JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE BOREL

Fondements de la théorie des séries divergentes sommables

Journal de mathématiques pures et appliquées 5e série, tome 2 (1896), p. 103-122.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1896_5_2__103_0>

Fondements de la théorie des séries divergentes sommables;

Par M. Émile BOREL.

Les géomètres antérieurs à Abel et à Cauchy faisaient usage sans scrupule des séries divergentes; par exemple, l'égalité

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \tag{1}$$

leur donnait pour $x = -1$:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Cette manière de procéder n'avait évidemment aucune rigueur; peut-être s'est-on trop hâté de conclure qu'elle ne reposait sur aucun fondement et, au lieu de rechercher les raisons pour lesquelles les résultats qu'elle fournissait étaient presque toujours exacts, on a proscrit absolument du calcul les séries divergentes. Cette réaction violente était peut-être nécessaire pour donner aux mathématiciens l'habitude d'une rigueur absolue; actuellement, cette habitude est prise depuis longtemps et nul n'oserait donner comme certain un résultat qui ne serait pas déduit rigoureusement de résultats certains, ou du moins que son auteur ne croirait point tel. Aussi ne peut-il y avoir aucun inconvénient à se demander si l'emploi des séries divergentes ne serait pas dans certains cas parfaitement légitime, et si l'égalité (2), par exemple, n'exprimerait pas un *fait mathématique* aussi certain que la relation (1) d'où on l'a déduite.

Voici le point de vue auquel je me suis placé pour faire cette recherche.

On utilise souvent, pour représenter une fonction analytique, un développement en série convergente dans une région moins étendue que la région où la fonction donnée existe; c'est ce qui arrive presque constamment pour le développement de Taylor. Considérons, par exemple, l'égalité (1); si l'on donne à x une valeur dont le module dépasse l'unité, le premier membre n'est pas convergent, tandis que, si x est différent de *un*, le second membre a une valeur numérique parfaitement déterminée. Je me suis proposé de rechercher une relation entre les valeurs numériques des termes successifs du premier membre et la valeur numérique du second membre, et je suis arrivé au résultat suivant : dans des cas très étendus, *la valeur numérique du second membre peut être calculée au moyen des valeurs numériques des termes du premier membre, par un procédé ne dépendant que de ces valeurs numériques.* Dès lors, il est très légitime de dire que cette valeur numérique est la somme de la série numérique (divergente) que forme le premier membre.

Il m'a paru préférable de donner à l'exposition une forme synthétique; j'espère que les lecteurs voudront bien ne pas se choquer des définitions du début, au premier abord un peu arbitraires; s'ils ont la patience de terminer la lecture de ce Mémoire, ils se rendront compte que cet arbitraire se réduit à rien ou à bien peu de chose.

Définition et principales propriétés de la LIMITE GÉNÉRALISÉE.

Considérons une suite de nombres *réels, rangés dans un ordre déterminé :*

$$(1) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Nous ferons correspondre à cette suite la fonction de a :

$$x(a) = x_0 + x_1 a + x_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots + x_n \frac{a^n}{n!} + \ldots,$$

et nous supposerons les x_n tels que $x(a)$ soit une fonction entière de a. Supposons, de plus, que, a croissant indéfiniment par valeurs positives, on ait

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a} x(a)] = x.$$

Nous dirons alors que la suite (1) a une *limite généralisée* et que cette limite est x.

Considérons une seconde suite

$$(2)\qquad y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots,$$

admettant comme limite généralisée y, et désignons par α et β deux constantes réelles; *si nous posons*

$$z_n = \alpha x_n + \beta y_n,$$

la suite

$$(3)\qquad z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots$$

admettra manifestement une limite généralisée z, laquelle sera égale à $\alpha x + \beta y$.

Si, à partir d'un certain rang, les x_n sont tous nuls, $x(a)$ se réduit à un polynome et *la suite* (1) *admet zéro pour limite généralisée;* dans ce cas particulier, la définition se confond avec la définition ordinaire de la limite; on va voir qu'il en est de même dans tous les cas où cette dernière définition est applicable.

Supposons qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (2) soient tous nuls et que la constante désignée par α se réduise à l'unité; la suite (3) sera, à partir d'un certain rang, identique avec la suite (1); nous avons d'ailleurs $y = 0$ et par suite $z = x$. Par conséquent, *on peut, sans altérer la limite généralisée d'une suite de quantités, modifier d'une manière quelconque la valeur d'un nombre limité de ces quantités.*

Si les termes de la suite (1) sont tous égaux, on a, en désignant par x leur valeur commune, $x(a) = xe^a$. La *limite généralisée* est donc x. En combinant cette remarque avec une proposition précédente, on voit que, *si l'on ajoute un meme nombre x à tous les termes* *d'une suite admettant une limite généralisée, on obtient une nouvelle suite admettant aussi une limite généralisée, égale à la précédente, augmentée de x.*

Il est clair que, si tous les termes de la suite (1) sont positifs, la fonction $x(a)$ est positive lorsque a est positif, et la limite généralisée, si elle existe, est positive ou nulle; il en est de même, d'ailleurs, si les termes de la suite (1) ne sont positifs qu'à partir d'un certain rang, puisqu'on a le droit de modifier la valeur d'un nombre limité d'entre eux.

Les remarques précédentes montrent que si, *à partir d'un certain rang les x_n sont compris entre deux nombres fixes p et q, la limite généralisée, si elle existe, est comprise entre p et q.* Il en résulte que, si les x_n ont une limite, sa valeur coïncide avec celle de la *limite généralisée,* qu'on s'assure aisément exister toujours dans ce cas. Si les x_n, à partir d'un rang assez élevé, dépassent toute quantité assignable, il en est de même de x (mais il ne s'agit pas des valeurs absolues).

Nous allons démontrer une autre proposition très importante.

Posons

$$\varphi(a) = e^{-a}x(a);$$

nous aurons, en désignant les dérivées par des accents,

$$\varphi'(a) = e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a).$$

Or, on a évidemment,

$$\varphi(a) - \varphi(a_0) = \int_{a_0}^{a} \varphi'(a)\,da = \int_{a_0}^{a} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)]\,da.$$

Nous nous plaçons dans le cas où $\varphi(a)$ tend vers une limite lorsque a augmente indéfiniment; l'intégrale suivante, dans laquelle $x(a)$ est une fonction entière,

$$\int_{a_0}^{\infty} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)]\,da,$$

a donc un sens (cette intégrale pourrait servir à définir la limite généralisée). On en conclut que l'on a

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a}x'(a) - e^{-a}x(a)] = 0.$$

ou bien

$$(4) \qquad \lim_{a=\infty}[e^{-a}x'(a)] = \lim_{a=\infty}[e^{-a}x(a)] = x.$$

Or, nous avons

$$x'(a) = x_1 + x_2\frac{a}{1} + x_3\frac{a^2}{2!} + x_4\frac{a^3}{3!} + \ldots + x_{n+1}\frac{a^n}{n!} + \ldots,$$

c'est-à-dire que $x'(a)$ correspond à la suite

$$(1)' \qquad x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots,$$

de la même manière que $x(a)$ correspond à la suite

$$(1) \qquad x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots.$$

Nous concluons de là, et de la relation (4), qu'on n'altère pas la *limite généralisée* d'une suite de quantités en supprimant un nombre limité de ces quantités, ce qui diminue d'un nombre fixe le rang de celles qui occupent un rang assez élevé. Ce fait nous sera très utile dans l'étude des séries.

Ainsi, en résumé, notre définition de la *limite généralisée* coïncide avec la définition ordinaire lorsque celle-ci est applicable; elle en possède bien des propriétés, mais en diffère surtout par le fait qu'on n'a pas le droit, dans le cas où la limite ordinaire n'existe pas, de supprimer *une infinité* de termes dans la suite considérée ou d'en modifier l'ordre; mais ces opérations sont permises sur un nombre limité quelconque.

Séries numériques; caractères de sommabilité.

Considérons une série à termes réels

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots,$$

et désignons par s_n la somme de ses n premiers termes $(s_0 = 0)$; nous dirons que la série est sommable si la suite

$$s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots$$

a une *limite généralisée s*, et cette limite sera dite *la somme de la série*.

Il résulte immédiatement des propositions précédemment établies que toute modification portant sur un nombre limité de termes ne saurait modifier la sommabilité et modifie la somme d'une manière évidente. On peut ajouter terme à terme plusieurs séries sommables, multipliées d'ailleurs par des nombres quelconques; on obtient une nouvelle série sommable, dont la somme s'exprime au moyen des sommes des séries données de la même manière que chacun de ses termes au moyen des termes correspondants de ces séries. Enfin, si une série est convergente, notre définition de la somme coïncide avec la définition habituelle.

Supposons que la série proposée soit sommable; d'après ce qui précède, les deux suites

$$s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, \ldots, \tag{5}$$

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots \tag{6}$$

ont une même *limite généralisée s*; si l'on retranche terme à terme la suite (5) de la suite (6), on en conclut que la suite

$$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots \tag{7}$$

admet zéro pour limite généralisée. Ainsi, pour qu'une série soit sommable, il est *nécessaire que le terme général ait zéro pour limite généralisée*.

Nous allons maintenant rechercher des conditions suffisantes; posons

$$s(a) = s_0 + s_1 a + \frac{s_2 a^2}{2!} + \frac{s_3 a^3}{3!} + \ldots,$$

$$u(a) = u_0 + u_1 a + u_2 \frac{a^2}{2!} + u_3 \frac{a^3}{3!} + \ldots,$$

on voit aisément que l'on a

$$\frac{d}{da}[e^{-a}s(a)] = e^{-a}u(a).$$

Donc, pour que la série considérée soit sommable, il est *nécessaire et suffisant que l'intégrale*

$$\int_0^\infty e^{-a}u(a)da$$

ait un sens (¹). On retrouve ainsi la condition nécessaire indiquée; pour trouver une condition suffisante, nous exprimerons, par exemple, que l'on a

$$(8) \qquad \lim_{a=\infty}[a^2 e^{-a}u(a)] = 0,$$

car l'intégrale a alors un sens. Or, on a

$$a^2 u(a) = u_0 a^2 + u_1 a^3 + \ldots + u_n \frac{a^{n+2}}{n!} + \ldots,$$

et si nous posons

$$v_{n+2} = (n+1)(n+2)u_n,$$

nous aurons

$$a^2 u(a) = v(a) = v_2 \frac{a_2}{2!} + v_3 \frac{a^3}{3!} + \ldots + v_{n+2} \frac{a^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots.$$

La relation (8) exprime donc que v_n admet zéro pour limite généralisée. Ainsi, *pour qu'une série de terme général u_n soit sommable, il est suffisant que le produit $(n+1)(n+2)\,u_n$ admette zéro pour limite généralisée*. Comme il est permis d'augmenter ou de diminuer d'un même nombre le rang de tous les termes, on peut, dans cet énoncé, remplacer $(n+1)(n+2)u_n$ par $(n+k)(n+k-1)u_n$, k étant un entier positif ou négatif quelconque. Ce critère nous suffira pour les applications que nous avons en vue; il serait intéressant d'en

(¹) Cette intégrale peut servir à définir la somme et à en étudier les propriétés; je me contente de signaler ce point de vue.

rechercher d'autres; on y parviendrait sans doute aisément par l'emploi des dérivées à indices quelconques.

Nous allons, à titre d'exemple, sommer quelques séries divergentes; reprenons d'abord la série

$$(2) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$$

On a ici

$$s_{2n-1} = 1, \qquad s_{2n} = 0,$$

$$s(a) = sha = \frac{e^a - e^{-a}}{2},$$

$$e^{-a}s(a) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2a}, \qquad s = \frac{1}{2}.$$

D'ailleurs

$$u_{n-1} = 1, \qquad u_{2n} = -1, \qquad u(a) = e^{-a},$$

le terme général a bien zéro pour limite généralisée.

Soit maintenant la série

$$s = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \ldots.$$

On a ici $u(a) = e^{-2a}$; donc la série est sommable; or, on a

$$s = 1 - 2(1 - 2 + 4 - 8 + \ldots) = 1 - 2s;$$

donc $s = \frac{1}{3}$; c'est aussi le résultat que fournirait un calcul direct. Nous allons faire ce calcul sur la série

$$1 - m + m^2 - m^3 + \ldots,$$

qui comprend la précédente comme cas particulier. On a ici

$$s_n = \frac{1 + (-1)^{n-1} m^n}{1 + m}$$

et, par suite,

$$s(a) = \frac{e^a}{1 + m} - \frac{e^{-ma} - 1}{m(1 + m)}.$$

Si nous supposons que m soit positif, on en conclut

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} s(a) = \frac{1}{1+m}.$$

Il serait aisé de vérifier sur ces exemples, et en particulier sur la série (2), que l'on ne peut pas, en général, modifier l'ordre d'une infinité de termes sans changer la valeur de la série, même si chaque terme est déplacé seulement d'un rang. Il y a là une différence apparente avec les séries convergentes ; cette différence tient à ce que les termes ne tendent pas vers zéro. J'ai démontré, en effet ([1]), que, pour qu'un changement dans l'ordre des termes d'une série semi-convergente n'altère pas sa somme, il suffit que le produit de la valeur absolue du terme de rang n par le déplacement maximum des termes qui suivent le $n^{\text{ième}}$ tende vers zéro pour n infini ; il ne suffit pas toujours que le produit de la valeur absolue du terme de rang n, par son déplacement, tende vers zéro ; ces conditions ne sauraient être vérifiées si les termes ne tendent pas vers zéro ; il y aurait lieu de rechercher si la première subsiste en attribuant un signe aux déplacements, et tenant compte des signes des termes ainsi que de la notion de *limite généralisée*.

Séries entières à termes réels. Généralisation du théorème d'Abel.

Considérons la série à termes réels

$$u_0 + u_1 \rho + u_2 \rho^2 + \ldots + u_n \rho^n + \ldots. \tag{9}$$

Si nous posons

$$u_n \rho^n = v_n$$

et

$$u(a) = u_0 + u_1 a + u_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots,$$

$$v(a) = v_0 + v_1 a + v_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots,$$

([1]) *Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente* (*Bulletin des Sciences mathématiques;* 1890).

nous avons

$$v(a) = u(a\rho).$$

Supposons que la série (9) soit sommable pour $\rho = 1$; nous savons qu'il est nécessaire, pour cela, que l'on ait

$$\lim_{a=\infty} [e^{-a} u(a)] = 0.$$

Je dis qu'il en résulte que la série (9) est sommable pour les valeurs de ρ comprises entre zéro et un. En effet, il suffit, pour cela, que l'on ait

$$\lim_{a=\infty} [a^2 v(a) e^{-a}] = 0.$$

Or nous avons

$$a^2 v(a) e^{-a} = [u(a\rho) e^{-a\rho}][a^2 e^{a(\rho-1)}].$$

Or, ρ étant positif, $a\rho$ augmente indéfiniment par valeurs positives en même temps que a ; d'autre part, $\rho - 1$ est supposé négatif ; les deux facteurs du second membre tendent donc vers zéro lorsque a augmente indéfiniment, ce qui prouve le fait énoncé.

Nous pouvons démontrer aussi que la série obtenue en dérivant terme à terme, par rapport à ρ, la série (9) est aussi sommable, si ρ est compris entre zéro et un. En désignant par w_n son terme général, on a

$$w_n = n u_n \rho^{n-1} = \frac{n}{\rho} v_n,$$

$$w(a) = w_0 + w_1 a + \ldots = \frac{1}{\rho} v'(a).$$

Pour que $a^2 w(a) e^{-a}$ tende vers zéro, pour a infini, il suffit qu'il en soit ainsi de $a^3 v(a) e^{-a}$, et la démonstration est la même que précédemment. La proposition s'étend évidemment aux séries dont les termes sont des dérivées d'ordre quelconque des termes de la série (9). Nous verrons plus loin que les sommes de ces séries, qui sont des fonctions de ρ, sont les dérivées successives par rapport à ρ de la somme de la série (9).

Séries à termes complexes.

Les définitions précédentes s'étendent aux séries à termes complexes ; il y a lieu de considérer séparément la partie réelle et la partie imaginaire, et il importe de remarquer qu'on ne peut s'affranchir de cette double considération par l'étude de la série des modules, car nous avons vu qu'une série à termes positifs n'est sommable que si elle est convergente.

Séries dont les termes dépendent d'une variable; notion de l'uniformité.

Nous avons dit qu'une suite de quantités

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

tend vers une *limite généralisée* x, si l'on a

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} x(a) = x$$

en posant

$$x(a) = x_0 + x_1 a + x_2 \frac{a^2}{2!} + \ldots.$$

Supposons que $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ dépendent d'une variable complexe z [1] et soient dans un certain domaine des fonctions analytiques de z; la fonction $x(a)$ est alors une fonction $x(a, z)$; nous dirons que la suite des fonctions x_n tend *uniformément* vers la *limite généralisée* $x(z)$ si le produit $e^{-a}x(a, z)$ tend *uniformément* vers $x(z)$ lorsque a augmente indéfiniment. En d'autres termes, à tout nombre positif ε, on doit pouvoir faire correspondre un nombre a_0 tel que l'inégalité

$$a > a_0$$

entraîne

$$|e^{-a} x(a, z) - x(z)| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs de z appartenant au domaine considéré. On

(1) On verra aisément les légers changements à introduire dans le langage si les x dépendent d'*une* ou *plusieurs* variables, *réelles* ou *complexes*.

peut dire aussi que la série

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} [e^{-(n+1)}x(n+1, z) - e^{-n}x(n, z)]$$

est uniformément convergente; sa somme est évidemment $x(z) - x_0$. Ce dernier fait prouve que dans le domaine considéré $x(z)$ est une fonction analytique de z.

Ainsi, *lorsqu'une suite de fonctions d'une variable complexe z, analytiques dans un domaine* D, *tend uniformément dans ce domaine vers une limite généralisée, cette limite est aussi une fonction analytique dans* D.

Considérons maintenant une série dont les termes sont des fonctions de z, analytiques dans D; cette série sera dite *uniformément sommable* si la somme $s_n(z)$ de ses n premiers termes tend uniformément vers une limite généralisée $s(z)$. Comme les $s_n(z)$ sont des fonctions analytiques dans D, on voit que *si une série est uniformément sommable dans un domaine où ses termes sont analytiques, sa somme est aussi une fonction analytique.*

On peut intégrer terme à terme une série uniformément sommable; la somme de la série obtenue est l'intégrale de la somme de la série donnée.

Cette proposition est d'ailleurs exacte que la variable d'intégration soit complexe ou réelle; on peut l'appliquer aux fonctions de ρ précédemment considérées qu'on établit aisément être uniformément sommables dans tout intervalle compris dans l'intervalle $0 < \rho < 1$.

Proposition fondamentale.

Cette proposition, qui justifie complètement tout ce qui précède en montrant que les *sommes* obtenues pour les séries divergentes correspondent bien à une réalité, est la suivante :

Si une série uniformément sommable dans un domaine d'un seul tenant est uniformément convergente dans une portion de ce do-

maine [1], *sa somme est dans tout le domaine une même fonction analytique.* La somme est définie comme il a été dit lorsque la série est sommable et à la manière ordinaire lorsqu'elle est convergente. La démonstration est d'ailleurs intuitive : il suffit d'observer que ces deux définitions de la somme coïncident dans la région où la série est convergente. Soit

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

la série considérée; elle est uniformément convergente dans un domaine D et définit dans ce domaine une fonction analytique $f(z)$. Souvent cette fonction analytique peut être prolongée en dehors du domaine D dans lequel la série est convergente. Supposons que, dans une région D′ comprenant D, la série soit uniformément sommable : en un point A de D′, on obtiendra la valeur numérique de la fonction analytique prolongée $f(z)$ en cherchant la somme de la série numérique *divergente* formée par les valeurs des fonctions $f_n(z)$ au point A.

Supposons qu'une série entière soit uniformément sommable dans une région D; on démontre aisément qu'elle est uniformément sommable dans la région couverte par les segments de droite qui joignent l'origine aux divers points de D, ou tout au moins dans toute région intérieure à celle-là. Cette région en forme de secteur comprend un secteur du cercle de convergence de la série; on peut donc affirmer que la somme de la série, en un point quelconque de la région D, donne la valeur en ce point de la fonction analytique définie par la série dans son cercle de convergence.

---

[1] On pourrait montrer que, si une série est à la fois convergente et uniformément sommable, elle est uniformément convergente.

Détermination, dans quelques cas simples, du domaine de sommabilité uniforme.

Reprenons d'abord la série déjà considérée

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots.$$

Nous avons

$$s_n(z) = \frac{1-z^n}{1-z}$$

et

$$s(a,z) = \sum s_n(z)\frac{a^n}{n!} = \frac{e^a}{1-z} - \frac{e^{az}}{1-z},$$

$$e^{-a}s(a,z) = \frac{1}{1-z} - \frac{e^{a(z-1)}}{1-z}.$$

Pour que cette série soit sommable, il est nécessaire et suffisant que la partie réelle de z soit inférieure à *un :* elle est d'ailleurs uniformément sommable dans le domaine défini par la condition que la partie réelle de z est inférieure à un nombre fixe K inférieur à *un*. Le lieu des points z dont la partie réelle est égale à *un* est la tangente au cercle de rayon *un* au point $z = 1$, c'est-à-dire la tangente au cercle de convergence de la série donnée au point singulier unique qu'elle a sur ce cercle. Le domaine dans lequel la série est sommable est la partie du plan située du même côté que le cercle par rapport à cette tangente, et la sommabilité est uniforme dans toute région intérieure à celle-là.

Il est aisé de voir que cette règle s'applique aux fonctions de la forme $\frac{A}{z-\alpha}$, ainsi qu'à leurs dérivées et intégrales d'ordre quelconque; si l'on a une somme d'un nombre limité de termes de cette forme

$$\varphi(z) = \frac{A}{(z-\alpha)^m} + \frac{B}{(z-\beta)^n} + \frac{C}{(z-\gamma)^p} + D\log(z-\delta),$$

m, n, p étant des entiers positifs, la région de sommabilité uniforme du développement de $\varphi(z)$ en série entière s'obtient en joignant par des droites l'origine aux points singuliers α, β, γ, δ, en menant en chacun de ces points la perpendiculaire à la droite correspondante et en supprimant toutes les portions du plan situées de celui des côtés de chacune de ces perpendiculaires qui ne contient pas l'origine.

Cette règle peut s'étendre, dans des cas très généraux, à des fonctions $\varphi(z)$ qui seraient la somme d'une infinité de termes; il y aurait lieu d'étudier à ce point de vue l'expression générale donnée par M. Mittag-Leffler pour les fonctions uniformes et aussi certaines fonctions signalées dans ma Thèse.

Pour plus de netteté, nous allons nous borner à considérer la fonction $D_z \log \Gamma(1+z)$ et montrer que son développement, suivant les puissances croissantes de z, est uniformément sommable dans tout le domaine défini par l'inégalité

$$\text{partie réelle de } z > k > -1.$$

On a, en effet,

$$-C - D_z \log \Gamma(1+z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+p} - \frac{1}{p} \right).$$

Si nous développons suivant les puissances croissantes de z, il est clair que la somme $s_n(z)$ des n premiers termes est

$$s_n(z) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{1}{p^{n+1}} \frac{p^{n+1} + (-1)^n z^{n+1}}{z+p} - \frac{1}{p} \right).$$

On a donc

$$s(a, z) = \sum \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} s_n(z) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \left(\frac{e^a - e^{-a\frac{z}{p}}}{z+p} - \frac{e^a}{p} \right)$$

et, par suite,

$$e^{-a} s(a, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+p} - \frac{1}{p} \right) + \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{e^{-a\left(\frac{z}{p}+1\right)}}{z+p}.$$

On voit, dès lors, aisément que, lorsque a augmente indéfiniment, le second terme tend vers zéro, et si l'on suppose z compris dans la région indiquée, cette expression tend uniformément vers zéro, ce que nous voulions démontrer.

Applications numériques.

Nous avons déjà indiqué comment on peut ramener la recherche de la limite de $e^{-a}s(a)$ pour a infini à la sommation d'une série convergente : la sommation d'une série divergente sommable est ainsi ramenée à la sommation d'une série convergente dont les termes sont des séries convergentes. Pour qu'une telle expression analytique prête à un calcul numérique précis, il est nécessaire que l'on sache évaluer l'erreur commise quand on néglige certains termes ; il en est de même d'ailleurs pour toute série convergente : et c'est là une grande difficulté théorique qui ne peut être levée que dans chaque cas particulier par une étude souvent très minutieuse. Cela n'empêche pas les calculateurs d'utiliser souvent les séries convergentes sans évaluer à chaque instant l'erreur commise; ils se contentent de la remarque suivante, rarement en défaut dans la pratique : l'erreur commise est, en général, du même ordre de grandeur que le dernier terme calculé. Il est d'ailleurs évident que cette manière de procéder n'a rien de rigoureux et exposerait à des erreurs graves si on lui donnait la valeur d'un principe; mais, dans le cas où les termes de la série considérée sont assez *régulièrement* décroissants, l'erreur commise est relativement facile à évaluer ainsi avec une approximation suffisante.

Dans le cas des fonctions de la forme $\varphi(z)$ (p. 116), on peut, en procédant comme nous l'avons fait pour $D_z \log\Gamma(1+z)$, évaluer l'erreur commise et s'assurer qu'elle décroît, en général, rapidement lorsque n et a augmentent. Aussi ai-je préféré effectuer un calcul numérique sur une série où cette évaluation directe est plus difficile et dont je n'ai même pas démontré la sommabilité; mais nous savons quelle est sa somme, si elle est sommable. En faisant $x = 2$, $m = \frac{1}{2}$ dans la formule qui donne $(1+x)^m$, on obtient, en se servant de Tables à sept décimales :

$$\begin{aligned}\sqrt{3} = {} & 1 + 1 - 0{,}5 + 0{,}5 - 0{,}625 + 0{,}875 - 1{,}3125 + 2{,}0625 \\ & - 3{,}351563 + 5{,}5859375 - 9{,}496093 + 16{,}40234 - 28{,}70410 \\ & + 50{,}781418 - 90{,}68605 + 163{,}23485 - 295{,}8631 + 539{,}51525 \\ & - 989{,}1112 + 1822{,}043 - 3370{,}787 + 6260{,}033 - 11666{,}45 \\ & + 21811{,}14 - 40895{,}89 + 76884{,}27 - 144897{,}29 + 273694{,}9 \\ & - 518065{,}3 + 982537{,}7 - 1866821{,}5 + 3552983 - 6772872 \\ & + 12930030 - 24719170 + \ldots\end{aligned}$$

J'ai poussé le calcul jusqu'à $n = 34$ en me servant jusqu'à $n = 30$ des valeurs de $n!$ qui se trouvent dans les Tables de Schrön; j'ai pris dès lors a aussi grand que possible et égal à 8; les sommes successives s_n sont les suivantes :

$$\begin{gathered}1;\ 2;\ 1{,}5;\ 2;\ 1{,}375;\ 2{,}250;\ 0{,}9375;\ 3;\ -0{,}35156;\ 5{,}23437; \\ -4{,}261719;\ 12{,}1406;\ -16{,}5635;\ 34{,}2207;\ -56{,}4653; \\ 106{,}7695;\ -189{,}0937;\ 350{,}4216;\ -638{,}6896;\ 1183{,}353; \\ -2187{,}434;\ 4072{,}599;\ -7593{,}851;\ 14217{,}29;\ -26678{,}60; \\ 50205{,}67;\ -94691{,}6;\ 179003{,}3;\ -339062;\ 643475{,}7; \\ -1223345;\ 2329638;\ -4443234;\ 8486796;\ -16232374;\ \ldots\end{gathered}$$

et leurs produits par $\frac{8^n}{n!}$ à quelques millièmes près sont :

$$\begin{gathered}1;\ 16;\ 48;\ 170{,}667;\ 234{,}667;\ 614{,}400;\ 341{,}333;\ 1248{,}304; \\ -146{,}285;\ 1936{,}028;\ -1261{,}019;\ 2612{,}613;\ -2376{,}264; \\ 3021{,}192;\ -2848{,}613;\ 2872{,}747;\ -2543{,}883;\ 2218{,}437; \\ -1797{,}085;\ 1401{,}945;\ -1036{,}595;\ 735{,}220;\ -498{,}511; \\ 324{,}632;\ -203{,}056;\ 122{,}284;\ -70{,}963;\ 39{,}747;\ -21{,}511; \\ 11{,}261;\ -5{,}709;\ 2{,}806;\ -1{,}338;\ 0{,}619;\ -0{,}278;\ \ldots\end{gathered}$$

Les termes sont maintenant régulièrement décroissants et alternativement positifs et négatifs; on aura deux valeurs approchées, l'une par excès et l'autre par défaut, en prenant successivement un nombre pair et impair de termes; on trouve ainsi 5163,076 et 5162,795 dont les quotients par e^8 sont respectivement 1,731929 et 1,732019, alors que la valeur exacte est $1,732051\ldots$. *Ce résultat paraîtra très satisfaisant* (¹).

Il est donc extrêmement vraisemblable que la série du binome est sommable pour $m = \frac{1}{2}$, $x = 2$ et probablement aussi pour d'autres valeurs; il serait intéressant d'en donner une démonstration directe et aussi d'étudier, au point de vue du calcul numérique, la généralisation que nous allons indiquer et de la comparer avec l'emploi de e^a.

Généralisation des résultats précédents.

J'ai déjà indiqué (*Comptes rendus*, 30 décembre 1895) comment on peut, pour définir la somme d'une série divergente, introduire une fonction entière en grande partie arbitraire. Soit

$$\varphi_0(a) = c_0 + c_1 a + c_2 a^2 + \ldots + c_n a_n + \ldots$$

une fonction entière telle que, lorsque a augmente indéfiniment, le rapport $\frac{\varphi(a)}{a^n}$ augmente indéfiniment pour toute valeur fixe de n. Étant donnée une suite de quantités

$$s_0, \quad s_1, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots,$$

nous poserons

$$\theta(a) = \frac{1}{\varphi(a)} [c_0 s_0 + c_1 a s_1 + \ldots + c_n a^n s_n + \ldots],$$

et nous appellerons la limite de cette quantité, pour a infini positif, la *limite généralisée* de s_n.

On démontre aussi aisément que, dans le cas où $\varphi(a) = e^a$, le théorème fondamental énoncé page 114, et il est aisé d'en conclure que dans des cas très généraux cette définition de la limite est indépendante de la fonction $\varphi(a)$: elle n'en dépend pas dans toute région où s_0, s_1, ..., s_n, étant fonctions d'une variable, la sommabilité est uni-

(¹) Je dois remercier un de mes élèves, M. E. Lemaire, qui a bien voulu m'aider à revoir ces calculs.

forme. Seulement la région de sommabilité dépend du choix de $\varphi(a)$. Nous nous bornerons à signaler que l'on obtient des résultats intéressants en prenant $\varphi(a) = e^{a^2}$ et plus généralement $\varphi(a) = e^{a^k}$, k étant un entier.

Conclusions.

On voit que les séries divergentes sommables peuvent être aussi utiles en Analyse que les séries convergentes. La théorie qui vient d'en être esquissée est sans doute bien incomplète, et, dès lors, on en aperçoit bien moins d'applications que de la théorie des séries convergentes qui, depuis plus d'un siècle, s'enrichit chaque jour de résultats nouveaux. Mais je suis persuadé que, lorsque certains résultats seront acquis, lorsqu'on connaîtra la somme de nombreuses séries numériques, et aussi des caractères de sommabilité plus étendus, on verra s'élargir chaque jour le champ des applications. Il ne me reste qu'à émettre le vœu de voir la notion de somme s'étendre aux séries divergentes dans lesquelles s_n augmente indéfiniment par valeurs de même signe et pour lesquelles notre méthode ne donne aucun résultat. Rien ne prouve qu'il soit impossible de parvenir à ces sommes et de jeter ainsi un jour tout nouveau sur l'étude des fonctions analytiques et, en particulier, des fonctions non uniformes [1].

---

[1] J'ai découvert pendant l'impression de ce Mémoire un passage d'Abel qui pourrait lui servir d'épigraphe et que je me permets de citer ici :

« Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \ldots,$$

n étant un nombre entier positif? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car, à l'exception des cas les plus simples, par exemple, les séries géométriques, il ne se trouve dans les Mathématiques presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des Mathématiques est sans fondement. *Pour la plus* *grande partie les résultats sont justes*, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. *Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant.* »

16 janvier 1826.

(Lettre d'Abel à Holmboe). (*Œuvres*, t. II, p. 256-257.)

J'ai eu connaissance aussi, pendant que le Mémoire était sous presse, d'une Note de M. Pincherle, publiée le 19 janvier 1896, dans les *Rendiconti de la R. Accademia dei Lincei*, et qui, de même qu'un Mémoire de M. Padé paru dans le tome XVIII des *Acta Mathematica*, semble avoir quelque rapport avec les sujets ici traités ; il y aurait intérêt à étudier de près ces rapports ; mais je tiens à remarquer que j'utilise seulement les valeurs numériques des termes d'une série sommable pour en calculer la valeur, tandis que MM. Padé et Pincherle transforment une série divergente en une expression analytique convergente, en se servant de la nature analytique des termes de la série.