2, \qquad \frac{\partial \eta_3}{\partial u} = m\xi_3.$$

On aura ensuite,

$$\frac{\partial \xi_4}{\partial v} = \frac{-1}{\xi_4}\left(\xi_1\frac{\partial \xi_1}{\partial v} + \xi_2\frac{\partial \xi_2}{\partial v} + \xi_3\frac{\partial \xi_3}{\partial v}\right) = \frac{-n(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3)}{\xi_4} = n\eta_4.$$

On aurait de même

$$\frac{\partial \eta_4}{\partial u} = m\xi_4.$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin : la congruence engendrée par CD, $C(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $D(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ a ses foyers conjugués par rapport à la sphère fondamentale.

La valeur de R sera ensuite déterminée par

$$\frac{\partial R}{\partial u} = -hi\xi_4, \qquad \frac{\partial R}{\partial v} = -hi\eta_4.$$

On peut alors se poser la question suivante :

*Un système conjugué peut-il être, de plusieurs manières, la projection des lignes de courbure de l'espace à quatre dimensions.*

Il faut qu'on puisse, de plusieurs manières, déterminer les facteurs arbitraires qui entrent dans $\xi_1, \xi_2, \xi_3; \eta_1, \eta_2, \eta_3$.

Donnons d'abord une solution; s'il y en a une seconde, on aura

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= \xi_1 f, & \xi'_2 &= \xi_2 f, & \xi'_3 &= \xi_3 f, \\ \eta'_1 &= \eta_1 \varphi, & \eta'_2 &= \eta_2 \varphi, & \eta'_3 &= \eta_3 \varphi, \end{aligned}$$

$f$ étant fonction de $u$, $\varphi$ fonction de $v$. On déduit

$$\xi'_4 = \sqrt{1 - f^2 + f^2 \xi_4^2}, \qquad \eta'_4 = \sqrt{1 - \varphi^2 + \varphi^2 \eta_4^2}.$$

Écrivons que l'on a

$$\xi'_1 \eta'_1 + \xi'_2 \eta'_2 + \xi'_3 \eta'_3 + \xi'_4 \eta'_4 = 0,$$

on trouve

$$(1) \qquad -1 = \frac{f^2}{1 - f^2} \xi_4^2 + \frac{\varphi^2}{1 - \varphi^2} \eta_4^2.$$

Si la relation (1) est satisfaite, le problème posé admettra deux solutions en général. S'il en admet plus de deux, il en admettra une infinité.

S'il y a deux solutions, cela revient à dire qu'il y a deux congruences (AB), (A′B′) parallèles entre elles et ayant leurs plans focaux conjugués par rapport à la sphère. La congruence AB découpe sur la sphère deux systèmes orthogonaux M et $M_1$, la congruence A′ B′ deux autres M′ et $M'_1$. Sur toute congruence parallèle à AB il y a quatre séries de réseaux conjugués qui sont des lignes de courbure : les représentations sphériques de ces lignes de courbure sont les systèmes M, $M_1$, M′, $M'_1$.

Un cas particulier où l'équation (1) admet une infinité de solutions est le cas où $\xi_4$ est fonction de $u$, $\eta_4$ fonction de $v$. Le système (1) (§ IV) se réduit

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = -x;$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \eta, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = -y.$$

Les points A et C se déplacent sur une droite L, les points B et D sur sa conjuguée λ. On voit bien géométriquement qu'il y a une infinité de congruences analogues à AB et parallèles à AB, il suffit de remplacer L et λ par deux droites conjuguées respectivement parallèles à L et λ. Les systèmes orthogonaux découpés par ces congruences sont formés de petits cercles.

2° *Le système conjugué, tracé sur la surface des centres, peut-il être conjugué sur une déformée de cette surface?*

En se servant des formules (6) (§ XVII) et des formules (2) (§ IX) on trouve facilement que L, M, N vérifient l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{ay_1 - ex_1}\frac{\partial}{\partial v}(ay_1 - ex_1)\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{1}{by_1 - fx_1}\frac{\partial}{\partial u}(by_1 - fx_1)\frac{\partial\theta}{\partial v} + R\theta$$

(il est inutile de calculer R). Appliquons le criterium du § XVII.

On devra avoir

$$L^2 + M^2 + N^2 = (ay_1 - ex_1)^2 f^2(u) + (by_1 - fx_1)^2 \varphi^2(v).$$

Par un choix convenable des variables $u$ et $v$, on peut réduire les fonctions $f$ et $\varphi$ à l'unité. On tombe alors sur la condition

$$x_1^2 + y_1^2 = (ay_1 - ex_1)^2 + (by_1 - fx_1)^2.$$

Cette relation est vérifiée dans le cas des surfaces Σ. Cette relation était d'ailleurs évidente *a priori*. En effet, dans ce cas, toutes les congruences parallèles à (AB) sont aussi des congruences cycliques.

*Remarque.* — Le problème traité § XX donne une solution particulière des problèmes suivants :

*Trouver les congruences cycliques qui se transforment en congruences cycliques par l'application de la méthode de Laplace;*

*Trouver les congruences parallèles à* (AB), *qui se transforment en congruences analogues.*

De même, le problème du § XXI donne une solution particulière de la question suivante :

*Trouver les congruences cycliques qui se transforment en congruences parallèles à* (AB).

---

# DEUXIÈME PARTIE.

## TRANSFORMATION PAR ORTHOGONALITÉ DES ÉLÉMENTS [1].

---

### I. — Formules de la transformation.

Considérons une surface S rapportée à ses asymptotiques. Les coordonnées $x$, $y$, $z$ d'un point de cette surface seront données par les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \quad \eta\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u},\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

avec les formules analogues pour $y$ et $z$; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ étant solutions de l'équation

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \mathrm{M}\theta,$$

que nous appellerons l'*équation de M. Moutard,* relative aux asymptotiques de S.

Soit maintenant une surface quelconque $\Sigma$, (X, Y, Z) les coordon-

(1) Certains résultats indiqués dans cette Partie étaient déjà connus au moment où ce Mémoire a été rédigé. (*Voir* à ce sujet le IVe Volume du cours de M. Darboux, en particulier le Chapitre relatif à la théorie des douze surfaces.)

nées d'un de ces points. On pourra poser

$$\frac{\partial X}{\partial u} = A\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + B\,\frac{\partial \xi}{\partial v} + C\,\xi,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = A_1\frac{\partial \xi}{\partial u} + B_1\frac{\partial \xi}{\partial v} + C_1\xi.$$

Écrivons que S et $\Sigma$ se correspondent par orthogonalité des éléments,

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = 0, \qquad \sum \frac{dx}{du}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = 0.$$

On aura

$$B = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad A + B_1 = 0.$$

Écrivons que les formules simplifiées

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \quad A\frac{\partial \xi}{\partial u} + C\xi,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = - A\frac{\partial \xi}{\partial v} + C_1\xi.$$

On aura

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{d\xi}{dv}C + \xi\left(MA + \frac{\partial C}{\partial v}\right)$$
$$= \frac{\partial \xi}{\partial u}C_1 - \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{dA}{du} + \xi\left(\frac{\partial C_1}{\partial u} - MA\right).$$

On devra donc avoir

$$C = -\frac{\partial A}{\partial u}, \qquad C_1 = \frac{\partial A}{\partial v}$$

et

$$\frac{\partial C}{\partial v} + MA = \frac{\partial C_1}{\partial u} - MA.$$

Posons alors

$$A = -\lambda, \qquad C = \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad C_1 = -\frac{\partial \lambda}{\partial v}.$$

La dernière condition donne

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\,\partial v} = M\lambda.$$

Donc, toutes les surfaces cherchées $\Sigma$ sont données par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \quad \xi\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial\xi}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\xi\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\dfrac{\partial\xi}{\partial v}, \end{cases}$$

où $\lambda$ est une solution quelconque de l'équation (2).

La surface $\Sigma$ est rapportée à un système conjugué à invariants égaux (Ribaucour), car on a

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Enfin les deux surfaces applicables $A(x_1 y_1 z_1)$, $A'(x_2 y_2 z_2)$ ont pour coordonnées (M. Moutard)

$$x_1 = x + X, \qquad x_2 = x - X.$$

Réciproquement, de deux surfaces applicables (A), (A′), on déduira un couple analogue à S et $\Sigma$. (Nous laissons de côté le cas où les deux surfaces applicables sont réglées.)

Si $\lambda$ n'est pas linéairement indépendant de $\xi$, $\eta$, $\zeta$, la surface $\Sigma$ se réduit à un plan; les deux couples de surfaces sont égales.

On a donc les conclusions suivantes :

1° *La recherche des surfaces qui correspondent par orthogonalité des éléments à une surface donnée* S *revient à l'intégration de l'équation de M. Moutard relative aux asymptotiques de* S.

2° Aux asymptotiques de $\Sigma$ correspond un réseau conjugué à invariants égaux sur $\varepsilon$ et, inversement, à un tel réseau correspondent les asymptotiques d'une surface $\Sigma$. Donc :

*La résolution de l'équation de M. Moutard permet de trouver tous les réseaux conjugués à invariants égaux de* S.

Pour les avoir effectivement, il faudra intégrer en outre l'équation différentielle des asymptotiques de $\Sigma$.

3° *La recherche d'un couple de surfaces applicables est identique à la recherche de quatre solutions d'une même équation de M. Moutard.*

## II. — Les congruences de M. Ribaucour.

Menons par chaque point de $\Sigma$ une parallèle à la normale correspondante de S, on obtient une congruence G dont $\Sigma$ est la surface moyenne. Les foyers $F_1$, $F_2$ de cette congruence ont pour coordonnées :

$$F_1 \qquad X_1 = X + \lambda\xi, \qquad Y_1 = Y + \lambda\eta, \qquad Z_1 = Z + \lambda\zeta,$$
$$F_2 \qquad X_2 = X - \lambda\xi, \qquad Y_2 = Y - \lambda\eta, \qquad Z_2 = Z - \lambda\zeta.$$

On obtient ainsi toutes les congruences dont les développables découpent un réseau conjugué sur la surface moyenne.

On peut en déduire une congruence analogue. Appliquons la transformation de M. Moutard à l'équation (2) en prenant comme transformante la fonction $\lambda$; $\xi$, $\eta$, $\zeta$ seront remplacés par $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, et l'on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}(\lambda\xi') = \xi\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\dfrac{\partial\xi}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial}{\partial v}(\lambda\xi') = -\xi\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\dfrac{\partial\xi}{\partial v}, \end{cases}$$

d'où

$$\xi' = \frac{X}{\lambda}, \qquad \eta' = \frac{Y}{\lambda}, \qquad \zeta' = \frac{Z}{\lambda}.$$

L'équation transformée admet pour solution

$$\lambda' = \frac{1}{\lambda}.$$

Aux quatre solutions $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$, $\lambda'$ correspond une surface $\Sigma'$ ; les coordonnées $X'$, $Y'$, $Z'$ de $\Sigma'$ sont

$$X' = \frac{\xi}{\lambda}, \qquad Y' = \frac{\eta}{\lambda}, \qquad Z' = \frac{\zeta}{\lambda}.$$

La surface $\Sigma'$ est rapportée à un système conjugué à invariants égaux; ses tangentes conjuguées sont parallèles à celles de $\Sigma$. On obtiendra une congruence $G'$ analogue à $G$, ayant pour surface moyenne $\Sigma'$, les cosinus directeurs des droites de la congruence étant $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$.

$G'$ est la congruence conjuguée de $G$; $\Sigma'$ la surface conjuguée de $\Sigma$.

Ces deux congruences sont telles que la droite qui joint l'origine au point central de l'une est parallèle à la génératrice correspondante de l'autre.

Les foyers de la congruence $C'$ ont pour coordonnées

$$X'_1 = \frac{\xi}{\lambda} + \frac{X}{\lambda^2},$$

$$X'_2 = \frac{\xi}{\lambda} - \frac{X}{\lambda^2}.$$

Les quatre quantités $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\lambda$ sont les coordonnées homogènes de la surface $\Sigma'$.

### III. — Les congruences à lignes asymptotiques correspondantes.

Prenons la surface S du paragraphe (I), qui est définie par les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \phantom{-}\eta\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} - \zeta\dfrac{\partial \eta_1}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\eta\dfrac{\partial \zeta_1}{\partial v} + \zeta\dfrac{\partial \eta_1}{\partial v}. \end{cases}$$

Menons par chaque point M de cette surface la droite D, dont les cosinus directeurs sont proportionnels aux quantités

$$\eta\zeta' - \zeta\eta', \quad \zeta\xi' - \xi\zeta', \quad \xi\eta' - \eta\xi',$$

$\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$ étant les quantités introduites dans le paragraphe précédent. Et considérons le point $M'(x', y', z')$ ayant les coordonnées

$$x' = x + \eta\zeta' - \zeta\eta'.$$

Ce point décrit une surface S'; on aura alors

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = \quad \eta\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u} + \eta\frac{\partial \zeta'}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta'}{\partial u} + \zeta'\frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta'\frac{\partial \zeta}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x'}{\partial v} = -\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v} + \eta\frac{\partial \zeta'}{\partial v} - \zeta\frac{\partial \eta'}{\partial v} + \zeta'\frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta'\frac{\partial \zeta}{\partial v}.$$

En tenant compte des relations (1) du paragraphe précédent, on a

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial u} = \quad \eta'\dfrac{\partial \zeta'}{\partial u} - \zeta'\dfrac{\partial \eta'}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x'}{\partial v} = -\eta'\dfrac{\partial \zeta'}{\partial v} + \zeta'\dfrac{\partial \eta'}{\partial v}. \end{cases}$$

La surface S' est rapportée à ses asymptotiques; les cosinus directeurs de S sont proportionnels à $\xi$, $\eta$, $\zeta$; ceux de S' à $\xi'$, $\eta'$, $\zeta'$; la droite MM' engendre donc une congruence ayant pour focales S et S'; les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces focales. On obtient ainsi toutes les congruences qui jouissent de cette propriété (C. Guichard, *Comptes rendus;* 1890).

Les projections de MM' sur les axes de coordonnées sont

$$\eta\zeta' - \zeta\eta', \qquad \zeta\xi' - \xi\zeta', \qquad \xi\eta' - \eta\xi'.$$

On a donc

$$\overline{\mathrm{MM}'}^2 = (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2) - (\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')^2$$
$$= \rho^2\rho'^2\sin^2\varphi,$$

où

$$\rho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2, \qquad \rho'^2 = \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2,$$

et $\varphi$ étant l'angle des plans focaux. Si $\mathrm{R}_1$ et $\mathrm{R}_2$ sont les rayons de courbure de S, $\mathrm{R}'_1\,\mathrm{R}'_2$ ceux de S', on a

$$\rho^2 = \sqrt{-\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}, \qquad \rho'^2 = \sqrt{-\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2}.$$

La relation peut donc s'écrire

$$(3) \qquad \overline{\mathrm{MM}'}^4 = \mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2\sin^4\varphi.$$

La surface S′ correspond par orthogonalité des éléments à la surface Σ′; on a donc un second couple de surfaces applicables (B), (B′) ayant pour coordonnées

$$(\mathrm{B}) \qquad x'_1 = x' + \mathrm{X}',$$

$$(\mathrm{B}') \qquad x'_2 = x' - \mathrm{X}'.$$

Ce double couple de surfaces applicables a été signalé par M. Ribaucour (*Mémoire sur les Élassoïdes*).

Des formules qui ont été établies, on déduit

$$\overline{\mathrm{AA}'}^2 = 4(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2) = 4\lambda^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 4\lambda^2\rho'^2,$$

$$\overline{\mathrm{BB}'}^2 = 4(\mathrm{X}'^2 + \mathrm{Y}'^2 + \mathrm{Z}'^2) = \frac{4}{\lambda^2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \frac{4\rho^2}{\lambda^2}.$$

On en déduit donc

$$\overline{\mathrm{AA}'}^2 \times \overline{\mathrm{BB}'}^2 = 16\rho^2\rho'^2 = 16\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2}.$$

Le manque d'homogénéité de cette formule n'étonnera pas si l'on remarque qu'on peut remplacer le couple (A)(A′) par un couple $(\mathrm{A}_1)(\mathrm{A}'_1)$ pourvu que $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}'_1$ soient symétriques par rapport au milieu de AA′ et que $\mathrm{A}_1$ divise AA′ dans un rapport constant. Il serait plus logique de dire que le rapport

$$\frac{\overline{\mathrm{AA}'}^2 \times \overline{\mathrm{BB}'}^2}{\sqrt{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2}}$$

reste fixe quand on se déplace sur les deux couples de surfaces applicables.

### IV. — Cas où la congruence précédente est une congruence de normales.

Dans ce cas particulier, les droites de la congruence sont normales à des surfaces de M. Weingarten (Ribaucour); les deux surfaces focales S et S′ sont applicables sur des surfaces de révolution. Pour qu'il en soit ainsi, il faut

$$\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = 0$$

ou

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0,$$

le plan central de la congruence G passe par un point fixe. Donc :

*La recherche des surfaces de M. Weingarten ou, ce qui revient au même, la déformation des surfaces de révolution, est identique à la recherche des congruences de Ribaucour dont le plan central passe par un point fixe.*

Dans ce cas particulier, la relation (5) du paragraphe précédent devient

$$\overline{MM'}^4 = R_1 R_2 R'_1 R'_2,$$

relation établie dans ce cas par Halphen.

Il est évident que, l'enveloppée moyenne se réduisant à un point, les développables correspondent à un système conjugué sur cette enveloppée, donc $\lambda$ doit être une fonction de $\rho$ (C. Guichard, *Comptes rendus*, 1891), mais cette condition, qui est nécessaire, n'est pas suffisante.

Nous allons donner quelques exemples :

1° Si les surfaces focales sont des courbes, la congruence est une congruence de Ribaucour. Pour que le plan central passe par l'origine, il faut et il suffit que ces deux courbes soient placées sur une même sphère ayant son centre à l'origine. En poursuivant les calculs on trouve la nouvelle classe de surfaces découvertes par M. Weingarten; S et S′ sont alors applicables sur un paraboloïde de révolution.

2° Cherchons les congruences satisfaisantes lorsque la surface S est à courbure totale constante. $\xi$, $\eta$, $\zeta$ seront ici $\alpha_1$, $\beta_1$ $\gamma_1$ (les formules et les notations employées sont celles du Mémoire de M. Guichard, *Recherches sur les surfaces à courbure totale constante*, p. 237).

Puisque le plan central passe à l'origine, on a

$$X = p\alpha + q\alpha_2, \qquad Y = p\beta + q\beta_2, \qquad Z = p\gamma + q\gamma_2;$$

on en déduit

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \alpha\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right) + \alpha_1(p\sin\varphi + q\cos\varphi) + \alpha_2\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = \alpha\left(\frac{\partial p}{\partial v} - q\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + \alpha_1(-q) + \alpha_2\left(\frac{\partial q}{\partial v} + p\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right).$$

D'autre part, on doit avoir

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} = \alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial u} + \lambda\sin\varphi\,\alpha + \lambda\cos\varphi\,\alpha_2,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -\alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\frac{\partial\alpha_1}{\partial v} = -\alpha_1\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \lambda\alpha_2.$$

En identifiant, on aura :

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \lambda\sin\varphi, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial u} = p\sin\varphi + q\cos\varphi, \qquad \frac{\partial q}{\partial u} = \lambda\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial p}{\partial v} = q\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial v} = q, \qquad \lambda = p\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial q}{\partial v}.$$

Cela posé, les foyers $F_1$, $F_2$ ont pour coordonnées

$$F_1, \qquad X_1 = X + \lambda\alpha_1, \qquad Y_1 = Y + \lambda\beta_1, \qquad Z_1 = Z + \lambda\gamma_1,$$

$$F_2, \qquad X_2 = X - \lambda\alpha_1, \qquad Y_2 = Y - \lambda\beta_2, \qquad Z_2 = Z - \lambda\gamma_2.$$

Formons la quantité

$$\theta = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = p^2 + q^2 - \lambda^2.$$

Les formules écrites plus haut donnent $\frac{\partial\theta}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0$. Nous distinguerons deux cas :

1° $\qquad\qquad \theta = 0.$

On a alors

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\lambda^2} = \frac{p^2 + q^2}{\lambda^2} = 1.$$

La seconde surface S′ est aussi à courbure totale constante. La congruence (S, S′) est formée de normales à une surface dont la différence des rayons de courbure est constante.

2°
$$\theta = \text{const.}$$

Les foyers $F_1$, $F_2$ sont conjugués par rapport à une sphère fixe. On obtient ainsi la congruence particulière signalée à la fin du § XVIII, Ire Partie. La surface S′ est celle qui est indiquée dans l'Ouvrage de M. Darboux (IIe Partie, n° 782).

## V. — L'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les coordonnées des surfaces applicables.

Les quatre quantités $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\lambda$ satisfont à une équation de la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + D\frac{\partial\theta}{\partial u} + E\frac{\partial\theta}{\partial v} + F = 0; \tag{1}$$

on peut prendre pour A, C, D, E, F les valeurs suivantes :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \xi \end{vmatrix}, \qquad C = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \xi \end{vmatrix}, \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \\ \xi \end{vmatrix},$$

$$E = -\begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \xi \end{vmatrix}, \qquad F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} \\ \frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} \\ \frac{\partial\xi}{\partial u} \\ \frac{\partial\xi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Dans les déterminants A, C, D, E, F, nous n'écrivons que la première colonne; les autres s'en déduisent en remplaçant $\xi$ par $\eta$ ou par $\zeta$, ou par $\lambda$. En tenant compte de l'équation (2) (§ I) et de celles qui s'en déduisent par dérivation, on voit que

$$\frac{\partial A}{\partial u} = -D, \qquad \frac{\partial C}{\partial v} = -F.$$

Cela posé, des formules

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= \eta\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u}, & \frac{\partial X}{\partial u} &= \xi\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \lambda\frac{\partial \xi}{\partial u},\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= -\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} + \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v}, & \frac{\partial X}{\partial v} &= -\xi\frac{\partial \lambda}{\partial v} + \lambda\frac{\partial \xi}{\partial v},
\end{aligned}$$

on déduit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \eta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u^2} - \zeta\frac{\partial^2 \eta}{\partial u^2}, & \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \xi\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2} - \lambda\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= -\eta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial v^2} + \zeta\frac{\partial^2 \eta}{\partial v^2}, & \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= -\xi\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} + \lambda\frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

On voit facilement alors que $x, y, z$, X, Y, Z sont solutions de l'équation

$$(2) \qquad A\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - C\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} - \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

Il en est de même évidemment des coordonnées $x_1\, y_1\, z_1$, $x_2\, y_2\, z_2$ du couple (A), (A′) de surfaces applicables.

L'équation différentielle des caractéristiques de cette équation est

$$C\,du^2 - A\,dv^2 = 0.$$

C'est l'équation du système conjugué commun aux deux surfaces applicables; c'est aussi celle qui donne le système conjugué commun aux deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments. Sur la surface $\Sigma$, les tangentes à ce système conjugué forment une division harmonique, avec les tangentes aux courbes de coordonnées, qui forment un système à invariants égaux.

D'une manière générale, nous dirons que deux systèmes conjugués qui se trouvent dans la relation qui vient d'être indiquée sont harmoniques. Il est clair que tout système conjugué a un harmonique et un seul. D'après cela :

*La propriété caractéristique des systèmes conjugués qui se conservent dans la transformation par orthogonalité des éléments est d'avoir pour harmonique un système à invariants égaux.*

On peut aller plus loin. L'équation

$$C\,du^2 - A\,dv^2 = 0$$

est celle qui donne les asymptotiques de la surface $\Sigma'$. Ainsi :

Le système conjugué commun au couple A, A' ou au couple S, $\Sigma$ correspond aux asymptotiques de $\Sigma'$.

Cette surface $\Sigma'$ sera appelée la *représentante* du couple de surfaces applicables AA'.

### VI. — Propriétés de ces systèmes conjugués.

Les deux surfaces $\Sigma'$ et $\Sigma$ ont leurs plans tangents parallèles; aux lignes asymptotiques de l'une correspond un système conjugué de l'autre. Il en résulte qu'en chaque point la tangente à l'une des lignes asymptotiques est parallèle à la tangente à la ligne conjuguée qui appartient à l'autre système. Enfin ces systèmes conjugués sont à invariants égaux en coordonnées tangentielles.

Prenons une surface S rapportée à ses asymptotiques : soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point M de cette surface, MT, MS les deux tangentes asymptotiques. On aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \alpha\,\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\,\frac{\partial x}{\partial v},\\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \alpha_1\frac{\partial x}{\partial u} + \beta_1\frac{\partial x}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

avec les formules analogues pour $y$ et $z$. Il existe des relations entre $\alpha$,

$\beta$, $\alpha_1$, $\beta_1$, entre autres la suivante :

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v} = \frac{\partial\beta_1}{\partial u}.$$

Mais nous n'aurons pas à nous en servir. Désignons par $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, $L_1$, $M_1$, $N_1$ les coordonnées de la tangente MT; $X_2$, $Y_2$, $Z_2$, $L_2$, $M_2$, $N_2$ celles de MS. Nous poserons

$$X_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad L_1 = y\frac{\partial z}{\partial u} - z\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$X_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad L_2 = y\frac{\partial z}{\partial v} - z\frac{\partial y}{\partial v},$$

avec les formules analogues pour les quantités Y, Z, M, N. On aura, en tenant compte des équations (1),

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = \alpha X_1 + \beta X_2, & \dfrac{\partial L_1}{\partial u} = \alpha L_1 + \beta L_1, \\[2ex] \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = \alpha_1 X_1 + \beta_1 X_2, & \dfrac{\partial L_2}{\partial v} = \alpha_1 L_1 + \beta_1 L_2. \end{cases}$$

Déterminons deux surfaces $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = pX_2, & \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = pL_2, \\[2ex] \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = qX_1, & \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = qL_1. \end{cases}$$

En écrivant que ces équations sont compatibles, on trouve

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial v} + p\beta_1 = q\beta, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial u} + q\alpha = p\alpha_1. \end{cases}$$

Les six quantités $x_1\,y_1\,z_1$, $x_2\,y_2\,z_2$ satisfont à l'équation

$$(5)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{\beta q}{p}\frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\alpha_1 p}{q}\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Les surfaces $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ sont rapportées à un système conjugué commun; elles se correspondent en outre par orthogonalité des éléments. Il résulte, de ce qui a été dit plus haut, qu'on obtient ainsi toutes les surfaces cherchées.

Au lieu de résoudre le système (3), on peut opérer ainsi : soient $\xi$, $\eta$, $\zeta$ les solutions de l'équation de M. Moutard relative à la surface S; la surface $\Sigma_1$ étant parallèle à la surface S, ses coordonnées tangentielles seront $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\lambda$; $\lambda$ étant une quatrième solution de l'équation de M. Moutard. $\lambda$ étant connu, on pourra calculer $\frac{\partial x_1}{\partial v}$, $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, ce qui donnera $p$ et $q$. La seconde surface $\Sigma_2$ se déterminera ensuite à l'aide de quadratures. Il en résulte que tout système conjugué à invariants égaux tangentiels se conserve sur une surface qui correspond par orthogonalité des éléments. Donc :

*La propriété caractéristique des systèmes conjugués, communs à deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments, c'est d'être à invariants égaux tangentiels.*

*Tout système à invariants égaux ponctuels admet pour harmonique un système à invariants égaux tangentiels, et inversement.*

*Si un système conjugué est à invariants égaux en tangentielle et en ponctuelle, il en est de même de son harmonique.*

Nous allons déterminer ces derniers systèmes. Prenons sur une surface $\Sigma(X, Y, Z)$ un système à invariants égaux (en ponctuelle), les coordonnées vérifient l'équation (2). Si, d'autre part, ce système est à invariants égaux (en tangentielle), il sera possible de déterminer des coordonnées $x'$, $y'$, $z'$, telles que l'on ait

$$\frac{\partial x'}{\partial u} = p\frac{\partial X}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x'}{\partial v} = q\frac{\partial X}{\partial u},$$

d'où l'on déduit

$$p\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = q\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}.$$

En identifiant avec l'équation (2), on trouve

$$\frac{q}{A} = -\frac{\frac{\partial q}{\partial u}}{\frac{\partial A}{\partial u}} = \frac{p}{C} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial v}}{\frac{\partial C}{\partial v}},$$

On en déduit d'abord

$$(3) \qquad Aq = \varphi(v), \qquad pC = f(u);$$

de plus, on doit avoir

$$Ap = Cq = \psi$$

et, par conséquent, en tenant compte des relations (3),

$$\psi = \sqrt{f\varphi}.$$

Le rapport $\frac{A}{C}$ est alors le produit d'une fonction de $u$ par une fonction de $v$. On peut, en supposant choisies convenablement les variables $u$ et $v$, dire que la condition cherchée est

$$A = C.$$

Examinons maintenant les divers cas particuliers qui se présentent naturellement :

1° Si la surface représentante est une sphère, le système conjugué commun aux deux surfaces qui se correspondent par orthogonalité des éléments est formé de lignes de longueur nulle. Les deux surfaces sont des surfaces minima.

2° Si la surface représentante est une surface réglée, les quantités $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ restent fixes quand on se déplace sur une génératrice. Il en résulte que les tangentes aux courbes de paramètre $v$ conservent une direction fixe quand on se déplace sur les courbes de paramètre $u$. L'un des systèmes conjugués est formé des courbes de contact de la surface avec des cylindres. Si la surface représentante est une quadrique, les deux systèmes de lignes conjuguées jouissent de la propriété indiquée plus haut.

Ces deux propriétés existent aussi pour les couples de surfaces applicables qui y correspondent. Ce sont d'ailleurs les seuls cas où elles existent.

3° Si la surface représentante est une surface minima, le système conjugué qui se conserve dans la transformation par orthogonalité des éléments est formé de lignes de courbure sur l'une des deux surfaces.

### VII. — Les systèmes conjugués communs à deux surfaces applicables.

Les deux surfaces applicables $A_1$ et $A_2$ ont pour coordonnées

$$\frac{\partial x'_1}{\partial u} = p(X_2 + L_2), \qquad \frac{\partial x'_2}{\partial u} = p(X_2 - L_2),$$
$$\frac{\partial x'_1}{\partial v} = q(X_1 + L_1), \qquad \frac{\partial x'_2}{\partial v} = q(X_1 - L_1).$$

Ces coordonnées satisfont à l'équation (5) du paragraphe précédent; donc

*Le système conjugué qui se conserve dans la déformation est à invariants égaux dans le cas où* $A = C$.

Si l'on veut que l'un des systèmes conjugués soit formé des courbes de contact de cylindres circonscrits à la surface, il faut que l'un des coefficients de $\frac{\partial \theta}{\partial u}$ ou de $\frac{\partial \theta}{\partial v}$ soit nul; dans ce cas, la surface représentante est une surface réglée.

Supposons qu'on ait multiplié les quantités X, Y, Z, L, M, N par un même facteur, de façon que l'on ait, comme dans la Géométrie non euclidienne,

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + L^2 + M^2 + N^2 = 1.$$

Les cosinus directeurs des tangentes conjuguées sur la première surface sont

$$X_2 + L_2, \quad Y_2 + M_2, \quad Z_2 + N_2,$$
$$X_1 + L_1, \quad Y_1 + M_1, \quad Z_1 + N_1.$$

L'angle des deux tangentes conjuguées est

$$\cos\varphi = (X_1 + L_1)(X_2 + L_2) + (Y_1 + M_1)(Y_2 + M_2) + (Z_1 + N_1)(Z_2 + N_2);$$

cette formule est aussi celle qui donne l'angle non euclidien de deux droites qui se coupent; donc

*L'angle des lignes conjuguées qui se conservent dans la déformation est égal à l'angle non euclidien formé par les asymptotiques de la représentante.*

Pour que ce système soit formé de lignes de courbure, il faut que la surface représentante soit une surface minima non euclidienne (§ VIII, Ire Partie). En tenant compte des formules (2) (§ VII, Ire Partie), on voit facilement que la représentation sphérique des lignes de courbure qui se conservent dans la déformation est celle des lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante (Bonnet).

D'une façon plus générale, on peut chercher le cas où les lignes du système conjugué se coupent sous un angle constant. L'angle non euclidien des asymptotiques de la représentante doit être constant, c'est-à-dire que le rapport $\frac{af}{be}$ (§ IV, Ire Partie) doit être constant.

Désignons par X, Y, Z, L, M, N les coordonnées de la normale non euclidienne à la représentante. On aura alors

$$(X+L)(X_1+L_1)+(Y+M)(Y_1+M_1)+(Z+N)(Z_1+N_1)=0,$$
$$(X+L)(X_2+L_2)+(Y+M)(Y_2+M_2)+(Z+N)(Z_2+N_2)=0.$$

Il en résulte que $X+L$, $Y+M$, $Z+N$ sont les cosinus directeurs de la normale à $A_1$; de même la normale à $A_2$ a pour cosinus directeurs $X-L$, $Y-M$, $Z-N$.

Pour que les deux surfaces fassent entre elles un angle $\varphi$, fixe, il faut

$$X^2+Y^2+Z^2-L^2-M^2-N^2=\cos\varphi,$$

ou bien

$$X^2+Y^2+Z^2-L^2-M^2-N^2=\cos\varphi(X^2+Y^2+Z^2+L^2+M^2+N^2);$$

c'est l'équation d'un complexe formé des tangentes à une sphère. Voici alors quelle sera la marche à suivre pour résoudre le problème : on cherchera les géodésiques non euclidiennes de cette sphère (ce sont encore des grands cercles); on prendra un système quelconque de ces géodésiques, ou même leurs tangentes; on déterminera par quadrature une surface normale (sens non euclidien) à ces droites. On aura ainsi la représentante. Il suffira alors d'intégrer l'équation de Moutard relative aux asymptotiques de cette représentante pour achever le problème.

*Remarque.* — Aux lignes asymptotiques de $A_1$ correspond sur la représentante un système conjugué. Ce système conjugué n'est pas quelconque, il est caractérisé par cette propriété que $X+L$, $Y+M$, $Z+N$ sont solutions d'une équation à invariants égaux. Dans le cas particulier où ce système conjugué est formé de lignes de courbure (sens non euclidien), on connaît par cela seul toute une série de représentantes de $A_1$ : c'est une série de surfaces parallèles (sens non euclidien). On aura donc une infinité de déformées de $A_1$ qui dépendent d'une constante arbitraire.

Pour étudier ce cas, on déduit des formules (6) (§ XVII, Ire Partie)

$$\frac{\partial(X+L)}{\partial u}=e(X_1+L_1)-a(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X+L)}{\partial v}=b(X_1+L_1)+f(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X_1+L_1)}{\partial u}=-e(X+L)-m(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X_1+L_1)}{\partial v}=-b(X+L)+n(X_2+L_2),$$

$$\frac{\partial(X_2+L_2)}{\partial u}=a(X+L)+m(X_1+L_1),$$

$$\frac{\partial(X_2+L_2)}{\partial v}=-f(X+L)-n(X_1+L_1).$$

On en déduit que $X + L$, $Y + M$, $Z + N$ sont solutions :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v} + R\theta,$$

où

$$P = \frac{m(b^2 + f^2) + n(af - be)}{ab + ef},$$

$$Q = \frac{m(af - be) + n(a^2 + e^2)}{ab + ef}.$$

La condition cherchée est

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{m(b^2 + f^2) + n(af - be)}{ab + ef}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{m(af - be) + n(a^2 + e^2)}{ab + ef}\right].$$

## VIII. — Sur une transformation des couples de surfaces applicables.

Soient $S(X_1, X_2, X_3)$ et $S'(iX_4, iX_5, iX_6)$ deux surfaces applicables; de telle sorte que l'on a

$$dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 + dX_5^2 + dX_6^2 = 0$$

ou

$$\Sigma \, dX^2 = 0.$$

Posons

$$\rho = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 + X_6^2 = \Sigma X^2.$$

Déterminons six quantités $x_1, x_2, \ldots, x_6$ par les formules

$$x = \frac{X}{\rho^2};$$

on aura alors

$$dx = \frac{\rho^2 \, dX - 2\rho \, d\rho \, X}{\rho^4},$$

$$\Sigma \, dx^2 = \frac{1}{\rho^4} \Sigma \, dX^2 - \frac{4}{\rho^5} d\rho \Sigma X \, dX + \frac{4}{\rho^6} d\rho^2 \Sigma X^2 = 0.$$

Les deux surfaces $\Sigma(x_1, x_2, x_3)$, $\Sigma'(ix_4, ix_5, ix_6)$ sont donc applicables. On a donc la construction suivante :

*Soient* M *et* M' *deux points correspondants de deux surfaces ap-*

*plicables,* O *un point fixe; prenons sur* OM *et* OM′ *deux points* N *et* N′, *tels que*

$$\frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OM}} = \frac{\mathrm{ON}'}{\mathrm{OM}'} = \frac{1}{\overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{OM}'}^2}.$$

*Les points* N *et* N′ *décrivent deux surfaces applicables.*

Dans le cas particulier où $\overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{OM}'}^2$ est constant, la méthode donnerait des surfaces homothétiques.

Nous allons chercher ces surfaces. On peut supposer la constante $\rho = 1$. Posons alors

$$(1)\qquad x_1 = \frac{2X_1}{1+X_6}, \qquad x_2 = \frac{2X_2}{1+X_6}, \qquad \ldots, \qquad x_5 = \frac{2X_5}{1+X_6}.$$

On aura ensuite

$$r = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 4\,\frac{1-X_6}{1+X_6}.$$

Différentions totalement les formules (1). On aura

$$dx_i = 2\,\frac{(1+X_6)\,dX_i - X_i\,dX_6}{(1+X_6)^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5),$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\, dx_i^2 &= \frac{L}{(1+X_6)^4}\left[(1+X_6)^2\Sigma\, dX_i^2 + 2\,dX_6(1+X_6)\Sigma X_i\, dX_i + dX_6^2\Sigma X_i^2\right]\\ &= \frac{L}{(1+X_6)^4}\left[-\,dX_6^2(1+X_6)^2 + 2X_6(1+X_6)\,dX_6^2 + (1+X_6^2)\,dX_6^2\right] = 0.\end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire d'aller plus loin, $x_1$, $x_2$, $x_3$ sont les coordonnées d'une développable; $ix_4$, $ix_5$ celles du point correspondant du plan.

On obtient ainsi tous les couples de surfaces applicables qui jouissent de la propriété suivante :

*La différence des carrés des distances d'un point fixe aux deux points correspondants est constante.*