JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL PAINLEVÉ

Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 5-92.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__5_0>

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur la transformation des équations de la Dynamique;

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

INTRODUCTION.

1. Étant donné un système d'équations de Lagrange

$$(\mathrm{A})\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i}\right)-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i}=\mathrm{Q}_i,\qquad \frac{dq_i}{dt}=q'_i\qquad (i=1,2,\ldots,k),$$

où les Q_i ne dépendent ni des vitesses ni du temps et où T, forme quadratique par rapport aux q'_i, est aussi indépendante de t

$$2\mathrm{T}\equiv\sum \mathrm{A}_{ij}q'_i q'_j\equiv\frac{ds^2}{dt^2}\qquad (\mathrm{A}_{ij}\equiv\mathrm{A}_{ji}),$$

on peut se demander s'il existe d'autres systèmes analogues (A_1) qui définissent *le même mouvement* que (A). La question ainsi posée est assez restreinte, mais elle acquiert une tout autre portée si l'on assujettit seulement le système (A_1) à la condition que les *trajectoires* de (A) et de (A_1) *coïncident*, le mouvement sur ces trajectoires différant, en général, d'un système à l'autre. Autrement dit, le problème consiste à former les systèmes

$$(A_1) \quad \left\{ \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q'_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = q'_i \right. \\ (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$2T_1 \equiv \sum A'_{ij} q'_i q'_j \equiv \frac{ds_1^2}{dt_1^2},$$

qui définissent *entre les* q_i les *mêmes* relations que (A). Deux tels systèmes (A) et (A_1) seront appelés CORRESPONDANTS.

2. A ce problème se rattache un problème d'apparence plus générale qui, pour être posé avec netteté, demande quelques explications. Le changement de variables

$$(1) \quad q_1 = \varphi_1(r_1, r_2, \ldots, r_k), \qquad \ldots, \qquad q_k = \varphi_k(r_1, r_2, \ldots, r_k),$$

d'où l'on tire inversement

$$(2) \quad r_1 = \psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \ldots, \qquad r_k = \psi_k(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

transforme ds^2 en une expression de même nature $d\sigma^2$:

$$d\sigma^2 \equiv \sum A_{ij}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\, d\varphi_i\, d\varphi_j \equiv \sum B_{ij}(r_1, r_2, \ldots, r_k)\, dr_i\, dr_j,$$

et le système (A) en un système

$$(B) \quad \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \tau}{\partial r'_i}\right) - \frac{\partial \tau}{\partial r_i} = R_i(r_1, r_2, \ldots, r_k), \qquad \frac{dr_i}{dt} = r'_i \right. \\ (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$2\tau \equiv \frac{d\sigma^2}{dt^2}, \qquad R_i \equiv Q_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial \varphi_1}{\partial r_i} + \ldots + Q_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial \varphi_k}{\partial r_i}.$$

Nous dirons que les expressions ds^2 et $d\sigma^2$, et de même les systèmes

(A) et (B), sont HOMOLOGUES [1] et admettent la transformation (1) comme *transformation de passage*. En particulier, si ds^2 et $d\sigma^2$ [ou (A) et (B)] coïncident quand on fait $q_i = r_i (i = 1, 2, \ldots, k)$, la transformation (1) sera une transformation du ds^2 [ou du système (A)] *en lui-même*.

A un ds^2 [ou à un système (A)] donné, une transformation (1) fait correspondre un homologue *et un seul;* inversement, entre deux expressions homologues ds^2 et $d\sigma^2$ [ou entre deux systèmes homologues (A) et (B)], il n'existe qu'une transformation de passage, à moins que ds^2 [ou (A)] n'admette des transformations en lui-même. En combinant, en effet, avec *une* transformation de passage une transformation *quelconque* du ds^2 [ou de (A)] en lui-même, on obtient une nouvelle transformation de passage et on les obtient toutes ainsi. Ces transformations du ds^2 [ou de (A)] en lui-même définissent toujours un *groupe*, continu si elles dépendent de constantes arbitraires, discontinu dans le cas contraire. (On démontre aisément qu'elles ne peuvent dépendre de fonctions arbitraires.) Il n'y a donc jamais de difficulté à reconnaître si deux expressions données ds^2 et $d\sigma^2$ [ou deux systèmes donnés (A) et (B)] sont homologues, non plus qu'à déterminer les transformations de passage, dans le cas où le groupe des transformations du ds^2 en lui-même est discontinu et notamment se réduit à la transformation identique. Mais, dans le cas où ce groupe est continu, les transformations de passage dépendent d'équations différentielles. D'après les théories de M. Lie, tout le problème revient à déterminer les transformations du ds^2 [ou de (A)] en lui-même, et cette recherche se ramène à l'*intégration d'un système linéaire complet*.

Observons enfin que, si (A) et (B) sont homologues, il en est de même *a fortiori* de ds^2 et de $d\sigma^2$, mais que la réciproque n'est évidemment pas vraie. En particulier, une transformation $q_i = \varphi_i$ du ds^2 en

---

[1] Quand les deux ds^2 que l'on compare portent sur les mêmes lettres, soit ds^2 et ds_1^2, ds_1^2 sera dit *homologue* de ds^2 s'il coïncide avec un des homologues de ds^2, soit $d\sigma^2$, où l'on a fait $r_i = q_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. De même (A) et (A_1) seront dits *homologues* si (A) coïncide avec un des systèmes (B) où l'on fait $r_i = q_i$ et $t = t_1$.

lui-même ne conserve (A) que si l'on a :

$$\sum_j Q_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \frac{\partial \varphi_j}{\partial r_i} \equiv Q_i(r_1, \ldots, r_k), \qquad \text{pour} \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Plus généralement, soit (A) et (B) deux systèmes homologues : quand ds^2 et $d\sigma^2$ admettent plusieurs transformations de passage, ces transformations $q_i = \varphi_i$ sont de deux espèces, suivant qu'elles satisfont ou non aux conditions

$$R_i \equiv Q_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \frac{\partial \varphi_1}{\partial r_i} + \ldots + Q_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k) \frac{\partial \varphi_k}{\partial r_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k);$$

les premières seules transforment (A) en (B).

3. Ceci posé, cherchons tous les systèmes (B_1)

$$(B_1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt_1}\left(\dfrac{\partial \tau_1}{\partial r'_i}\right) - \dfrac{\partial \tau_1}{\partial r_i} = R'_i(r_1, r_2, \ldots, r_k), \qquad \dfrac{dr_i}{dt_1} = r'_i \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{array} \right.$$

où

$$2\tau_1 \equiv \sum B'_{ij}(r_1, r_2, \ldots, r_k) r'_i r'_j \equiv \frac{d\sigma_1^2}{dt_1^2},$$

tels que les trajectoires de (B_1) *se déduisent de celles de* (A) *par un changement de variables* (1), $q_i = \varphi_i$. Le changement de variables inverse (2) transformant (B_1) en un correspondant (A_1) de (A), les systèmes (B_1) en question se composeront *des homologues de* (A) *et des homologues de tous ses correspondants.* La seule difficulté consiste donc à déterminer les *correspondants* (A_1) de (A).

Parmi ces systèmes (B_1), il en est de remarquables, ce sont ceux où ds_1^2 se confond avec ds^2, quand on fait $q_i = r_i (i = 1, 2, \ldots, k)$. Si un tel système (B_1) existe, le mouvement défini par (A) jouit d'une propriété importante : *on peut dans* (A) *substituer aux forces* Q_i *d'autres forces,* à savoir les forces $R'_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, *telles que les nouvelles trajectoires se déduisent des premières en changeant les* q_i *en* $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$. Dans le cas particulier où les Q_i et les R'_i sont *identiques* [c'est-à-dire où (A) et (B_1) coïncident quand on fait $q_i = r_i$, $t = t_1$], *la transformation* $q_i = \varphi_i$ *transforme en lui-même l'en-*

semble des trajectoires de (A). D'autre part, il est clair que la transformation inverse (2) ramène (B_1) à être un *correspondant* (A_1) de (A) dont le ds_1^2 est *homologue* de ds^2. D'après cela, posons-nous les deux problèmes suivants :

I. *Déterminer les substitutions* (1), $q_i = \varphi_i$, *qui transforment en lui-même l'ensemble des trajectoires de* A.

II. *Déterminer les systèmes de forces* $R'_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ *telles que, si on les substitue aux* Q_i *dans* (A), *les nouvelles trajectoires se déduisent des premières en changeant les* q_i *en* $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$.

Pour résoudre le premier problème, il faut calculer *tous les correspondants* (A_1) *de* (A) *qui sont en même temps ses homologues.* Les transformations cherchées se composent de toutes les transformations qui font passer de (A) à chaque système (A_1); elles comprennent notamment les transformations de (A) en lui-même.

Pour résoudre le second problème, il faut calculer *tous les correspondants* (A_1) *de* (A) *dont le* ds_1^2 *est homologue de* ds^2. Toutes les transformations de passage qui existent entre ds^2 et chaque ds_1^2, soit $q_i = \varphi_i$, définissent les systèmes cherchés de forces R'_i, à savoir

$$R'_i = Q_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial\varphi_1}{\partial r_i} + \ldots + Q_k(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k)\frac{\partial\varphi_k}{\partial r_i}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k).$$

Elles comprennent notamment les transformations du ds^2 en lui-même.

4. Ce qui précède suffit à montrer l'intérêt qui s'attache à l'étude des systèmes *correspondants*. C'est à la démonstration de quelques propriétés générales de ces systèmes qu'est consacré le présent Mémoire. Dans un autre travail, je développerai les principales applications de ces propriétés et notamment la solution des problèmes I et II dans le cas de deux ou trois paramètres.

Si l'on convient de représenter un système (A) par le symbole

$\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$, ou encore $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ quand les Q_i dérivent d'un potentiel U, les principaux résultats que j'ai obtenus se résument ainsi :

En premier lieu, *un système quelconque* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *admet toujours une infinité de correspondants,* à savoir les systèmes $\left(C\frac{ds^2}{dt_1^2}, cQ_i\right)$, où C et c sont deux constantes. On peut passer du système (A) à un de ces correspondants (A_1) par la transformation : $\frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\frac{C}{c}}$ (¹). Quand toutes les forces Q_i sont nulles, on passe de (A) à (A_1) en faisant $\frac{dt_1}{dt} = c$, c désignant une constante *arbitraire*. Je dirai souvent dans la suite que ds^2 et $C\,ds^2$ sont deux ds^2 *semblables*, et de même que les systèmes de forces Q_i et cQ_i sont deux systèmes de forces *semblables*, ou encore que ds^2 et $C\,ds^2$ (et de même les systèmes Q_i et CQ_i) ne sont pas *distincts*.

Un système (A) *quelconque n'admet pas en général d'autres correspondants.* S'il en admet un, soit $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$, il en admet une infinité, à savoir $\left(\frac{C\,ds_1^2}{dt_1^2}, c\,Q'_i\right)$; nous dirons que ces correspondants ne sont pas *distincts* du premier.

En second lieu, admettons que *les* Q_i *dérivent d'un potentiel. Le système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ *admet une infinité de correspondants,* indiqués par M. Darboux, à savoir les systèmes $\left[(\alpha U + \beta)\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}\right]$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes assujetties à la seule condition $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. La correspondance entre (A) et un tel système (A_1) jouit d'une propriété remarquable : associons les trajectoires de (A) en *faisceaux naturels,* j'entends en faisceaux qui satisfont à la condition $T - U = h$, h étant une constante déterminée, et comparons les faisceaux naturels de (A) et de (A_1); on trouve que *tout faisceau naturel de* (A)

(¹) Ce sont là des propriétés bien connues, signalées depuis longtemps par M. Bertrand dans ses travaux sur la *similitude* en Mécanique, et dont M. Appell, en faisant $\frac{C}{c} = -1$, a tiré une interprétation du *temps imaginaire*.

coïncide avec un faisceau naturel de (A_1), les valeurs de h et de h_1 se correspondant par la relation $h = \frac{\beta h_1 + \delta}{\alpha h_1 + \gamma}$. Cette propriété est *caractéristique de la transformation de M. Darboux.* On passe de (A) à (A_1) par la transformation

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\, dt_1^2 = (\alpha U + \beta)^2 [\alpha\, ds^2 - dt^2(\alpha U + \beta)].$$

Ces systèmes (A_1) se confondent avec ceux que j'ai indiqués en premier lieu pour $\alpha = 0$. *Un système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ *quelconque n'admet pas en général d'autres correspondants.* Nous donnerons à tous ces systèmes (A_1) le nom de *correspondants ordinaires* de (A).

5. J'arrive maintenant aux systèmes (A) qui possèdent des correspondants distincts de ces correspondants *ordinaires*. Il convient ici d'étudier à part le cas où il y a des forces et le cas où tous les Q_i sont nuls.

Premier cas. — *Tous les coefficients* Q_i *sont nuls dans* (A). Il en est de même alors nécessairement dans tout système correspondant (A_1). On se trouve ainsi ramené à l'étude des *couples de* ds^2 *correspondants*, en appelant ds^2 *correspondants* deux ds^2 dont les géodésiques coïncident. C'est, pour $k = 2$, le problème de M. Dini, et le théorème démontré par ce géomètre rentre comme cas particulier dans le suivant :

Soit ds^2 *et* ds_1^2 *deux* ds^2 *correspondants (non semblables), et* Δ *et* Δ_1 *leurs discriminants (relatifs aux* dq_i*). L'expression*

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds_1^2}{ds^2}$$

est une intégrale première des géodésiques; les expressions

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds_1^2}{dt^2}, \quad \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{ds^2}{dt_1^2}$$

sont donc respectivement des intégrales quadratiques des deux systèmes

$$\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right).$$

De plus on passe d'un système à l'autre par la transformation

$$\frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}} = C\,\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}}, \tag{1}$$

C désignant un nombre choisi arbitrairement (ou même, si l'on veut, une intégrale première quelconque des géodésiques). *Un ds^2 ne peut donc admettre de correspondant ds_1^2 (non semblable) sans que le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ admette au moins une intégrale quadratique distincte de celles des forces vives* (¹).

L'étude de ce cas particulier où les forces sont nulles entraîne d'importantes conséquences pour le cas général, notamment celle-ci : SI ds^2 ET ds_1^2 SONT CORRESPONDANTS, 1° *pour tout système de forces Q_i, on peut trouver des forces Q'_i telles que les deux systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ soient correspondants, et l'on peut alors passer d'un système à l'autre par une transformation de la forme* (1) *où* C *est un nombre déterminé;* 2° *deux correspondants $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ quelconques rentrent dans les précédents, c'est-à-dire qu'on peut passer de l'un à l'autre par une transformation* (1).

(¹) Cette intégrale ne se confond avec celle des forces vives que si $ds_1^2 \equiv C\,ds^2$. Il peut d'ailleurs arriver que ds^2 admette un correspondant et que le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ ne possède avec l'intégrale des forces vives qu'*une seule intégrale quadratique*, comme le montre l'exemple du couple de correspondants :

$$ds^2 \equiv \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + dq_3^2$$

et

$$ds_1^2 = \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + c\,dq_3^2,$$

où c est un nombre quelconque.

Cette proposition est complétée par une double réciproque :

I. *Si l'on peut passer d'un système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *à un système* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *où les* Q_i, Q'_i *sont* DONNÉS, *par un changement de variable tel que*

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

ds^2 *et* ds_1^2 *sont correspondants, et les résultats précédents s'appliquent.*

II. *Si deux systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *et* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *se correspondent pour* DEUX *systèmes distincts de forces associées, soient* Q_i *et* Q'_i *d'une part,* (Q_i) *et* (Q'_i) *d'autre part,* ds^2 *et* ds_1^2 *sont aussi correspondants; et par suite,* QUELS QUE SOIENT LES Q_i, *le système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *admet des correspondants de la forme* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$.

Cette dernière proposition suppose toutefois $k > 2$. Pour $k = 2$, on sait seulement que le nombre ν des systèmes associés (distincts) de forces Q_i, Q'_i *ne peut dépasser* 3 (ds^2 et ds_1^2 étant donnés) sans que les géodésiques de ds^2 et ds_1^2 coïncident (et ν est alors infini); si $\nu = 3$, ds^2 est le ds^2 d'une surface à courbure constante (de même que ds_1^2).

DEUXIÈME CAS. — *Les forces* Q_i *de* (A) *ne sont pas toutes nulles.* On démontre qu'on peut passer du système (A) à un système correspondant (A_1) par un changement de variables bien déterminé de la forme

$$\frac{dt_1^2}{dt^2} = \lambda^2(q_1, q_2, \ldots, q_k)\left(\frac{d\sigma^2}{dt^2} - V\right) = \lambda^2(\tau - V),$$

l'égalité $\tau - V = \text{const.}$ *étant vérifiée par tout mouvement de* (A), ce qui exige *que* $\tau - V$ *soit ou une intégrale quadratique de* (A) *ou une constante absolue.* On se trouve amené alors à distinguer plusieurs hypothèses possibles :

I. $(\tau - V)$ *se réduit à une constante absolue;* $\frac{dt_1}{dt} = \lambda$. C'est le cas traité précédemment où ds^2 et ds_1^2 sont CORRESPONDANTS; *le système* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ *admet une intégrale quadratique.*

II. *Il existe une fonction de forces* U, *et* $\tau - V$ *coïncide avec* $T - (U + a)$. *Les deux systèmes* $\left[(U+a)\frac{ds^2}{dt'^2}, \frac{1}{U+a}\right]$ *et* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$, *dont le premier est un correspondant ordinaire de* (A) *sont correspondants en même temps que* $(U+a)ds^2$ *et* ds_1^2; ils jouissent donc des propriétés indiquées plus haut : le système

$$\left[(U+a)\frac{ds^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$$

admet une intégrale quadratique. Quant au système

$$\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right),$$

il admet une intégrale quadratique non seulement quand on annule les Q'_i, mais pour les Q'_i donnés.

III. (Hypothèse générale). — *L'égalité* $\tau - V =$ const. *définit une intégrale de* (A) *distincte de celle des forces vives. Les systèmes* (A) *et* (A_1) *admettent alors une intégrale quadratique.* Il convient de signaler dans cette hypothèse deux cas particuliers : *le cas où* U_1 *existe et où les géodésiques de* ds^2 *coïncident avec un faisceau naturel* $T_1 - U_1 = a_1$ de (A_1) [c'est l'hypothèse II où l'on a permuté (A) et (A_1)]; et *le cas où* U *et* U_1 *existent et où deux faisceaux naturels* $T - U = a$ *et* $T_1 - U_1 = a_1$ *de* (A) *et de* (A_1) *coïncident.* Dans l'un et l'autre cas, la transformation de M. Darboux permet de rentrer dans l'hypothèse I *où les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident* et, par suite, d'appliquer les conclusions énoncées à propos du premier cas.

6. Les propriétés que je viens d'énumérer sont des conditions *nécessaires mais non suffisantes* pour qu'un système (A) admette des correspondants ordinaires : elles ne sont suffisantes que pour $k = 2$. Mais ces propriétés permettent de former sans peine, et en les simplifiant singulièrement, les conditions suffisantes, et parmi ces conditions elles représentent les plus importantes, celles qui mettent en évidence les caractères essentiels des systèmes (A) étudiés. Parmi les conséquences qu'elles entraînent, je citerai celles-ci :

Soient $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_i'\right]$ deux systèmes correspondants non ordinaires : 1° *on n'a jamais* $ds_1^2 = \mu(q_1, \ldots, q_k)\, ds^2$; 2° si Q_i et Q_i' dérivent des potentiels U et U_1, *il n'existe pas, en général, de faisceau naturel* $T - U = a$ *de* (A) *qui coïncide avec un faisceau naturel* $T_1 - U_1 = a$ *de* (A_1), *et il n'en existe* JAMAIS *plus d'un*. [Parmi les faisceaux naturels nous comptons le faisceau des géodésiques qui correspond à a (ou a_1) $= \infty$.]

Mais voici une autre conséquence bien plus importante : *La recherche des correspondants* (A_1) *d'un système* (A) *donné, et en particulier la recherche des groupes de transformations des trajectoires de* (A), *n'entraînent jamais que l'intégration de systèmes linéaires complets.*

Enfin, à toute intégrale de (A) *algébrique et entière (ou rationnelle) en* $q_1', \ldots, q_k'$ *correspond une intégrale analogue et de même degré de* (A_1) (¹). Ceci s'applique notamment aux *intégrales linéaires :* d'où il résulte, d'après un théorème de M. Lie, que deux ds^2 correspondants possèdent *le même nombre de transformations infinitésimales en eux-mêmes*. De cette remarque et des théorèmes établis plus haut sur les correspondances qui conservent les géodésiques, découlent immédiatement toutes les propositions déjà connues sur la correspondance entre les mouvements plans et les mouvements sur une surface à courbure constante : et les propositions analogues se trouvent ainsi établies pour un nombre *quelconque* de paramètres.

7. Revenons maintenant aux problèmes que j'ai posés au début de cette introduction :

Tout d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement défini par (A) *puisse être défini par un autre système* (A_1) *sont évidemment les suivantes :* 1° (A) *et* (A_1) *doivent*

(¹) Ce théorème n'est nullement évident, mais résulte de la forme particulière de la relation qui existe entre dt et dt_1.

être correspondants en même temps que ds^2 et ds_1^2; 2° Δ et Δ_1 doivent être identiques (à un facteur constant près).

Quant aux systèmes B_1 (*voir* p. 8) dont les trajectoires se déduisent de celles de (A) par une transformation $q_i = \varphi_i(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, leurs propriétés découlent immédiatement des propriétés des systèmes (A_1). Je me borne à signaler explicitement ce théorème maintenant évident: *On peut, dans tous les cas, passer de* (A) *à* (B_1) *par un changement de variables*

$$q_i = \varphi_i(r_1, \ldots, r_k), \qquad \frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)[\tau - V], \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

l'expression $\tau - V$ définissant une intégrale quadratique de (A), *à moins qu'elle ne se réduise à une constante.* Dans ce dernier cas, la substitution $q_i = \varphi_i$ transforme l'un dans l'autre *les deux faisceaux de géodésiques; réciproquement, si les géodésiques de* (A) *et de* (B_1) *se correspondent par la transformation $q_i = \varphi_i$, on a*

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, \ldots, q_k),$$

et, QUELS QUE SOIENT LES Q_i *dans* (A), *il existe des systèmes* (B_1) *dont la force vive est* $\frac{d\sigma_1^2}{dt_1^2}$.

Si l'on connaît notamment *une transformation $q_i = \varphi_i$ des géodésiques de ds^2 en elles-mêmes*, pour tout système de forces Q_i de (A) on pourra calculer des forces R'_i telles que les trajectoires du système $\left[\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right]$ se déduisent des trajectoires de (A) en changeant q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$. Par exemple, la *transformation homographique* la plus générale conservant les géodésiques de $ds^2 \equiv dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2$, à tout système de forces Q_i on pourra associer des forces R'_i telles que les trajectoires de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et de $\left[\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right]$ se déduisent les unes des autres par une transformation homographique donnée. En appliquant à ce cas particulier les formules générales de correspondance établies dans ce Mémoire, on retrouve les résultats bien connus de M. Appell.

Je dirai enfin quelques mots d'un problème assez analogue à la recherche des correspondants et qui concerne les systèmes (A), où les forces dérivent d'un potentiel U. On sait que chaque *faisceau naturel* de trajectoires $T - U = a$ coïncide avec les géodésiques de $(U + a)\,ds^2$. On peut chercher *si* $ds'^2 \equiv (U + a)\,ds^2$ *admet, quel que soit* a, *un* ds^2 *correspondant* (*non semblable*), soit $ds_1'^2$. Il est clair que cette recherche rentre entièrement dans l'étude des couples de ds^2 correspondants. Mais quelle analogie peut-il exister entre les $ds_1'^2$ et les correspondants (A_1) de (A)? Tout d'abord, on voit sans peine que si ds'^2 possède (quel que soit a) un correspondant $ds_1'^2$, le système (A) possède toujours une infinité de correspondants distincts dépendant d'une constante arbitraire : la réciproque d'ailleurs n'est pas vraie. Mais la question précise qui nous intéresse est la suivante : Se peut-il qu'un des systèmes $\left[\frac{ds_1'^2}{dt'^2}, Q_i' = 0\right]$ (où $ds_1'^2$ dépend de a) se rattache à un certain système $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$, indépendant de a, de la même manière que $[ds'^2, Q_i = 0]$ se rattache à (A)? Cela revient à se demander si (A) peut admettre des correspondants non ordinaires $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$ tels que tout faisceau naturel de (A) soit faisceau naturel de (A_1); nous avons dit que cela n'avait jamais lieu. *La recherche des systèmes correspondants des* (A) *et celle des* ds^2 *correspondants de* $(U + a)\,ds^2$ *constituent donc toujours deux problèmes distincts.*

8. Je terminerai cette Introduction par un bref historique des recherches antérieures. Ce sont les travaux de M. Appell sur l'homographie en Mécanique qui m'ont conduit à étudier les questions générales dont traite ce Mémoire. Dans deux publications de l'*American Journal* (1889-1890), M. Appell avait montré qu'à tout mouvement plan (ou de l'espace ordinaire) on peut, à l'aide d'une transformation homographique quelconque, faire correspondre un autre mouvement plan (ou de l'espace) produit par d'autres forces (les forces étant toujours indépendantes des vitesses); et il avait donné de ce principe de remarquables applications à la théorie des forces centrales. A la fin du premier Mémoire, M. Appell posait, d'après M. Goursat, le problème plus général suivant : *Étant donnés deux* ds^2, *soit* ds^2 *et* ds_1^2, *pour tout système de forces* Q_i *existe-t-il des forces* R_i', *telles qu'on passe du système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *au système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, R_i'\right]$ *en changeant les* q_i *en*

$\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, *et* dt *en* $\lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)dt_1$? Il indiquait à ce sujet comme vraisemblable cette proposition (démontrée dans le cas de l'homographie) : *Si pour des forces* Q_i *quelconques* (ds^2 *et* ds_1^2 *étant donnés*), *la substitution* $q_i = \varphi_i$, $dt_1 = \lambda\, dt$, *transforme le système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *en un système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, R_i'\right]$, *elle fait correspondre les géodésiques de* ds^2 *et celles de* ds_1^2. Cette proposition, vérifiée par M. Dautheville pour $k = 2$, a été démontrée, ainsi que sa réciproque, par M. Appell lui-même dans une Note du *Bulletin de la Société mathématique* (15 mars 1892). Dans une Note parue presque simultanément dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (12 avril 1892) (²), j'ai résumé les principaux résultats contenus dans ce travail, résultats qui renferment notamment la proposition précédente, mais complétée, ainsi qu'on l'a vu plus haut (nº **5**, p. 11-13); un des compléments les plus importants consiste en ce fait que, *si les deux faisceaux des géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *se transforment l'un dans l'autre par un changement des variables* q_i, *on peut toujours passer du système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$, *au système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, R_i' = 0\right]$ *en changeant les* q_i *en* $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$ ET dt EN $\lambda\, dt_1$. Par exemple, il suffit d'après cela de savoir que toute surface à courbure constante est représentable géodésiquement sur le plan, pour être assuré qu'à tout mouvement plan [où les forces $Q_1(q_1, q_2)$, $Q_2(q_1, q_2)$ sont quelconques], on peut faire correspondre un mouvement sur une surface à courbure constante.

La question que je m'étais posée me conduisait naturellement à généraliser le problème de M. Dini qui coïncide avec la recherche des correspondants dans le cas particulier où $k = 2$ et où les forces sont nulles. Sur ce problème, M. Liouville avait antérieurement publié deux Notes : dans la première (*Comptes rendus*, 6 avril 1891), il déterminait *tous les* ds^2 *à deux ou trois paramètres tels que le mouvement défini par le système* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *fût défini aussi par un autre système* $\left[\frac{ds_1^2}{dt^2}, Q_i' = 0\right]$, *et que de plus les discriminants* Δ

(¹) *Voir* aussi les *Comptes rendus* du 16 mai, du 13 juin, du 10 octobre, du 7 novembre, du 21 novembre 1892 et du 2 janvier 1893.

et Δ_1 *de* ds^2 *et* ds_1^2 *fussent identiques* (1). Dans la seconde (*Comptes rendus*, 16 décembre 1891), consacrée aux intégrales quadratiques, M. Liouville observait que, si, pour $k=2$, les cas où le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ admet une intégrale quadratique sont aussi ceux où le problème de M. Dini a des solutions, pour $k > 2$ il n'en est plus de même, et annonçait des travaux ultérieurs sur la question. Après ma publication du 11 avril 1892, le même auteur a fait connaître (*loc. cit.*, 25 avril 1892) (2) les résultats qu'il avait obtenus par une méthode toute différente de la mienne. Cette méthode, qui repose sur les conditions suffisantes pour que deux ds^2 soient *correspondants*, met en évidence ce fait bien remarquable qu'*un* ds^2 *ne peut posséder un correspondant sans en posséder une infinité de la forme*

$$ds_1^2 \equiv \frac{C^{k-1}\, d\sigma_{k-1}^2 + C^{k-2}\, d\sigma_{k-2}^2 + \ldots + C\, d\sigma_1^2 + d\sigma^2}{\delta^2},$$

où C est une constante arbitraire dont dépend δ; de là résulte pour le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ l'existence de $(k-1)$ intégrales quadratiques (en outre de l'intégrale des forces vives). Il reste toutefois à reconnaître si ces intégrales sont *distinctes :* un exemple cité plus haut (*voir* la note de la page 12) montre qu'elles peuvent se réduire *à une seule.*

La méthode de M. Liouville s'applique évidemment à la recherche des cas où $ds'^2 \equiv (U+h)\,ds^2$ admet des correspondants quel que soit h ; mais cette recherche, comme je l'ai dit, est *toujours distincte* de celle des correspondants de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ et l'on n'en peut déduire aucune propriété de ces derniers systèmes. Les travaux de M. Liouville et les miens *ne se rencontrent donc que dans le cas où toutes les*

(1) D'après ce qui précède, cette seconde condition est inutile, elle est toujours conséquence de la première (n° 7, p. 15) ; les ds^2 calculés par M. Liouville sont donc les seuls ds^2 à trois paramètres tels que le mouvement sur leurs géodésiques coïncide avec un autre mouvement analogue.

(2) *Voir* aussi les *Comptes rendus* du 23 mai, du 12 septembre, du 31 octobre et du 14 novembre 1892.

forces sont nulles. Il serait loisible toutefois de se servir des résultats de M. Liouville concernant les ds^2 correspondants pour étudier le cas où les systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$ se correspondent *avec conservation des géodésiques,* ainsi que les cas qui se ramènent à celui-là par la transformation de M. Darboux. Mais même pour traiter ces cas particuliers, j'aurai recours exclusivement, dans ce travail et dans les applications qui lui feront suite, à la méthode que j'ai exposée lors de ma première Communication.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes énumérés plus haut, j'indique immédiatement une notation qui me sera utile; il me faudra souvent prendre les dérivées des mêmes variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ par rapport aux deux variables différentes t et t_1 ou à l'une d'entre elles, soit q_1. Je représenterai invariablement par q'_i la dérivée $\frac{dq_i}{dt}$, par (q'_i) la dérivée $\frac{dq_i}{dt_1}$, par $q'_{(i)}$ la dérivée $\frac{dq_i}{dq_1}$; d'après cela, $q'_{(1)}$ sera égal à l'unité.

CHAPITRE I.

Propriétés générales des équations des trajectoires.

I. — Nombre de constantes dont dépendent les trajectoires.

1. J'établirai tout d'abord quelques propriétés très simples des équations différentielles dont dépendent les trajectoires.

Un système d'équations de Lagrange,

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{dq'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \\ &\qquad\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \end{aligned}\right.$$

où

$$2T \equiv \sum A_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_k) q'_i q'_j \equiv \frac{ds^2}{dt^2} \qquad (A_{ij} \equiv A_{ji}),$$

définit $(2k-1)$ des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ en fonction de l'une d'entre elles et de $(2k-1)$ constantes arbitraires. Ces constantes permettent, par exemple, de donner à $q_2, q_3, \ldots, q_k, q'_1, \ldots, q'_k$ des valeurs arbitraires pour $q_1 = q_1^0$. Les fonctions $q_2, q_3, \ldots, q_k$ de q_1 définies par (A) satisfont donc à un système différentiel dont l'ordre ν ne peut dépasser $2k-1$, ni devenir, d'autre part, inférieur à $2k-2$, car, pour q_1^0, les fonctions $q_2, q_3, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{q'_2}{q'_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1} = \frac{q'_k}{q'_1}$ peuvent prendre des valeurs arbitraires ([1]).

Il existe des systèmes (A) pour lesquels ν s'abaisse effectivement à $2k-2$: ce sont ceux *où tous les coefficients* Q_i *sont nuls*. Les trajectoires de (A) sont alors les *géodésiques du* ds^2 de T, et ces géodésiques dépendent de $(2k-2)$ constantes arbitraires. Il est facile, d'ailleurs, dans ce cas de former les équations différentielles des géodésiques. Supposons, en effet, le système (A) résolu par rapport aux q''_i, ce qui est toujours possible puisque le discriminant Δ de T n'est pas nul; nous obtenons les cinq équations

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où P_i est *une forme quadratique* par rapport aux q'_i; ces équations s'écrivent encore, en supposant les différentielles prises par rapport à une variable auxiliaire $\theta = g(t)$,

$$\begin{aligned} &d^2 q_i \theta_t'^2 + dq_i d\theta \theta''_{t^2} \\ &\quad = P_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, dq_1, dq_2, \ldots, dq_k) \times \theta_t'^2 = \Pi_i \theta_t'^2, \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $d\theta \theta''_{t^2} \frac{1}{\theta_t'^2}$ entre deux de ces relations,

$$(1) \qquad d^2 q_i \, dq_j - dq_i \, d^2 q_j = \Pi_i \, dq_j - \Pi_j \, dq_i.$$

Si l'on fait $\theta = q_1$, par exemple, on a ainsi $(k-1)$ équations du second ordre résolues par rapport à $\frac{d^2 q_2}{dq_1^2}, \ldots, \frac{d^2 q_k}{dq_1^2}$. Ces équations sont, d'ailleurs, données explicitement par le principe de la moindre action.

([1]) Il suit de là, comme il est bien connu, que (A) ne peut admettre d'intégrale première de la forme $\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k) = \text{const}$. Il est bien entendu toutefois que le discriminant Δ de T n'est pas identiquement nul.

2. Je vais démontrer maintenant que, *ce cas écarté, les trajectoires dépendent de* $(2k-1)$ *constantes arbitraires* (¹). En effet, des équations (A) on tire, comme plus haut,

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} = \mathrm{P}_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) + \frac{\alpha_i}{\Delta}.$$

α_i désigne ce que devient Δ quand on y remplace les termes de $i^{\text{ième}}$ colonne par $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_k$; et, par suite,

$$d^2q_i\theta_t'^2 + dq_i\,d\theta\,\theta''_{t^2} = \Pi_i\theta'_{t^2} + \frac{\alpha_i}{\Delta}d\theta^2 = \theta_t'^2\left[\Pi_i + \frac{\alpha_i}{\Delta}dt^2\right],$$

d'où enfin

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dt^2}{\Delta} &= \frac{d^2q_2\,dq_1 - d^2q_1\,dq_2 - (\Pi_2\,dq_1 - \Pi_1\,dq_2)}{\alpha_2\,dq_1 - \alpha_1\,dq_2} \\ &= \frac{d^2q_j\,dq_i - d^2q_i\,dq_j - (\Pi_j\,dq_i - \Pi_i\,dq_j)}{\alpha_j\,dq_i - \alpha_j\,dq_i}. \end{aligned}\right.$$

Si notamment on prend q_1 comme variable indépendante, on aura

$$(3)\qquad \frac{d^2q_i}{dq_1^2} + \left(\Phi_1\frac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i\right) = \left(\frac{\alpha_i}{\Delta} - \frac{\alpha_1}{\Delta}\frac{dq_i}{dq_1}\right)\frac{1}{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2},$$

où

$$\Phi_i \equiv \mathrm{P}_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, 1, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right),$$

D'après l'égalité (3), $q_2, q_3, \ldots, q_k$ et $\frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}$ ayant reçu pour $q_1 = q_1^0$ des valeurs arbitraires, on peut encore disposer de $q_1'^0$ de façon à donner à $\frac{d^2q_i}{dq_1^2}$ une valeur quelconque, à moins toutefois que le binome $\alpha_i - \alpha_1\frac{dq_2}{dq_1}$ ne soit nul. Pour que les fonctions $q_2, \ldots, q_k$ de q_1 dépendent seulement de $2k-2$ constantes, il faut donc que les conditions

$$(4)\qquad \frac{\alpha_1}{q'_1} = \frac{\alpha_2}{q'_2} = \ldots = \frac{\alpha_k}{q'_k}$$

(¹) Ceci suppose $k>1$. Pour $k=1$, il n'y a plus à parler de relations entre les q_i.

soient vérifiées identiquement. Les α_i ne contenant pas les vitesses, cela ne peut avoir lieu que si tous les α_i, et, par suite *tous les* Q_i, *sont nuls* (1).

3. Dans le cas où les Q_i ne sont pas tous nuls, voici comment on peut former les équations différentielles des trajectoires. Soit $\alpha_1 \neq 0$; on écrit d'abord les $(2k-2)$ équations :

$$(5)\qquad \frac{\dfrac{d^2q_2}{dq_1^2}+\Phi_1\dfrac{dq_2}{dq_1}-\Phi_2}{\alpha_2-\alpha_1\dfrac{dq_2}{dq_1}}=\frac{\dfrac{d^2q_i}{dq_1^2}+\Phi_1\dfrac{dq_i}{dq_1}-\Phi_i}{\alpha_i-\alpha_1\dfrac{dq_i}{dq_1}}\qquad (i=3,\ldots,k);$$

d'autre part, si l'on pose

$$\chi_i\equiv\frac{d^2q_i}{dq_1^2}+\Phi_1\frac{dq_i}{dq_1}-\Phi_i,\qquad \psi_i\equiv\frac{1}{\Delta}\left(\alpha_i-\alpha_1\frac{dq_i}{dq_1}\right)\qquad (i=2,3,\ldots,k),$$

de l'égalité

$$\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2=\frac{1}{\Delta}\,\frac{\alpha_2-\alpha_1\dfrac{dq_2}{dq_1}}{\left(\dfrac{d^2q_i}{dq_1^2}\right)+\Phi_1\dfrac{dq_2}{dq_1}-\Phi_2}=\frac{\psi_2}{\chi_2},$$

on tire

$$2\frac{d^2q_1}{dt^2}=\frac{d}{dq_1}\frac{\psi_2}{\chi_2},$$

et, en remplaçant $\dfrac{d^2q_1}{dt^2}$ par sa valeur $\Phi_1\left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)^2+\dfrac{\alpha_1}{\Delta}\equiv\Phi_1\dfrac{\psi_2}{\chi_2}+\dfrac{\alpha_1}{\Delta}$, il vient

$$(6)\qquad \frac{d}{dq_1}\log\chi_2+2\Phi_1=\frac{d}{dq_1}\log\psi_2-2\frac{\alpha_1}{\Delta}\frac{\chi_2}{\psi_2},$$

équation qui est de la forme

$$(6)'\qquad \frac{d}{dq_1}\chi_2+\chi_2\frac{M}{\psi_2}=0$$

où M est un polynome par rapport aux dérivées.

---

(1) Quand les forces Q_i dépendent des vitesses, il suffit (pour que $\nu=2k-2$) que les α_i satisfassent aux conditions (4).

En définitive, on forme ainsi un système de la forme

$$
\begin{aligned}
q'''_{(2)} &= f_2(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}, q''_{(2)}),\\
q''_{(i)} &= f_i(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}, q''_{(2)}) \qquad (i = 3, 4, \ldots, k),
\end{aligned}
$$

en posant

$$
q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1}, \qquad q''_{(i)} = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2}, \qquad q'''_{(2)} = \frac{d^3 q_2}{dq_1^3},
$$

système qui peut être rendu plus symétrique, mais cela importe peu pour notre objet.

Je remarque immédiatement que *les géodésiques de ds^2 font partie des trajectoires, quelles que soient les forces* Q_i. En effet, les équations

$$
\chi_2 \equiv \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \chi_k \equiv \frac{d^2 q_k}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_k}{dq_1} - \Phi_k = 0,
$$

qui définissent les géodésiques entraînent les relations (5), (6). L'égalité (3) nous montre d'ailleurs que, en un point quelconque de ces trajectoires, q'_1 *est infini :* autrement dit, les géodésiques forment un faisceau de trajectoires à $(2k-2)$ paramètres, à savoir le faisceau obtenu en imposant aux constantes initiales la condition $\frac{1}{q'_1} = 0$ $\left(\text{ou } \frac{1}{T_0} = 0, \text{ si } T_0 \text{ désigne la demi-force vive initiale}\right)$; cette condition reste alors réalisée tout le long de la trajectoire. C'est là, d'ailleurs, une proposition qu'on aurait pu établir d'une tout autre manière.

Je vais maintenant insister sur quelques différences caractéristiques qui séparent le cas où les forces sont nulles du cas général.

II. — Systèmes où tous les coefficients Q_i sont nuls.

4. Nous avons dit que si toutes les forces sont nulles, les trajectoires dépendent de $(2k-2)$ constantes, et, d'après le principe de la moindre action, peuvent être définies par le système

$$(\alpha) \qquad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_{(2)}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_{(k)}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_k} = 0,$$

en posant

$$q'_{(2)} = \frac{dq_2}{dq_1}, \quad \ldots, \quad q'_{(k)} = \frac{dq_k}{dq_1}$$

et

$$f = \sqrt{\mathrm{T}(q_1, q_2, \ldots, q_k, 1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}.$$

Admettons maintenant qu'on ait intégré ces équations et qu'on connaisse par suite $q_2, q_3, \ldots, q_k$ en fonction de q_1 et de $(2k-2)$ constantes arbitraires $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}$. De quelle manière sera déterminé t? On aura, d'après le théorème des forces vives,

$$dt = h\,ds = h \times (f) \times dq_1,$$

h désignant une nouvelle constante, et (f) la fonction de q_1 obtenue en remplaçant dans f, $q_2, \ldots, q_k$ et $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$ en fonction de q_1 et des constantes. Il est loisible d'écrire

$$h = g(a_1, a_2, \ldots, a_{2k-2}, h_0),$$

et, comme d'autre part

$$\begin{aligned} a_i &= \mathrm{F}_i[q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}] \\ &= \mathrm{F}_i[q_1^0, q_2^0, \ldots, q_k^0, q'^0_{(2)}, \ldots, q'^0_{(k)}] \end{aligned}$$

est une intégrale première des géodésiques, on voit que *dt vérifie l'équation*

$$(\beta) \qquad dt = \mathrm{G}[q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}, h_0] f\,dq_1,$$

où G représente une intégrale première quelconque des géodésiques dépendant d'un paramètre arbitraire h_0.

Inversement, admettons qu'une relation

$$(\gamma) \qquad dt = \mathrm{H}[q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]\,dq_1,$$

soit compatible avec (α); j'entends par là que la fonction $t(q_1)$, définie par (γ) quand on remplace dans H les q_i et les $q'_{(i)}$ en fonction de q_1, vérifie les équations du mouvement. On devra avoir (après cette substitution)

$$H = hf,$$

h étant constant pour la même géodésique (et cela quelle que soit la géodésique considérée); donc $\frac{H}{f}$ est *une intégrale première des géodésiques.*

Étant donné un système (A) sans forces Q_i, on voit que, si à dt on substitue $G\,dt$, G étant ou une constante ou une intégrale première quelconque des géodésiques, le système (A) n'est pas altéré.

5. Aux systèmes (A) sans forces peuvent se ramener, d'après une remarque de M. Darboux, les systèmes (A) *où les forces dérivent d'un potentiel* U. Cela résulte du principe de la moindre action : les équations

$$(a) \qquad \frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_{(i)}}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

où

$$f = \sqrt{(U+h)T(q_1, q_2, \ldots, q_k, 1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})},$$

définissent à la fois les géodésiques de $ds_1^2 = (U+h)\,ds^2$, et les trajectoires de (A) qui correspondent à la valeur h de la constante des forces vives. Mais il faut bien observer que le mouvement sur ces trajectoires défini par (A),

$$(A) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

diffère du mouvement défini par (A_1),

$$(A_1) \qquad \frac{d}{dt_1}\left[\frac{\partial T_1}{\partial (q'_i)}\right] - \frac{dT_1}{dq_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = (q'_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$T_1 \equiv (U+h)\frac{ds^2}{dt_1^2} = \frac{ds_1^2}{dt_1^2}.$$

On a, en effet, d'après (A),

$$dt^2 = \frac{ds^2}{U+h},$$

et, d'après (A_1),

$$dt_1^2 = \alpha(U+h)\,ds^2,$$

α désignant une nouvelle constante arbitraire [ou une intégrale première quelconque de (a)]; on passera donc du premier mouvement au second en changeant dt^2 en $\frac{dt_1^2}{\alpha(U+h)^2}$, α étant une constante quelconque.

D'après cela, introduisons dans (A) et dans (A_1) les variables canoniques : soit $p_i = \frac{\partial T}{\partial q_i'}$ et $p_i' = \frac{\partial T_1}{\partial (q_i')} = (U+h)\,p_i\,\frac{(q_i')}{q_i'}$. Le long de chaque trajectoire, on aura

$$p_i = \sqrt{\alpha}\,p_i',$$

α étant une constante.

En appelant T' et T_1' ce que deviennent T et T_1 quand on y remplace respectivement les q_i' et les (q_i') en fonction des p_i et des p_i', il vient, d'après (A),

$$T' = U + h,$$

et, d'après (A_1),

$$T_1' = \alpha(U+h).$$

A une intégrale première de (A_1), qu'on peut toujours supposer homogène en $p_1', \ldots, p_k'$, soit

$$F_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1', p_2', \ldots, p_k', h) = C,$$

correspond une intégrale de (A),

$$\begin{aligned} &F_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k, h) \\ &\quad = F_1[q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k, (T' - U)] = C; \end{aligned}$$

inversement, toute intégrale première de (A),

$$F(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k) = C,$$

peut être rendue homogène par la substitution à p_i de $p_i\sqrt{\frac{U+h}{T'}}$, et l'expression $F_1(q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k, h)$ ainsi obtenue, où l'on remplace les p_i par les p'_i, est une intégrale première de (A_1).

En particulier, quand (A) admet une intégrale algébrique et entière par rapport aux vitesses, soit $P_m + P_{m-2} + P_{m-4} + \ldots = C$, le système (A_1) admet une intégrale analogue et de même degré, à savoir $P_m + \frac{T'}{U+h} P_{m-2} + \frac{T'^2}{(U+h)^2} P_{m-4} + \ldots = C$, où les p_i sont remplacés par les p'_i (¹). Inversement, si (A_1) admet, quel que soit h, une intégrale de cette forme, (A) admet une intégrale entière de degré m. Mais ici une question se pose : *toute intégrale algébrique et entière de* (A_1), *qui existe quel que soit h, est-elle nécessairement de cette forme?* Par exemple, quand A_1 admet, pour h quelconque, une intégrale quadratique, cette intégrale peut-elle toujours s'écrire

$$P_2 + \frac{T'}{U+h} P_0 = C,$$

P_2 et P_0 étant indépendants de h? La réponse est affirmative, mais il n'est nullement évident qu'il en doive être ainsi. Je me borne à signaler ici cette proposition qui ne nous est pas indispensable, sans en développer la démonstration qui est délicate.

Des remarques analogues s'appliqueraient aux intégrales rationnelles.

III. — Systèmes où les forces ne sont pas nulles.

6. Quand les coefficients Q_i d'un système (A) (où k est plus grand que 1) ne sont pas tous nuls, une fois intégrées les équations différentielles des trajectoires, $\frac{dt}{dq_1}$ est donné en fonction de q_1 par une quel-

---

(¹) Remarquons bien que ceci suppose essentiellement qu'on ait introduit les variables canoniques; si l'on garde les variables q_i et leurs différentielles, une intégrale quadratique de (A), soit $d\sigma^2 - V\,dt^2 = C\,dt^2$, correspond à l'intégrale de (A_1) :

$$(U+h)^2 \left[d\sigma^2 - \frac{V}{(U+h)}\, ds^2 \right] = C\, dt_1^2.$$

conque des égalités (*voir* p. 22-23)

$$(2) \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{dt^2}{dq_1^2} = \frac{\dfrac{d^2q_i}{dq_1^2} + \Phi_1 \dfrac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i}{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}} = \frac{\chi_i}{\psi_i},$$

où $q_2, q_3, \ldots, q_k$ sont exprimés en fonction de q_1 et de $(2k-1)$ constantes arbitraires.

Ces égalités, on peut le remarquer en passant, conduisent à distinguer les trajectoires *réelles* Γ de (A) en deux classes, Γ' et Γ'', suivant que le signe commun des expressions $\frac{\chi_i}{\psi_i}$ (qui est celui de T) le long d'une de ces trajectoires est positif ou négatif : sur les premières seules le mouvement est réel ; sur les secondes, il est imaginaire.

Si *dans* (A) *on substitue aux* Q_i *les forces* $Q'_i \equiv cQ_i$, *les trajectoires ne sont pas modifiées,* et l'on passe du premier système au second en changeant t en $\sqrt{c}\,t + a$, c'est-à-dire dt en $\sqrt{c}\,dt$, transformation qui est *unique* d'après (2) du moment que les forces Q_i ne sont pas nulles.

Si c est positif, les mouvements réels restent réels ; si c est négatif, les trajectoires réelles Γ' du premier système deviennent les trajectoires Γ'' du second, et *vice versa*. Les transformations particulières $t = it_1$ et $t = -t_1$ donnent lieu à des remarques bien connues sur le cas où l'on change le sens soit de toutes les forces, soit de toutes les vitesses, sans changer leur direction ni leur grandeur.

Il importe d'observer que *les forces* $Q'_i = cQ_i$ *sont les seules qui substituées aux forces* Q_i *dans* (A) *engendrent les mêmes trajectoires.* Considérons, en effet, les équations différentielles des trajectoires

$$(5) \qquad \frac{\chi_2}{\psi_2} = \frac{\chi_3}{\psi_3} \cdots = \frac{\chi_k}{\psi_k},$$

$$(6) \qquad \frac{d}{dq_1}\log\chi_2 + 2\Phi_1 = \frac{d}{dq_1}\log\psi_2 - \frac{2\alpha_1}{\Delta}\frac{\chi_2}{\psi_2},$$

où

$$\chi_i = \frac{d^2q_i}{dq_1^2} + \Phi_1\frac{dq_i}{dq_1} - \Phi_i, \qquad \psi_i = \frac{1}{\Delta}\left(\alpha_i - \alpha_1\frac{dq_i}{dq_1}\right) \quad (^1);$$

---

(1) Il convient d'observer que les χ_i sont définis à l'aide des seuls coefficients de T sans que les Q_i interviennent.

les $(k-2)$ équations (5) sont de la forme

$$(5)' \qquad \frac{d^2q_i}{dq_1^2} = \frac{d^2q_2}{dq_1^2}\cdot\frac{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} + \mathrm{L}_i \qquad (i = 3, 4, \ldots, k),$$

où L_i ne renferme plus que des dérivées premières, et l'équation (6) peut s'écrire

$$(6)' \qquad \frac{d^3q_2}{dq_1^3} = \mathrm{L}_2 = \chi_2 \frac{d}{dq_1}\log\alpha_1 + \mathrm{L}'_2,$$

L'_2 étant défini à l'aide des coefficients de T et des rapports $\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$.

Supposons maintenant qu'aux Q_i on substitue des forces Q'_i : pour que les trajectoires restent les mêmes, il faut que les seconds membres de (5)' et de (6)' ne soient pas altérés; on doit donc avoir

$$\frac{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} \equiv \frac{\alpha'_i - \alpha'_1 \dfrac{dq_i}{dq_2}}{\alpha'_2 - \alpha'_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} \qquad (i = 3, 4, \ldots, k),$$

c'est-à-dire

$$\frac{\alpha_1}{\alpha'_1} \equiv \frac{\alpha_2}{\alpha'_2}, \ldots, = \frac{\alpha_k}{\alpha'_k};$$

et, d'autre part [d'après (6)'],

$$\frac{d}{dq_1}\log\alpha_1 \equiv \frac{d}{dq_1}\log\alpha'_1,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\log\alpha_1 \equiv \frac{\partial}{\partial q_1}\log\alpha'_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial q_k}\log\alpha_1 = \frac{\partial}{\partial q_k}\log\alpha'_1,$$

par suite

$$\alpha'_1 = c\alpha_1,$$

c étant une constante. On arrive ainsi aux conditions

$$\alpha_1 = c\alpha_1, \qquad \alpha'_2 = c\alpha_2, \qquad \ldots, \qquad \alpha'_k = c\alpha_k,$$

d'où l'on déduit aussitôt

$$Q'_1 = cQ_1 \qquad Q'_2 = cQ_2, \qquad \ldots, \qquad Q'_k = cQ_k. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Plus généralement, le système (A_1)

$$(A_1) \qquad \frac{d}{dt_1}\left(\frac{\partial T_1}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q'_i, \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$T = \frac{ds_1^2}{dt_1^2} \equiv C\frac{ds^2}{dt_1^2}, \qquad Q'_i = cQ_i,$$

définit les mêmes trajectoires que (A) : d'après ce qui précède, *ces systèmes constituent les seuls correspondants de* (A) *où* ds_1^2 *ne diffère de* ds^2 *que par un facteur constant.*

J'ajoute qu'on passe de (A) à (A_1) par la transformation

$$dt = \sqrt{\frac{c}{C}}\, dt_1.$$

Cette transformation est *pleinement déterminée,* à l'inverse de ce qui se passe dans le cas où les forces sont nulles; dans ce dernier cas, on a, comme on sait, $\frac{dt}{dt_1} = \alpha$, α désignant une constante arbitraire ou une intégrale première quelconque des géodésiques.

7. Étant donné un système (A) où T est une force vive bien déterminée, les trajectoires qui correspondent à un système de forces quelconque $Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ renferment un faisceau commun à $(2k-2)$ paramètres, à savoir les géodésiques de ds^2. *Existe-t-il d'autres faisceaux à* $(2k-2)$ *paramètres qui fassent partie des trajectoires, quelles que soient les forces* Q_i? Il est facile de voir que non de la manière suivante : un tel faisceau devrait vérifier les équations (5) et (6) quels que fussent les Q_i, et, par suite, vérifier l'équation (7) obtenue en retranchant les deux équations (6) relatives respectivement aux forces Q_i et Q'_i; si l'on observe que les Φ_i ne dépendent que de T et que seuls les α_i varient avec les forces, on voit que cette équa-

tion (7) peut s'écrire, une fois supprimé le facteur $\chi_2 = 0$ qui donne les géodésiques,

$$\frac{d}{dq_1} \mathrm{L} \frac{\psi_2}{\psi_2'} - 2 \frac{\chi_2}{\Delta} \left(\frac{\alpha_1}{\psi_2} - \frac{\alpha_1'}{\psi_2'} \right) = 0,$$

ou encore

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & 3 \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} + 2\Phi_1 \frac{dq_2}{dq_1} - 2\Phi_2 \\ & = \frac{1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2'}{\alpha_1'}} \left\{ \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \frac{d}{dq_1} \frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} - \left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \frac{d}{dq_1} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right] \right. \\ & \qquad \left. + \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \left(\frac{\alpha_2'}{\alpha_1'} - \frac{dq_2}{dq_1} \right) \frac{d}{dq_1} \frac{\alpha_1'}{\alpha_1} \right) \Big] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Si maintenant on substitue aux Q_i' d'autres forces Q_i'', on obtient une nouvelle équation (7), et en retranchant ces deux équations membre à membre, on obtient une relation où ne figurent plus que *des dérivées premières*, et qui ne se réduit pas à une identité quand les Q_i, Q_i', Q_i'' sont pris arbitrairement. D'autre part, les trajectoires considérées satisfont aux équations (5) : elles ne sauraient donc dépendre que de $(2k - 3)$ constantes au plus.

Mais on peut aller plus loin, quand le nombre k des paramètres dépasse 2 et montrer que, *si dans un système* (A) *on substitue aux forces* Q_i *d'autres forces* Q_i', *il ne saurait exister en dehors des géodésiques un faisceau de trajectoires à* $(2k - 2)$ *paramètres communs au premier et au second mouvement.*

Ceci suppose, bien entendu, qu'*on n'ait pas* $Q_i' = cQ_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, c étant une constante, puisqu'alors toutes les trajectoires coïncident.

Pour démontrer cette proposition, admettons qu'il existe un tel faisceau et représentons par

$$\frac{d^2 q_i}{dq_1^2} = f_i\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right) \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

les équations qui le définissent. On devra avoir, d'après (5),

$$\frac{f_2 + \frac{dq_2}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_2}{\alpha_2 - \alpha_1 \frac{dq_2}{dq_1}} \equiv \frac{f_i + \frac{dq_i}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_i}{\alpha_i - \alpha_1 \frac{dq_i}{dq_1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

l'un au moins des numérateurs de ces rapports (soit le premier χ_2) n'étant pas identiquement nul; car autrement le faisceau serait celui des géodésiques. On tire de là

$$\frac{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}} \equiv \frac{f_i + \dfrac{dq_i}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_i}{f_2 + \dfrac{dq_2}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_2};$$

on aurait de même

$$\frac{\alpha'_i - \alpha'_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha'_2 - \alpha'_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} \equiv \frac{f_i + \dfrac{dq_i}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_i}{f_2 + \dfrac{dq_2}{dq_1}\Phi_1 - \Phi_2},$$

donc

$$\frac{\alpha'_i - \alpha'_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha'_2 - \alpha'_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} \equiv \frac{\alpha_i - \alpha_1 \dfrac{dq_i}{dq_1}}{\alpha_2 - \alpha_1 \dfrac{dq_2}{dq_1}} \qquad (i = 2, 3, \ldots, k),$$

ce qui exige

$$\frac{\alpha_1}{\alpha'_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha'_2} = \ldots = \frac{\alpha_k}{\alpha'_k}.$$

Mais, d'autre part, s'il en est ainsi, l'équation (6) peut s'écrire (pour les forces Q_i),

$$\frac{d^3 q_2}{dq_1^3} = \chi_2 \frac{d}{dq_1}\log\alpha_1 + L'_2,$$

et pour les forces Q'_i,

$$\frac{d^3 q_2}{dq_1^3} = \chi_2 \frac{d}{dq_1}\log\alpha'_1 + L'_2,$$

L'_2 étant le même dans les deux cas, d'après une remarque précédente, puisque T ne change pas, non plus que les rapports $\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$; par suite ($\chi_2$ étant différent de zéro), l'égalité

$$\frac{d}{dq_1}\log\alpha_1 - \frac{d}{dq_1}\log\alpha'_1 = 0,$$

qui ne renferme pas les dérivées secondes, devra être vérifiée *identiquement*, c'est-à-dire qu'on aura

$$\alpha'_1 = c\alpha_1,$$

c étant une constante, ce qui entraîne

$$\alpha'_i = c\alpha_i \qquad \text{et} \qquad Q'_i = cQ_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Le théorème est donc démontré.

On voit que le raisonnement suppose essentiellement $k > 2$. *Pour $k = 2$, le théorème n'est plus exact :* par exemple, les deux systèmes d'équations de Lagrange

$$(\mathrm{A}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 0, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= g, \end{aligned} \right.$$

et

$$(\mathrm{A}') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= ky^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= k'; \end{aligned} \right.$$

où g, k, k' sont des constantes, correspondent à la même force vive $T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)$ et à des forces distinctes $Q_1 = 0$, $Q_2 = g$ d'une part, $Q'_1 = ky^{-\frac{3}{2}}$, $Q'_2 = k'$, d'autre part, qui ne satisfont pas aux conditions $Q'_1 = cQ_1$, $Q'_2 = cQ_2$. Les trajectoires de (A) et de (A′) comprennent néanmoins, en dehors des géodésiques, un faisceau commun à deux paramètres, à savoir les paraboles

$$y = (ax + b)^2,$$

où a et b sont deux constantes arbitraires. Mais le raisonnement précédent montre alors qu'*il ne saurait exister (en dehors des géodésiques) plus d'un faisceau à $(2k - 2) \equiv 2$ paramètres communs aux deux systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q'_i\right)$.*

IV. — Correspondants ordinaires d'un système (A).

8. Les considérations précédentes nous seront d'une grande utilité dans l'étude des systèmes correspondants. Dès maintenant nous voyons qu'elles mettent en évidence certains *correspondants* attachés à tout système. Étant donné un système (A) quelconque, le système

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \frac{d}{dt_1}\left[\frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial (q_i')}\right] - \frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial q_i} = \mathrm{Q}_i', \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = (q_i'), \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\mathrm{C}\, ds^2}{dt_1^2}, \qquad \mathrm{Q}_i' = c\,\mathrm{Q}_i,$$

définit les mêmes trajectoires que (A). Il n'existe pas d'autres correspondants où ds_1^2 ne diffère de ds^2 de T que par un facteur constant. On passe du premier mouvement au mouvement (A_1) par le changement de variable $\frac{dt}{dt_1} = \sqrt{\frac{c}{\mathrm{C}}}$ qui est entièrement déterminée. Dans le cas toutefois où les forces sont nulles, la transformation la plus générale qui permet de passer de (A) à (A_1) est de la forme $\frac{dt}{dt_1} = \alpha$, où α désigne à volonté une constante arbitraire ou une intégrale première quelconque des géodésiques.

Comme deux correspondants d'un même système sont correspondants l'un par rapport à l'autre, on voit que l'existence d'un correspondant (A_1) quelconque de (A) entraîne celle d'une infinité d'autres correspondants, à savoir ceux qu'on déduit du premier (A_1) en multipliant T_1 et les Q_i' par deux facteurs constants C et c.

9. Nous verrons dans un Chapitre suivant qu'un *système* (A) *pris au hasard n'admet pas en général d'autres correspondants*. Mais supposons maintenant que les forces Q_i dérivent d'un potentiel U. Les trajectoires de (A), pour la valeur h de la constante des forces vives, coïncident avec les géodésiques de $ds'^2 = (\mathrm{U} + h)\,ds^2$. D'après cela, considérons le système (A_1), où $\mathrm{T}_1 \equiv (\alpha\mathrm{U} + \beta)\frac{ds^2}{dt_1^2}$, et où les Q_i' dérivent du potentiel $\mathrm{U}' = \frac{\gamma\mathrm{U} + \delta}{\alpha\mathrm{U} + \beta}$ (avec la condition $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$). Les trajectoires de (A_1), pour la valeur h_1 de la constante des forces vives, coïncident avec les géodésiques de

$$ds_1'^2 = [\gamma\mathrm{U} + \delta + h_1(\alpha\mathrm{U} + \beta)]\,ds^2.$$

Les trajectoires de (A), pour une valeur donnée de h, coïncident donc avec les trajectoires de (A_1) pour lesquelles la constante h_1 vérifie l'égalité

$$h = \frac{\delta + \beta h_1}{\gamma + \alpha h_1} \quad \text{ou} \quad h_1 = \frac{\delta - \gamma h}{\alpha h - \beta}.$$

Les systèmes (A) et (A_1) sont donc *correspondants*, et chaque famille *naturelle* $h = h_0$ de trajectoires de (A) coïncide avec une famille naturelle $h_1 = h_1^0$ de (A_1). D'autre part, on a

$$ds^2 = (U + h)\,dt^2 = \left(U + \frac{\delta + \beta h_1}{\gamma + \alpha h_1}\right) dt^2,$$

et

$$(\alpha U + \beta)\,ds^2 = \left(\frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta} + h_1\right) dt_1^2;$$

d'où l'on tire

$$(a) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma)\,dt_1^2 = (\alpha U + \beta)^2[\alpha\,ds^2 - (\alpha U + \beta)\,dt^2].$$

Cette transformation (a), qui permet de passer de (A) à (A_1) est d'ailleurs *unique;* en effet, dans (A) et dans (A_1) on peut exprimer $\frac{d^2q_2}{dq_1^2}$ en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}, \frac{dq_k}{dt}$, et en égalant ces deux valeurs de $\frac{d^2q_2}{dq_1^2}$, on obtient une relation bien déterminée entre $q_1, q_2, \ldots, q_k, dq_1, dq_2, \ldots, dq_k, dt$ et dt_1 (¹). Cette relation unique doit donc coïncider avec celle que nous venons d'obtenir, ce qu'il est bien facile de vérifier en faisant le calcul.

Ces nouveaux *correspondants* (A_1) coïncident avec les premiers pour $\alpha = 0$.

Comme il est loisible d'augmenter la fonction de forces d'une constante, on peut toujours, pour $\alpha \neq 0$, supposer U′ de la forme $U' = \frac{\delta}{\alpha U}$. L'équation (a) devient alors

$$(a') \qquad \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\delta} U^2\left(\frac{ds^2}{dt^2} - U\right) = \frac{\alpha^2}{\delta} U^2 h,$$

(¹) Nous revenons d'ailleurs sur ce point au début du troisième Chapitre.

ou encore

$$\frac{dt^2}{dt_1^2} = \frac{1}{\alpha U^2}\left(\alpha U \frac{ds^2}{dt_1^2} - \frac{\delta}{\alpha U}\right) = \frac{h_1}{\alpha U^2}.$$

Ces égalités nous montrent que les expressions $\frac{1}{U}\left(\frac{dt_1}{dt}\right)$ et $U\frac{dt}{dt_1}$ sont respectivement des intégrales de (A) et de (A_1), à savoir les deux intégrales des forces vives.

A toute intégrale première de (A) correspond une intégrale première de (A_1) obtenue en remplaçant dt en fonction de dt_1 d'après (a'). A une intégrale algébrique et entière (ou rationnelle) correspond une intégrale analogue de même degré. Par exemple, à une intégrale du second degré de (A), soit

$$d\sigma^2 - V\,dt^2 = k\,dt^2,$$

correspond l'intégrale de (A_1)

$$d\sigma^2 - \frac{V\,ds^2}{U} + \frac{\delta}{\alpha^2}\frac{V\,dt_1^2}{U^3} = \frac{kh_1}{\alpha U^2}\,dt_1^2,$$

c'est-à-dire

$$U^2\left(d\sigma^2 - \frac{V\,ds^2}{U} + \frac{\delta}{\alpha^2}\frac{V\,dt_1^2}{U^3}\right) = k_1\,dt_1^2.$$

Cette transformation a été indiquée par M. Darboux. Il est clair que les correspondants (A_1) déduits de (A) par cette transformation coïncident avec ceux qu'on déduirait d'un quelconque des transformés (A_1).

Un système (A) à potentiel, pris au hasard, n'admet pas en général d'autres correspondants. C'est ce qui va résulter de l'étude générale des systèmes correspondants (A), (A_1), où (A_1) n'est pas un des correspondants *ordinaires* $\left(C\frac{ds^2}{dt_1^2}, cQ_i\right)$ ou $\left[(\alpha U + \beta)\frac{ds^2}{dt_1^2}, \frac{\gamma U + \delta}{\alpha U + \beta}\right]$ de (A).

CHAPITRE II.

Systèmes correspondants où toutes les forces sont nulles.

I. — Démonstration d'une propriété générale de ces systèmes.

1. Soient (A) et (A_1) deux systèmes correspondants : si toutes les forces Q_i sont nulles dans (A), *elles sont nulles aussi dans* (A_1); en effet, les trajectoires de (A) ne dépendant que de $(2k-2)$ paramètres, il en est de même des trajectoires de (A_1), et, d'après un théorème du premier Chapitre, toutes les forces dans (A_1) doivent être nulles.

Nous allons donc étudier en premier lieu la correspondance entre deux systèmes (A) et (A_1) *sans forces*. Le théorème fondamental que nous démontrerons est le suivant :

Si un système (A) *sans forces, soit* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$, *possède un correspondant* (A_1), *distinct des correspondants ordinaires* $\left[C\frac{ds^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right]$, *il admet une intégrale quadratique* (*en outre de celle des forces vives*).

Ce qui peut s'énoncer encore :

Si les géodésiques de deux ds^2 (*non semblables*) *coïncident, elles admettent une intégrale rationnelle et du second degré.*

Deux tels ds^2 seront dits *correspondants.*

Si k est égal à 2, ce théorème se confond avec celui de M. Dini.

2. Pour démontrer cette proposition je m'appuierai sur le lemme suivant :

Soit un système d'équations

$$(1) \qquad \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial f}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dq} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où f est une fonction quelconque de q, q_1, q_2, ..., q_k, q'_1, ..., q'_k, assujettie à la seule condition que le système (1) *soit résoluble par rapport aux* $\frac{d^2 q_i}{dq^2}$, *autrement dit que le hessien d de f relatif aux variables q'_i, à savoir*

$$d = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q_1'^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial q_2'^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_2 \partial q'_k} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_k} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial q_k'^2} \end{vmatrix},$$

ne soit pas identiquement nul : ce hessien est un dernier multiplicateur de (2).

En effet, ramenons le système (1) à la forme canonique à l'aide du changement de variables

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q'_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

d'où l'on tire inversement

$$q'_i = \frac{\partial f_1}{\partial p_i},$$

en posant

$$f_1(q, q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k) \equiv p_1 q'_1 + \ldots + p_k q'_k - f.$$

Les nouvelles équations admettent comme multiplicateur l'unité. Autrement dit, si l'on connaît $(2k-1)$ intégrales premières du système (1), soit

$$(2) \quad \varphi_j(q, q_1, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k) = c_j \quad [j = 1, 2, \ldots (2k-1)],$$

quand on tire de ces intégrales $p_1, p_2, \ldots, p_k, q, q_1, q_2, \ldots, q_{k-2}$ en fonction de q_{k-1} et de q_k par exemple, l'expression

$$\frac{1}{\delta}\left(\frac{\partial f_1}{\partial p_k} dq_{k-1} - \frac{\partial f_1}{\partial p_{k-1}} dq_k\right) \equiv \frac{1}{\delta}(q'_k\, dq_{k-1} - q'_{k-1}\, dq_k)$$

est une différentielle totale exacte; δ désigne le déterminant fonctionnel $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k-1})}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, p_1, p_2, \ldots, p_k)}$; mais, d'autre part, si l'on suppose que les intégrales φ_j soient exprimées à l'aide des q'_i, on a

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k-1})}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)}\\ &= \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k-1})}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, p_1, \ldots, p_k)} \frac{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, p_1, \ldots, p_k)}{D(q, q_1, \ldots, q_{k-2}, q'_1, \ldots, q'_k)} = \delta \frac{D(p_1, p_2, \ldots, p_k)}{D(q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)} = \delta \times d.\end{aligned}$$

Donc l'expression

$$\frac{d}{\delta_1}(q'_k\, dq_{k-1} - q'_{k-1}\, dq_k)$$

est une différentielle exacte [si l'on tient compte des $2k-1$ relations (2)]; le hessien d est un multiplicateur de (1).

Si notamment q ne figure pas dans f, d est un multiplicateur du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial q'_1}}{\frac{\partial f}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{d\,\frac{\partial f}{\partial q'_k}}{\frac{\partial f}{\partial q_k}}.$$

Appliquons ce lemme à un système (A) sans forces,

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i} - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

en faisant $q = t$. On voit que le discriminant Δ de T est un multiplicateur du système

$$\frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_k} = \frac{d\,\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}}{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1}} = \ldots = \frac{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k}}{\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_k}}.$$

Admettons donc qu'on connaisse $(2k-3)$ intégrales premières des *géodésiques*, c'est-à-dire $(2k-3)$ intégrales de (A) homogènes et de degré zéro par rapport aux q'_i, soit $\Big($en posant $q'_{(2)} = \frac{q'_2}{q'_1} = \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots,$

$q'_{(k)} = \frac{q'_k}{q'_1} = \frac{dq_k}{dq_1}\Big)$:

(3) $\psi_j[q_1, q_2, \ldots q_k, q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}] = c_j \quad [j = 1, 2, \ldots (2k-3)]$.

A ces intégrales joignons celles des forces vives

$$(4) \qquad T \equiv q_1'^2 \tau[q_1, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}] = h.$$

Si de (3) on tire $q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$ en fonction de q_1, q_2, l'expression

$$(4) \qquad \frac{\Delta q'_1}{\delta_1}[dq_2 - q'_{(2)} dq_1],$$

où l'on remplace q'_1 par sa valeur tirée de (4), est une différentielle exacte. Ici on a

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{D(T, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)} \\ &= \frac{D(q_1'^2\tau, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{D[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]} \, \frac{D[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]}{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)}.\end{aligned}$$

Mais en observant que $q'_{(i)} = \frac{q'_i}{q'_1}$, on trouve aussitôt

$$\frac{D[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]}{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)} = \frac{D[q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}]}{D(q'_2, q'_3, \ldots, q'_k)} = \frac{1}{q_1'^{k-1}};$$

d'autre part, comme $\tau, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3}$ ne dépendent pas de q'_1, mais seulement des $q'_{(i)}$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{D(q_1'^2\tau, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{D[q_3, q_4 \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]} &\equiv 2\tau q'_1 \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-3})}{D[q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}]} \\ &\equiv 2\tau q'_1 \delta';\end{aligned}$$

et, par suite,

$$\delta_1 \equiv \frac{2\tau\delta'}{q_1'^{k-2}}.$$

Remplaçons δ_1 par cette valeur dans l'expression (4) et faisons

$q'_1 = \frac{h}{\sqrt{\tau}}$; on voit en définitive que *l'expression*

$$\frac{1}{\delta'} \frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}} [dq_2 - q'_{(2)} dq_1]$$

est une différentielle exacte quand on y remplace $q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$ *en* q_1, q_2 *d'après* (3); δ' désigne le déterminant fonctionnel des ψ_j, par rapport aux variables $q_3, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$.

Ceci revient à dire que si l'on écrit ainsi les équations différentielles des géodésiques

$$(5) \qquad dq_1 = \frac{dq_2}{q'_{(2)}} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_{(k)}} = \frac{dq'_{(2)}}{\lambda_2} = \ldots = \frac{dq'_{(k)}}{\lambda_k},$$

ces équations admettent comme dernier multiplicateur l'expression

$$\frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}.$$

La démonstration du théorème que j'ai en vue est dès lors achevée. Supposons, en effet, que (A) et (A_1) soient deux systèmes (sans forces) correspondants, autrement dit que les géodésiques de (A) et de (A_1) coïncident; les équations (5) seront les mêmes pour les deux systèmes, et elles admettront à la fois les deux multiplicateurs

$$\frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}, \qquad \frac{\Delta_1}{\tau_1^{\frac{1+k}{2}}}.$$

Le quotient $\frac{\Delta}{\Delta_1} \frac{\tau_1^{\frac{1+k}{2}}}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$ *est donc une intégrale première de* (5), et comme cette intégrale peut s'écrire

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} \frac{\tau_1}{\tau} = \text{const.},$$

on voit que les géodésiques admettent une intégrale rationnelle du second degré. Quant au système (A) lui-même, si l'on tient compte de l'intégrale des forces vives $T \equiv q_1'^2 \tau = h$, on trouve *qu'il possède une intégrale quadratique*

$$(6) \qquad \left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} ds_1^2 = C\, dt^2.$$

Cette intégrale peut-elle se confondre avec celle des forces vives? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}} ds_1^2 \equiv C\, ds^2$; cela exige d'abord que ds_1^2 soit égal à $\mu\, ds^2$, de plus $\left(\text{comme } \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ est égal à } \mu^k\right)$ que $\mu^{-\frac{2k}{1+k}}$, et, par suite μ, soit une constante. Si donc (A_1) n'est pas un correspondant *ordinaire* de (A), l'intégrale (6) est toujours distincte de celle des forces vives. Le théorème que j'ai énoncé est donc complètement démontré. Observons que le raisonnement précédent nous montre que *ds^2 et $\mu\, ds^2$ ne peuvent être correspondants sans que μ soit une constante;* autrement, $\mu' =$ const. serait une intégrale première des géodésiques.

De même (A_1) possède l'intégrale

$$\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{2}{1+k}} ds^2 = C_1\, dt_1^2.$$

3. Avant d'aller plus loin, j'insisterai sur un des résultats obtenus tout à l'heure. Nous avons dit que les équations différentielles (5) des géodésiques admettaient comme multiplicateur l'expression $\frac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$. Or on connaît une forme explicite de ces équations, à savoir la suivante :

$$(1)' \qquad dq_1 = \frac{dq_2}{q'_{(2)}} = \cdots = \frac{dq_k}{q'_{(k)}} = \frac{d.\frac{\partial f}{\partial q'_{(2)}}}{\frac{df}{\partial q_2}} = \cdots = \frac{d.\frac{\partial f}{\partial q'_{(k)}}}{\frac{df}{\partial q_k}},$$

où f est égal à $\sqrt{\tau}$. Inversement, tout système $(1)'$, où f est la racine carrée d'un polynome du second degré τ en $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$, peut être regardé comme définissant les trajectoires d'un système (A) sans forces, à savoir du système où

$$T \equiv q_1'^2 f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{q_2'}{q_1'}, \ldots, \frac{q_k'}{q_1'}\right).$$

Nous arrivons donc à ce théorème : *Tout système* $(1)'$, *où* f *est la racine carrée d'un polynome* τ *du second degré en* $q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$, *admet comme dernier multiplicateur* $\dfrac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$, Δ désignant le discriminant de $\frac{1}{2}\tau$ rendu homogène.

J'indique rapidement une autre démonstration de ce théorème, qui consiste à généraliser la solution qu'a donnée M. Darboux du problème de Dini. D'après le lemme que j'ai établi antérieurement, le hessien d de f relatif aux variables $q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$ est un multiplicateur de $(1)'$. Comme $f \equiv \sqrt{\tau}$, on a ici

$$d \equiv \frac{1}{\tau^{\frac{3(k-1)}{2}}} \begin{vmatrix} \left[\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(2)}} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_2}\right)^2\right] & \cdots & \left(\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right) \\ \left(\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(3)}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(3)}}\right) & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \left(\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right) & \cdots & \left[\dfrac{\tau}{2}\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(k)}} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right)^2\right] \end{vmatrix} \equiv \frac{1}{\tau^{\frac{3(k-1)}{2}}} d_1,$$

d_1 étant un polynome de degré $2(k-1)$ au plus par rapport aux $q'_{(i)}$. Pour $k=2$, on trouve immédiatement $d_1 \equiv \tau\dfrac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(2)}} - \left(\dfrac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\right)^2 \equiv \Delta$; pour $k=3$, $d_1 \equiv \Delta\tau$; d'une manière générale, une transformation de déterminants assez pénible montre que $d_1 \equiv \Delta\tau^{(k-2)}$; il suit de là que $\dfrac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$ est un multiplicateur de $(1)'$.

Inversement, comme nous avons établi, par notre première méthode, que $\dfrac{\Delta}{\tau^{\frac{1+k}{2}}}$ est un multiplicateur de $(1)'$; on en conclut que $d_1 \equiv \Delta\tau^{k-2}$.

Tout d'abord, la fraction

$$D \equiv \frac{d \times \tau^{\frac{1+k}{2}}}{\Delta} \equiv \frac{d_1}{\Delta\tau^{k-2}},$$

dont les deux termes sont des polynomes par rapport aux $q'_{(i)}$ et aux coefficients A_{ij} de τ, est une constante absolue C (indépendante des q'_i et des A_{ij}) : autrement, elle définirait une intégrale première de $(1)'$, et les géodésiques d'un ds^2 quelconque à k variables admettraient une intégrale algébrique et rationnelle par rapport aux $q'_{(i)}$, ce qui est évidemment absurde ([1]); donc $d_1 \equiv C\Delta\tau^{k-2}$. En prenant un ds^2 particulier, soit $ds^2 = dq_1^2 + dq_2^2 + \ldots + dq_k^2$, on voit aussitôt que $C = 1$.

4. J'ajoute que les résultats précédents sont susceptibles d'être étendus aux équations les plus générales provenant *du calcul des variations*. Si deux systèmes $(1)'$, *où f est quelconque*, définissent les mêmes relations entre les q_i, le rapport des hessiens d et d' de f et de f' (relatifs aux variables $q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$) est une intégrale première de $(1)'$.

En particulier, quand f et f' sont rationnelles (ou algébriques) en $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$, les équations $(1)'$ admettent une intégrale première rationnelle (ou algébrique) par rapport avec $q'_{(i)}$.

Si f est la racine $n^{ième}$ d'un polynome τ du $n^{ième}$ degré en $q'_{(2)}$, $q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$, on a

$$d \equiv \frac{1}{\tau^{(k-1)\left(2-\frac{1}{n}\right)}} d_1$$

$$= \frac{1}{\tau^{(k-1)\left(2-\frac{1}{n}\right)}} \begin{vmatrix} \frac{1}{n}\left[\tau\frac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(2)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\right)^2\right] & \cdots & \frac{1}{n}\left[\tau\frac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n}\left[\tau\frac{\partial^2\tau}{\partial q'_{(2)}\partial q'_{(k)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(2)}}\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right] & \cdots & \frac{1}{n}\left[\tau\frac{\partial^2\tau}{\partial q'^2_{(k)}} - \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\partial\tau}{\partial q'_{(k)}}\right)^2\right] \end{vmatrix},$$

et en appelant Δ le hessien de la forme homogène :

$$T \equiv \frac{1}{n(n-1)} q_1'^n \tau\left(q_1, q_2, \ldots, q_k \frac{q'_2}{q'_1}, \frac{q'_3}{q'_1}, \ldots, \frac{q'_k}{q'_1}\right),$$

on trouve

$$d_1 = (n-1)^{k-1}\Delta'\tau^{k-2};$$

([1]) Il serait, d'ailleurs, bien facile de démontrer ce dernier point en toute rigueur.

Δ' représente ce que devient Δ quand on y fait $q'_1 = 1$, $q'_i = q'_{(i)}$. Il suit de là que $\dfrac{\Delta'}{\tau^{\frac{k(n-1)+1}{n}}} \equiv d$ est un multiplicateur de $(1)'$.

Pour démontrer ces dernières propositions, on pourra suivre la même marche que dans le cas où T est du second degré. En se servant des équations

$$(1)'' \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

qui définissent entre les q_i les mêmes relations que $(1)'$, on établira, sans rien changer au raisonnement, d'abord que $\dfrac{\Delta'}{\tau^{\frac{k(n-1)+1}{n}}}$ est un multiplicateur de $(1)'$, ensuite qu'il doit coïncider avec d; d'où la valeur de d_1.

Si, en particulier, deux systèmes tels que $(1'')$, où T et T_1 sont de même degré n, se correspondent, soit $\mathrm{T} = \dfrac{ds^n}{dt^n}$, $\mathrm{T}_1 = \dfrac{ds_1^n}{dt_1^n}$: l'égalité

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right) ds_1^{k(n-1)+1} = \mathrm{C}\, dt^{k(n-1)+1}$$

fournit une intégrale première de $(1)''$ [1].

II. — Passage d'un système (A) sans forces a son correspondant. Conséquences.

5. Quand dans un système (A) tous les coefficients Q_i sont nuls, l'égalité

$$dt = \mathrm{C}\, ds$$

---

[1] Si T et T_1 sont de degré n et n_1, l'égalité est de la forme

$$q_i'^{(n-n_1)} \frac{\Delta}{\Delta_1} \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^{k(n_1-1)+1} = \mathrm{C},$$

i ayant une quelconque des valeurs $1, 2, \ldots, k$; on a donc nécessairement : $q'_i = c_i q'_1$, c'est-à-dire $q_i = c_i q_1 + c'_i$, les c, c' étant des constantes, et la même conclusion s'applique aux trajectoires du second système. Ce cas particulier écarté, les deux systèmes ne peuvent être correspondants sans que n soit égal à n_1.

où C désigne soit un nombre, soit une intégrale première des géodésiques, définit sur chaque géodésique un mouvement de (A). Inversement, toute égalité

$$dt = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right) ds$$

qui définit sur une géodésique quelconque un mouvement de (A), est de la forme précédente.

Appliquons cette remarque à deux systèmes correspondants (A) et (A_1) sans forces. Nous aurons

$$dt = C\, ds, \qquad dt_1 = C_1\, ds_1,$$

d'où

$$(a) \qquad \frac{dt}{dt_1} = c\,\frac{ds}{ds_1},$$

$c \equiv \frac{C}{C_1}$ représentant un nombre ou une intégrale première des géodésiques. D'un mouvement quelconque défini par (A) on déduira donc un mouvement défini par (A_1) en changeant dt en dt_1 d'après (a); d'ailleurs, toute égalité

$$\frac{dt}{dt_1} = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right)$$

qui transforme les mouvements de (A) et de (A_1) l'un dans l'autre, est une transformation (a).

Mais nous avons vu plus haut que l'expression

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{1}{k+1}} \frac{ds_1}{ds}$$

est une intégrale première des géodésiques; si l'on remplace C par cette expression dans (a), il vient

$$(b) \qquad \frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{k+1}}}.$$

Nous arrivons ainsi à cette conclusion : *On peut passer du système* (A) *au système* (A_1) *par la transformation* (b). *Cette transforma-*

tion n'est pas la seule; la plus générale s'obtient en posant

$$\frac{dt}{\Delta^{\frac{1}{k+1}}} = C\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{k+1}}},$$

C *représentant une constante ou une intégrale première des géodésiques.*

Cette proposition joue un rôle fondamental dans la théorie des correspondants. Nous allons en déduire immédiatement quelques conséquences.

6. Une des plus importantes est la suivante :

Soit deux systèmes (A) *et* (A_1)

$$(A) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt} = q_i' \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

et

$$(A_1) \quad \frac{d}{dt_1}\left[\frac{\partial T}{\partial (q_i')}\right] - \frac{\partial T_1}{\partial q_i} = Q_i'(q_1, q_2, \ldots, q_k), \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = (q_i') \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si les géodésiques de T *et de* T_1 *coïncident, à tout système de forces* Q_i *de* (A) *on peut associer un système de forces* Q_i' *telles que* (A) *et* (A_1) *soient correspondants* (¹).

En effet, supposons les équations (A) résolues par rapport aux $\frac{d^2q_i}{dt^2}$. Nous aurons

$$(a) \qquad \frac{d^2q_i}{dt^2} = P_i + \frac{\alpha_i}{\Delta} = P_i + \beta_i,$$

P_i désignant une forme quadratique des q_i' qui ne dépend que de T, et β_i dépendant des forces Q_i et des coefficients A_{ij} de T. On aurait de même pour (A_1)

$$(a_1) \qquad \frac{d^2q_i}{dt_1^2} = P_i' + \frac{\alpha_i'}{\Delta_1} = P_i' + \beta_i'.$$

(¹) On pourrait aussi démontrer ce théorème en se servant des équations différentielles des trajectoires.

Nous savons que quand toutes les forces sont nulles, et par suite les α_i, α'_i, on peut passer de (a) à (a_1) par le changement de variable

$$\frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}},$$

C étant une constante, ce qui peut s'écrire

$$dt_1 = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)\,dt.$$

Si nous effectuons ce changement de variables, il vient

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{dt_1}\frac{dt_1}{dt} = \lambda\frac{dq_i}{dt}, \qquad \frac{d^2q_i}{dt^2} = \lambda^2\frac{d^2q_i}{dt_1^2} + \frac{dq_i}{dt_1}\lambda\frac{d\lambda}{dt_1};$$

les équations (a) deviennent

$$(b) \qquad \frac{d^2q_i}{dt_1^2} = (P_i) - \frac{dq_i}{dt_1}\frac{d}{dt}\log\lambda + \frac{\beta_i}{\lambda^2},$$

(P_i) représentant P_i où l'on a remplacé $\frac{dq_i}{dt}$ par $\frac{dq_i}{dt_1}$. Puisque les équations (b) et (a_1) coïncident quand les β_i, β'_i sont nuls, on a

$$(P_i) - \frac{dq_i}{dt_1}\left(\frac{dq_1}{dt_1}\frac{\partial\log\lambda}{\partial q_1} + \ldots + \frac{dq_k}{dt_1}\frac{\partial\log\lambda}{\partial q_k}\right) \equiv P'_i.$$

Pour qu'elles coïncident encore quand les β_i, β'_i ne sont pas nuls, il faut donc et il suffit que

$$\frac{\beta_i}{\lambda^2} = \beta'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

ce qui peut s'écrire encore

$$\beta_i\Delta^{\frac{2}{k+1}} = C^2\beta'_i\Delta_1^{\frac{2}{k+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k);$$

le théorème est ainsi démontré.

Il est facile de déduire de ces relations les relations explicites qui définissent les Q'_i en fonction des Q_i.

Représentons par Δ^{ij} (ou Δ_1^{ij}) le mineur de Δ (ou de Δ_1) relatif à l'élément A_{ij} (ou A'_{ij}); on a

$$\beta_i = \frac{\Delta^{1i}}{\Delta}Q_1 + \frac{\Delta^{2i}}{\Delta}Q_2 + \ldots + \frac{\Delta^{ki}}{\Delta}Q_k,$$

et, par suite (comme on sait),

$$Q_i = A_{1i}\beta_1 + A_{2i}\beta_1 + \ldots + A_{ki}\beta_k.$$

Écrivons donc les égalités

$$Q'_i = \sum_{j=1}^{j=k} A'_{ij}\beta'_j, \qquad \beta'_j = C^2\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{k+1}}\beta_j, \qquad \beta_j = \frac{1}{\Delta}\sum_{l=1}^{l=k}\Delta^{jl}Q_l;$$

il vient

$$(c) \qquad \Delta_1^{\frac{2}{k+1}} Q'_i = \frac{C^2}{\Delta^{\frac{k-1}{k+1}}}(\mu_{i1}Q_1 + \mu_{i2}Q_2 + \ldots + \mu_{ik}Q_k)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, k),$$

où μ_{ij} désigne le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la $j^{\text{ième}}$ colonne par la $i^{\text{ième}}$ colonne de Δ_1 (ici μ_{ij} est en général distinct de μ_{ji}).

7. *Remarques*. — Ce théorème peut être complété par plusieurs remarques. En faisant varier la constante C^2, nous obtenons, ainsi qu'il était évident à l'avance, une infinité de systèmes Q'_i qui se déduisent tous de l'un d'entre eux en multipliant les Q' par un facteur constant. Mais il importe d'observer que, les Q_i étant donnés, ces forces Q'_i sont les seules pour lesquelles (A) et (A_1) soient correspondants. En effet, les Q_i étant donnés, les trajectoires de (A), par suite celles de (A_1) sont déterminées; or nous avons vu, dans le premier Chapitre, qu'on ne peut, dans un système (A_1), changer les forces Q'_i sans changer les trajectoires, à moins que les nouvelles forces (Q'_i) ne diffèrent des premières que par le même facteur constant.

De plus, dans le cas actuel, on passe du système (A) au système (A_1) [où les Q'_i satisfont aux conditions (c)], par la transformation

$$(d) \qquad \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}},$$

C désignant un nombre bien déterminé quand les Q_i, Q'_i sont donnés. Il importe, là encore, d'observer que cette transformation est *unique;*

autrement dit qu'il n'existe pas d'autre changement de variable

$$(e) \qquad \frac{dt_1}{dt} = f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right)$$

qui transforme l'un dans l'autre les systèmes (A) et (A_1) donnés. La chose est évidente, si l'on se rappelle l'égalité établie dans le premier Chapitre (*voir* p. 29), égalité qui résulte de (A) :

$$\frac{dt^2}{dq_1^2}\left(\frac{\alpha_2}{\Delta} - \frac{\alpha_1}{\Delta}\frac{dq_2}{dq_1}\right) = \frac{d^2 q_2}{dq_1^2} + \Phi_1 \frac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2.$$

Si l'on écrit l'égalité analogue relative à (A_1), et si l'on égale les deux valeurs de $\frac{d^2 q_2}{dq_1^2}$ [qui coïncident puisque (A) et (A_1) sont correspondants], on trouve que dt et dt_1 sont liés par une relation de la forme (e) (¹)

$$\frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\varphi\left(q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_2}{dq_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dq_1}\right)}.$$

C'est ce que nous voulions établir. Le rapport $\frac{dt_1}{dt}$ est donc parfaitement déterminé en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$; et l'égalité précédente doit coïncider avec (d).

Ces remarques permettent d'énoncer les corollaires suivants :

Soit deux systèmes correspondants donnés (A) *et* (A_1), *où les forces ne sont pas nulles : si les géodésiques de* T *et de* T_1 *coïncident, on peut passer de* (A) *à* (A_1) *par la transformation unique*

$$(d) \qquad \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{1+k}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{1+k}}},$$

où C *est un nombre déterminé.*

Les forces Q'_i sont alors liées aux forces Q_i par les conditions (c).

Inversement, *si l'on peut passer d'un système* (A) *donné à un*

(¹) *Voir*, à ce sujet, le début du troisième Chapitre.

correspondant (A_1) *par une transformation*

$$dt_1 = \lambda(q_1, \ldots, q_k)\, dt,$$

les géodésiques de T *et de* T_1 *coïncident, et l'on a*

$$\lambda = C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{1+k}}.$$

En effet, reportons-nous au calcul développé dans le n° **6**. Par hypothèse, les équations (b) et (a_1) coïncident pour les Q_i, Q'_i donnés, donc pour les β_i, β'_i donnés; ceci ne peut avoir lieu que si, dans les seconds membres de (b) et de (a_1), les termes homogènes et du second degré par rapport aux $\frac{dq_i}{dq_1}$ et les termes indépendants de ces variables sont identiques respectivement. Mais, en identifiant les termes du second degré, on forme précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour que les géodésiques de T et de T_1 coïncident. D'autre part, puisque les géodésiques coïncident, λ est nécessairement de la forme indiquée. De plus, (A) admet un correspondant de force vive T_1 non seulement pour les forces Q_i données, *mais pour des forces quelconques*.

8. Démontrons enfin cette réciproque de la première proposition :

Si, ds^2 et ds_1^2 étant donnés, à des forces quelconques Q_i on peut associer des forces Q'_i telles que les deux systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ soient correspondants, les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 coïncident.

En effet, nous savons que les géodésiques de ds_1^2 font partie des trajectoires de (A_1) quels que soient les Q'_i, donc elles font partie des trajectoires de (A) quels que soient les Q_i.

Or pour un système (A) il n'existe pas, en dehors des géodésiques de ds^2, de faisceau de trajectoires à $(2k-2)$ paramètres, indépendant des forces Q_i. Les géodésiques de ds^2 se confondent donc avec celles de ds_1^2.

Mais on peut aller plus loin : quand deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et

$\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$ sont correspondants, il en est de même des deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, cQ_i\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, c'Q'_i\right]$, c et c' désignant deux constantes. Mais admettons que les systèmes (A) et (A_1) soient encore correspondants quand on y remplace les Q_i par certaines forces *distinctes* des premières, soit (Q_i), et les Q'_i par (Q'_i) (¹). Les géodésiques de ds_1^2 appartiennent aux trajectoires des deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ et $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, (Q_i)\right]$; mais nous avons montré dans le premier Chapitre que, pour $k > 2$, il n'existe pas, en dehors des géodésiques de ds^2, un faisceau de trajectoires, à $(2k-2)$ paramètres, commun à deux tels systèmes. Nous arrivons donc à cette conclusion :

Si deux systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *et* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$ *correspondants restent correspondants quand on y remplace les forces* Q_i *et* Q'_i *par certaines forces* (Q_i) *et* (Q'_i) *distinctes des premières, les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident.* Par suite, toutes les propositions précédentes s'appliquent à la correspondance en question.

La dernière démonstration suppose, il est vrai, $k > 2$, car pour $k = 2$, le lemme sur lequel elle s'appuie est en défaut.

Nous reviendrons sur ce point dans le troisième Chapitre, où nous retrouverons par une autre voie tous les résultats que nous venons d'obtenir.

III. — Conditions suffisantes pour qu'un système (A) sans forces admette un correspondant. Remarque sur les systèmes (A) où les forces dérivent d'un potentiel.

9. Nous venons de voir que si un système (A), sans forces, possède un correspondant (non ordinaire), il admet nécessairement une

(¹) Si les systèmes de forces Q_i et (Q_i) sont *distincts*, les systèmes Q'_i et (Q'_i) le sont aussi, car autrement les trajectoires de (A_1), par suite celles de (A), ne seraient pas modifiées par le changement de forces, et l'on aurait

$$(Q_i) = cQ_i.$$

intégrale quadratique distincte de celle des forces vives. *Pour* $k = 2$, *cette condition est suffisante,* ainsi qu'il est bien connu, et de toute intégrale quadratique on déduit un correspondant (A_1) de (A).

Pour $k > 2$, il est aisé de former des systèmes qui possèdent des correspondants et n'admettent, en dehors de l'intégrale des forces vives, *qu'une seule intégrale quadratique.* Par exemple, le ds^2

$$ds^2 = \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + dq_3^2,$$

où φ est quelconque, est correspondant du ds_1^2,

$$ds_1^2 = \varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + C\,dq_3^2,$$

où C est un nombre; d'autre part, le système (A) ou $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ n'admet qu'une intégrale quadratique

$$\varphi(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2) + C\,dq_3^2 = c\,dt^2,$$

intégrale qui peut s'écrire notamment

$$dq_3 = c\,dt.$$

Mais, en général, *la condition qu'il existe une intégrale quadratique ne suffit pas pour que* (A) *admette un correspondant.* On s'en assure aisément en considérant, par exemple, le ds^2 rencontré par Jacobi dans la théorie des coordonnées elliptiques

$$ds^2 = \left[\sum_{i=1}^{i=k} \frac{\psi_i(q_i)}{F'(q_i)}\right] \sum_{i=1}^{i=k} \frac{F'(q_i)}{f(q_i)}\,dq_i^2,$$

où l'on a posé

$$F = (u - q_1)(u - q_2)\ldots(u - q_k),$$
$$f = (u - a_1)(u - a_2)\ldots(u - a_k),$$

et où ψ_i désigne une fonction quelconque de q_i. Ce système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ admet un système complet d'intégrales quadratiques et ne possède pas de correspondants (en dehors des correspondants ordinaires).

Au sujet des conditions suffisantes pour qu'un système (A) admette des correspondants non ordinaires, je ferai les observations suivantes : Considérons un système de $(k-1)$ équations différentielles du second ordre en $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Pour qu'un tel système puisse être regardé comme définissant des géodésiques, il faut : 1° qu'il existe une fonction $f(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})$ telle que le système

$$(1) \qquad \frac{d}{dq_1}\frac{\partial f}{\partial q'_{(i)}} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = 0, \qquad \frac{dq_i}{dq_1} = q'_{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

se confonde avec le système donné ; 2° que f soit la racine carrée d'un polynome τ du second degré en $q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$. Pour que le ds^2 défini par τ admette des correspondants, il faut : 3° qu'il existe au moins deux telles fonctions $f = \sqrt{\tau}$ et $f_1 = \sqrt{\tau_1}$ distinctes.

La première condition est toujours remplie pour $k = 2$, mais pour $k > 2$ il n'en est plus ainsi. Ces conditions, d'ailleurs suffisantes, entraînent l'existence d'une intégrale quadratique du système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$, mais la réciproque n'est pas vraie.

Comment former explicitement ces conditions suffisantes? Un des moyens les plus simples consiste à se servir du théorème établi plus haut :

Pour que les systèmes $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *et* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right]$ *soient correspondants, il faut et il suffit qu'on puisse passer d'un système à l'autre en changeant* dt *en* $\lambda(q_1, \ldots, q_k)\, dt_1$.

En exprimant qu'il en est ainsi on forme très élégamment les conditions suffisantes cherchées, conditions où interviennent évidemment les expressions $a_{ij} = \frac{\partial \log \Delta}{\partial A_{ij}}$, et que j'étudieraidans un autre travail (¹).

J'ajoute seulement qu'il est facile de former des ds^2 qui possèdent des correspondants : si notamment on connaît *une transformation en elles-mêmes des géodésiques de* ds^2, cette transformation engendre un *correspondant* ds_1^2 de ds^2 qui est en même temps un de ses *homo-*

(¹) *Voir* à ce sujet la Note déjà citée de M. R. Liouville (*Comptes rendus*, mai 1892).

logues. C'est ainsi que les ds^2 de la forme $\sum_{i=1}^{i=k} dq_i^2$ admettent une infinité de correspondants ds_1^2, qu'on en déduit à l'aide de la transformation homographique à k variables la plus générale.

Quand on a formé un tel ds^2, tout système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ admet des correspondants de la forme $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_i'\right]$. Observons qu'il existe des systèmes (A) possédant des correspondants non ordinaires, et qui n'admettent *aucune intégrale quadratique;* c'est le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ qui admet nécessairement une telle intégrale (en outre de celle des forces vives). On le voit sur les correspondants

$$(\mathrm{A}) \quad ds^2 = \varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + dq_3^2 \qquad (Q_1, Q_2, Q_3),$$

et

$$(\mathrm{A}_1) \quad ds^2 = \varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + C dq_3^2, \quad (Q_1, Q_2, CQ_3) \quad (C \neq 1),$$

où Q_1, Q_2, Q_3 sont pris arbitrairement, correspondants qui définissent non seulement les mêmes trajectoires, mais le même mouvement; car on a ici

$$\frac{dt_1}{dt} = 1.$$

Observons encore que, *si les forces* Q_i *dérivent d'un potentiel* U, *il n'en est pas de même en général des* Q_i', comme le montre le même exemple, où l'on fait $Q_i \equiv \frac{\partial U}{\partial q_i}$, U étant une fonction *quelconque* des q_i. Toutefois, cette dernière circonstance *peut* se présenter, ainsi qu'on le voit, en prenant pour U une fonction de la forme

$$U = \psi(q_1, q_2) + \chi(q_3).$$

Il convient de remarquer, sur ce dernier exemple, qu'un faisceau naturel de trajectoires $h = a$ de (A) ne coïncide *jamais* avec un faisceau naturel de trajectoires $h_1 = a_1$ de (A_1) (h et h_1 désignant les deux constantes des intégrales des forces vives); en effet, on aurait à la fois pour un tel faisceau,

$$\varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + \quad dq_3^2 - \quad [\psi + \chi]\, dt^2 = a\, dt^2,$$

et

$$\varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + C dq_3^2 - [\psi + C\chi]\, dt^2 = a_1\, dt^2,$$

et ces deux conditions devraient se confondre, ce qui est impossible, de quelque façon qu'on choisisse a et a_1. Nous démontrerons plus loin que c'est là un fait général.

10. Je terminerai cette étude des systèmes où les forces sont nulles en rapprochant le problème traité dans ce Chapitre d'un problème qui concerne le cas où les forces Q_i de (A) ne sont pas nulles, mais dérivent d'un potentiel U. On sait que les trajectoires de (A), pour chaque valeur de la constante $h = T - U$, coïncident avec les géodésiques de $ds'^2 = (U + h)\, ds^2$. On peut se poser la question suivante :

Quelle que soit la constante h, à quelles conditions le système $\left[(U + h)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *admet-il un correspondant* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right]$ *non ordinaire?*

Il est clair que cette question rentre dans celle qui a été traitée dans ce Chapitre, et que toutes les propriétés démontrées sur les ds^2 correspondants s'appliqueront ici au couple $(U + h)\, ds^2$ et ds_1^2, ds_1^2 dépendant de h. Notamment *le système* $\left[(U + h)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ *devra admettre une intégrale quadratique quel que soit h.* D'après un théorème que j'ai énoncé plus haut sans en donner la démonstration, il suit de là que le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ devra admettre aussi une intégrale quadratique.

Quelles relations existe-t-il entre ce problème et la recherche des correspondants du système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$? Tout d'abord, si, pour h choisi arbitrairement, les géodésiques de $ds'^2 \equiv (U + h)\, ds^2$ et de ds_1^2 coïncident, tout système $\left[(U + h)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$, en particulier le système

$$\left[(U + h)\frac{ds^2}{dt^2}, \frac{1}{U + h}\right]$$

admet des correspondants de la forme $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q_i'\right]$; le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ admet donc une infinité de correspondants *distincts* qui dépendent d'une constante arbitraire ([1]). *Dans un système* (A) *ou* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$, *l'expression* $ds'^2 \equiv (U+h)\,ds^2$ *ne saurait admettre, pour h quelconque, de* ds_1^2 *correspondant, sans que* (A) *lui-même admette une infinité de correspondants distincts; mais la réciproque n'est pas vraie;* c'est ainsi que le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$, où

$$ds^2 \equiv \varphi(q_1, q_2)[dq_1^2 + dq_2^2] + dq_3^2$$

et où U est une fonction *quelconque* des q_i, possède une infinité de correspondants sans que $ds'^2 \equiv (U+h)\,ds^2$ admette (pour aucune valeur de h) de ds^2 correspondant.

Mais peut-il arriver que *la recherche d'un correspondant du système* (A) *ou* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ *se confonde avec celle d'un correspondant (pour h quelconque) du système* $\left[(U+h)\frac{ds^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$? D'une façon précise, peut-il arriver qu'un correspondant $\left[\frac{ds_1'^2}{dt_1'^2}, Q_i = 0\right]$ du dernier système, où $ds_1'^2$ dépend de h, se rattache à un système $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$ de la même manière que $\left[\frac{ds'^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$ se rattache à (A)? Il faut pour cela et il suffit que $ds_1'^2$ soit de la forme $ds_1'^2 \equiv (U_1 + h_1)\,ds_1^2$, h_1 désignant une certaine fonction de h, U_1 et ds_1^2 n'en dépendant plus. Si l'on veut encore, il faut qu'il existe un correspondant $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right]$ de (A) tel que chaque faisceau $h = a$ de (A) coïncide avec un faisceau $h_1 = a_1$ de (A_1). Cette condition est remplie dans la transformation de M. Darboux, mais on a alors $ds_1'^2 = C\,ds'^2$. Dans le prochain Chapitre, je montrerai qu'elle n'est *jamais* remplie pour deux cor-

---

([1]) Quand, *pour une valeur déterminée de h*, il existe un correspondant ds_1^2 de $(U+h)ds^2$, le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, U\right]$ admet des correspondants (*non distincts*) de la forme $\left[C\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, cQ_i'\right]$, ds_1^2 ne dépendant plus d'une constante arbitraire.

respondants non ordinaires; autrement dit, que les faisceaux naturels ne se conservent jamais. *La recherche d'un correspondant de* $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, \mathrm{U}\right]$ *et celle d'un correspondant de* $\left[(\mathrm{U}+h)\frac{ds^2}{dt^2}, \mathrm{Q}_i = 0\right]$ *sont donc toujours deux problèmes distincts.*

CHAPITRE III.

Systèmes correspondants où toutes les forces ne sont pas nulles.

I. — Démonstration d'une propriété générale de ces systèmes.

1. Soient (A) et (A_1) deux systèmes correspondants : si les forces Q_i de (A) ne sont pas toutes nulles, les forces Q'_i de (A_1) ne sont pas toutes nulles. Ceci rappelé, supposons que (A) admette un correspondant (A_1) distinct de ses correspondants ordinaires [1]; nous allons montrer que (A) jouit alors de plusieurs propriétés dont une des plus importantes s'énonce ainsi : *Un au moins des systèmes* (A) *et* (A_1), *où l'on annule les forces, possède une intégrale quadratique.*

Pour démontrer cette proposition, j'aurai recours au lemme suivant :

Si les systèmes (A) *et* (A_1), *où les forces ne sont pas toutes nulles, sont correspondants, on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables de la forme*

$$dt^2 = d\sigma^2 + \mu(q_1, q_2, \ldots, q_k)\, dt_1^2,$$

où $d\sigma^2$ *représente une forme quadratique en* $dq_1, \ldots, dq_k$ *dont les coefficients dépendent de* $q_1, q_2, \ldots, q_k$.

[1] Les correspondants *ordinaires* de (A) sont, nous le savons, les systèmes $\left(\mathrm{C}\frac{ds^2}{dt_1^2}, c\mathrm{Q}_i\right)$, et $\left[(\alpha\mathrm{U}+\beta)\frac{ds^2}{dt_1^2}, \frac{\gamma\mathrm{U}+\delta}{\alpha\mathrm{U}+\beta}\right]$ (si les Q_i dérivent d'un potentiel U).

Tout d'abord, observons que, les Q_i n'étant pas tous nuls, la fonction $t(q_1)$ définie par (A) est déterminée le long de chaque trajectoire (à une constante d'addition près) par l'égalité

$$(1)\qquad \left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2 = \frac{q''_{(i)} + \Phi_1 q'_{(i)} - \Phi_i}{\beta_i - \beta_1 q'_{(2)}},$$

en posant $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\Delta}$, $q'_{(i)} = \frac{dq_i}{dq_1}$, $q''_{(i)} = \frac{d^2 q_i}{dq_1^2}$ (*voir* le Chapitre I, p. 29). Le long de la même trajectoire, on a, d'après (A_1),

$$(2)\qquad \left(\frac{dt_1}{dq_1}\right)^2 = \frac{q''_{(i)} + \Phi'_1 q'_{(i)} - \Phi'_i}{\beta'_i - \beta'_1 q'_{(i)}}.$$

Si l'on élimine $\frac{d^2 q_i}{dq_1^2}$ entre (1) et (2), on obtient une relation de la forme

$$\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = f(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) \qquad \left(q'_i = \frac{dq_i}{dt}\right).$$

Cette relation, d'ailleurs, est *unique;* car admettons qu'il existe une autre transformation

$$\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = f'(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)$$

qui permette de passer de (A_1) à (A); à des valeurs initiales *arbitraires* des q_i, q'_i correspond une trajectoire le long de laquelle $\left(\frac{dt_1}{dq_1}\right)^2$, $\left(\frac{dt}{dq_1}\right)^2$, par suite $\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2$ sont des fonctions bien déterminées de q_1; donc f et f' coïncident pour les valeurs initiales des q_i, q'_i, et, comme ces valeurs sont arbitraires, f et f' sont identiques.

Ceci posé, formons explicitement cette relation d'après (1) et (2) : il vient

$$(3)\qquad \left(\frac{dt_1}{dt^2}\right)^2 = \frac{-q_1'^2[q'_{(i)}(\Phi_1 - \Phi'_1) - (\Phi_i - \Phi'_i)] + (\beta_i - \beta_1 q'_{(i)})}{\beta'_i - \beta'_1 q'_{(i)}},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(4)\qquad \begin{cases} dt^2(\beta_i\, dq_1 - \beta_1\, dq_i) - dt_1^2(\beta'_i\, dq_1 - \beta'_1\, dq_i) \\ \quad = (\Pi_1 - \Pi'_1)\, dq_i - (\Pi_i - \Pi'_i)\, dq_1, \end{cases}$$

les Π, Π' désignant des formes quadratiques en dq_1, dq_2, ..., dq_k.

Comme la relation (3) est *unique*, elle doit rester la même quand on donne à l'indice i les valeurs successives 2, 3, ..., k. Or le numérateur du second membre est un polynome en q'_1, $q'_{(2)}$, ..., $q'_{(k)}$; le dénominateur ne renferme que $q'_{(i)}$. Pour que cette fonction ne change pas, quand on fait $i = 2, 3, \ldots, k$, il faut donc que son dénominateur $(\beta'_i - \beta'_1 q'_{(i)})$ divise son numérateur, et, par suite, divise séparément les deux parties,

$$[q'_{(i)}(\Phi_1 - \Phi'_1) - (\Phi_i - \Phi'_i)] \quad \text{et} \quad \beta_i - \beta_1 q'_{(i)}.$$

On a donc, en conséquence,

$$\frac{\beta'_1}{\beta_1} = \frac{\beta'_2}{\beta_2} = \ldots = \frac{\beta'_k}{\beta_k},$$

et, d'autre part, une fois effectuée la division par $(\beta_i - \beta_1 q'_{(i)})$, la relation (3) prend la forme

$$(5) \qquad \beta'_1\, dt_1^2 - \beta_1\, dt^2 = d\sigma^2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration suppose toutefois $k > 2$. Pour $k = 2$, voici comment on peut procéder : écrivons l'équation différentielle des trajectoires

$$(6) \qquad \frac{d}{dq_1}\log\chi + 2\Phi_1 = \frac{d}{dq_1}\log\psi - \frac{2\beta_1\chi}{\psi},$$

en posant

$$\psi = \beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}, \qquad \chi = q''_{(2)} + \Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2.$$

Les forces n'étant pas nulles, un au moins des coefficients β_1, β_2 est différent de zéro, et nous pouvons toujours admettre que c'est β_1; autrement on permuterait q_1 et q_2. Dans ces conditions, l'équation (6) peut s'écrire

$$q'''_{(2)} + \frac{d}{dq_1}(\Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2)$$
$$= \chi\left[-2\Phi_1 + \frac{d}{dq_1}\log\beta_1 + \frac{-3q''_{(2)} - \Phi_1 q'_{(2)} + \Phi_2 + \dfrac{d}{dq_1}\left(\dfrac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\dfrac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}}\right],$$

où encore

$$(7)\qquad q'''_{(2)} = \frac{-3q''^{2}_{(2)} - 4q''_{(2)}(\Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2) + V}{\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}} + W = S,$$

V et W représentant des polynomes, le premier en $q'_{(2)}$, le second en $q'_{(2)}$ et $q''_{(2)}$, dont les coefficients dépendent de q_1, q_2. La fraction qui figure dans le second membre de (7) est d'ailleurs irréductible; autrement dit $\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}\right)$ ne divise pas le numérateur, car il devrait pour cela diviser le coefficient de $q''^{2}_{(2)}$, qui est -3. Exprimons maintenant que l'équation (7) relative à (A_1), soit $q'''_{(2)} = S'$, coïncide avec la précédente ou que $S \equiv S'$. On trouve d'abord que β'_1 ne peut être nul, autrement S′ serait un polynome par rapport aux dérivées. De plus, S′ et S doivent devenir infinis pour la même valeur de $q'_{(2)}$, donc $\frac{\beta_2}{\beta_1} \equiv \frac{\beta'_2}{\beta'_1}$. Enfin, la différence

$$\frac{+4q''_{(2)}[(\Phi_1 - \Phi'_1)q'_{(2)} - (\Phi_2 - \Phi'_2)] - (V - V')}{\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}} - (W - W')$$

doit être identiquement nulle; la fraction qui figure dans cette différence se réduit donc à un polynome (par rapport aux dérivées), c'est-à-dire que son numérateur est divisible par son dénominateur $\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}$, ce qui exige que le binome $\left(\frac{\beta_2}{\beta_1} - q'_{(2)}\right)$ divise à la fois $(V - V')$ et l'expression $[(\Phi_1 - \Phi'_1)q'_{(2)} - (\Phi_2 - \Phi'_2)]$. On a donc bien, même pour $k = 2$,

$$\frac{\beta'_1}{\beta_1} \equiv \frac{\beta_2}{\beta'_2}, \qquad \text{et} \qquad \beta_1\, dt^2 - \beta'_1\, dt_1^2 = d\sigma^2.$$

2. Nous allons montrer maintenant que *l'expression*

$$\frac{\Delta}{\Delta_1}\,\frac{\beta'_i}{\beta_i}\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^{k+3}$$

est une intégrale première de (A).

Nous avons vu, en effet, dans le Chapitre II, que Δ est un multiplicateur du système (A),

$$(A) \qquad dt = \frac{dq_1}{q'_1} = \frac{dq_2}{q'_2} = \ldots;$$

autrement dit, quand on connaît $(2k-2)$ intégrales de (A) indépendantes de t, soit

$$\varphi_j(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k) = C_j \qquad [j = 1, 2, \ldots, (k-2)],$$

si l'on en tire $q_3, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ en fonction de q_1, q_2, l'expression

$$\frac{\Delta}{\delta} q'_1 (dq_2 - q'_{(2)} dq_1)$$

est une différentielle totale exacte; δ représente le déterminant fonctionnel $\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{(2k-2)})}{D(q_3, q_4, \ldots, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)}$.

Effectuons un premier changement de variables en posant $q'_1 = q'_1$, $q'_2 = q'_{(2)} q'_1, \ldots, q'_k = q'_{(k)} q'_1$. Les fonctions φ_j deviennent des fonctions ψ_j de $q_1, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)}$, et l'on a

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2k-2})}{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})} \times \frac{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}{D(q_3, q_4, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)} \\ &= \delta' \frac{D(q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}{D(q'_2, \ldots, q'_k)} = \frac{\delta'}{q_1'^{(k-1)}}.\end{aligned}$$

Faisons ensuite le changement de variable

$$q''_{(2)} + \Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2 = (\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}) \frac{1}{q_1'^2}.$$

Les fonctions ψ_j deviennent des fonctions ϖ_j de $q_1, q_2, \ldots, q_k, q''_{(2)}, q'_{(2)}, q'_{(3)}, \ldots, q'_{(k)}$; et l'on a

$$\begin{aligned}\delta' &= \frac{D(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{2k-2})}{D(q_3, \ldots, q_k, q''_{(2)}, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})} \times \frac{D(q_3, \ldots, q_k, q''_{(2)}, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})}{D(q_3, \ldots, q_k, q'_1, q'_{(2)}, \ldots, q'_{(k)})} \\ &= \delta'' \times \frac{\partial q''_{(2)}}{\partial q'_1} = -\frac{2\delta''(\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)})}{q_1'^3}.\end{aligned}$$

En définitive, il vient

$$-\frac{1}{2}\delta = \frac{\delta''(\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)})}{q_1'^{k+2}}.$$

L'expression

$$\frac{\Delta q_1'^{k+3}}{[\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}]},$$

où q'_1 est défini par l'égalité

$$q_1'^2 = \frac{\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}}{q''_{(2)} + \Phi_1 q'_{(2)} - \Phi_2}, \tag{8}$$

est donc un multiplicateur des équations différentielles** (α) **des trajectoires

$$dq_1 = \frac{dq_2}{q'_{(2)}} = \ldots = \frac{dq_k}{q'_{(k)}} = \frac{dq'_{(2)}}{q''_{(2)}} = \frac{dq''_{(2)}}{f_2} = \frac{dq'_{(3)}}{f_3} = \ldots = \frac{dq'_{(k)}}{f_k}. \tag{α}$$

Si (A) et (A_1) sont correspondants, les deux expressions

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{dq_1}{dt}\right)^{k+3}}{[\beta_2 - \beta_1 q'_{(2)}]} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta_1\left(\dfrac{dq_1}{dt_1}\right)^{k+3}}{[\beta'_2 - \beta'_1 q'_{(2)}]}$$

seront deux multiplicateurs des mêmes équations (α).

Comme on a, d'autre part,

$$\frac{\beta'_1}{\beta_1} \equiv \frac{\beta'_2}{\beta_2} \equiv \ldots \equiv \frac{\beta'_k}{\beta_k} \equiv \mu,$$

l'égalité

$$\frac{\Delta}{\Delta_1}\mu\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^{k+3} = \text{const.} \tag{9}$$

définira une intégrale première de (α); $\frac{dt_1}{dt}$ représente, dans (9), le rapport des quantités $\frac{dq_1}{dt}$ et $\frac{dq_1}{dt_1}$ exprimées en fonction de $q''_{(2)}$, $q'_{(2)}$, ..., $q'_{(k)}$ (et des q_i). *L'égalité* (9), *où le même rapport est exprimé en fonction des $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ (et des q_i) définira donc une intégrale première de* (A).

Or nous avons

$$\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \frac{\dfrac{d\sigma^2}{dt^2}}{\beta'_1} + \frac{\beta_1}{\beta'_1};$$

l'intégrale première (9) de (A) sera donc

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left(\frac{\frac{d\sigma^2}{dt^2}}{\beta'_1}+\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)\equiv\tau-\mathrm{V}=\text{const.},$$

τ désignant une forme quadratique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ (dont les coefficients dépendent des q_i), et V une simple fonction des q_i.

Les résultats que nous venons d'obtenir se résument ainsi :

Quand deux systèmes (A) *et* (A_1) (*où les forces ne sont pas nulles*) *sont correspondants, les coefficients* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ et $\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_k$ *sont nécessairement proportionnels, et l'on peut passer de* (A) *à* (A_1) *par une transformation unique de la forme*

$$\beta'_1\,dt_1^2-\beta_1\,dt^2=d\sigma^2;$$

l'égalité

$$(a)\qquad\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left(\frac{d\sigma^2}{\beta'_1}+\frac{\beta_1\,dt^2}{\beta'_1}\right)=\mathrm{C}\,dt^2$$

est une intégrale première de (A), *et l'égalité*

$$(a)'\qquad\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left(\frac{d\sigma^2}{\beta_1}+\frac{\beta'_1\,dt_1^2}{\beta_1}\right)=\mathrm{C}'\,dt_1^2$$

une intégrale première de (A_1).

Observons toutefois que le raisonnement précédent montre seulement que le premier membre de (a) reste constant pour tout mouvement de (A); il n'est donc pas impossible *a priori* que le premier membre se réduise à une constante absolue [auquel cas l'égalité (a) ne représente plus une intégrale première de (A)], mais il ne saurait se réduire à une simple fonction des q_i sans être une constante; autrement, les équations (A) admettraient une intégrale première indépendante des vitesses. Si donc le premier membre de (a) n'est pas une constante, c'est une intégrale du second degré de (A). Ces remarques faites, énumérons les différents cas qui sont susceptibles de se présenter.

5. Hypothèse I. — *Le premier membre de (a) est une constante absolue.*

Dans ce cas, la relation entre dt et dt_1 est de la forme

$$\frac{dt_1}{dt} = C_0\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta_1'}\right)^{\frac{1}{k+3}} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k),$$

C_0 étant un certain nombre. La correspondance est donc de l'espèce étudiée au Chapitre II, et toutes les propriétés démontrées dans la Section II de ce Chapitre s'appliquent; notamment, *les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 coïncident.*

Inversement, si le rapport $\frac{dt_1}{dt}$ est une fonction λ des q_i, le premier membre de (a) est une constante absolue, et λ a pour valeur

$$(b) \qquad C_0\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta_1'}\right)^{\frac{1}{k+3}}.$$

De plus, comme on a dans ce cas

$$d\sigma \equiv 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dt_1^2}{dt^2} = \frac{\beta_1}{\beta_1'},$$

la valeur de λ^2 doit coïncider avec $\frac{\beta_1}{\beta_1'}$; ce qui donne aussitôt

$$\frac{\beta_1}{\beta_1'} = C_0^{\frac{2(k+3)}{k+1}}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

et, par suite,

$$\frac{dt_1}{dt} = C_0^{\frac{k+3}{k+1}}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}}.$$

Ces égalités concordent bien avec celles qu'on a obtenues au Chapitre II (*voir* p. 49).

Nous avons montré en effet que, si l'on peut passer de (A) à (A$_1$) par le changement de variable $\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, on a nécessairement

$$(b') \qquad \frac{dt_1}{\Delta_1^{\frac{1}{k+1}}} = \frac{C\,dt}{\Delta^{\frac{1}{k+1}}} \qquad \text{et} \qquad \beta_i \Delta^{\frac{2}{k+1}} = C^2 \beta'_i \Delta_1^{\frac{2}{k+1}},$$

égalités qui ne diffèrent pas des précédentes, quand on fait $C_0 = C^{\frac{k+1}{k+3}}$.

Dans le cas que nous étudions, l'égalité (a) ne fournit pas d'intégrale de (A); mais nous savons déjà que *le système* (A) *où l'on annule les forces* Q_i *possède une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.*

Hypothèse II. — *L'intégrale quadratique définie par* (a) *se confond avec celle des forces vives.* (Ce cas ne peut se présenter que si les Q_i dérivent d'un potentiel U.)

Dans ce cas, la relation entre dt et dt_1 est de la forme

$$dt_1^2 = C_0^2 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} [ds^2 - (U+a)\,dt^2] = \lambda^2 [ds^2 - (U+a)\,dt^2].$$

Introduisons la transformation de M. Darboux, et substituons à (A) le système correspondant (A'),

$$(A') \qquad \frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial T'}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T'}{\partial q_i} = \frac{\partial U'}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt'} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où

$$T' \equiv \frac{(U+a)\,ds^2}{dt'^2} \equiv \frac{ds'^2}{dt'^2}, \qquad U' \equiv \frac{1}{U+a};$$

nous connaissons la relation entre dt et dt' (*voir* Chapitre I, Section IV, p. 36), à savoir

$$dt'^2 = (U+a)^2 [ds^2 - (U+a)\,dt^2].$$

Les systèmes (A') et (A_1) seront donc deux systèmes correspondants, *tels qu'on passe de l'un à l'autre par le changement de variables*

$$\frac{dt_1^2}{dt'^2} = \frac{\lambda^2}{(U+a)^2} = \mu^2(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Nous sommes ramené ainsi à la correspondance étudiée dans le Chapitre II; *les géodésiques de ds'^2 et de ds^2 coïncident.* Nous savons de plus que

$$\mu \equiv C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta'}\right)^{\frac{1}{1+k}} \equiv C\left[\frac{\Delta_1}{\Delta(U+a)^k}\right]^{\frac{1}{1+k}},$$

d'où une valeur plus simple de λ,

$$\lambda \equiv \mu(U+a) \equiv C\left[\frac{\Delta_1(U+a)}{\Delta}\right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

On voit de même que $\dfrac{-\beta_i\Delta^{\frac{2}{k+1}}}{(U+a)^{1+\frac{2}{k+1}}}$ est égal à $C^2\beta'_i\Delta_1^{\frac{2}{k+1}}$, ce qui s'écrit encore

$$\frac{\beta_i}{\beta'_i} = -C^2\left[\frac{\Delta_1^2(U+a)^{k+3}}{\Delta^2}\right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

La première valeur de λ coïncide avec la seconde pour $C_0 = C^{\frac{k+1}{k+3}}$.

Nous avons admis que (A_1) n'était pas un correspondant *ordinaire* de (A); dans ces conditions, ds'^2 ne se confond pas avec $C\,ds_1^2$ (C étant un nombre); autrement, on aurait aussi $U' = cU_1$, c'est-à-dire à la fois

$$ds_1^2 = \frac{U+a}{C}\,ds^2, \qquad U_1 = \frac{1}{c(U+a)},$$

et (A_1) se déduirait de (A) par une transformation de M. Darboux.

Les systèmes $\left[(U+a)\dfrac{ds^2}{dt'^2},\ Q_i = 0\right]$ *et* $\left[\dfrac{ds_1^2}{dt_1^2},\ Q'_i = 0\right]$ *admettent donc respectivement une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.*

Hypothèse III. — *L'intégrale quadratique* (a) *est distincte de celle des forces vives.*

Cette hypothèse (la plus générale) est toujours réalisée quand, *les forces* Q_i *ne dérivant pas d'un potentiel,* le premier membre de (a) ne se réduit pas à une constante.

Soit

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 \equiv \tau - V = \text{const.}$$

cette intégrale. D'après un théorème bien connu, $\tau =$ const. est une intégrale du mouvement sans forces. On ne saurait donc avoir ici $\tau \equiv \mu(q_1, q_2, \ldots, q_k)\mathrm{T}$, car $\mu =$ const. serait une intégrale des géodésiques de T. D'ailleurs on n'a pas $\tau \equiv \mathrm{CT}$, sinon l'intégrale (a) serait celle des forces vives (¹). Le seul cas où, dans l'égalité

$$dt_1^2 = \frac{d\sigma^2}{\beta_1'} - \frac{\beta_1}{\beta_1'}\,dt^2,$$

$d\sigma^2$ est égal à $\mu\,ds^2$, correspond ainsi à l'hypothèse II, où

$$dt_1^2 = \lambda^2[ds^2 - (\mathrm{U}+a)dt^2], \qquad \text{avec} \qquad \lambda \equiv \mathrm{C}\left[\frac{\Delta_1(\mathrm{U}+a)}{\Delta}\right]^{\frac{1}{k+1}}.$$

Pour la même raison, *le seul cas où $d\sigma^2$ soit égal à*

$$\mu_1(q_1, q_2, \ldots, q_k)\,ds_1^2$$

est celui où, les Q_i' dérivant d'un potentiel U_1, on a

$$dt^2 = \lambda_1^2[ds_1^2 - (\mathrm{U}_1 + a_1)dt_1^2], \qquad \lambda_1 = \mathrm{C}'\left[\frac{\Delta(\mathrm{U}_1+a_1)}{\Delta_1}\right]^{\frac{1}{k+1}},$$

c'est-à-dire

$$dt_1^2 = \frac{1}{(\mathrm{U}_1+a_1)}\left[ds_1^2 - \frac{dt^2}{\lambda_1^2}\right].$$

Dans ce dernier cas, en substituant au système (A_1) le système (A_1'),

$$(\mathrm{A}_1') \qquad \frac{d}{dt_1'}\left(\frac{\partial \mathrm{T}_1'}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}_1'}{\partial q_i} = \frac{\partial \mathrm{U}_1'}{\partial q_i}, \qquad q_i' = \frac{dq_i}{dt_1'},$$

où

$$\mathrm{T}_1' = \frac{(\mathrm{U}_1+a_1)\,ds_1^2}{dt_1'^2} = \frac{ds_1'^2}{dt_1'^2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U}_1' = \frac{1}{\mathrm{U}_1+a_1},$$

on rentre dans l'hypothèse I; on passe de (A) à (A_1') par la transformation

$$\frac{dt^2}{dt_1'^2} = \frac{\lambda_1^2}{(\mathrm{U}_1+a_1)^2}.$$

(¹) On aurait en effet : $\sum \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial q_i}\,dq_i \equiv \mathrm{C}\sum \mathrm{Q}_i\,dq_i$; les Q_i admettraient donc le potentiel $\mathrm{U} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}$, et l'intégrale (a) s'écrirait $\mathrm{C}(\mathrm{T}-\mathrm{U}) =$ const.

Signalons enfin, comme dernier cas particulier, celui où, *les forces* Q_i *et* Q'_i *dérivant respectivement des potentiels* U *et* U_1, *la relation entre* dt *et* dt_1 *est de la forme*

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2(q_1, q_2, \dots, q_k)\left[dt^2 - \frac{ds^2}{U + a}\right].$$

En substituant à (A) le système $\left[T', \frac{1}{U+a}\right]$, où $T' = \frac{(U+a)\,ds^2}{dt'^2}$, et à (A_1) le système $\left[T'_1, \frac{1}{U_1 + a_1}\right]$, où $T'_1 \equiv (U_1 + a_1)\frac{ds_1^2}{dt_1'^2}$, *on rentre dans la première hypothèse;* les géodésiques de T' et de T'_1 coïncident, et les deux nouveaux systèmes se transforment l'un dans l'autre par le changement de variable $\frac{dt'_1}{dt'} = \left[\frac{\Delta_1(U_1 + a_1)^k}{\Delta(U + a)^k}\right]^{\frac{1}{k+1}}$. Quant à la fonction μ, elle est nécessairement de la forme

$$\mu \equiv C_0\left(\frac{U + a}{U_1 + a_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{1}{k+3}} \equiv C\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}}\left(\frac{U + a}{U_1 + a_1}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{k+1}\right)},$$

et l'on a de plus

$$\frac{\beta_i \Delta^{\frac{2}{k+1}}}{(U + a)^{1 + \frac{2}{k+1}}} = \frac{C^2 \beta'_i \Delta^{\frac{2}{k+1}}}{(U_1 + a_1)^{1 + \frac{2}{k+1}}} \qquad (i = 1, 2, \dots, k);$$

le nombre C_0 est égal à $C^{\frac{k+1}{k+3}}$.

4. Il convient de compléter ces remarques par quelques *réciproques*. Dans l'hypothèse II, le système (A) possède une fonction de forces U, et les *géodésiques* de ds_1^2 coïncident avec un *faisceau naturel* $h = a$ de (A). Inversement, si les Q_i dérivent d'un potentiel U, et si le *faisceau naturel* $h = a$ de (A) coïncide avec les *géodésiques* de ds_1^2, on se trouve nécessairement dans l'hypothèse II; en effet, le système (A_1) et le système (A'), où $T' \equiv \frac{(U + a)\,ds^2}{dt'^2}$, $U' = \frac{1}{U + a}$, sont deux correspondants dont les géodésiques coïncident; on passe donc de l'un à l'autre par une transformation telle que $\frac{dt_1}{dt'} = \lambda(q_1, \dots, q_k)$ et comme, d'autre part, $dt'^2 = (U + a)^2[ds^2 - (U + a)\,dt^2]$, la rela-

tion entre dt^2 et dt_1^2 est bien de la forme

$$dt_1^2 = \mu^2\, ds^2 + \nu\, dt^2,$$

ce qui n'a lieu que dans l'hypothèse II.

La même observation s'appliquerait au cas où, les forces Q′ dérivant d'un potentiel U_1, les géodésiques de ds^2 coïncideraient avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1). Il suffit, en effet, de permuter (A) et (A_1) pour rentrer dans le cas précédent. Passons enfin au dernier cas particulier que j'ai signalé dans l'hypothèse III. Dans ce cas, (A) et (A_1) possèdent respectivement une fonction de forces U et U_1, et un faisceau naturel $h = a$ de (A) coïncide avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1). Inversement, si cette condition est remplie, les systèmes $\left[\frac{(U+a)\,ds^2}{dt'^2}; \frac{1}{U+a}\right]$ et $\left[\frac{(U_1+a_1)\,ds^2}{dt'^2_1}, \frac{1}{U_1+a_1}\right]$ sont deux correspondants dont les géodésiques coïncident; on a donc entre dt' et dt'_1 une relation telle que $dt'_1 = \lambda(q_1, \ldots, q_k)\,dt'$, et, par suite, entre dt_1 et dt une relation telle que

$$\left(dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1+a_1}\right) = \mu^2\left(dt^2 - \frac{ds^2}{U+a}\right);$$

c'est bien la relation qui caractérise le cas particulier dont il s'agit.

5. Avant de résumer les résultats que nous venons d'obtenir, je tirerai encore quelques conséquences de la forme de la relation qui existe entre dt et dt_1. J'écris cette relation ainsi :

$$(m) \qquad \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = \lambda^2\left(\frac{d\sigma^2}{dt^2} - V\right), \qquad \lambda = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\,\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{1}{k+3}},$$

l'égalité

$$(n) \qquad \frac{d\sigma^2}{dt^2} - V = c$$

définissant une intégrale première de (A). *A toute intégrale première de* (A_1), *soit*

$$f\left(q_1, q_2, \ldots, q_k, \frac{dq_1}{dt_1}, \frac{dq_2}{dt_1}, \ldots, \frac{dq_k}{dt_1}\right) = C,$$

correspond une intégrale première de (A) qu'on calcule en remplaçant dt_1 en fonction de dt dans f, d'après la formule (m). Mais ce qui est remarquable, c'est qu'*à toute intégrale algébrique et entière de* (A_1) *correspond une intégrale de* (A), *algébrique*, *entière et de même degré*. La chose est évidente dans le cas où les géodésiques de T et de T_1 coïncident, c'est-à-dire où $\frac{dt_1}{dt}$ se réduit à une simple fonction des q_i. Il suffit donc de la démontrer dans le cas général.

Désignons par ds_n^n une forme homogène de degré n en $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k$; l'intégrale considérée de (A) sera de la forme

$$ds_n^n + dt_1^2\, ds_{n-2}^{n-2} + \ldots + dt_1^n s_0 = C\, dt_1^n \qquad (\text{si } n \text{ est pair}),$$

et de la forme

$$ds_n^n + dt_1^2\, ds_{n-2}^{n-2} + \ldots + dt_1^{n-1}\, ds_1 = C\, dt_1^n \qquad (\text{si } n \text{ est impair}).$$

Remplaçons dans le premier membre les puissances de dt_1^2 par les puissances de $\lambda^2(d\sigma^2 - V\, dt^2)$, et dans le second membre dt_1^n par $dt^n \lambda^n c^{\frac{n}{2}}$; on obtient ainsi une intégrale de (A) entière et de degré n.

La même remarque et la même démonstration s'appliquent aux intégrales *rationnelles*.

Si, notamment, (A_1) possède une intégrale linéaire, soit

$$\Sigma a_i\, dq_i = C\, dt_1,$$

(A) admet l'intégrale

$$\frac{1}{\lambda} \sum a_i\, dq_i = C'\, dt \text{ (}^1\text{)}.$$

Si (A_1) possède une intégrale quadratique, soit $dS^2 - W\, dt_1^2 = C\, dt_1^2$, (A) admet l'intégrale

$$\frac{dS^2}{\lambda^2} - W\, d\sigma^2 + WV\, dt^2 = C'\, dt^2.$$

---

(1) Comme toute intégrale linéaire définit une transformation infinitésimale du système (A), deux systèmes (A) et (A_1) correspondants (en particulier deux ds^2 correspondants) admettent le même nombre de transformations infinitésimales.

Appliquons cette dernière remarque au cas *où les forces d'un des systèmes correspondants* (A) *et* (A_1) *dérivent d'un potentiel :* soit, par exemple, U_1 la fonction des forces Q'_i. En premier lieu, *si les géodésiques de* T *et de* T_1 *coïncident,* (A) admet l'intégrale quadratique

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{\frac{2}{1+k}}(ds_1^2 - U_1\, dt^2) = h'_1\, dt^2.$$

Si les Q_i admettent aussi un potentiel, (A) et (A_1) admettent chacun une intégrale quadratique autre que celle des forces vives.

Dans le cas général, l'intégrale des forces vives de (A_1) donne pour (A) l'intégrale

$$(p) \qquad \frac{ds_1^2}{\lambda^2} - U_1\, d\sigma^2 + U_1 V\, dt^2 = h'_1\, dt^2.$$

Il importe de reconnaître si cette intégrale est distincte de l'intégrale quadratique (a) et de celle des forces vives de (A) (quand cette dernière existe). Pour discuter ce point, plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où les Q_i ne dérivent pas d'un potentiel. *Pour que l'intégrale* (p) *se confonde avec l'intégrale* (a), *il faut et il suffit qu'on ait*

$$\frac{ds_1^2}{\lambda^2} - U_1(d\sigma^2 - V\, dt^2) \equiv a_1(d\sigma^2 - V\, dt^2) - b_1\, dt^2$$

(a_1 et b_1 étant deux certaines constantes), ou bien, d'après (m),

$$ds_1^2 - dt_1^2(U_1 + a_1) + b_1 \lambda^2\, dt^2 = 0,$$

égalité de la forme

$$dt_1^2 = \frac{ds_1^2}{U_1 + a} + \mu\, dt^2,$$

qui caractérise l'hypothèse II, où des géodésiques de ds^2 coïncident avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1).

Supposons maintenant que (A) possède une fonction de forces U ; *à quelles conditions l'intégrale* (p) *se réduit-elle à une combinaison de l'intégrale* (a) *et de celle des forces vives?* Il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{ds_1^2}{\lambda^2} - U_1(d\sigma^2 - V\, dt^2) \equiv a_1(d\sigma^2 - V\, dt^2) + b_1(ds^2 - U\, dt^2) + c_1\, dt^2$$

(a_1, b_1, c_1 étant certains nombres), c'est-à-dire encore

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = -\frac{\lambda^2 b_1}{U_1 + a_1}\left[ds^2 - \left(U - \frac{c_1}{b_1}\right)dt^2\right],$$

égalité de la forme

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2\left[dt^2 - \frac{ds^2}{U + a}\right],$$

qui caractérise le cas particulier où un faisceau naturel $h = a$ de (A) et un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1) coïncident.

En dehors de ces deux cas, l'intégrale (p) sera distincte de l'intégrale (a) et de celle des forces vives.

6. Nous sommes en état maintenant d'énoncer les conclusions suivantes :

Quand deux systèmes (A) *et* (A_1), *où les forces ne sont pas toutes nulles, se correspondent* (¹), *on peut toujours passer de l'un à l'autre par une transformation unique de la forme*

$$\frac{dt_1^2}{dt^2} = \lambda^2(q_1, \ldots, q_k)\left(\frac{d\sigma^2}{dt^2} - V\right),$$

où la parenthèse définit une intégrale quadratique de (A) *à moins qu'elle ne se réduise à une constante.* Mais plusieurs cas sont à distinguer :

1° *Les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 coïncident; c'est le cas où $dt_1 = \lambda(q_1, \ldots, q_k)\,dt$.* Les équations (A') et (A'_1), déduites de (A) et de (A_1) *en annulant les forces,* admettent une intégrale quadratique, sans qu'il en soit de même nécessairement de (A) et de (A_1). Quand les forces d'un des systèmes, soit (A_1), dérivent d'un potentiel, (A) admet une intégrale quadratique. Quand il existe une fonction de forces dans les deux systèmes, chacun d'eux admet, en outre de l'intégrale des forces vives, une seconde intégrale quadratique.

2° *Un au moins des deux systèmes, soit* A_1, *admet un potentiel, et un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1) coïncide avec les géodé-*

(¹) Il est clair que, (A) et (A_1) jouant un rôle symétrique, on peut permuter dans ces énoncés (A) et (A_1).

siques de ds^2. — On rentre dans le premier cas en substituant à (A_1), à l'aide de la transformation de M. Darboux, le système

$$\left[(U_1 + a_1)\frac{ds_1^2}{dt_1'^2}, \frac{1}{U_1 + a_1}\right].$$

Le système (A) *admet une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives;* le système

$$\left[(U_1 + a_1)\frac{ds_1^2}{dt_1'^2}, Q_i = 0\right]$$

admet aussi une intégrale quadratique. Enfin, *si* (A) *possède un potentiel,* (A_1) *admet lui-même une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.*

3° *Les forces de* (A) *et de* (A_1) *dérivent des potentiels* U *et* U_1, *et deux faisceaux naturels* $h = a$, $h_1 = a_1$ *de* (A) et de (A_1) *coïncident.* On rentre dans le premier cas à l'aide d'une double transformation de M. Darboux. *Les deux systèmes* (A) et (A_1) *possèdent, avec celle des forces vives, une seconde intégrale quadratique.*

4° (*Cas général*). *Aucune des hypothèses particulières qui précèdent n'est vérifiée. Les deux systèmes* (A) *et* (A_1) *ont une intégrale quadratique distincte de celle des forces vives.* Si les forces de (A_1) dérivent d'un potentiel, (A) admet *deux* intégrales quadratiques distinctes; *s'il existe aussi une fonction de forces pour* (A), *les deux systèmes admettent respectivement* trois *intégrales quadratiques distinctes, en y comprenant celles des forces vives.*

Les trois premiers cas se ramènent en définitive au cas où il y a correspondance avec conservation des géodésiques. A ces trois cas s'appliquent donc tous les résultats obtenus dans le Chapitre II. Le quatrième cas au contraire est tout à fait distinct de celui qui a été traité au Chapitre II.

II. — Corollaires des théorèmes précédents.

7. Je vais compléter les résultats précédents par quelques remarques importantes.

Nous avons dit que si un des systèmes correspondants (A) et (A_1) admet une fonction de forces, il n'en est pas de même en général du second. Mais plaçons-nous dans l'hypothèse où U et U_1 existent simultanément.

Nous savons (*voir* Chapitre I, p. 36) que, dans la transformation de M. Darboux, chaque faisceau naturel $h = a$ de (A) (notamment le faisceau des géodésiques $h = \infty$) coïncide avec un faisceau naturel $h_1 = a_1$ de (A_1). Cette transformation, comme nous l'allons voir, *est la seule qui jouisse de cette propriété;* autrement dit, *si* (A_1) *n'est pas un correspondant ordinaire de* (A), *un faisceau naturel quelconque* $h = a$ *de* (A) *ne coïncide pas avec un faisceau naturel de* (A_1), mais bien avec un faisceau obtenu en prenant dans chaque faisceau $h_1 = a_1$ un faisceau à $(2k-3)$ paramètres. On peut même aller plus loin, et montrer qu'*il n'existe pas en général de faisceau naturel* $h = a$ *de* (A) *qui coïncide avec un faisceau naturel de* (A_1) *et qu'il n'en existe jamais plus d'un.*

Tout d'abord, si un tel faisceau $h = a$ existe, on se trouve nécessairement dans un des trois premiers cas énumérés plus haut, et l'on peut toujours, en se servant de la transformation de M. Darboux, se placer dans le premier cas, celui où les deux faisceaux naturels qui coïncident sont les faisceaux des géodésiques, $h = \infty$, $h_1 = \infty$. Je dis qu'il ne saurait exister un second faisceau $h = a$ qui se confonde avec un faisceau $h_1 = a_1$, à moins que (A_1) ne soit un correspondant ordinaire de (A).

S'il en était ainsi, en effet, on devrait avoir en même temps

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k)$$

et

$$dt_1^2 - \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2\left(dt^2 - \frac{ds^2}{U+a}\right),$$

égalités qui, pour être compatibles, exigent les conditions

$$\lambda^2 \equiv \mu^2, \qquad \frac{ds_1^2}{U_1 + a_1} = \mu^2\,\frac{ds^2}{U+a}.$$

Mais nous avons vu que, si deux ds^2 correspondants sont de la forme ds^2 et $\mu'^2\, ds^2$, μ' est nécessairement une constante, et les deux systèmes correspondants sont deux correspondants ordinaires. La proposition est donc démontrée.

En définitive, *dans les trois premiers cas du* n° **6**, *il existe un faisceau naturel $h = a$ de* (A) *et* un seul *qui est aussi un faisceau naturel de* (A_1); *dans le cas général, il n'en existe pas* (1).

D'après cela, revenons sur le problème qui consiste à reconnaître si, pour chaque valeur de h, $ds'^2 \equiv (U + h)\, ds^2$ admet un correspondant (non semblable)

$$ds_1'^2 \equiv \Sigma A'_{ij}(q_1, q_2, \ldots, q_k, h)\, dq_i\, dq_j.$$

Est-il possible que le système $\left(\frac{ds_1'^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right)$ se rattache à un système (A_1) indépendant de h, de la même manière que le système $\left(\frac{ds'^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right)$ se rattache à (A)? Autrement dit, $ds_1'^2$ peut-il être de la forme $(U_1 + h_1)\, ds_1^2$, h_1 étant une certaine fonction de h, et U_1, ds_1^2 n'en dépendant pas? Cela n'a jamais lieu; car, autrement, les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, U_1\right)$ seraient deux correspondants non ordinaires, et *tout* faisceau naturel de l'un serait faisceau naturel de l'*autre*. La recherche des $ds_1'^2$ est donc tout à fait distincte de celle des correspondants de (A).

8. Nous nous sommes appuyés, dans ce Chapitre, sur quelques propositions obtenues antérieurement et notamment sur celle-ci :

Pour que deux systèmes (A) *et* (A_1) *soient correspondants avec conservation des géodésiques, il faut et il suffit qu'on puisse passer*

---

(1) J'insiste sur ce point, qui a son importance dans la théorie des groupes de transformations des trajectoires, et qui a donné lieu à une discussion entre M. Liouville et moi. M. Liouville pensait avoir démontré que, *pour* $k > 2$, *chaque* faisceau naturel de (A) est *toujours* un faisceau naturel de (A_1) (voir les *Comptes rendus*, 31 octobre 1892). En réalité, les considérations précédentes montrent qu'il n'en est *jamais* ainsi.

de (A) *à* (A_1) *à l'aide de la transformation*

$$\frac{dt_1}{dt} = \lambda(q_1, q_2, \ldots, q_k).$$

Il est bien facile de démontrer cette proposition en se servant de la relation qui existe, dans tous les cas, entre dt et dt_1 quand (A) et (A_1) sont deux correspondants où les forces ne sont pas nulles. Cette relation peut s'écrire

$$\frac{dt_1^2}{dq_1^2} - M\frac{dt^2}{dq_1^2} = \frac{d\sigma'^2}{dq_1^2}.$$

Nous savons que les géodésiques de ds^2 sont un faisceau de trajectoires de (A) à $(2k-2)$ paramètres qui satisfont à la condition $\frac{dt}{dq_1} = 0 \left(\text{ou } \frac{d^2q_2}{dq_1^2} + \Phi_1\frac{dq_2}{dq_1} - \Phi_2 = 0\right)$; pour que les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 coïncident, il faut donc et il suffit que les conditions $\frac{dt_1}{dq_1} = 0$ et $\frac{dt}{dq_1} = 0$ soient équivalentes; comme on a, pour $\frac{dt}{dq_1} = 0$,

$$\frac{dt_1^2}{dq_1^2} - \frac{d\sigma'^2}{dq_1^2} = 0,$$

il faut et il suffit que $\frac{d\sigma'^2}{dq_1^2}$ soit identiquement nul, et, par suite, que $\left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2 = M(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Nous savons alors (*voir* le n° **5** de ce Chapitre, p. 66) que $M \equiv C_0^2\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{2}{k+1}}$. C. Q. F. D.

Ceci nous permet de retrouver le théorème démontré dans le premier Chapitre et auquel nous avons eu souvent recours : *Si les systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *et* $\left(C\frac{ds^2}{dt_1^2}, Q_i'\right)$ *sont correspondants, on a nécessairement* $Q_1' = cQ_1, \ldots, Q_k' = cQ_k$. En effet, les géodésiques de ds^2 et de $C\,ds^2$ coïncidant, on a

$$\frac{dt_1}{dt} = C_0\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\right)^{\frac{1}{k+1}} = C_0 C^{\frac{k}{k+1}},$$

et d'autre part

$$\beta_i\Delta^{\frac{2}{k+1}} = C_0^2\beta_i'\Delta_1^{\frac{2}{k+1}},$$

donc

$$\beta_i = \beta'_i C_0^2 C^{\frac{2k}{k+1}},$$

et comme

$$\beta_i = \sum_j a_{ij} Q_j \qquad \text{et} \qquad \beta'_i = \frac{1}{C} \sum_j a_{ij} Q'_j,$$

on trouve

$$Q'_i = \frac{1}{C_0^2 C^{\frac{k-1}{k+1}}} Q_i, \qquad Q'_i = c Q_i,$$

et, si l'on remplace dans $\frac{dt_1}{dt}$, C_0 en fonction de C et c,

$$\frac{dt_1}{dt} = \sqrt{\frac{C}{c}}.$$

Ce sont bien les résultats déjà obtenus.

9. Nous avons également démontré dans le Chapitre II que *deux systèmes* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *ne peuvent être correspondants pour deux systèmes distincts de forces associées, soit* Q_i *et* Q'_i *d'une part,* (Q_i) *et* (Q'_i) *d'autre part, sans que les géodésiques de* ds^2 *et de* ds_1^2 *coïncident* (au moins, quand k dépasse 2).

Voici une nouvelle démonstration de ce théorème qui nous fournit en même temps des résultats pour $k = 2$.

Admettons que les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 ne coïncident pas; nous avons, d'après les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$, la relation (*voir* p. 60)

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & dt^2(\beta_i dq_1 - \beta_1 dq_i) - dt_1^2(\beta'_i dq_1 - \beta'_1 dq_i) \\ & \quad = (\Pi_1 - \Pi'_1) dq_i - (\Pi_i - \Pi'_i) dq_1, \qquad \equiv S_i, \end{aligned} \right.$$

les Π étant des formes quadratiques en $dq_1, dq_2, \ldots, dq_k$, qui ne dépendent que de ds^2 et de ds_1^2. Nous savons d'ailleurs qu'on a nécessairement

$$\frac{\beta_i}{\beta'_i} = \frac{\beta_1}{\beta'_1},$$

que, de plus, le second membre S_i de (1) est divisible par

$$(\beta_i dq_1 - \beta_1 dq_i),$$

et que le quotient, soit $d\sigma^2$, est le même quel que soit i. On a de même d'après $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, (Q_i)\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, (Q'_i)\right]$,

$$\begin{aligned} dt^2(\gamma_i dq_1 - \gamma_1 dq_i) - dt_1^2(\gamma'_i dq_1 - \gamma'_1 dq_i) \\ = (\Pi_1 - \Pi'_1) dq_i - (\Pi_i - \Pi'_i) dq_1, \end{aligned}$$

et des remarques analogues s'appliquent à cette égalité.

Ceci rappelé, je dis que, *si k dépasse* 2, on a nécessairement

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_i}{\gamma_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Soit, en effet, $\frac{\beta_1}{\gamma_1} \neq \frac{\beta_2}{\gamma_2}$; un de ces rapports au moins sera différent de $\frac{\beta_3}{\gamma_3}$, soit $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$; le binome $(\gamma_2 dq_1 - \gamma_1 dq_2)$, divisant S_2 [le second membre de (1) pour $i = 2$] et étant premier avec $(\beta_2 dq_1 - \beta_1 dq_2)$, doit diviser $d\sigma^2$; pour la même raison, $(\gamma_3 dq_1 - \gamma_1 dq_3)$ divise aussi $d\sigma^2$; on devrait donc avoir

$$\begin{aligned} S_2 = {} & M(q_1, \ldots, q_k) \\ & \times (\beta_2 dq_1 - \beta_1 dq_2)(\gamma_2 dq_1 - \gamma_1 dq_2)(\gamma_3 dq_1 - \gamma_1 dq_3), \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} S_2 = {} & N(q_1, \ldots, q_k) \\ & \times (\gamma_2 dq - \gamma_1 dq_2)(\beta_2 dq_1 - \beta_1 dq_2)(\beta_3 dq_1 - \beta_1 dq_3). \end{aligned}$$

Cette double égalité n'est possible que si $\frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{\gamma_3}{\gamma_1}$, ce qui est contre l'hypothèse. On a donc bien

$$\frac{\beta_1}{\gamma_1} \equiv \frac{\beta_2}{\gamma_2} \equiv \ldots \equiv \frac{\beta_k}{\gamma_k}.$$

D'autre part, l'expression

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1} \frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \left(\frac{dt_1}{dt}\right)^2$$

étant une intégrale première de (A), l'expression

$$\left(\frac{\Delta\,\beta'_1}{\Delta_1\,\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \frac{S_2}{\beta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\,dq_1 - dq_2\right)} \equiv \left(\frac{\Delta\,\beta'_1}{\Delta_1\,\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \frac{d\sigma'^2}{\beta_1}$$

est une intégrale du système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$; il en est de même de l'expression

$$\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\,\frac{\gamma'_1}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \frac{d\sigma'^2}{\gamma_1};$$

ceci n'est possible que si l'on a

$$\frac{1}{\beta_1}\left(\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \equiv \frac{C}{\gamma_1}\left(\frac{\gamma'_1}{\gamma_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}.$$

En permutant les systèmes (A) et (A_1), on trouverait de même

$$\frac{1}{\beta'_1}\left(\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}} \equiv \frac{C'}{\gamma'_1}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}},$$

et de ces deux égalités on tire

$$\gamma_1 = c\beta_1, \qquad \gamma'_1 = c'\beta'_1.$$

Comme enfin

$$\beta_i = \sum_i a_{ij} Q_j \qquad \text{et} \qquad \gamma_i = \sum_i a_{ij}(Q_j),$$

on a en définitive

$$\frac{(Q_1)}{Q_1} = \frac{(Q_2)}{Q_2} = \ldots = \frac{(Q_k)}{Q_k} = c, \qquad \frac{(Q'_1)}{Q'_1} = \frac{(Q'_2)}{Q'_2} = \ldots = \frac{(Q'_k)}{Q'_k} = c';$$

les systèmes de forces (Q_i) et (Q'_i) ne sont pas *distincts* des systèmes Q_i et Q'_i. C. Q. F. D.

La dernière partie de la démonstration subsiste si $k = 2$; par suite, quand $\frac{\beta_1}{\gamma_1} = \frac{\beta_2}{\gamma_2}$, la valeur commune de ces deux rapports est nécessairement une constante; mais on ne peut plus établir, comme précédemment, que ces rapports sont identiques. Le raisonnement employé fait voir seulement que

$$S_2 \equiv M(E\,dq_1 + F\,dq_2)(\beta_2\,dq_1 - \beta_1\,dq_2)(\gamma_2\,dq_1 - \gamma_1\,dq_2);$$

le système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ *admet donc nécessairement deux intégrales quadratiques* distinctes, *en outre de celle des forces vives,* à savoir deux intégrales de la forme

$$\lambda(E\,dq_1 + F\,dq_2)(\gamma_1\,dq_2 - \gamma_2\,dq_1) = C\,dt^2,$$

et

$$\mu(E\,dq_1 + F\,dq_2)(\beta_1\,dq_2 - \beta_2\,dq_1) = C'\,dt^2;$$

de même le système $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right)$ admet deux intégrales de même forme. Il suit de là que les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ ne peuvent se correspondre pour plus de *trois* systèmes de forces distinctes. Si trois tels systèmes existent, soit Q_i et Q'_i, (Q_i) et (Q'_i), $[(Q_i)]$ et $[(Q'_i)]$, les systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ et $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i = 0\right)$ admettent respectivement trois intégrales linéaires distinctes, *et par suite ds^2 et ds_1^2 sont les ds^2 d'une surface à courbure constante.* J'arrête ici cette discussion du cas particulier de deux paramètres, dont l'étude ne présente plus dès lors de difficulté et sera développée complètement dans un autre Mémoire.

10. Comme dernier corollaire du théorème général, démontrons enfin cette proposition importante :

Soit deux correspondants non ordinaires $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ *et* $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right]$; *il est impossible que la condition* $ds_1^2 \equiv \mu(q_1, \ldots, q_k)\,ds^2$ *soit remplie.*

Tout d'abord, observons que cette condition est réalisée pour les correspondants ordinaires; car on a alors soit $ds_1^2 \equiv C\,ds^2$, soit $ds_1^2 = C(U + h)\,ds^2$, U désignant le potentiel des Q_i. Le théorème exprime que ces correspondants sont les seuls qui jouissent de cette propriété.

La chose est évidente si les géodésiques coïncident, ainsi que nous l'avons déjà remarqué; car $\mu(q_1, q_2, \ldots, q_k) = \text{const.}$ doit être une intégrale des géodésiques et, par suite, se réduit à une constante. Voici une démonstration qui embrasse tous les autres cas.

Admettons que ds_1^2 soit égal à μds^2, et écrivons une des équations (A) et une des équations (A_1),

$$\text{(A)} \qquad \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt^2} + N_i = Q_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

et

$$(A_1) \qquad \sum_{j=1}^{j=k} A_{ij} \frac{d^2 q_j}{dt_1^2} + N_i + \frac{\partial(T)}{\partial(q'_i)} \frac{d\nu}{dt_1} - (T)\frac{\partial \nu}{\partial q_i} = \frac{Q'_i}{\mu};$$

ν représente $\log \mu$, et (T) ce que devient T quand on y remplace q'_i par $(q'_i) \equiv \frac{dq_i}{dt_1}$. Il suit de là que, si l'on désigne par a_{ij} le mineur de Δ relatif à l'élément A_{ij} et divisé par Δ, on aura

$$\frac{d^2 q_i}{dt_1^2} = (P_i) - \frac{d\nu}{dt_1} \sum_{j=1}^{j=k} a_{ij} \frac{\partial(T)}{\partial(q'_j)} + (T) \sum_{j=1}^{j=k} a_{ij} \frac{\partial \nu}{\partial q_j} + \beta'_i;$$

mais, d'après les égalités $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$, on a précisément

$$q'_i = \sum_j a_{ij} p_j, \qquad \text{donc} \qquad q'_i \equiv \sum_j a_{ij} \frac{\partial T}{\partial q'_j},$$

en sorte qu'on peut écrire, en posant $B_i = \sum_j a_{ij} \frac{\partial \nu}{\partial q_j}$,

$$\frac{d^2 q_i}{dt_1^2} = (P_i) - (q'_i)\frac{d\nu}{dt_1} + (T)B_i + \beta'_i.$$

La relation entre dt et dt_1 est donc ici

$$\begin{aligned} dt^2(\beta_2 dq_1 - \beta_1 dq_2) - dt_1^2(\beta'_2 dq_1 - \beta'_1 dq_2) \\ = (\Pi_1 - \Pi_1 + d\nu\, dq_1 - B_1 ds^2) dq_2 - (\Pi_2 - \Pi_2 + d\nu\, dq_2 - B_2 ds^2) dq_1 \\ = ds^2(B_2 dq_1 - B_1 dq_2). \end{aligned}$$

Le binome $(\beta_2\,dq_1 - \beta_1\,dq_2)$ doit diviser le second membre [1]; il ne peut (si k est supérieur à 2) diviser ds^2 dont le discriminant Δ n'est pas nul; la relation entre dt_1 et dt est donc de la forme

$$dt_1^2 = \mathrm{M}(ds^2 - \mathrm{V}\,dt^2),$$

qui caractérise l'hypothèse II, où les géodésiques de $(\mathrm{U}+a)\,ds^2$ et celles de ds_1^2 coïncident, U désignant la fonction de forces de (A) qui existe alors nécessairement, et a une certaine constante finie.

En permutant les deux systèmes, on voit de même que les géodésiques de ds^2 coïncident avec les géodésiques de $(\mathrm{U}_1 + a_1)\,ds_1^2$, U_1 désignant la fonction de forces de (A_1) qui existe nécessairement et a_1 un certain nombre fini. Cette double circonstance (d'après le théorème du n° **7**) ne peut se présenter que dans la transformation de M. Darboux. C. Q. F. D.

Pour les systèmes à deux paramètres, il n'est pas impossible que $\beta_2\,dq_1 - \beta_1\,dq_2$ divise ds^2; j'observe seulement que le ds^2 serait alors nécessairement le ds^2 d'une surface imaginaire. On voit aussitôt que ds^2 (et ds_1^2) sont deux ds^2 de M. Lie; car si l'on ramène ces ds^2 à la forme $\lambda\,dq_1\,dq_2$, le système $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, \mathrm{Q}_i = 0\right]$ possède une intégrale quadratique telle que $dq_1(m\,dq_1 + n\,dq_2) = \mathrm{C}\,dt^2$, qui caractérise les ds^2 de M. Lie. Je me borne à ces indications sur le cas de deux paramètres, qu'il est très facile dès lors de traiter directement et que je discuterai dans un travail ultérieur.

III. — Conditions suffisantes pour qu'un système (A) admette des correspondants. Équations générales du calcul des variations.

11. D'après ce qui précède, quand un système (A) ou $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, \mathrm{Q}_i\right]$ possède un correspondant non ordinaire $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, \mathrm{Q}'_i\right]$, les deux systèmes

---

(1) Si le second membre était identiquement nul, on aurait $dt_1^2 = \lambda^2\,dt^2$, et les géodésiques coïncideraient.

$\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ et $\left[\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q' = 0\right]$ admettent respectivement une intégrale quadratique; dans certains cas, toutefois, il faut substituer dans l'énoncé à un de ces systèmes, au premier par exemple, le système $\left[(U+a)\frac{ds^2}{dt'^2}, Q_i = 0\right]$. L'existence d'une intégrale quadratique de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$ ou même de $\left[\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right]$ n'est pas d'ailleurs une condition *suffisante* pour que (A) possède un correspondant. C'est ainsi que le système (A), rencontré par Jacobi, où ds^2 est égal à $\sum_{i=1}^{i=k}\frac{F'(q_i)}{f(q_i)}dq_i^2$ (*voir* Chap. II, p. 54) et où $U = \sum\frac{\psi_i(q_i)}{F'(q_i)}$, admet un système complet d'intégrales quadratiques sans posséder en général de correspondants non ordinaires.

Pour former les conditions suffisantes, un procédé consiste à exprimer qu'on peut passer de (A) à (A_1) par une transformation de la forme

$$dt_1^2 = d\sigma^2 - w\,dt^2.$$

Ces conditions se présentent comme beaucoup plus compliquées que dans le cas des forces nulles; mais on les simplifie notablement en tenant compte *immédiatement* des conditions nécessaires déjà connues : 1° $\frac{\beta'_1}{\beta_1} \equiv \frac{\beta'_i}{\beta_i}$; 2° l'expression $(\Pi_1 - \Pi'_1)\,dq_i - (\Pi_i - \Pi'_i)\,dq_1$ est divisible par $\frac{\beta_i}{\beta_1}dq_1 - dq_i$, et le quotient, $d\sigma^2$ est indépendant de i; 3° $\left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\frac{\beta'_1}{\beta_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left[\frac{-d\sigma^2}{\beta'_1} + \frac{\beta_1}{\beta'_1}dt^2\right]$ est une intégrale de (A), et $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}\frac{\beta_1}{\beta'_1}\right)^{\frac{2}{k+3}}\left[\frac{d\sigma^2}{\beta_1} + \frac{\beta'_1}{\beta_1}dt_1^2\right]$ une intégrale de (A_1).

Pour qu'il y ait correspondance avec conservation des géodésiques, il faut que $d\sigma^2 \equiv 0$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(\Pi_1 - \Pi'_1)\,dq_i - (\Pi_i - \Pi'_i)\,dq_1 \equiv 0,$$

conditions nouvelles à ajouter aux précédentes. Mais on peut se demander si *ces conditions ne sont pas nécessairement des consé-*

quences des premières; autrement dit, si la correspondance avec conservation des géodésiques (ou du moins d'un faisceau naturel) n'est pas la *seule possible*. Il n'en est rien, et pour s'en assurer un moyen simple est de former un exemple. Je citerai seulement le suivant : les deux systèmes

$$[T, U] \quad \text{et} \quad [T_1, U_1],$$

où

$$T = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \qquad U = gz,$$

et où

$$T_1 \equiv \frac{1}{x^4}\left[\left(\frac{dx}{dt_1}\right)^2\left(1 + y^2 + \frac{4z^2}{x^2}\right) + 2\frac{dx}{\partial t_1}\frac{dy}{dt_1}xy \right.$$
$$\left. - 4\frac{dx}{dt_1}\frac{dy}{dt_1}\frac{z}{x} + \left(\frac{dy}{dt_1}\right)^2 x^2 + \left(\frac{dz}{dt_1}\right)^2\right],$$

$$U_1 = \frac{gz}{x^2},$$

sont correspondants; leurs trajectoires sont des paraboles d'axe parallèle à Oz. Aucun faisceau naturel $h = a$ de (A) n'est faisceau naturel $h_1 = a_1$ du second système. Observons que ces deux systèmes sont en même temps *homologues;* on passe de l'un à l'autre en changeant x en $\frac{1}{x}$, y en $\frac{y}{x}$, z en $\frac{z}{x^2}$ et en faisant $t = t_1$. Ce changement de variable transforme les paraboles trajectoires en elles-mêmes.

Si donc on forme, comme je viens de l'indiquer, les conditions *suffisantes* pour que (A) admette un correspondant, les systèmes (A) répondant à ces conditions comprendront comme *systèmes particuliers* ceux qui satisfont de plus à la condition que les géodésiques (ou un faisceau naturel) se conservent. Il est d'autre part très facile de trouver des ds^2 correspondants, par suite des systèmes (A) qui admettent des correspondants ayant mêmes géodésiques; de ces systèmes enfin on déduit sans peine des correspondants qui possèdent un faisceau naturel commun. Les quatre cas que nous avons énumérés au n° **6** peuvent donc bien se présenter.

12. Je reviendrai ailleurs sur les conditions suffisantes en question. Je terminerai ces généralités en remarquant qu'elles peuvent s'étendre aux *équations quelconques provenant du calcul des variations*. Considérons une fonction

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k)$$

assujettie à la seule condition que son hessien relatif aux q'_i ne soit pas nul, et écrivons les équations

$$(\alpha) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial q'_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} = Q_i(q_1, q_2, \ldots, q_k), \quad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Si un second système analogue (α_1) définit les mêmes trajectoires, on passe de (α_1) à (α) par une transformation

$$\frac{dt_1}{dt} = \varphi(q_1, q_2, \ldots, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k),$$

d'où l'on peut déduire, en général, une intégrale première de (α) [et de (α_1)]; dans le cas où cette intégrale se réduit à une constante absolue, on connaît, en général, une intégrale du système (α) où l'on a annulé les Q_i. Quand f est homogène en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, et de degré m ($m \neq 0$ et 1), l'analogie avec les équations de Lagrange est presque complète : il convient là encore de distinguer deux cas suivant que tous les Q_i, Q'_i sont nuls ou non; ce dernier cas se décompose lui-même en quatre autres d'après la classification du n° **6**.

IV. — Conséquences générales et applications particulières des théorèmes précédents.

13. Je me bornerai à indiquer brièvement ici quelques-unes des conséquences les plus importantes des théorèmes que je viens d'établir, et aussi quelques applications pour montrer avec quelle facilité elles découlent de ces généralités.

Tout d'abord, nous savons qu'à un correspondant non ordinaire (A_1) de (A) est attachée une certaine intégrale quadratique soit de (A), soit d'un des systèmes $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right)$ ou $\left[(U + a)\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i = 0\right]$. Cette intégrale une fois connue, le calcul du correspondant (A_1) n'offre plus aucune difficulté. Or la détermination des intégrales quadratiques de (A) dépend, dans l'hypothèse la moins favorable, d'un système différentiel linéaire complet. *La détermination des correspondants d'un système* (A) *donné n'exige donc jamais que l'intégration d'équations linéaires.*

Si, en particulier, on veut résoudre les problèmes I et II de l'Introduction, il faut, parmi les ds_1^2, distinguer ceux qui sont *homologues* de ds^2 et calculer les transformations de passage de ds^2 à ds_1^2; *recherche qui n'introduit encore que des équations linéaires.* Notamment, *le calcul des transformations* $q_i = \varphi_i(r_1, \ldots, r_k)$ *qui conservent les trajectoires d'un système donné n'exige jamais que l'intégration d'un système linéaire complet.*

14. Insistons maintenant sur le problème particulier énoncé au début de l'Introduction : *Un système* (A) *étant donné, existe-t-il un système* (A_1) *qui définisse le même* MOUVEMENT? Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit qu'il existe entre dt et dt_1 une relation de la forme $\frac{dt_1}{dt} = 1$. Si les forces Q_i, Q'_1 sont nulles, pour que les deux mouvements coïncident, il faut donc et il suffit que (A) et (A_1) soient deux correspondants pour lesquels $\Delta \equiv C\Delta_1$, C étant une constante. Si les forces Q_i, Q'_i ne sont pas toutes nulles, il faut et il suffit que (A) et (A_1) soient deux correspondants dont les géodésiques coïncident, et tels de plus que $\Delta \equiv C\Delta_1$; on aura alors $\beta_i = \beta'_i$ et $\frac{dt_1}{dt} = 1$ pour un des systèmes $[T_1, cQ'_i]$.

Il suit de là que, pour trouver tous les systèmes (A_1) cherchés, *il faudra déterminer tous les* ds^2, soit dS^2, *ayant mêmes géodésiques et même discriminant que* ds^2. *A tout système de forces* Q_i *correspondra un système de forces* Q'_i (*et un seul*) *tel que les deux mouvements définis par* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *et par* $\left(C\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$ *coïncident* (C est un nombre choisi arbitrairement).

On voit aisément que les ds^2 des surfaces à courbure constante admettent de tels correspondants ds_1^2, et il en est de même des ds^2 des surfaces à courbure constante de l'espace à $(k+1)$ dimensions. Pour

$k=2$, il n'existe pas d'autres ds^2 jouissant de cette propriété, mais pour $k>2$ il n'en est plus ainsi. M. Liouville [1] a déterminé *tous les ds^2 à trois variables tels que le mouvement défini par* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i=0\right)$ *puisse être aussi défini par un second système* $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i=0\right)$ *et tel de plus que les discriminants* Δ et Δ_1 *de ds^2 et de ds_1^2 soient identiques.* D'après ce qui précède, cette dernière condition est inutile et rentre dans la première. Les ds^2 déterminés par M. Liouville constituent donc tous les ds^2 à trois variables, tels que le *mouvement* défini par un système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ puisse être aussi défini par un autre système distinct du premier $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$.

15. Revenons aussi sur le problème II de l'Introduction : « Étant donné le système (A) ou $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$, déterminer des forces R'_i telles que, si on les substitue aux Q_i, les nouvelles trajectoires se déduisent des premières en changeant q_i en $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$. » Les trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ comprendront un faisceau commun, à savoir les géodésiques de ds^2. Deux cas sont à distinguer suivant que ce faisceau se transforme ou non en lui-même quand on change q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$. Occupons-nous seulement du premier cas.

La transformation $q_i=\varphi_i$ et son inverse substituent alors à ds^2 deux ds^2 homologues, soit ds'^2 et ds_1^2 [2], dont les géodésiques coïncident avec celles de ds^2. Par suite, tout système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ possède un correspondant de la forme $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$; l'homologue déduit de ce correspondant en changeant les q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$, est de la forme $\left[\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right]$ et les forces R'_i conviennent au problème.

Si donc les géodésiques de ds^2 admettent une transformation

---

[1] Voir les *Comptes rendus*, avril 1891.

[2] ds_1^2 peut d'ailleurs coïncider avec ds^2.

$q_i = \varphi_i$ en elles-mêmes, à tout système de forces Q_i correspondent des forces R_i, telles que les trajectoires définies par $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ se déduisent des trajectoires définies par $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ en changeant q_i en $\varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_k)$.

16. Que les géodésiques se conservent ou non, est-il possible que la transformation $q_i = \varphi_i$ soit *conforme*, je veux dire change ds^2 en $\mu(q_1, q_2, \ldots, q_k)\, ds^2$? S'il en est ainsi, l'inverse de cette transformation substitue au système $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ un correspondant de A, soit $\left(\frac{ds_1^2}{dt_1^2}, Q'_i\right)$, où $ds_1^2 \equiv \mu\, ds^2$; il faudra donc qu'on ait ou bien $ds_1^2 = C\, ds^2$ et $Q'_i = c Q_i$, ou bien $ds_1^2 = (aU + b)\, ds^2$ et $U_1 = \frac{C}{aU + b}$. On déterminera donc tous les ds^2 de la forme $C\, ds^2$, ou de la forme $(aU + b)\, ds^2$ (quand U existe), qui sont *homologues* de ds^2, et toutes les transformations de passage $q_i = \varphi_i$; si l'on prend $R'_i = C \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial q_i} Q_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ pour le premier cas, et si l'on change les q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$ dans $\frac{C}{aU + \beta}$ pour le second, on obtient des forces R'_i ou une fonction de forces U′ telles que les trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ ou de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, U'\right)$ se déduisent des premières par une transformation conforme.

Par exemple, soit $ds^2 = dx^2 + dy^2$. En outre de la transformation banale définie par l'égalité $x + iy = (A + iB)(x_1 \pm iy_1) + C + iD$, il existera d'autres transformations conformes faisant passer des trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ aux trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$, si U existe et satisfait à la condition $\frac{\partial^2 \log U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log U}{\partial y^2} \equiv 0$. Posons alors

$$-\log \frac{1}{2} U + iV = \log \frac{df_1}{dz} + A + iB,$$

f_1 représentant une fonction analytique de $z = x + iy$; l'égalité $z_1 = f_1(z)$ définit deux fonctions $x = \varphi(x_1, y_1)$, $y = \psi(x_1, y_1)$; soit

U' ce que devient l'expression $\frac{C}{U}$ quand on y change x et y en $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$; les trajectoires du système $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, U'\right)$ se déduisent de celles du système $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, U\right)$ en changeant x et y en $\varphi(x,y)$ et $\psi(x,y)$. C'est un théorème de M. Goursat [1].

17. L'application de certaines des remarques précédentes permet de retrouver sans peine tous les résultats déjà obtenus par les divers auteurs qui se sont occupés de systèmes correspondants particuliers. Par exemple, les géodésiques de $ds^2 \equiv dx^2 + dy^2$ admettent le groupe des *transformations homographiques* à deux variables. D'après le théorème du n° **15**, à chaque système de forces Q_i correspondent des forces R'_i telles que les trajectoires de $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ et de $\left(\frac{ds^2}{dt_1^2}, R'_i\right)$ se déduisent les unes des autres par une transformation homographique quelconque donnée à l'avance. Les formules de passage découlent immédiatement des formules établies dans le Chapitre II (p. 49) sur les correspondances qui conservent les géodésiques. On retrouve ainsi les résultats bien connus de M. Appell.

Il est clair que les mêmes conclusions s'appliquent aux ds^2 à deux variables dont les géodésiques admettent la transformation homographique la plus générale. Quels sont ces ds^2? Leurs géodésiques étant des droites $Aq_1 + Bq_2 + C = 0$, ces ds^2 sont correspondants de $dx^2 + dy^2$, et possèdent par suite trois transformations infinitésimales en eux-mêmes (*voir* Chap. III, Section V, p. 72) : d'après un théorème de M. Lie, ce sont les ds^2 de surfaces à courbure constante. D'autre part, on voit immédiatement, sur la sphère et la pseudosphère, que toute surface à courbure constante est représentable géodésiquement sur le plan. De cette seule remarque, il résulte (Chap. II, Section VI, p. 48) que *tout mouvement* $\left(\frac{ds^2}{dt^2}, Q_i\right)$ *sur une surface à courbure constante correspond à un mouvement plan*, et que les surfaces à courbure constante sont les seules à jouir de cette pro-

---

[1] Voir les *Comptes rendus* (avril 1889) et la Note de M. Darboux faisant suite à celle de M. Goursat.

priété. On connaît les travaux de MM. Paul Serret, Appell et Dautheville sur la question.

Toutes ces remarques peuvent être répétées sans modification pour les ds^2 de la forme $dx_1^2 + \ldots + dx_k^2$, et pour les ds^2 des surfaces à courbure constante de l'espace à $(k+1)$ dimensions.

Mais les généralités développées dans ce Mémoire comportent beaucoup d'autres applications entièrement nouvelles. C'est ainsi qu'elles permettent, *pour* $k = 2$, d'élucider complètement la question des correspondants, d'en former tous les types [en s'aidant des travaux récents de M. Kœnigs (¹)] et, par suite, de déterminer les groupes des transformations des trajectoires. Cette dernière recherche peut d'ailleurs être effectuée par un procédé direct. Dans un Mémoire ultérieur, en même temps que je reviendrai sur les conditions suffisantes pour qu'il existe des correspondants, je traiterai en détail les applications les plus importantes et notamment celles qui concernent les systèmes à deux et trois paramètres.

(¹) Voir les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1893).