JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

L. RAFFY

Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 331-390.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__331_0>

Détermination des éléments linéaires doublement harmoniques;

PAR M. L. RAFFY.

Les pages qui suivent contiennent la solution complète d'un problème abordé dans un cas particulier par M. Sophus Lie et proposé par M. Darboux aux efforts des géomètres : *Déterminer tous les éléments linéaires doublement harmoniques*, c'est-à-dire réductibles de deux manières, et par suite d'une infinité de manières, au type

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy.$$

Cette solution formait la seconde partie de mes *Recherches sur les surfaces harmoniques* (¹) qui ont obtenu de l'Académie des Sciences une mention honorable dans le concours pour le prix Bordin en 1892. Pour abréger le texte primitif, j'ai retranché du Chapitre premier des développements analytiques rendus superflus par l'emploi ultérieurement fait (Chapitre IV) de la théorie des fonctions; en outre, j'ai supprimé dans les Chapitres II, III et V certains calculs intermédiaires. Rien n'a été changé au Chapitre IV. J'y ai seulement ajouté, hors texte et entre crochets, deux notes, dont l'une complète la seconde démonstration de l'uniformité des solutions, et dont l'autre démontre un

(¹) La première partie est publiée dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, la troisième et dernière dans les *Annales de l'École Normale supérieure*.

lemme incorrectement établi. Je mets aussi entre crochets les renvois qu'il y a lieu de faire à certains de mes travaux antérieurs.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS. LOI DE PASSAGE. LOI DE RÉCIPROCITÉ.

1. Nous commencerons par classer les éléments linéaires réductibles à la forme harmonique. Notre analyse nous fournira les caractères auxquels on reconnaît, un élément linéaire étant donné sous cette forme, s'il est doublement harmonique ou ne l'est pas.

Pour qu'un élément linéaire $\lambda\,dx\,dy$ soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit qu'il existe un changement de variables

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

tel qu'on ait l'identité

$$\lambda\,dx\,dy = [\varphi(x'+y') - f(x'-y')]\,dx'dy'.$$

C'est ce qu'exprime l'équation fondamentale

$$2X\lambda''_{x^2} - 2Y\lambda''_{y^2} + 3X'\lambda'_x - 3Y'\lambda'_y + (X'' - Y'')\lambda = 0,$$

qui a été donnée par M. Darboux [1]. On arrive à ce même résultat en exprimant que l'équation aux géodésiques

$$\Delta \equiv \frac{4pq}{\lambda} = 1$$

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 209.

admet une intégrale quadratique

$$I \equiv A p^2 + 2 B p q + C q^2 = \text{const.}$$

En effet, en écrivant que le crochet $[\Delta, I]$ est identiquement nul, on voit d'abord que A dépend seulement de x et C seulement de y, et si l'on pose $A = X$, $C = Y$, les deux autres conditions deviennent

$$\begin{aligned} 2X \frac{\partial \lambda}{\partial x} + X' \lambda + 2 \frac{\partial(\lambda B)}{\partial y} &= 0, \\ 2Y \frac{\partial \lambda}{\partial y} + Y' \lambda + 2 \frac{\partial(\lambda B)}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à éliminer la fonction inconnue λB pour retrouver l'équation fondamentale. On voit que X et Y sont deux des coefficients de l'intégrale quadratique.

Il convient, pour la discussion qui va suivre ([1]), d'introduire à la place de λ son logarithme ω. L'équation fondamentale devient alors, après suppression du facteur e^{ω} commun à tous ses termes,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F \equiv 2X(\omega_x'^2 + \omega''_{x^2}) - 2Y(\omega_y'^2 + \omega''_{y^2}) \\ + 3X'\omega'_x - 3Y'\omega'_y + X'' - Y'' = 0. \end{aligned} \right.$$

A cette équation nous adjoindrons l'équation $F''_{xy} = 0$, savoir

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} 2X(\omega_x'^2 + \omega''_{x^2})''_{xy} - 2Y(\omega_y'^2 + \omega''_{y^2})''_{xy} + X'(4\omega'_x\omega''_{xy} + 5\omega'''_{x^2y}) \\ - Y'(4\omega'_y\omega''_{xy} + 5\omega'''_{xy^2}) + 3(X'' - Y'')\omega''_{xy} = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour que cette équation ait lieu indépendamment de X, Y, X', Y' et $X'' - Y''$, il faut que ω''_{xy} soit nul, ce qui exprime que la surface est développable. Cela suffit d'ailleurs, comme on le voit aisément.

Laissant de côté les surfaces développables, nous supposerons désormais ω''_{xy} différent de zéro. L'équation (2) n'est pas une identité, mais elle peut se confondre avec l'équation (1). Pour qu'il en soit ainsi,

---

([1]) [L. Raffy, *Sur les spirales harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CXII, 1891; p. 518)].

il faut et il suffit qu'en éliminant une des inconnues, $X'' - Y''$ par exemple, entre ces deux équations, on arrive à une relation qui ait lieu indépendamment de X, Y, X' et Y'; or on trouve de la sorte

$$\begin{aligned} &2X[(\omega_x'^2 + \omega_{x^2}'')_{xy}'' - 3\omega_{xy}''(\omega_x'^2 + \omega_{x^2}'')] \\ &\quad - 2Y[(\omega_y'^2 + \omega_{y^2}'')_{xy}'' - 3\omega_{xy}''(\omega_y'^2 + \omega_{y^2}'')] \\ &\quad + 5X'(\omega_{x^2y}''' - \omega_x'\omega_{xy}'') - 5Y'(\omega_{xy^2}''' - \omega_y'\omega_{xy}'') = 0. \end{aligned}$$

Représentons la courbure totale par $-2e^\theta$; nous aurons

$$\frac{1}{R_1R_2} = -2\frac{\omega_{xy}''}{\lambda} = -2e^\theta, \qquad \omega_{xy}'' = e^{\omega+\theta},$$

et l'équation précédente prendra la forme plus condensée

$$(3) \quad \begin{cases} 2X(\theta_x'^2 + \theta_{x^2}'' + 4\omega_x'\theta_x') - 2Y(\theta_y'^2 + \theta_{y^2}'' + 4\omega_y'\theta_y') \\ \qquad\qquad + 5X'\theta_x' - 5Y'\theta_y' = 0. \end{cases}$$

Pour qu'elle ait ses quatre coefficients nuls, il faut et il suffit visiblement que θ soit constant, c'est-à-dire que la surface ait sa courbure totale constante. Nous laisserons encore de côté ce cas, facile à reconnaître.

2. En vue d'abréger l'écriture, nous poserons

$$A = \tfrac{2}{5}(\theta_x'^2 + \theta_{x^2}'' + 4\omega_x'\theta_x'), \qquad B = \tfrac{2}{5}(\theta_y'^2 + \theta_{y^2}'' + 4\omega_y'\theta_y'),$$

de sorte que l'équation précédente deviendra

$$(3') \qquad AX - BY + \theta_x'X' - \theta_y'Y = 0.$$

Différentions-la séparément par rapport à x et par rapport à y; nous trouvons

$$(4) \qquad A_x'X - B_x'Y + (A + \theta_{x^2}'')X' - \theta_{xy}''Y' - \theta_x'X'' = 0,$$

$$(5) \qquad A_y'X - B_y'Y + \theta_{xy}''X' - (B + \theta_{y^2}'')Y' - \theta_y'Y'' = 0.$$

Ces équations déterminent X'' et Y'' si aucune des dérivées θ_x', θ_y' n'est nulle. Mais elles ne sont pas nulles toutes les deux, puisque nous supposons que l'équation (3) n'est pas une identité; en outre, si l'on suppose qu'une seule soit nulle, on voit aisément, en ayant égard à l'équation (3) et à la définition de θ, que l'autre dérivée est nulle, ce qui est contradictoire. Nous pouvons donc éliminer X″ et Y″ entre les équations (4) et (5) et l'équation (1). Il vient ainsi

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &X\left[\frac{A'_x}{\theta'_x}+\frac{A'_y}{\theta'_y}-2(\omega'^2_x+\omega''_{x^2})\right]\\ &\quad -Y\left[\frac{B'_x}{\theta'_x}+\frac{B'_y}{\theta'_y}-2(\omega'^2_y+\omega''_{y^2})\right]+X'\left(\frac{A+\theta''_{x^2}}{\theta'_x}+\frac{\theta''_{xy}}{\theta'_y}-3\omega'_x\right)\\ &\qquad\qquad -Y'\left(\frac{B+\theta''_{y^2}}{\theta'_y}+\frac{\theta''_{xy}}{\theta'_x}-3\omega'_y\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Voyons dans quel cas cette nouvelle équation sera une identité. A cet effet, calculons les coefficients C_1 et D_1 de X' et de Y'; ils ont respectivement pour expressions

$$C_1=\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial x}\left(2\theta+7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right)-\frac{2}{5}\frac{\theta''_{xy}}{\theta'_y},$$

$$D_1=\frac{1}{5}\frac{\partial}{\partial y}\left(2\theta+7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right)-\frac{2}{5}\frac{\theta''_{xy}}{\theta'_x}.$$

En les égalant à zéro et comparant les deux valeurs de θ''_{xy} tirées des équations ainsi formées, on trouve que le déterminant fonctionnel

$$\theta'_y\frac{\partial}{\partial x}\left(2\theta+7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right)-\theta'_x\frac{\partial}{\partial y}\left(2\theta+7\log\frac{\theta'_x\theta'_y}{\lambda}\right)$$

est nul. Par conséquent le rapport $\theta'_x\theta'_y:\lambda$ est une fonction de θ. C'est le premier paramètre différentiel $\Delta\theta$ de la fonction θ, et il est bien connu que, quand $\Delta\theta$ est fonction de θ, les courbes $\theta=$ const. sont parallèles. Donc ici *les lignes d'égale courbure* ($R_1 R_2=$ const.) *sont parallèles sur toutes les surfaces d'élément linéaire* $\lambda\,dx\,dy$. Or on a ce théorème (1), démontré au début de notre première partie : *Pour qu'une surface dont les lignes d'égale courbure sont parallèles soit harmo-*

(1) [L. Raffy, *Sur une classe de surfaces harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXII, 1891; p. 424)].

nique, il faut et il suffit qu'elle soit applicable sur une surface de révolution. Ainsi, dans le cas actuel, les surfaces considérées sont applicables sur des surfaces de révolution.

Nous allons voir qu'il doit encore en être de même, si l'équation (6) se confond avec l'équation (1). En effet, si l'on écrit la proportionnalité des coefficients de X′ et de Y′ dans ces deux équations, on trouve simplement

$$\theta'_y \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\theta'_x \theta'_y}{\lambda} - \theta'_x \frac{\partial}{\partial y} \log \frac{\theta'_x \theta'_y}{\lambda} = 0,$$

ce qui exprime encore que les lignes d'égale courbure sont parallèles. En conséquence, nous pouvons énoncer cette conclusion : *Si l'élément linéaire $\lambda\, dx\, dy$ ne convient pas à une surface de révolution, les équations* (3′) *et* (6) *ne sont pas des identités et sont distinctes l'une de l'autre; et réciproquement.*

5. Comme ce résultat suffit pour la suite, nous ne pousserons pas plus loin la discussion générale. Nous supposerons désormais qu'il s'agisse d'éléments linéaires *doublement harmoniques*, c'est-à-dire que λ ait déjà la forme $\varphi(x+y) - f(x-y)$. Nous n'aurons qu'à introduire dans les équations précédemment étudiées la condition

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e^\omega}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 e^\omega}{\partial y^2} = 0,$$

qui exprime cette propriété et qui n'est autre que

$$\omega'^2_x + \omega''_{x^2} = \omega'^2_y + \omega''_{y^2}. \tag{7}$$

Il est clair que cette condition ne modifie en rien notre analyse, et que nous avons toujours, étant donné un élément linéaire doublement harmonique, à distinguer trois cas exclusifs : 1° l'élément linéaire convient à une surface à courbure totale constante, nulle ou différente de zéro; 2° il ne convient pas à une surface à courbure totale constante, mais il convient à une surface de révolution; 3° il ne convient pas à une surface de révolution. Les deux premiers cas seront traités en détail aux Chapitres II et III. Nous allons examiner le troisième.

Remarquons qu'en vertu de la condition (7) les coefficients de X et de $-Y$ sont égaux dans l'équation fondamentale (1) et aussi dans les équations (3′) et (6). En effet, en se reportant au n° **1** de ce Chapitre, on voit que les expressions primitives de A et de B sont

$$\begin{aligned}
\tfrac{5}{2}\,\omega''_{xy}\,A &= (\omega'^2_x + \omega''_{x^2})''_{xy} - 3\,\omega''_{xy}(\omega'^2_x + \omega''_{x^2}),\\
\tfrac{5}{2}\,\omega''_{xy}\,B &= (\omega'^2_y + \omega''_{y^2})''_{xy} - 3\,\omega''_{xy}(\omega'^2_y + \omega''_{y^2}).
\end{aligned}$$

Donc ici les deux fonctions A et B sont identiques, et, par suite, les coefficients de X et de $-Y$ dans les équations (3′) et (6). Ces équations peuvent donc s'écrire

$$\zeta\,(X - Y) + \theta'_x X' - \theta'_y Y' = 0, \tag{3′}$$

$$\zeta_1(X - Y) + C_1 X' - D_1 Y' = 0, \tag{6}$$

et nous venons de voir (n° **2**) qu'*aucune d'elles ne se réduit à une identité* et que, de plus, *elles sont distinctes l'une de l'autre*. Nous pouvons donc les résoudre et tirer

$$\frac{X'}{X - Y} = \frac{\zeta_1\theta'_y - \zeta D_1}{D_1\theta'_x - C_1\theta'_y} = \alpha, \qquad \frac{-Y'}{X - Y} = \frac{\zeta C_1 - \zeta_1\theta'_x}{D_1\theta'_x - C_1\theta'_y} = \beta. \tag{8}$$

Pour que les fonctions désignées par α et β soient les dérivées par rapport à x et à y du logarithme d'une expression de la forme $X - Y$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial x} = -\,\alpha\beta. \tag{9}$$

Telles sont les deux équations du sixième ordre auxquelles doit satisfaire la fonction $\varphi - f$. Quand elles sont vérifiées, on connaît, à un facteur constant près, une fonction $X - Y$, dont les dérivées logarithmiques ont les valeurs (8) et qui, par suite, satisfait aux deux équations (3′) et (6). J'ajoute qu'elle vérifie aussi l'équation de départ $F = 0$. En effet, soit Φ le premier membre de l'équation (3′); celui de l'équation (6), d'après sa formation, n'est autre chose que

$$\frac{1}{\theta'_x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{\theta'_y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} - F.$$

Or, il est identiquement nul, ainsi que Φ; par suite, les dérivées Φ'_x et Φ'_y étant nulles aussi, il reste $F = 0$. Ainsi, les équations (9) assurent à l'élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ la propriété d'être doublement harmonique. Elles caractérisent donc les éléments linéaires doublement harmoniques qui ne conviennent pas à des surfaces de révolution.

4. *Loi de passage* ([1]). — Voici une remarque qui, bien qu'intuitive, a une grande importance, que nous ne tarderons pas à reconnaître.

Soit un élément linéaire $\lambda(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$ *qui acquiert la forme harmonique*

$$[\varphi(x+y) - f(x-y)]\,dx\,dy \tag{10}$$

par le changement de variables

$$dx = \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}, \qquad dy = \frac{d\eta}{\sqrt{S(\eta)}}, \tag{10'}$$

et qui acquiert aussi une seconde forme harmonique

$$[\varphi_1(x_1+y_1) - f_1(x_1-y_1)]\,dx_1\,dy_1 \tag{11}$$

par le changement de variables

$$dx_1 = \frac{d\xi}{\sqrt{R_1(\xi)}}, \qquad dy_1 = \frac{d\eta}{\sqrt{S_1(\eta)}}. \tag{11'}$$

Pour passer de la première de ces formes à la seconde, il n'y a pas d'autre changement de variables possible que celui-ci :

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}}, \tag{12}$$

([1]) [L. RAFFY, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CIX, 1889; p. 609)].

où l'on a posé

$$X(x) = \frac{R_1(\xi)}{R(\xi)} = \frac{R_1(\xi)}{\xi'^2(x)}, \qquad Y(y) = \frac{S_1(\eta)}{S(\eta)} = \frac{S_1(\eta)}{\eta'^2(y)},$$

le rapport $R_1 : R$ *étant exprimé en fonction de* x *et le rapport* $S_1 : S$ *en fonction de* y, *au moyen des formules* (10').

Il est évident que le changement de variables (12) effectue le passage de (10) à (11); pour s'assurer qu'il est le seul, il suffit de considérer x_1 comme fonction de x par l'intermédiaire de ξ, et y_1 comme fonction de y par l'intermédiaire de η.

La *loi de passage* nous permettra aux Chapitres II et III de résoudre, dans les cas où il est le plus intéressant et le plus difficile, le problème suivant : *Étant donné un élément linéaire doublement harmonique* $(\varphi - f)\,dx\,dy$, *trouver toutes les solutions correspondantes* X *et* Y *de l'équation fondamentale*

$$\begin{aligned}2(X - Y)(\varphi'' - f'') &+ 3X'(\varphi' - f') \\ &- 3Y'(\varphi' + f') + (X'' - Y'')(\varphi - f) = 0.\end{aligned}$$

5. *Loi de réciprocité* (1). — Voici une autre remarque, à peine plus cachée et non moins féconde que la précédente, qui en est essentiellement distincte.

L'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques (équation précédente) est le développement de la condition

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\sqrt{X}\,\frac{\partial}{\partial x}(\varphi - f)\sqrt{X}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\sqrt{Y}\,\frac{\partial}{\partial y}(\varphi - f)\sqrt{Y}\right],$$

qui exprime qu'en effectuant le changement de variables

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

(1) [L. Raffy, *Sur les éléments linéaires doublement harmoniques* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CIX, 1889; p. 609)].

on vérifie identiquement l'égalité

$$[\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy$$
$$=[\varphi_1(x_1+y_1)-f_1(x_1-y_1)]\,dx_1\,dy_1.$$

Mais, avec les variables auxiliaires $t=x+y$, $z=x-y$, on voit immédiatement que cette équation peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\sqrt{\varphi}\,\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\sqrt{\varphi}\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left[\sqrt{f}\,\frac{\partial}{\partial z}(\mathrm{X}-\mathrm{Y})\sqrt{f}\right],$$

ce qui exprime que, par le changement de variables

$$dt_1=\frac{dt}{\sqrt{\varphi(t)}},\qquad dz_1=\frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

on vérifie l'identité

$$\left[\mathrm{X}\left(\frac{t+z}{2}\right)-\mathrm{Y}\left(\frac{t-z}{2}\right)\right]dt\,dz=\left[\mathrm{X}_1\left(\frac{t_1+z_1}{2}\right)-\mathrm{Y}_1\left(\frac{t_1-z_1}{2}\right)\right]dt_1\,dz_1.$$

Ainsi, à tout élément linéaire doublement harmonique

$$[\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy,$$

en correspond un autre

$$\left[\mathrm{X}\left(\frac{x+y}{2}\right)-\mathrm{Y}\left(\frac{x-y}{2}\right)\right]dx\,dy,$$

où X et Y ont les significations précisées plus haut. C'est ce que l'on peut énoncer ainsi :

Ayant trouvé quatre fonctions

$$\mathrm{X}(x),\qquad \mathrm{Y}(y),\qquad \varphi(x+y),\qquad f(x-y),$$

qui satisfont à l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques, on en obtiendra une nouvelle solution en prenant pour X, Y, φ *et* f *respectivement les fonctions*

$$\varphi(x),\qquad f(y),\qquad \mathrm{X}\left(\frac{x+y}{2}\right),\qquad \mathrm{Y}\left(\frac{x-y}{2}\right).$$

CHAPITRE II.

LES FORMES HARMONIQUES DE L'ÉLÉMENT LINÉAIRE DES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE.

---

1. Dans ce Chapitre nous nous proposons non seulement de retrouver toutes les formes harmoniques de l'élément linéaire des surfaces à courbure totale constante, mais aussi de déterminer toutes les solutions correspondantes de l'équation

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} & 2(X-Y)(\varphi''-f'')+3X'(\varphi'-f') \\ & \quad -3Y'(\varphi'+f')+(X''-Y'')(\varphi-f)=0, \end{aligned} \right.$$

en vue d'en déduire, par la loi de réciprocité, de nouveaux éléments linéaires doublement harmoniques.

2. *Surfaces développables.* — Aux résultats de Liouville nous ajouterons la détermination des changements de variables qui permettent de passer d'une forme harmonique de l'élément linéaire du plan à une autre.

Pour que l'expression

$$ds^2=[\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy$$

soit l'élément linéaire d'une développable, il faut et il suffit qu'on ait identiquement

$$\varphi(x+y)-f(x-y)=\psi(x)\chi(y).$$

On résout cette équation en égalant les dérivées secondes de $\psi\chi$ prises par rapport à x et par rapport à y. On obtient de la sorte six expressions distinctes des fonctions φ et f, savoir

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \varphi = a, \\ f = b; \end{cases} \qquad (\mathrm{IV}) \begin{cases} \varphi = \gamma + m e^{2(x+y)}, \\ f = \gamma; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y), \\ f = \gamma - m(x-y); \end{cases} \qquad (\mathrm{V}) \begin{cases} \varphi = \gamma + m e^{2(x+y)}, \\ f = \gamma + m e^{-2(x-y)}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}) \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y)^2, \\ f = \gamma + m(x-y)^2; \end{cases} \qquad (\mathrm{VI}) \begin{cases} \varphi = \gamma + m\,\mathrm{Ch}\,2(x+y), \\ f = \gamma + m\,\mathrm{Ch}\,2(x-y). \end{cases}$$

3. Pour trouver les solutions correspondantes de l'équation (1), partons des relations

$$\varphi - f = \psi\chi, \qquad \varphi' - f' = \psi'\chi, \qquad \varphi' + f' = \psi\chi',$$

auxquelles nous adjoindrons celle-ci

$$\varphi'' - f'' = r(\varphi - f) = r\psi\chi, \qquad r(r-4) = 0$$

vérifiée par les fonctions (I), (II), (III) parce que $\varphi'' - f''$ et r sont nuls, et par les fonctions (IV), (V), (VI), parce que $\varphi'' = 4\varphi$ et $f'' = 4f$. Grâce à ces remarques nous pourrons écrire l'équation (1) de cette manière

$$2r(\mathrm{X} - \mathrm{Y}) + 3\mathrm{X}'\frac{\psi'}{\psi} - 3\mathrm{Y}'\frac{\chi'}{\chi} + \mathrm{X}'' - \mathrm{Y}'' = 0.$$

On voit que cette équation se sépare en deux

$$2r\mathrm{X} + 3\mathrm{X}'\frac{\psi'}{\psi} + \mathrm{X}'' = \text{const.} = 2k,$$

$$2r\mathrm{Y} + 3\mathrm{Y}'\frac{\chi'}{\chi} + \mathrm{Y}'' = \text{const.} = 2k,$$

qu'on intègre en donnant à ψ et χ les expressions qui correspondent aux six solutions rappelées.

Il suffit, quand les intégrations ne sont pas immédiates, de multiplier soit par ψ soit par χ et de remplacer au besoin 4ψ par ψ'' et 4χ par χ'', pour les rendre possibles. Nous ne ferons que transcrire le Tableau des résultats, où tous les coefficients désigneront des constantes arbitraires.

$$
\text{(I)} \begin{cases} \varphi = a, & f = b; \\ \mathrm{X} = kx^2 + a_1 x + a_0, & \mathrm{Y} = ky^2 + b_1 y + b_0. \end{cases}
$$

$$
\text{(II)} \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y), & f = \gamma - m(x-y); \\ \mathrm{X} = \dfrac{k}{4}x^2 + a_0 + \dfrac{a_1}{x^2}, & \mathrm{Y} = ky^2 + b_1 y + b_0. \end{cases}
$$

$$
\text{(III)} \begin{cases} \varphi = \gamma + m(x+y)^2, & f = \gamma + m(x-y)^2; \\ \mathrm{X} = \dfrac{k}{4}x^2 + a_0 + \dfrac{a_1}{x^2}, & \mathrm{Y} = \dfrac{k}{4}y^2 + b_0 + \dfrac{b_1}{y^2}. \end{cases}
$$

$$
\text{(IV)} \begin{cases} \varphi = \gamma + me^{2(x+y)}, & f = \gamma; \\ \mathrm{X} = c + a_0 e^{-2x} + a_1 e^{-4x}, & \mathrm{Y} = c + b_0 e^{-2y} + b_1 e^{-4y}. \end{cases}
$$

$$
\text{(V)} \begin{cases} \varphi = \gamma + me^{2(x+y)}, & f = \gamma + me^{-2(x-y)}; \\ \mathrm{X} = c + a_0 \operatorname{Ch}^{-2} 2x + a_1 \operatorname{Sh}^{-2} 2x, & \mathrm{Y} = c + b_0 e^{-2y} + b_1 e^{-4y}. \end{cases}
$$

$$
\text{(VI)} \begin{cases} \varphi = \gamma + m \operatorname{Ch} 2(x+y), & \mathrm{Y} = \gamma + m \operatorname{Ch} 2(x-y); \\ \mathrm{X} = c + a_0 \operatorname{Ch}^{-2} 2x + a_1 \operatorname{Sh}^{-2} 2x, & f = c + b_0 \operatorname{Ch}^{-2} 2y + b_1 \operatorname{Sh}^{-2} 2y. \end{cases}
$$

Ces diverses expressions de X et de Y s'obtiendraient aisément par l'application de la loi de passage, dont nous allons nous servir bientôt.

4. *Surfaces à courbure différente de zéro.* — Pour ces surfaces les formes harmoniques de l'élément linéaire ont été déterminées par M. Darboux [1]. Après les avoir rappelées, nous ferons connaître tous les changements de variables par lesquels on passe de l'une à l'autre.

Liouville a montré que l'élément linéaire de toute surface à courbure constante $-2c$, rapportée à ses lignes de longueur nulle, est de

---

[1] *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 209-211.

la forme

$$ds^2 = -\frac{2}{c}\frac{\xi'\eta'\,dx\,dy}{(\xi-\eta)^2},$$

où ξ, η désignent des fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y, et ξ', η' leurs dérivées. Il faut donc déterminer les fonctions ξ, η de telle sorte qu'on ait identiquement

$$\frac{\xi'\eta'}{(\xi-\eta)^2} = \varphi(x+y) - f(x-y).$$

On trouve ainsi qu'elles satisfont à la même équation différentielle

$$\xi'^2 = \mathrm{R}(\xi), \qquad \eta'^2 = \mathrm{R}(\eta),$$

où $\mathrm{R}(\rho)$ est un polynôme du quatrième degré à coefficients arbitraires, qu'on peut soumettre à telle transformation homographique qu'on voudra.

1° Si R a ses quatre racines égales, on prend $\mathrm{R}_1(\rho) = 1$; d'où

$$\xi_1'^2 = 1, \qquad \eta_1'^2 = 1; \qquad \xi_1 = x, \qquad \eta_1 = y;$$

et, en supposant désormais la courbure égale à 4,

$$\text{(I)} \qquad ds^2 = \frac{dx\,dy}{(x-y)^2}.$$

2° Si R est carré parfait, on prend $\mathrm{R}_2(\rho) = (\rho^2+1)^2$; d'où

$$\xi_2'^2 = (\xi_2^2+1)^2, \qquad \eta_2'^2 = (\eta_2^2+1)^2; \qquad \xi_2 = \operatorname{tang} x, \qquad \eta_2 = \operatorname{tang} y;$$

$$\text{(II)} \qquad ds^2 = \frac{dx\,dy}{\sin^2(x-y)}.$$

3° Si R a une racine triple, on prend $\mathrm{R}_3(\rho) = 4\rho$; d'où

$$\xi_3'^2 = 4\xi_3, \qquad \eta_3'^2 = 4\eta_3; \qquad \xi_3 = x^2, \qquad \eta_3 = y^2;$$

$$\text{(III)} \qquad ds^2 = -\left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right] dx\,dy.$$

4° Si R n'a qu'une racine double, on prend $R_4(\rho) = 4\rho^2(\rho - 1)$; d'où

$$\xi_4'^2 = 4\xi_4^2(\xi_4 - 1), \qquad \eta_4'^2 = 4\eta_4^2(\eta_4 - 1); \qquad \xi_4 = \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad \eta_4 = \frac{1}{\sin^2 y};$$

$$\text{(IV)} \qquad ds^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2(x+y)} - \frac{1}{\sin^2(x-y)}\right] dx\, dy.$$

5° Si R a ses racines distinctes, nous prendrons

$$R_5(\rho) = 4\rho^3 - g_2\rho - g_3;$$

d'où

$$\xi_5'^2 = 4\xi_5^3 - g_2\xi_5 - g_3, \qquad \eta_5'^2 = 4\eta_5^3 - g_2\eta_5 - g_3;$$
$$\xi_5 = \wp(x), \qquad \eta_5 = \wp(y);$$

$$\text{(V)} \qquad ds^2 = [\wp(x+y) - \wp(x-y)]\, dx\, dy.$$

5. Cherchons maintenant toutes les solutions de l'équation

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & 2(X - Y)(\varphi'' - f'') + 3X'(\varphi' - f') \\ & \quad - 3Y'(\varphi' + f') + (X'' - Y'')(\varphi - f) = 0, \end{aligned} \right.$$

où les fonctions φ et f ont l'une des cinq formes précédentes. La loi de passage les donne sans calcul. En effet, partons de la forme initiale

$$ds^2 = \frac{d\xi\, d\eta}{(\xi - \eta)^2},$$

et remplaçons-y les fonctions ξ, η par l'une des cinq solutions ξ_i, η_i que nous venons de trouver. De la forme harmonique ainsi obtenue on passera à une autre au moyen des fonctions

$$X = \frac{R(\xi_i)}{\xi_i'^2}, \qquad Y = \frac{R(\eta_i)}{\eta_i'^2},$$

où $R(\rho)$ désigne le polynôme le plus général du quatrième degré en ρ. Il n'y aura qu'à exprimer X en x et Y en y pour avoir les solutions cherchées de l'équation (1). Donnant à l'indice i les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, nous obtenons le Tableau suivant, où nous n'écrirons que X, parce que Y est la même fonction de y que X de x :

$$
\text{(I)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma, & f = \gamma - (x-y)^{-2}; \\ X = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E. \end{cases}
$$

$$
\text{(II)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma, & f = \gamma - \sin^{-2}(x-y); \\ X = A\sin^4 x + B\sin^3 x\cos x + C\sin^2 x\cos^2 x + D\sin x\cos^3 x + E\cos^4 x. \end{cases}
$$

$$
\text{(III)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma - (x+y)^{-2}, & f = \gamma - (x-y)^{-2}; \\ X = Ax^6 + Bx^4 + Cx^2 + D + Ex^{-2}. \end{cases}
$$

$$
\text{(IV)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma - \sin^{-2}(x+y), & f = \gamma - \sin^{-2}(x-y); \\ X = \dfrac{A\sin^8 x + B\sin^6 x + C\sin^4 x + D\sin^2 x + E}{\sin^2 x\cos^2 x}. \end{cases}
$$

$$
\text{(V)} \quad \begin{cases} \varphi = \gamma + p(x+y), & f = \gamma + p(x-y); \\ X = \dfrac{A p^4(x) + B p^3(x) + C p^2(x) + D p(x) + E}{4p^3(x) - g_2 p(x) - g_3}. \end{cases}
$$

Dans ces formules, les cinq coefficients A, B, C, D, E, les deux invariants g_2, g_3 et le paramètre γ ont des valeurs entièrement arbitraires.

CHAPITRE III.

LES SURFACES DE RÉVOLUTION DOUBLEMENT HARMONIQUES.

1. Les surfaces de révolution dont nous allons nous occuper sont celles dont l'élément linéaire est réductible à la forme harmonique

$$
ds^2 = [\varphi(x'+y') - f(x'-y')]\, dx'\, dy',
$$

autrement qu'avec la restriction $\varphi f = 0$ qui caractérise toutes les surfaces de révolution. On peut dire que ces surfaces sont celles pour lesquelles le problème des géodésiques admet à la fois une intégrale linéaire, comme pour toutes les surfaces de révolution, et une intégrale quadratique, distincte du carré de l'intégrale linéaire. C'est en posant la question dans ces termes que M. Darboux l'a résolue ([1]). Il prend l'élément linéaire d'une surface de révolution sous la forme

$$ds^2 = du^2 + U'(u)\,dv^2,$$

et montre que la fonction $U'(u)$ est définie par l'équation

$$u = \int \frac{U'^2\,dU'}{m\,U'^4 + 2n\,U'^2 + m'},$$

où m, n et m' sont trois constantes arbitraires.

Il convient pour notre objet de pousser plus loin les calculs, puisque nous nous proposons non seulement de déterminer toutes les formes harmoniques que peut revêtir l'élément linéaire des surfaces considérées, mais aussi d'obtenir toutes les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques, dans l'hypothèse où $(\varphi - f)\,dx\,dy$ est un élément linéaire de surface de révolution.

2. A cette fin nous commencerons ([2]) par *trouver toutes les fonctions* λ *de* $x+y$ *seulement qui satisfont à l'équation fondamentale*

$$2X\lambda''_{x^2} - 2Y\lambda''_{y^2} + 3X'\lambda'_x - 3Y'\lambda'_y + (X'' - Y'')\lambda = 0.$$

En procédant exactement comme au début du Chapitre premier, nous rencontrons d'abord les surfaces à courbure totale constante. Nous ne nous y arrêterons pas, ayant au Chapitre II complètement résolu dans ce cas les deux problèmes indiqués.

Dès lors l'équation (3) du Chapitre I n'est pas une identité. On

---

([1]) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, livre VI, n° 596.

([2]) [L. Raffy, *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CVIII, 1889; p. 493). — *Sur un problème de la théorie des surfaces* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII_2, 1889; p. 161)].

en tire pour le rapport $(X'-Y'):(X-Y)$ une expression qui ne dépend que de $x+y$. Si l'on introduit les variables auxiliaires

$$t = x+y, \qquad z = x-y,$$

on voit que la dérivée logarithmique

$$\frac{X'-Y'}{X-Y} = 2\frac{\partial \log(X-Y)}{\partial t}$$

est fonction de t seulement, de sorte qu'on a

$$X - Y = \psi(x+y)\chi(x-y).$$

La résolution de cette équation indéterminée, qui entraîne immédiatement

$$\frac{\psi''}{\psi} = \frac{\chi''}{\chi} = \text{const.},$$

ne présente pas de difficulté. Connaissant les fonctions ψ et χ, on connaît X et Y. Leur forme est telle qu'on peut toujours intégrer l'équation différentielle linéaire du second ordre qui détermine λ. Il n'y a plus alors qu'à transformer $\lambda(x+y)\,dx\,dy$ au moyen des relations

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

pour obtenir toutes les formes harmoniques de l'élément linéaire des surfaces considérées. Nous les réunirons avec d'autres résultats dans un Tableau placé à la fin du Chapitre. Nous n'écrirons ici que les quatre types primitifs d'où elles dérivent :

(I) $$ds^2 = P(x+y)\,dx\,dy,$$

(II) $$ds^2 = \left[\frac{P}{(x+y)^2} + Q\right]dx\,dy,$$

(III) $$ds^2 = \left[P e^{2(x+y)} + Q e^{x+y}\right]dx\,dy,$$

(IV) $$ds^2 = \left[\frac{P}{\text{Ch}^2(x+y)} + \frac{Q}{\text{Sh}^2(x+y)}\right]dx\,dy.$$

Les lettres P et Q désignent des constantes arbitraires. Nous avons négligé celle qu'on peut ajouter à l'argument $x+y$ et celle par laquelle on peut multiplier les variables.

3. *Remarque.* — Il n'est pas sans intérêt de signaler une propriété des surfaces qui nous occupent. Dans son Mémoire sur les lignes géodésiques [1], M. Sophus Lie n'aborde pas le problème des surfaces de révolution doublement harmoniques; mais trois des types ci-dessus se rencontrent dans la Note I de ce Mémoire, consacrée à une étude approfondie de la représentation géodésique des surfaces. M. Lie recherche en effet toutes les représentations géodésiques des surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = (x+y)\,dx\,dy \tag{1}$$

et distingue particulièrement les deux classes de surfaces qui ont respectivement pour éléments linéaires les deux expressions

$$\begin{aligned} ds^2 &= (xy+1)\,dx\,dy,\\ ds^2 &= \left[\frac{A}{(x+y)^2} + \frac{B}{(x-y)^2}\right]dx\,dy, \end{aligned}$$

dont la première revient à notre type (III) et la dernière à notre type (IV). Mais notre type (II) répond aussi à la question. En effet le théorème de M. Dini s'applique à l'élément linéaire

$$ds^2 = (U-V)(U_1^2\,du^2 + V_1^2\,dv^2),$$

lors même que les fonctions V et V_1 se réduisent à des constantes. Quand M. Lie, partant de

$$(au-bv)(du^2-dv^2),$$

trouve (p. 429) par l'emploi de ce théorème l'expression

$$\left(\frac{1}{au+\varepsilon} - \frac{1}{bv+\varepsilon}\right)\left(\frac{du^2}{au+\varepsilon} - \frac{dv^2}{bv+\varepsilon}\right),$$

[1] *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Mathem. Annalen*, t. XX p. 357-454).

rien n'empêche de supposer b nul, ce qui conduit à notre type (II). En conséquence, on a ce théorème :

Deux surfaces de révolution doublement harmoniques, choisies d'une manière quelconque, peuvent être représentées géodésiquement l'une sur l'autre.

4. Pour déterminer toutes les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques quand $(\varphi - f)\,dx\,dy$ est l'une des formes dérivées des quatre types précédents, nous ferons l'application réitérée de la *loi de passage* exposée au Chapitre I.

Nous groupons ensemble sous le même numéro, avec des indices différents, les solutions qui correspondent aux éléments linéaires transformés d'un même type. Soit (J) l'un de ces types $\lambda(\xi + \eta)\,d\xi\,d\eta$ écrit avec les lettres ξ et η à la place de x et de y. Représentons par

$$(i) \qquad dx = \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}, \qquad dy = \frac{d\eta}{\sqrt{S(\eta)}}$$

le changement de variables *particulier* qui opère le passage de (J) à *une certaine* de ses formes dérivées (J_i) et par

$$dx_1 = \frac{d\xi}{\sqrt{R_1(\xi)}}, \qquad dy_1 = \frac{d\eta}{\sqrt{S_1(\eta)}}$$

le changement de variables *général* qui opère le passage de (J) à l'*une quelconque* de ses formes dérivées. Si l'on pose

$$dx_1 = \frac{dx}{\sqrt{R_1 : R}}, \qquad dy_1 = \frac{dy}{\sqrt{S_1 : S}},$$

les expressions écrites sous les radicaux représentent de la manière la plus générale les fonctions X et Y propres à opérer le passage de la forme (J_i) à l'une quelconque des autres formes dérivées du type (J), pourvu qu'on en chasse ξ et η par l'emploi des relations (i), afin de n'y laisser subsister que x et y. On obtient ainsi le Tableau suivant, où tous les coefficients désignent des constantes arbitraires.

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}(x+y)+\gamma, &&\qquad f=\gamma,\\ &\mathrm{X}=cx+m, &&\qquad \mathrm{Y}=cy+n; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I}_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = (m+n)(x+y)+\gamma, &&\qquad f=(n-m)(x-y)+\gamma,\\ &\mathrm{X}=\frac{cx}{m}+a, &&\qquad \mathrm{Y}=\frac{cy}{n}+b; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{I}_2)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = (x+y)^4-g(x+y)^2+\gamma, &&\qquad f=(x-y)^4-g(x-y)^2+\gamma,\\ &\mathrm{X}=mx^{-2}+c, &&\qquad \mathrm{Y}=ny^{-2}+c. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}(x+y)^{-2}, &&\qquad f=-\mathrm{Q},\\ &\mathrm{X}=ax^2+bx+c, &&\qquad \mathrm{Y}=ay^2-by+c; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II}_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{Q}(x+y)^2-\mathrm{P}(x+y)^{-2}+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{Q}(x-y)^2-\mathrm{P}(x-y)^{-2}+\gamma,\\ &\mathrm{X}=ax^2+b+cx^{-2}, &&\qquad \mathrm{Y}=ay^2+b+cy^{-2}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II}_2)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{Q}e^{2(x+y)}+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{P}\,\mathrm{Ch}^{-2}(x-y)+\gamma,\\ &\mathrm{X}=a+be^{-2x}+ce^{-4x}, &&\qquad \mathrm{Y}=a-be^{-2y}+ce^{-4y}; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II}_3)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}\cos^{-2}(x+y)-\mathrm{Q}\cos^2(x+y)+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{P}\cos^{-2}(x-y)-\mathrm{Q}\cos^2(x-y)+\gamma,\\ &\mathrm{X}=(a\cos^2 2x+b\cos 2x+c)\sin^{-2}2x, &&\qquad \mathrm{Y}=(a\cos^2 2y-b\cos 2y+c)\sin^{-2}2y. \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III})\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}e^{2(x+y)}+\mathrm{Q}e^{x+y}+\gamma, &&\qquad f=\gamma,\\ &\mathrm{X}=ae^{-2x}+c, &&\qquad \mathrm{Y}=be^{-2y}+c; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III}_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}(x+y)^2+\mathrm{Q}, &&\qquad f=\mathrm{P}(x-y)^2,\\ &\mathrm{X}=cx^2+a, &&\qquad \mathrm{Y}=cy^2+b; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III}_2)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}e^{2(x+y)}+\mathrm{Q}e^{x+y}+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{P}e^{2(x-y)}+\mathrm{Q}e^{x-y}+\gamma,\\ &\mathrm{X}=a\,\mathrm{Sh}^{-2}x+c, &&\qquad \mathrm{Y}=be^{-2y}+c; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{III}_3)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}\,\mathrm{Ch}\,2(x+y)+\mathrm{Q}\,\mathrm{Ch}(x+y)+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{P}\,\mathrm{Ch}\,2(x-y)+\mathrm{Q}\,\mathrm{Ch}(x-y)+\gamma,\\ &\mathrm{X}=a\,\mathrm{Sh}^{-2}x+c, &&\qquad \mathrm{Y}=b\,\mathrm{Sh}^{-2}y+c; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{IV})\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}\,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y)+\mathrm{Q}\,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y)+\gamma, &&\qquad f=\gamma,\\ &\mathrm{X}=ae^{4x}+be^{-4x}+c, &&\qquad \mathrm{Y}=ae^{4y}+be^{-4y}+c; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{IV}_1)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}(x+y)^{-2}+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{Q}(x+y)^{-2}+\gamma,\\ &\mathrm{X}=ax^4+bx^2+c, &&\qquad \mathrm{Y}=ay^4+by^2+c; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{IV}_2)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}\,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y)+\mathrm{Q}\,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y)+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{P}\,\mathrm{Ch}^{-2}(x-y)+\mathrm{Q}\,\mathrm{Sh}^{-2}(x-y)+\gamma,\\ &\mathrm{X}=(a\,\mathrm{Ch}^4 2x+b\,\mathrm{Ch}^2 2x+c)\mathrm{Sh}^{-2}2x, &&\qquad \mathrm{Y}=(a\,\mathrm{Ch}^4 2y+b\,\mathrm{Ch}^2 2y+c)\mathrm{Sh}^{-2}2y; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{IV}_3)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{P}\sin^{-2}(x+y)+\gamma, &&\qquad f=\mathrm{Q}\sin^{-2}(x-y)+\gamma,\\ &\mathrm{X}=a\sin^2 2x+b, &&\qquad \mathrm{Y}=a\sin^2 2y+b; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{IV}_4)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi = \mathrm{Q}\,\mathrm{sn}^2(x+y)-\mathrm{P}\,\mathrm{cn}^2(x+y)\,\mathrm{dn}^{-2}(x+y)+\gamma, \qquad f=\mathrm{Q}\,\mathrm{sn}^2(x-y)-\mathrm{P}\,\mathrm{cn}^2(x-y)\,\mathrm{dn}^{-2}(x-y)+\gamma,\\ &\mathrm{X}=\frac{a[k^4(2-k^2)\,\mathrm{sn}^8 x-4k^2\,\mathrm{sn}^6 x+6k^4\,\mathrm{sn}^4 x-4k^2\,\mathrm{sn}^2 x+2-k^2]+b(k^2\,\mathrm{sn}^4 x-2\,\mathrm{sn}^2 x+1)}{\mathrm{sn}^2 x\,\mathrm{cn}^2 x\,\mathrm{dn}^2 x}. \end{aligned}\right.$$

Dans la dernière solution de ce Tableau, nous n'avons pas écrit Y, qui est la même fonction de y que X de x; toutes les fonctions elliptiques ont le même module arbitraire k.

CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES ÉLÉMENTS LINÉAIRES DOUBLEMENT HARMONIQUES.

I. — Premiers résultats.

1. Au moment d'aborder la recherche générale des éléments linéaires doublement harmoniques, il importe de rappeler une distinction qui s'est introduite au Chapitre I entre ceux de ces éléments linéaires qui conviennent à des surfaces de révolution et ceux qui ne jouissent pas de cette propriété. Pour les premiers, l'équation aux géodésiques admet, comme l'a montré M. Darboux (¹), jusqu'à *trois* intégrales quadratiques distinctes

$$I_i \equiv X_i p^2 + 2B_i pq + Y_i q^2 = C_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Nous avons remarqué d'autre part que les fonctions X et Y de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques

$$\begin{aligned} 2(X-Y)(\varphi''-f'')+3X'(\varphi'-f') \\ -3Y'(\varphi'+f')+(X''-Y'')(\varphi-f)=0 \end{aligned}$$

sont précisément les coefficients extrêmes d'une intégrale quadratique. On aura donc, si

$$ds^2 = [\varphi(x+y)-f(x-y)]\,dx\,dy$$

(¹) *Leçons sur la théorie des surfaces*, Liv. VII, Chap. VI, n° 596. Nous supposons dans le texte l'élément linéaire mis sous la forme $\lambda\,dx\,dy$.

est un élément linéaire de surface de révolution, trois couples de solutions de l'équation précédente, savoir X_1 et Y_1, X_2 et Y_2, X_3 et Y_3. De là résulte que l'équation est encore vérifiée par

$$X = S_1 X_1 + S_2 X_2 + S_3 X_3, \qquad Y = S_1 Y_1 + S_2 Y_2 + S_3 Y_3,$$

quelles que soient les trois constantes S_1, S_2 et S_3. L'une des solutions que nous venons de combiner, la dernière par exemple, est nécessairement de la forme $X_3 = Y_3 = \text{const.}$ On aura donc

$$X - Y = S_1(X_1 - Y_1) + S_2(X_2 - Y_2),$$

ce qui montre que les deux dérivées logarithmiques de $X - Y$,

$$\frac{X'}{X-Y}, \quad \frac{-Y'}{X-Y},$$

dépendent d'une arbitraire, qui est le rapport $S_1 : S_2$, et qui ne figure pas dans $\varphi - f$. Ainsi l'on s'explique pourquoi l'analyse du Chapitre I ne détermine pas ces deux dérivées logarithmiques en fonction explicite de $\varphi - f$ et de ses dérivées, quand la surface est applicable sur une surface de révolution. Dans le cas contraire, ces dérivées sont parfaitement déterminées, une fois donné l'élément linéaire. Il suit de là qu'il ne peut exister plus de deux intégrales quadratiques distinctes pour le problème des géodésiques, sans que la surface soit applicable sur une surface de révolution. C'est la réciproque de la proposition de M. Darboux. *Si l'équation aux géodésiques d'une surface admet plus de deux intégrales quadratiques distinctes, la surface est applicable sur une surface de révolution.* Ajoutons que, si la surface a sa courbure totale constante, il existe *cinq* intégrales quadratiques distinctes; c'est ce qui ressort immédiatement du Tableau placé à la fin du Chapitre II.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces éléments linéaires auxquels correspondent plusieurs intégrales quadratiques et qu'on pourrait appeler *multiplement harmoniques;* toutes leurs formes ont été données dans les Chapitres II et III. Nous arrivons aux éléments linéaires *doublement harmoniques* au sens propre du mot, ceux pour lesquels les fonctions $\varphi(x+y)$ et $f(x-y)$ sont telles que l'équation fondamentale détermine la différence $X - Y$, à un facteur constant près.

2. Le seul élément linéaire de cette nature que nous ayons rencontré jusqu'ici est celui qui a été découvert par M. Darboux et cité au Chapitre précédent :

$$ds^2 = \left[\frac{P}{(\xi+\eta)^2} + \frac{Q}{(\xi-\eta)^2} + \frac{P_1}{(1+\xi\eta)^2} + \frac{Q_1}{(1-\xi\eta)^2}\right] d\xi\, d\eta.$$

Si l'on pose $\xi = \operatorname{tang} x$, $\eta = \operatorname{tang} y$, il acquiert la forme harmonique très simple

$$ds^2 = \left[\frac{P}{\sin^2(x+y)} + \frac{Q_1}{\cos^2(x+y)} + \frac{Q}{\sin^2(x-y)} + \frac{P_1}{\cos^2(x-y)}\right] dx\, dy.$$

Par un changement de variables plus général, M. Darboux le transforme en

$$ds^2 = [\psi(x+y) - \psi(x-y)]\, dx\, dy,$$

ψ désignant la fonction doublement périodique

$$\psi(w) = A_0 \frac{\operatorname{cn}^2 w}{\operatorname{dn}^2 w} + B_0 \operatorname{sn}^2 w + \frac{C_0}{\operatorname{sn}^2 w} + D_0 \frac{\operatorname{dn}^2 w}{\operatorname{cn}^2 w} + E_0.$$

Si l'on remplace x par $mx + a$, y par $my + b$, on voit que cet élément linéaire dépend de *huit* constantes arbitraires, A_0, B_0, C_0, D_0, le module k, le multiplicateur m, plus enfin a et b, la constante E_0 disparaissant par soustraction.

Ce beau résultat va s'offrir tout à l'heure, par l'application de principes posés précédemment, d'abord sous la forme trigonométrique, puis sous la forme elliptique

$$ds^2 = [\psi(x+y) - \psi(x-y)]\, dx\, dy,$$

ψ désignant cette fois la fonction

$$\psi(w) = \frac{A p^4(w) + B p^3(w) + C p^2(w) + D p(w) + E}{p'^2(w; g_2, g_3)},$$

où les deux invariants g_2, g_3 sont arbitraires, ainsi que les constantes du numérateur; l'une d'elles disparaissant dans la différence

$$\psi(x+y)-\psi(x-y),$$

il n'en reste plus dans l'élément linéaire que six, abstraction faite des deux constantes qu'on peut ajouter aux deux arguments, ce qui porte à *huit* le nombre total des arbitraires. D'après les propriétés connues de la fonction $\wp$, on n'introduirait pas de nouvelle constante en multipliant x et y par un facteur m; les invariants seuls seraient modifiés. Pour reconnaître l'identité des deux expressions de $\psi(w)$, il suffit de remplacer dans la seconde $\wp$ par sn, au moyen de la formule classique ([1])

$$\wp(w;\, g_2, g_3) = -\frac{(1+k^2)\,m^2}{3}+\frac{m^2}{\operatorname{sn}^2(mw)}.$$

On trouvera ainsi pour $\psi(w)$ une fraction ayant pour dénominateur le produit $\operatorname{sn}^2\operatorname{cn}^2\operatorname{dn}^2$ et pour numérateur un polynôme du quatrième degré en $\operatorname{sn}^2(mw)$, à coefficients arbitraires. C'est précisément ce que devient la première expression de $\psi(w)$ quand on réduit tous ses termes au même dénominateur et qu'on remplace w par mw.

5. Voici maintenant comment on peut obtenir d'autres solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques. La loi de passage nous a permis de trouver (Chap. II et III) toutes les solutions de cette équation dans le cas des surfaces développables, des surfaces à courbure totale constante et des surfaces de révolution. A ces solutions, qui sont assez nombreuses, appliquons la loi de réciprocité qui termine le Chapitre I; nous en obtiendrons de nouvelles, et toutes celles qui ne rentreront pas dans celles d'où l'on part répondront à la question.

Pour éviter des doubles emplois, portons notre attention sur le Tableau du Chapitre III où figurent toutes les solutions provenant

([1]) Halphen, *Théorie des fonctions elliptiques*, t. I, p. 24.

des surfaces de révolution. Les seize expressions de X et Y qu'il contient rentrent toutes, sans exception, soit dans les expressions trouvées pour X et Y à propos des développables, soit dans celles qui correspondent aux surfaces à courbure totale constante (Tableau final du Chapitre II). Il ne pourrait y avoir d'hésitation que pour la solution doublement périodique marquée (IV_4); mais les explications que nous venons de donner relativement aux deux formes de la fonction $\psi(w)$ prouvent que cette solution rentre dans la solution (V) du Tableau relatif aux surfaces à courbure constante.

Il suffit donc d'appliquer la loi de réciprocité aux six solutions provenant des développables et aux cinq solutions de ce dernier Tableau. Voici les résultats trouvés.

I. — *Solutions réciproques provenant des développables.*

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} X = \gamma + mx, & \varphi = c(x+y)^2 + a_0 + a_1(x+y)^{-2},\\ Y = \gamma - my; & f = 4c(x-y)^2 + b_1(x-y) + b_0.\end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} X = \gamma + mx^2, & \varphi = c(x+y)^2 + a_0 + a_1(x+y)^{-2},\\ Y = \gamma + my^2; & f = c(x-y)^2 + b_0 + b_1(x-y)^{-2}.\end{cases}$$

$$\text{(IV)}\quad \begin{cases} X = \gamma + me^{2x}, & \varphi = c + a_0 e^{-(x+y)} + a_1 e^{-2(x+y)},\\ Y = \gamma; & f = c + b_0 e^{-(x-y)} + b_1 e^{-2(x-y)}.\end{cases}$$

$$\text{(V)}\quad \begin{cases} X = \gamma + m e^{2x}, & \varphi = c + a_0 \,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y) + a_1 \,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y),\\ Y = \gamma + m e^{-2y}; & f = c + b_0 e^{-(x-y)} + b_1 e^{-2(x-y)}.\end{cases}$$

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} X = \gamma + m\,\mathrm{Ch}(2x), & \varphi = c + a_0 \,\mathrm{Ch}^{-2}(x+y) + a_1 \,\mathrm{Sh}^{-2}(x+y),\\ Y = \gamma + m\,\mathrm{Ch}(2y); & f = c + b_0 \,\mathrm{Ch}^{-2}(x-y) + b_1 \,\mathrm{Sh}^{-2}(x-y).\end{cases}$$

II. — *Solutions réciproques provenant des surfaces à courbure constante.*

$$\text{(I)}\quad \begin{cases} X = \gamma, \qquad Y = \gamma - my^{-2};\\ \varphi(x+y) = \mathrm{A}(x+y)^4 + \mathrm{B}(x+y)^3 + \mathrm{C}(x+y)^2 + \mathrm{D}(x+y) + \mathrm{E}.\end{cases}$$

$$\text{(II)}\quad \begin{cases} X = \gamma, \qquad Y = \gamma - m\sin^{-2} y;\\ \varphi(x+y) = \mathrm{A}\sin^4(x+y) + \mathrm{B}\sin^3(x+y)\cos(x+y)\\ \qquad + \mathrm{C}\sin^2(x+y)\cos^2(x+y)\\ \qquad + \mathrm{D}\sin(x+y)\cos^3(x+y) + \mathrm{E}\cos^4(x+y).\end{cases}$$

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} X = \gamma + mx^{-2}, \qquad Y = \gamma + my^{-2};\\ \varphi(x+y) = \mathrm{A}(x+y)^6 + \mathrm{B}(x+y)^4 + \mathrm{C}(x+y)^2 + \mathrm{D} + \mathrm{E}(x+y)^{-2};\end{cases}$$

$$(\text{IV})\quad \left\{\begin{aligned} &X = \gamma + m \sin^{-2} 2x, \qquad Y = \gamma + m \sin^{-2} 2y;\\ &\varphi(x+y) = \frac{A \sin^8(x+y) + B \sin^6(x+y) + C \sin^4(x+y) + D \sin^2(x+y) + E}{\sin^2(x+y)\cos^2(x+y)}.\end{aligned}\right.$$

$$(\text{V})\quad \left\{\begin{aligned} &X = \gamma + m\,p(2x), \qquad Y = \gamma + m\,p(2y);\\ &\varphi(x+y) = \frac{A p^4(x+y) + B p^3(x+y) + C p^2(x+y) + D p(x+y) + E}{p'^2(x+y; g_2, g_3)}.\end{aligned}\right.$$

Dans les solutions du second groupe nous n'avons pas écrit f, qui est la même fonction de $x-y$ que φ de $x+y$.

Le dernier élément linéaire du premier groupe et le dernier du second ne diffèrent pas de celui de M. Darboux, pris sous ses deux formes trigonométrique et elliptique. Nous n'avons pas écrit la solution I du premier groupe, parce que l'élément linéaire qu'elle fournit convient à une surface de révolution. On remarquera que dans le premier groupe les fonctions φ et f sont différentes, tandis qu'elles sont les mêmes dans le second.

II. — Uniformité des solutions.

4. Dans les dix solutions que nous venons d'obtenir, les quatre fonctions X, Y, φ et f sont des *fonctions uniformes*. C'est là une propriété fort importante, qui appartient, comme nous allons le faire voir, à *toutes* les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques.

Théorème. — *Dans tout système de solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques*

$$\begin{aligned} &2X(\varphi''-f'') + 3X'(\varphi'-f') + X''(\varphi-f)\\ &\quad = 2Y(\varphi''-f'') + 3Y'(\varphi'+f') + Y''(\varphi-f)\end{aligned}$$

les quatre fonctions $X(x)$, $Y(y)$, $\varphi(x+y)$ *et* $f(x-y)$ *sont nécessairement uniformes.*

Tout revient évidemment à prouver que *l'une* de ces fonctions, Y par exemple, est uniforme; le même raisonnement est valable pour X. Dès lors, X et Y étant uniformes, la loi de réciprocité montre que φ

et f le sont aussi. Car, si φ et f pouvaient être multiformes, il existerait, en vertu de la loi de réciprocité, une solution dans laquelle X et Y seraient multiformes. Je dis donc que Y ne peut pas admettre deux déterminations différentes pour chaque valeur de y.

On pourrait être tenté de raisonner ainsi : l'équation proposée admettrait les deux solutions X_0, Y_1 et X_0, Y_2, d'où la solution plus générale

$$X = (S_1 + S_2)X_0, \qquad Y = S_1 Y_1 + S_2 Y_2,$$

et l'on voit que la différence

$$X - Y = S_1(X_0 - Y_1) + S_2(X_0 - Y_2)$$

ne serait pas déterminée *à un facteur constant près*. Donc (n° **1**) l'élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ conviendrait à une surface de révolution. Or, nous avons déterminé, au Chapitre III, toutes les solutions de l'équation fondamentale dans le cas des surfaces de révolution, et nous n'avons trouvé, aussi bien pour X et Y que pour φ et f, d'autres expressions que des expressions uniformes. Mais ceci prouve seulement que Y ne peut prendre plusieurs déterminations quand l'élément linéaire est donné, c'est-à-dire que, si les fonctions φ et f sont multiformes, quand on a choisi une détermination pour chacune d'elles, les fonctions X et Y ne peuvent prendre *qu'une seule* de leurs déterminations, si elles en ont plusieurs. Mais on ne peut pas exclure *a priori* l'hypothèse où l'équation fondamentale serait vérifiée par un couple de déterminations X_1, Y_1 de X et Y, avec un couple de déterminations φ_1 et f_1 de φ et f, et aussi par un autre couple de déterminations X_2 et Y_2 avec un second couple de déterminations φ_2 et f_2. Le raisonnement précédent doit donc être rejeté.

3. *Première démonstration.* — Nous nous restreindrons aux fonctions qui n'offrent dans le plan aucune ligne de discontinuité, non plus que leurs dérivées des deux premiers ordres. Soit $\psi(z)$ une fonction multiforme de cette espèce et soit z_0 l'un de ses points critiques. Si l'on part d'un point z avec une détermination $\psi_1(z)$ et qu'on fasse décrire à la variable un chemin fermé entourant z_0, quand on revient en z, la fonction a pris une autre détermination $\psi_2(z)$. Sa dérivée, ne cessant pas d'être définie par la limite du rapport

$$\frac{\psi(z+h)-\psi(z)}{h},$$

et n'éprouvant pas de discontinuité, sera devenue, quand le contour se ferme, la dérivée de la détermination finale $\psi_2(z)$.

Cela étant, supposons que les fonctions φ et f soient *données,* c'est-à-dire qu'on ait, si elles sont multiformes, adopté pour chacune d'elles une détermination fixe, φ_1 et f_1, pour les valeurs initiales x et y des variables, ainsi qu'une détermination fixe X_0 pour X, si cette fonction n'est pas uniforme. Supposons, d'autre part, que Y soit multiforme et qu'une de ses déterminations Y_1 vérifie l'équation ainsi préparée. Désignons par y_0 l'affixe d'un point critique de Y; nous pouvons écrire

$$\varphi(x+y)=\varphi[(x+y_0)+(y-y_0)],$$
$$f(x-y)=f[(x-y_0)-(y-y_0)];$$

par suite, nous attribuerons à x une valeur constante, telle que le point x ne soit pas critique pour X, X' et X'', ni le point $t=x+y_0$ pour $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ni le point $z=x-y_0$ pour $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$. Enfin, faisons décrire à y une très petite courbe entourant le point critique y_0. Durant tout ce parcours, la fonction Y et ses dérivées Y', Y'', étant supposées solutions de l'équation

$$\begin{aligned}2Y(\varphi''-f'')+3Y'(\varphi'+f')+Y''(\varphi-f)\\ =2X(\varphi''-f'')+3X'(\varphi'-f')+X''(\varphi-f),\end{aligned}$$

ne cessent pas de la vérifier. Or, à la fin, Y se trouve avoir changé sa détermination primitive Y_1 en une autre détermination Y_2 et, d'après la remarque initiale, les dérivées Y', Y'' sont devenues les dérivées Y'_2, Y''_2 de cette détermination finale Y_2. Par contre, d'après les hypothèses faites sur x, les neuf fonctions φ, φ', φ'', f, f', f'', X, X', X'' n'ont pas changé.

Il suit de là que Y ne peut être multiforme, puisque ses deux déterminations seraient solutions de l'équation fondamentale *pour le même* *élément linéaire*, φ et f étant fixés. C'est ce qui a été reconnu impossible (n° **1**).

6. *Seconde démonstration.* — On peut encore prouver notre proposition, grâce à une propriété tout à fait particulière de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques : c'est qu'elle peut être intégrée deux fois, de manière à fournir Y par de simples quadratures, quand les autres fonctions sont considérées comme connues. Écrivons-la, en effet, comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}&[Y'(\varphi-f)+2Y(\varphi'+f')]\\&=2X(\varphi''-f'')+3X'(\varphi'-f')+X''(\varphi-f),\end{aligned}$$

et intégrons les deux membres par rapport à y ; en posant

$$t=x+y,\qquad z=x-y,$$
$$\varphi_0(t)=\int\varphi(t)\,dt,\qquad f_0(z)=\int f(z)\,dz,$$

nous trouvons immédiatement

$$\begin{aligned}Y'&(\varphi-f)+2Y(\varphi'+f')\\&=2X(\varphi'+f')+3X'(\varphi+f)+X''(\varphi_0+f_0)+\xi(x).\end{aligned}$$

La fonction $\xi(x)$ introduite par l'intégration se détermine en donnant à y une valeur constante y_0 ; on voit qu'elle est composée linéairement avec les fonctions φ_0 et f_0, ainsi que φ et f, φ' et f', X, X' et X'' ; elle dépend aussi des valeurs b_0 et b'_0 de Y et de Y' au point y_0, que nous supposons être un point ordinaire pour Y.

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par $\varphi-f$; le premier membre devient la dérivée de $Y(\varphi-f)^2$ par rapport à y ; intégrons une fois de plus ; il vient

$$\begin{aligned}Y(\varphi-f)^2=X(\varphi-f)^2+3X'&\left[\int_a^{x+y}\varphi^2(t)\,dt-\int_b^{x-y}f^2(z)\,dz\right]\\&+\frac{X''}{2}(\varphi_0+f_0)^2+\xi(x)(\varphi_0+f_0)+\xi_1(x).\end{aligned}$$

La fonction $\xi_1(x)$ se déterminera en faisant $y = y_0$; elle est composée comme $\xi(x)$ avec les mêmes éléments auxquels s'ajoutent seulement les intégrales de $\varphi^2(t)$ et de $f^2(z)$, prises la première entre a et $x + y_0$, la seconde entre b et $x - y_0$.

Nous obtenons pour Y, en divisant par $(\varphi - f)^2$, une expression dans laquelle x semble figurer, mais qui en est indépendante. Il s'agit de prouver que Y n'a qu'une seule valeur, quand on se donne y. Nous supposerons que les fonctions X, X′, X″ et les fonctions φ, φ', f, f' ne présentent pas dans le plan de lignes de discontinuité ([1]), de sorte que les fonctions φ_0 et f_0 et les deux autres intégrales qui figurent dans l'expression de Y n'en présenteront pas non plus, et nous désignerons par $F(x, y)$ cette expression de Y; puis, laissant x variable, nous attribuerons à y une valeur constante b. Je dis que, b étant donné, Y n'a qu'une valeur.

Comment concevoir que Y passe d'une détermination $Y_1(b)$ à une autre $Y_2(b)$? Cela ne peut arriver que pour deux raisons :

1° Ou bien parce que les fonctions φ_0, f_0, φ, f, φ', f', X, X′, X″ sont susceptibles de plusieurs déterminations;

2° Ou bien (et ce cas n'exclut pas le précédent) parce qu'il existe dans le plan des x des lignes de discontinuité pour l'expression $F(x, b)$. Mais cette expression a ses deux termes, numérateur et dénominateur, formés par addition et multiplication de fonctions supposées dépourvues de lignes de discontinuité. Elle ne peut présenter elle-même de pareille ligne, sauf peut-être des lignes le long desquelles elle s'offrirait sous la forme o:o.

Soit (γ) une pareille courbe, le long de laquelle le numérateur et le dénominateur $[\varphi(x + b) - f(x - b)]^2$ seraient constamment nuls. Il existera, de part et d'autre de (γ) ou d'un tronçon de (γ), un espace où la détermination de $\varphi - f$ que l'on considère sera holomorphe; par suite, cette différence sera nulle dans toute cette portion finie du plan des x. Si ce fait ne se produit que pour des valeurs isolées de b, il n'importe pas : une fonction Y n'est multiforme que si, en tous les points d'un espace, elle a plusieurs valeurs. Si le fait sub-

---

([1]) Nous supposons, de plus, que ces fonctions n'ont que des points critiques isolés.

siste pour des valeurs de b formant un espace, il y a un domaine à deux variables x et y, dans lequel la différence $\varphi - f$ est toujours nulle. Mais, dans cette hypothèse, il n'y a plus de problème, l'équation fondamentale devenant indéterminée en X et Y par l'évanouissement identique de tous ses coefficients.

Reste donc à examiner l'hypothèse que les fonctions $\varphi_0(x+b)$, $f_0(x-b)$, $\varphi(x+b)$, ... ont des déterminations multiples. Si l'on part d'un point x du plan des x avec un système de déterminations, on peut y revenir avec *tout* autre système en décrivant un chemin convenable (c) comprenant un ou plusieurs des points critiques. Quand on passe d'un point de ce contour au point infiniment voisin, l'expression $F(x, b)$ ne varie pas d'une manière continue, sans quoi Y dépendrait de x. Donc, au moins pendant une certaine partie du parcours, F conserve la *même* valeur constante, et, s'il en est ainsi jusqu'au bout, Y est uniforme. Pour que Y passe de sa détermination initiale Y_1 à une autre détermination Y_2, il faut qu'il existe sur la ligne (c) un point M, où la fonction F éprouve une discontinuité brusque. Cela ne peut arriver que si la valeur de x au point M fait prendre à F la forme $0:0$, et, par suite, est un zéro de la fonction

$$\varphi(x+b) - f(x-b).$$

Si ce point est isolé, on l'évitera en décrivant le contour (c). S'il n'en est pas ainsi, les zéros de cette fonction $\varphi(x+b) - f(x-b)$ ne pourront s'accumuler autour du point M, car alors elle ne pourrait être développée en série de Taylor autour de ce point. Ils formeront donc une ligne, ou couvriront un espace, ce que nous avons démontré être impossible.

Remarque. — Nous avons négligé deux hypothèses secondaires sur l'expression $F(x, b)$, qui sont comprises comme cas limites dans l'hypothèse 2°; ce sont : 1° le cas où $F(x, b)$ aurait une *même* valeur constante dans tout le plan des x, et d'autres valeurs constantes sur certaines lignes de ce plan; mais alors ces lignes seraient des lignes de zéros pour la fonction $\varphi(x+b) - f(x-b)$; 2° le cas où $F(x, b)$ aurait une *même* valeur constante dans tout le plan, sauf en certains points isolés. Il est facile de voir que ces points ne peuvent être que les zéros de la fonction $\varphi(x+b)-f(x-b)$ ou les points critiques des fonctions $\varphi_0(x+b), f_0(x-b), \ldots$.

Si l'un des points critiques rend quelques-unes de ces fonctions infinies, il ne faudra pas donner à x *directement* cette valeur dans l'expression $F(x, b)$, car alors les fonctions susdites perdent toute signification. Si le point critique laisse à ces fonctions des valeurs finies et n'est pas en même temps un zéro de $\varphi(x+b)-f(x-b)$, le mode de composition de $F(x, b)$ montre qu'en ce point précis la valeur de cette expression ne peut différer brusquement de sa valeur constante pour les points voisins. Enfin, s'il s'agit d'un zéro de

$$\varphi(x+b)-f(x-b),$$

lequel peut être en même temps un point critique, on ne devra pas donner à x *directement* cette valeur dans l'expression $F(x, b)$ qui, prenant la forme o : o, n'aurait plus de signification (¹).

(¹) [C'est ici le premier des deux seuls passages de ce Mémoire qui soient visés comme imparfaits dans le Rapport de l'Académie (*Comptes rendus*, t. CXV, p. 1122). Le raisonnement du texte a besoin d'être complété. Il prouve seulement que, lorsqu'on assigne à x et à y des valeurs fixes $x=a, y=b$, et qu'on choisit pour la fonction Y (momentanément supposée multiforme) une certaine détermination Y_1, quel que soit le chemin qu'on fasse ensuite parcourir *à la variable* x dans son plan pour revenir à son point de départ $x=a$, on retrouvera finalement pour Y la même détermination Y_1. Pour établir complètement l'uniformité de la fonction $Y(y)$, il suffit donc de montrer que tout chemin décrit *par la variable* y dans son plan, partant du point b pour y revenir, peut être remplacé par un chemin convenable décrit par la variable x dans son plan, du point a au point a, tandis que y garde constamment la valeur b.

Soient en effet t_i, z_j les points critiques des diverses fonctions de $t=x+y$ et de $z=x-y$ qui figurent dans l'expression de Y. Quand, ayant pris $x=a$, on fait varier y seulement, les points critiques de ces fonctions ont pour affixes $y_i=t_i-a$, $y_j=a-z_j$. Tout contour fermé passant en b équivaut, comme on sait, à une succession de lacets (Y_i) et (Y_j) joignant le point b aux points y_i et y_j. Désignant par y un point du lacet (Y_i) et par x le point correspondant du chemin (X_i) que nous voulons substituer à (Y_i), on a respectivement le long de ces deux contours

$$t=a+y, \qquad t=x+b.$$

Il suffira donc, pour que t acquière la même suite de valeurs le long de ces

III. — Points essentiels, pôles et périodes.

7. L'expression dont nous venons de faire usage pour montrer l'uniformité de Y met en évidence un autre résultat important : c'est qu'*aucune solution de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques n'admet de point singulier essentiel à distance finie*. Nous avons trouvé

$$Y = \frac{\left\{ \begin{array}{r} X[\varphi(x+y)-f(x-y)]^2 + 3X'\left[\int_a^{x+y} \varphi^2(t)\,dt + \int_b^{x-y} f^2(z)\,dz\right] \\ + \frac{X''}{2}(\varphi_0+f_0)^2 + \xi(x)(\varphi_0+f_0) + \xi_1(x) \end{array} \right\}}{[\varphi(x+y)-f(x-y)]^2},$$

et reconnu que Y est une fonction uniforme de y. On aura donc sa valeur, pour y donné, en attribuant à x une valeur quelconque. Soit y_1 la valeur considérée ; ayant toujours

$$\varphi(x+y) = \varphi[(x+y_1)+(y-y_1)],$$
$$f(x-y) = f[(x-y_1)-(y-y_1)],$$

---

deux chemins, de poser

$$a+y = x+b, \qquad x = y+a-b.$$

De même, soient (Y_j) un lacet relatif à une fonction de z et (X_j) le chemin qu'on veut lui substituer. Les relations

$$z = a-y, \qquad z = x-b,$$

qui définissent z le long de ces deux contours, montrent que z aura les mêmes valeurs suivant l'un ou suivant l'autre, si l'on fait correspondre les points x de (X_j) aux points y de (Y_j) par la formule

$$a-y = x-b, \qquad x = a+b-y.$$

Il faut évidemment qu'aucun des points $t_i - a$ ne coïncide avec l'un des points $a - z_j$. Mais, si l'on avait $t_i - a = a - z_j$, il suffirait de changer tant soit peu la valeur de a pour qu'il n'en fût plus ainsi.

Enfin, il faut encore qu'aucun des points singuliers $t_i - b$, $z_j + b$ du plan des x ne se confonde avec l'un des points critiques de l'une des fonctions de x seulement qui figurent dans l'expression de Y ; mais, si cela était, il suffirait de changer tant soit peu la valeur de b pour que la coïncidence n'eût plus lieu.]

nous donnerons à x une valeur telle que le point x ne soit pas un pôle pour X, non plus que pour ξ et ξ_1, ni le point $t = x + y_1$ pour $\varphi(t)$, ni le point $z = x - y_1$ pour $f(z)$. Dans ces conditions, les fonctions $\varphi, \ldots, f, \ldots$, que nous savons uniformes, pourront se développer par la formule de Taylor suivant les puissances de $y - y_1$, pourvu que y soit suffisamment voisin de y_1, et il sera permis de réunir en une seule les diverses séries provenant des différents termes du numérateur. Il vient ainsi

$$Y = \frac{X_0 + X_1(y-y_1) + X_2(y-y_1)^2 + \ldots}{\left[\varphi(x+y_1) - f(x-y_1) + (y-y_1)(\varphi' + f') + \frac{(y-y_1)^2}{2}(\varphi'' - f'') + \ldots\right]^2},$$

ce qui montre que le point $y = y_1$ ne peut jamais être un point essentiel pour Y. En effet, si l'on n'a pas

$$\varphi(x+y_1) - f(x-y_1) = 0,$$

le dénominateur reste fini pour $y = y_1$ et le point est un point ordinaire. Dans le cas contraire, c'est un pôle, et je dis que ce pôle est double. C'est évident si l'on n'a pas

$$\varphi'(x+y_1) + f'(x-y_1) = 0.$$

Mais, comme la relation $\varphi - f = 0$ a lieu pour toute valeur de x, sauf certaines valeurs singulières, on en déduit, en la différentiant par rapport à x,

$$\varphi'(x+y_1) - f'(x-y_1) = 0.$$

Cette équation et la précédente entraînent $\varphi = \text{const.}$, $f = \text{const.}$, ce qu'on ne suppose pas. Nous arrivons ainsi à cette conclusion :

Les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques n'ont à distance finie d'autres singularités que des pôles, et chacun de ces pôles est double.

On ferait en effet la même démonstration pour X que pour Y, et la loi de réciprocité suffit pour étendre la même propriété aux fonctions φ et f.

On pourrait d'ailleurs la reconnaître sur l'équation fondamentale elle-même

$$(X'' - Y'')(\varphi - f) + 3X'(\varphi' - f') \\ - 3Y'(\varphi' + f') + 2(X - Y)(\varphi'' - f'') = 0,$$

avant toute intégration. Si en effet y_1 est un pôle d'ordre n pour Y, c'est un pôle d'ordre $n+1$ pour Y', d'ordre $n+2$ pour Y'', ce qui exige d'abord que l'on ait

$$\varphi(x + y_1) - f(x - y_1) = 0.$$

Alors en développant en série les six fonctions $\varphi, \varphi', \varphi'', f, f', f''$ ainsi que Y, Y', Y'' suivant les puissances de $y - y_1$ (ce qui est légitime sous les réserves faites un peu plus haut), il suffit d'ordonner le premier membre de l'équation fondamentale suivant les puissances croissantes, négatives et positives de $y - y_1$, pour reconnaître que l'exposant n est nécessairement égal à 2. On voit de plus que *le résidu relatif à tout pôle $y = y_1$ est nul.*

Mais on peut aller plus loin et déduire de l'identité

$$\varphi(x + y_1) = f(x - y_1)$$

des conséquences qui nous serviront. Cette identité ayant lieu quel que soit x, remplaçons x par $x + y_1$; il vient

$$f(x) = \varphi(x + 2y_1),$$

d'où cette expression de λ

$$\lambda = \varphi(x + y) - f(x - y) = \varphi(x + y) - \varphi(x - y + 2y_1),$$

ce qui peut encore s'écrire ainsi

$$\lambda = \varphi[(x + y_1) + (y - y_1)] - \varphi[(x + y_1) - (y - y_1)].$$

Il suffit de poser $y - y_1 = y'$ pour trouver

$$\lambda = \varphi(x + y' + y_1) - \varphi(x - y' + y_1);$$

c'est-à-dire qu'il a suffi de transporter l'origine des y au pôle y_1 de la fonction Y pour que la fonction f devienne la même fonction de $x-y$ que φ de $x+y$. Cela fait, je dis que la fonction Y est une fonction paire de la nouvelle variable y. Introduisons en effet l'hypothèse $f(w)=\varphi(w)$ dans l'expression générale trouvée pour Y; il vient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Y}[\varphi(t)-\varphi(z)]^2\\
&\quad=\mathrm{X}[\varphi(t)-\varphi(z)]^2+3\mathrm{X}'\left[\int_a^{x+y}\varphi^2(t)\,dt+\int_b^{x-y}\varphi^2(z)\,dz\right]\\
&\qquad+\frac{\mathrm{X}''}{2}[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)]^2+\xi(x)[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)]+\xi_1(x),
\end{aligned}$$

et l'on voit que le changement de y en $-y$, qui revient à l'échange de t avec z et de z avec t, ne modifie pas Y.

Si l'on suppose que la fonction X ait un pôle x_1, on trouvera comme précédemment

$$\varphi(x_1+y)=f(x_1-y),$$

d'où l'on conclut $\varphi(y)=f(2x_1-y)$ et par suite

$$\begin{aligned}
\lambda&=f(2x_1-x-y)-f(x-y)\\
&=f[(x_1-x)-(y-x_1)]-f[-(x_1-x)-(y-x_1)].
\end{aligned}$$

Si donc on pose $x_1-x=x'$ et si, pour abréger l'écriture, on fait $x_1-y=y'$, il vient

$$\lambda=f(x'+y')-f(-x'+y').$$

Il suffira donc d'échanger x' et y' pour ramener les deux fonctions φ et f à être les mêmes. Les pôles de Y et ceux de X ont donc ce caractère commun, qu'en y transportant l'origine et échangeant (pour ceux de X) les noms des variables, on ramène les deux fonctions φ et f à être les mêmes. Cette propriété peut s'énoncer autrement. En effet, les deux relations de départ

$$\varphi(x+y_1)=f(x-y_1),\qquad \varphi(x_1+y)=f(x_1-y)$$

entraînent l'une et l'autre cette conséquence que $f'^2(w)$ est la même fonction de $f(w)$ que $\varphi'^2(w)$ de $\varphi(w)$. Nous dirons donc : *Si l'une des fonctions* X *et* Y *a un pôle à distance finie, la fonction* f'^2 *s'exprime en* f *comme* φ'^2 *en* φ. La loi de réciprocité permet d'ajouter : *Si l'une des fonctions* φ *et* f *admet un pôle à distance finie,* X'^2 *s'exprime en* X *comme* Y'^2 *en* Y. Nous conviendrons de dire que les fonctions φ et f *ne sont pas distinctes* quand f'^2 s'exprime en f comme φ'^2 en φ, et qu'*elles sont distinctes* dans le cas contraire; de même pour X et Y.

Nous allons maintenant classer les solutions d'après leurs pôles et leurs périodes. A cet effet, reportons-nous à l'expression de Y telle qu'elle a été particularisée dans l'hypothèse $f(w) = \varphi(w)$. On a

$$\begin{aligned}
&Y[\varphi(t)-\varphi(z)]^2\\
&\quad = X[\varphi(t)-\varphi(z)]^2 + 3X'\left[\int_a^{x+y}\varphi^2(t)\,dt + \int_b^{x-y}\varphi^2(z)\,dz\right]\\
&\qquad + \frac{X''}{2}[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)]^2 + \xi(x)\,[\varphi_0(t)+\varphi_0(z)] + \xi_1(x).
\end{aligned}$$

Cette expression montre que, quand les deux fonctions φ et f ne sont pas distinctes, si elles admettent la période 2ω, Y et par suite X admettent la même période 2ω (ou une de ses parties aliquotes). En effet, si les intégrales

$$\varphi_0(w) = \int \varphi(w)\,dw, \qquad \psi(w) = \int \varphi^2(w)\,dw$$

ne sont pas périodiques, elles se composeront chacune d'une partie périodique et d'un terme linéaire en w. Or, si l'on effectue les sommes $\varphi_0(x+y)+\varphi_0(x-y)$ et $\psi(x+y)+\psi(x-y)$, les parties non périodiques seront chacune de la forme $m(x+y)+m(x-y)$, c'est-à-dire indépendantes de y. Donc Y admet la période 2ω.

Théorème. — *Si l'une des quatre fonctions* X, Y, φ *et* f *admet plus d'un pôle à distance finie, les quatre fonctions sont périodiques; si l'une d'elles admet trois pôles formant un triangle, toutes les quatre sont doublement périodiques; si l'une d'elles n'a qu'un seul pôle à distance finie, les trois autres n'en ont pas davantage.*

Supposons par exemple que la fonction Y ait deux pôles à distance finie. En transportant l'origine des y en l'un de ces pôles, on rend les fonctions φ et f identiques. Soit alors ω l'affixe du second pôle. D'après une remarque déjà faite, l'équation fondamentale ne peut être vérifiée pour $y=\omega$ que si le coefficient de $X''-Y''$ est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\varphi(x+\omega)=\varphi(x-\omega),$$

puisqu'ici $f(w)=\varphi(w)$, et cela quel que soit x. En conséquence la fonction φ admet la période 2ω, qui, en vertu du lemme, appartiendra aussi à Y et à X.

Le même raisonnement prouve que, si Y présente trois pôles $y=0$, $y=\omega$, $y=\omega'$ formant un triangle, la fonction φ admet les périodes 2ω et $2\omega'$; donc aussi Y et X les admettent.

Enfin, si Y n'admet qu'un pôle à distance finie, les autres fonctions n'en ont pas davantage (elles pourraient n'en pas avoir); si l'une d'elles en effet en admettait deux, les quatre fonctions seraient périodiques, donc aussi en particulier Y, qui aurait plus d'un pôle à distance finie.

IV. — Solutions doublement périodiques.

8. Théorème. — *Tout élément linéaire doublement harmonique et doublement périodique rentre dans le type de M. Darboux*

$$ds^2=[\varphi(t-t_0)-\varphi(z-z_0)]\,dx\,dy,$$

où l'on a posé

$$\varphi(w)=\frac{A}{\operatorname{sn}^2 mw}+B\operatorname{sn}^2 mw+C\frac{\operatorname{dn}^2 mw}{\operatorname{cn}^2 mw}+D\frac{\operatorname{cn}^2 mw}{\operatorname{dn}^2 mw}+E.$$

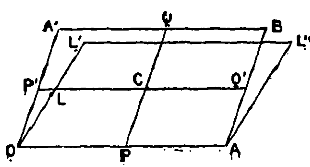
Nous supposons doublement périodique l'une des fonctions φ et f, la dernière par exemple. Comme elle présente à distance finie des pôles formant réseau, des raisonnements déjà faits [1] prouvent d'abord

[1] *Voir* l'article précédent : *Points essentiels, pôles et périodes.*

que les fonctions X et Y ne sont pas distinctes, de plus, qu'elles sont doublement périodiques; dès lors X et Y ont des pôles, ce qui exige que les fonctions f et φ ne soient pas distinctes. Nous allons chercher $\varphi(z)$.

Supposons marqués dans le plan des z tous les pôles de la fonction $\varphi(z)$. Nous en choisirons trois (d'affixes z_0, $z_0+\omega$, $z_0+\omega'$) qui déterminent un triangle d'aire minima.

La différence des affixes de deux pôles quelconques étant une demi-période, le parallélogramme dont les côtés OA et OA' sont les doubles



de OP et de OP' est un parallélogramme de périodes et un parallélogramme *élémentaire,* ou d'aire minima. Les sommets O, A, B, A' sont des pôles, ainsi que les milieux P, Q', P', Q de ses côtés, à raison de la double périodicité. Je dis qu'*il ne peut contenir d'autre pôle que son centre* C.

D'après une propriété que nous venons de rappeler, étant donnés deux pôles, le symétrique de chacun d'eux par rapport à l'autre est aussi un pôle. Il suit de là que sur le périmètre OABA'O il ne peut exister d'autres pôles que ceux que nous connaissons déjà, sans quoi le parallélogramme ne serait pas élémentaire. Il n'y en a pas non plus à l'intérieur, car, de L, par exemple, on déduirait L' et le parallélogramme OL'L''A, d'aire moindre que le proposé. Si L était sur une des médianes, L' serait sur le périmètre, ce qui ne se peut.

Cela posé, la fonction $\varphi(z)$ ne peut avoir dans un parallélogramme de périodes $(2\omega, 2\omega')$ plus de quatre pôles,

$$z_0, \quad z_0+\omega, \quad z_0+\omega', \quad z_0+\omega+\omega'.$$

Chacun de ces pôles est *double* et a son *résidu nul.* La fonction $\varphi(z)$ n'ayant pas de point essentiel à distance finie, on peut appliquer la formule de décomposition des fonctions doublement périodiques, due à

M. Hermite. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\varphi(z-z_0) = {} & A\frac{d}{dz}\zeta(z-z_0)\\ & + B\frac{d}{dz}\zeta(z-z_0-\omega) + C\frac{d}{dz}\zeta(z-z_0-\omega)\\ & + D\frac{d}{dz}\zeta(z-z_0-\omega-\omega') + E,\end{aligned}$$

expression qui ne diffère que par la forme de celle de M. Darboux.

L'élément linéaire correspondant

$$ds^2 = [\varphi(t-t_0) - \varphi(z-z_0)]\, dx\, dy$$

dépend de huit constantes arbitraires A, B, C, D, ω, ω', t_0 et z_0. Les deux périodes 2ω, $2\omega'$, prises comme arbitraires, remplacent le module k et le multiplicateur m de la formule primitivement écrite pour $\varphi(\wp)$.

Remarque. — Si le point C n'est pas un pôle, il n'y en aura que trois. Si l'une ou l'autre des périodes peut être réduite de moitié, $\varphi(z)$ n'aura plus que deux pôles; enfin, si ω et ω' sont des périodes, il n'y a plus qu'un pôle double, comme dans l'élément linéaire des surfaces à courbure totale constante.

V. — Achèvement du problème.

9. Nous allons faire servir à la recherche des éléments linéaires doublement harmoniques une remarque très simple, mais importante. L'équation fondamentale

$$\begin{aligned}&2(X-Y)(\varphi''-f'') + 3X'(\varphi'-f')\\ &\quad - 3Y'(\varphi'+f') + (X''-Y'')(\varphi-f) = 0\end{aligned}$$

exprime que, partant de l'élément linéaire

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\, dx\, dy$$

et opérant le changement de variables

$$d\xi = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}, \qquad d\eta = \frac{dy}{\sqrt{Y(y)}},$$

on a identiquement

$$[\varphi(x+y) - f(x-y)]\sqrt{XY} = \varphi_1(\xi+\eta) - f_1(\xi-\eta),$$

ou que l'élément linéaire considéré conserve la forme harmonique. Dès lors il est évident que, partant de

$$ds^2 = [\varphi_1(\xi+\eta) - f_1(\xi-\eta)]\, d\xi\, d\eta,$$

et opérant le changement de variables

$$dx = \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi(\xi)}}, \qquad dy = \frac{d\eta}{\sqrt{H(\eta)}},$$

inverse du précédent moyennant les hypothèses

$$X(x)\Xi(\xi) = 1, \qquad Y(y)H(\eta) = 1,$$

on retrouvera l'élément linéaire primitif $(\varphi - f)\, dx\, dy$. Ainsi les fonctions $\Xi(\xi)$ et $H(\eta)$ concourent avec $\varphi_1(\xi+\eta)$ et $f_1(\xi-\eta)$ à former une solution de l'équation fondamentale. Mais nous avons démontré que toutes les solutions de cette équation sont uniformes. Ainsi, de même que $X(x)$ est uniforme en x, la fonction $\Xi(\xi)$ est uniforme en ξ. Or elle est égale à l'inverse de $X(x)$. Donc $X(x)$ est une fonction uniforme de ξ comme de x, et nous arrivons à cette conclusion :

Les fonctions $X(x)$ qui concourent à former des solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques doivent être cherchées parmi les fonctions uniformes de x qui deviennent des fonctions uniformes de ξ par le changement de variable

$$d\xi = \frac{dx}{\sqrt{X(x)}}.$$

Étudions les fonctions qui satisfont à cette double obligation d'être uniformes en x et uniformes en ξ. Nous allons voir que ce sont, en général, des fonctions périodiques et nous discuterons les cas dans lesquels certaines périodes ou toutes les périodes disparaissent.

A cet effet, considérons l'intégrale définie qui représente ξ

$$\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{X(x)}},$$

et soit $\xi_1(x)$ la valeur qu'elle acquiert quand, partant de $x = x_0$ avec une détermination du radical, on fait décrire à x un chemin déterminé (chemin 1). Allons maintenant de x_0 en x_0 par un chemin qui entoure diverses racines (¹) de X, mais qui ramène la détermination initiale du radical; si l'on va ensuite de x_0 en x par le chemin 1, on aura

$$\xi = mA + nB + \ldots + \xi_1(x),$$

les A, B, ... étant des périodes. Or la fonction

$$\Xi(\xi) = \frac{1}{X(x)}$$

est uniforme, qu'on l'exprime en ξ ou qu'on l'exprime en x. Donc, étant donné x, elle n'a qu'une seule valeur; or elle se présente, selon que x a décrit le chemin 1 ou le suivant, sous les deux formes

$$\frac{1}{X(x)} = \Xi(\xi_1), \qquad \frac{1}{X(x)} = \Xi(\xi_1 + mA + nB + \ldots).$$

On doit donc avoir

$$\Xi(\xi_1 + mA + nB + \ldots) = \Xi(\xi_1),$$

(¹) Les fonctions $X(x)$ et $Y(y)$ peuvent toujours être supposées avoir des racines, puisque nous avons établi qu'elles n'ont de point essentiel qu'à l'infini. Si elles n'avaient pas de zéros, on les remplacerait par $X - h$, $Y - h$ et les nouvelles équations $X - h = 0$, $Y - h = 0$ auraient nécessairement des racines, en vertu d'un important théorème, découvert par M. Picard.

ce qui prouve à la fois que la fonction Ξ est périodique et que ses périodes A, B, ... se réduisent à deux au plus.

Nous pouvons raisonner de même sur la fonction x,

$$x = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\Xi(\xi)}}.$$

Si x_1 est l'une de ses valeurs, un chemin d'intégration convenable donnera

$$x = x_1(\xi) + \mu\alpha + \nu\beta + \ldots,$$

les α, β, ... étant des périodes; et l'on verra, comme tout à l'heure pour $\Xi(\xi)$, que la fonction $X(x)$ est périodique. En conséquence, *les fonctions* $\Xi(\xi)$ *et* $X(x)$ *sont des fonctions uniformes de leur argument et admettent, en général, deux périodes.* Nous aurons à tenir compte de leurs dégénérescences, d'où trois cas principaux à examiner, suivant que l'une d'elles a deux périodes, n'en a qu'une, ou n'en a aucune.

10. Premier cas : $\Xi(\xi)$ a deux périodes.

Trois hypothèses à faire, suivant que $X(x)$ a deux périodes, n'en a qu'une, ou n'en a pas. Dans les trois hypothèses, nous avons toujours

$$\xi = mA + nB + \xi_1(x), \tag{1}$$

et, si l'on fait précéder le chemin 1, qui donne $\xi_1(x)$, d'un chemin qui échange les deux déterminations de $\sqrt{X(x)}$ au point initial x_0, on aura

$$\xi = m'A + n'B + 2L - \xi_1(x), \tag{2}$$

en désignant par $2L$ l'intégrale ξ prise suivant un lacet. Les formules (1) et (2) fournissent toutes les valeurs de ξ pour une valeur donnée de x. On peut les écrire

$$\xi - L = mA + nB - [L - \xi_1(x)],$$
$$\xi - L = m'A + n'B + [L - \xi_1(x)].$$

On en conclut que la fonction $p(\xi - L)$ aux périodes A et B est une fonction uniforme de x.

Dans tous les cas qui vont suivre, nous aurons à reproduire un même raisonnement, que nous allons faire une fois pour toutes. Supposons qu'une certaine fonction uniforme de ξ, $U_1(\xi)$ soit une fonction uniforme de x, et qu'une certaine fonction uniforme de x, $U(x)$, soit une fonction uniforme de ξ. On voit que U_1 est une fonction de U. De plus, les fonctions que nous considérerons peuvent prendre *toutes* les valeurs. Or, x étant donné, U est déterminée et U_1 n'a qu'une seule valeur. C'est dire que la relation $F(U, U_1) = 0$, qui lie U et U_1, est telle que, quand U est connue, U_1 n'a qu'une seule valeur. Elle est telle aussi que, quand U_1 est donnée, U n'a qu'une seule valeur. Ainsi, les variables U et U_1 sont des fonctions uniformes l'une de l'autre, et cela quelque valeur qu'on attribue à chacune d'elles. Dès lors, on sait qu'elles ne peuvent être liées que par une relation bilinéaire (homographique)

$$CUU_1 + AU + BU_1 + D = 0,$$

dont les coefficients sont des constantes (¹).

(¹) [C'est ici le second point visé par le rapport de l'Académie. Le raisonnement du texte est incorrect, mais l'existence d'une relation homographique entre les fonctions considérées, telles que $p(\xi - L)$ et $p(x - \lambda)$, n'est pas contestable. Rien n'est plus facile que de l'établir rigoureusement comme il suit.

Les formules (1) et (2) peuvent être remplacées par une seule :

$$\text{(I)} \qquad \xi - L = mA + nB \pm [\xi_1(x) - L].$$

Dans le cas le plus général, celui où $X(x)$ admet deux périodes, on aura pareillement

$$\text{(II)} \qquad x - \lambda = \mu\alpha + \nu\beta \pm [x_1(\xi) - \lambda].$$

A toutes les valeurs de x fournies par la formule (II) *pour le même x_1 ne correspondent pas d'autres valeurs de ξ que celles qui sont données par la formule* (I) *pour un même ξ_1; et réciproquement.*

Pour le voir, choisissons deux arguments dans la suite (II), par exemple

$$x' = \lambda + \mu'\alpha + \nu'\beta + (x_1 - \lambda), \qquad x'' = \lambda + \mu''\alpha + \nu''\beta + (x_1 - \lambda).$$

Soient ξ' l'une des valeurs de ξ qui correspondent à x' et ξ'' l'une de celles

Cela posé, examinons les trois hypothèses du premier cas.

Première hypothèse. — L'intégrale x a deux périodes α, β. Ses diverses valeurs pour une valeur donnée de x se répartissent en deux séries

$$x = \mu\alpha + \nu\beta + x_1(\xi), \tag{3}$$

$$x = \mu\alpha + \nu\beta + 2\lambda - x_1(\xi), \tag{4}$$

dont l'origine est bien connue. Nous les écrirons ainsi :

$$x - \lambda = \mu\,\alpha + \nu\,\beta - [\lambda - x_1(\xi)],$$
$$x - \lambda = \mu'\alpha + \nu'\beta + [\lambda - x_1(\xi)].$$

---

qui correspondent à ξ''. A l'argument ξ' correspond pour x une série de valeurs dont x' fait partie; cette série est donc

$$\lambda + \mu\alpha + \nu\beta \pm (\mu'\alpha + \nu'\beta + x_1 - \lambda). \tag{II$'$}$$

A l'argument ξ'' correspond pour x une série de valeurs dont x'' fait partie; cette série est donc

$$\lambda + \mu\alpha + \nu\beta \pm (\mu''\alpha + \nu''\beta + x_1 - \lambda). \tag{II$''$}$$

Les deux séries (II)$'$ et (II)$''$ ont en commun l'argument x_1. Puisque la valeur x_1 figure parmi les valeurs de x qui correspondent soit à ξ', soit à ξ'', on a nécessairement

$$\xi' - \mathrm{L} = m'\mathrm{A} + n'\mathrm{B} \pm [\xi_1(x_1) - \mathrm{L}],$$
$$\xi'' - \mathrm{L} = m''\mathrm{A} + n''\mathrm{B} \pm [\xi_1(x_1) - \mathrm{L}].$$

Rien n'est changé, si x'' est de la forme $\lambda + \mu''\alpha + \nu''\beta - (x_1 - \lambda)$. On fera le même raisonnement sur ξ pour établir la réciproque. On voit par là que, si l'on donne à x toutes les valeurs (II), qui correspondent à une même valeur de la fonction $p(x - \lambda)$ aux périodes α et β, la fonction $p(\xi - \mathrm{L})$ aux périodes A et B n'aura qu'une seule valeur, et réciproquement; en sorte que *ces deux fonctions sont liées par une relation homographique.*

La correspondance entre les valeurs de x et celles de ξ subsiste quel que soit le nombre des périodes qui disparaissent, même si les doubles signes disparaissent aussi. Il existera donc, dans les divers cas de la discussion qui va suivre, une relation homographique entre l'une des fonctions $p(\xi - \mathrm{L})$, $\sin^2(\xi - \mathrm{L})$, $\mathrm{tang}(\xi - \mathrm{L})$ ou $e^{\xi - \mathrm{L}}$, $(\xi - \mathrm{L})^2$, $\xi - \mathrm{L}$ d'une part, et l'une des fonctions $p(x - \lambda)$, $\sin^2(x - \lambda)$, $\mathrm{tang}(x - \lambda)$ ou $e^{x-\lambda}$, $(x - \lambda)^2$, $x - \lambda$ d'autre part.]

On voit que la fonction $\wp(x-\lambda)$, aux périodes α et β, est une fonction uniforme de ξ. Il résulte du raisonnement qui vient d'être exposé, que les deux fonctions $\wp(\xi-\mathrm{L})$ et $\wp(x-\lambda)$ sont liées par une relation homographique. Soit donc

$$\wp(\xi-\mathrm{L})=h+\frac{g}{\mathrm{A}_1\,\wp(x-\lambda)+\mathrm{B}_1}.$$

Il suffit de différentier et d'éliminer $\wp(\xi-\mathrm{L})$, pour trouver

$$\mathrm{X}(x)=\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2=\frac{\mathrm{A}\wp^4(x-\lambda)+\mathrm{B}\wp^3(x-\lambda)+\mathrm{C}\wp^2(x-\lambda)+\mathrm{D}\wp(x-\lambda)+\mathrm{E}}{4\wp^3(x-\lambda)-g_2\,\wp(x-\lambda)-g_3}.$$

C'est l'expression de X que nous avons obtenue (Chap. II), à propos des surfaces à courbure constante. Elle contient huit constantes : les trois coefficients de la transformation homographique, les deux invariants g'_2, g'_3 de $\wp(\xi-\mathrm{L})$, les deux invariants g_2, g_3 et le paramètre λ de la fonction $\wp(x-\lambda)$. Il est clair que $\Xi(\xi)$ a une expression exactement de même forme.

Deuxième hypothèse. — L'intégrale x n'a qu'une période α. Les formules (3) et (4), où maintenant β ne figure plus, montrent que $\sin^2(x-\lambda)$ est une fonction uniforme de ξ (car on peut supposer α égal à π).

C'est ce qu'on déduirait aussi de $\wp(x-\lambda)$ par dégénérescence. Nous concluons ici que $\wp(\xi-\mathrm{L})$ et $\sin^2(x-\lambda)$ sont liés par une relation homographique :

$$\wp(\xi-\mathrm{L})=h+\frac{g}{\mathrm{A}_1\sin^2(x-\lambda)+\mathrm{B}_1}.$$

Différentiant et éliminant $\wp(\xi-\mathrm{L})$, on trouve

$$\mathrm{X}=\frac{\mathrm{A}\sin^8x+\mathrm{B}\sin^6x+\mathrm{C}\sin^4x+\mathrm{D}\sin^2x+\mathrm{E}}{\sin^2x\cos^2x},$$

en négligeant λ. C'est l'expression déjà trouvée (Chap. II) à propos des surfaces à courbure constante. Quant à $\Xi(\xi)$, son expression est, comme dans l'hypothèse précédente, de la forme

$$\Xi(\xi) = \frac{A_2 p^4(\xi - L) + B_2 p^3(\xi - L) + C_2 p^2(\xi - L) + D_2 p(\xi - L) + E_2}{4p^3(\xi - L) - g'_2 p(\xi - L) - g'_3};$$

mais elle dépend d'une constante de moins, puisqu'au lieu de deux périodes de x (ou deux invariants g_2, g_3) il n'y en a plus qu'une.

Il peut arriver aussi que tous les chemins d'intégration suivis par ξ donnent une seule série de valeurs pour x, savoir

$$x = \mu\alpha + x_1(\xi).$$

Alors $p(\xi - L)$ et $\tang x$ (car on peut supposer $\alpha = \pi$) sont liés par une relation homographique, d'où l'on déduit sans peine

$$\begin{aligned} X(x) = A\sin^4 x + B\sin^3 x\cos x \\ + C\sin^2 x\cos^2 x + D\sin x\cos^3 x + E\cos^4 x, \end{aligned}$$

avec cinq arbitraires. L'expression de $\Xi(\xi)$ est de même forme que quand $\sin^2(x - \lambda)$ est uniforme en ξ.

Troisième hypothèse. — L'intégrale x n'a pas de période. Les formules générales (3) et (4) se réduisent actuellement à

$$x = x_1(\xi), \qquad x = 2\lambda - x_1(\xi);$$

ce qu'on peut écrire

$$x - \lambda = -[\lambda - x_1(\xi)], \qquad x - \lambda = +[\lambda - x_1(\xi)].$$

On voit que $(x - \lambda)^2$ est une fonction uniforme de ξ. Par suite, $p(\xi - L)$ et $(x - \lambda)^2$ sont liés par une relation homographique, que nous écrirons, en négligeant λ :

$$p(\xi - L) = h + \frac{g}{A_1 x^2 + B_1}.$$

C'est d'ailleurs ce qu'on obtiendrait par la dégénérescence non périodique de $p(x - \lambda)$. Cette relation, différentiée, donne, par élimination de $p(\xi - L)$,

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{Ax^8 + Bx^6 + Cx^4 + Dx^2 + E}{x^2}.$$

Les cinq coefficients du numérateur sont arbitraires, la relation homographique donnant trois indéterminées auxquelles s'ajoutent les deux invariants g_2' et g_3' de $p(\xi - L)$; une sixième arbitraire est la constante négligée λ. Nous trouvons pour X une expression déjà obtenue (Chap. II) à propos des surfaces à courbure constante. L'expression correspondante de $\Xi(\xi)$ rentre dans celle que nous avons déjà écrite, comme étant de même forme et contenant moins d'arbitraires.

Mais l'intégrale x n'ayant pas de période, il peut ne pas exister de chemin au bout duquel la détermination choisie pour $\sqrt{\Xi(\xi)}$ se reproduise changée de signe. C'est dire que la fonction x est une fonction uniforme de ξ. Alors $p(\xi - L)$ et x sont liés par une relation homographique

$$p(\xi - L) = h + \frac{g}{A_1 x + B_1},$$

d'où l'on tire sans difficulté

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

avec cinq indéterminées provenant, trois de la relation homographique, deux des invariants de $p(\xi - L)$. C'est là encore une expression de X, qui s'est présentée (Chap. II) à propos des surfaces à courbure constante. L'expression correspondante de $\Xi(\xi)$ rentre encore dans le type primitivement considéré.

Il suffit de jeter un coup d'œil sur le Tableau du Chapitre II qui se rapporte aux surfaces à courbure totale constante, mais non nulle, pour voir que nous venons de retrouver les cinq formes de $X(\xi)$ qui y figurent. Les cinq expressions correspondantes de $\Xi(\xi)$ ne diffèrent pas de celle qui est inscrite pour X dans ce Tableau, sous le n° (V).

11. Deuxième cas : $\Xi(\xi)$ n'a qu'une période.

Dans ce second cas, nous n'avons pas à supposer $X(x)$ doublement périodique, ce qui nous ramènerait (sauf échange de ξ en x et de x en ξ) à la seconde hypothèse du premier cas. Notre discussion se trouve ainsi abrégée. Nous commencerons par rappeler les formules (1) et (2) qui deviennent ici

$$\xi - \mathrm{L} = m\mathrm{A} - [\mathrm{L} - \xi_1(x)],$$
$$\xi - \mathrm{L} = m'\mathrm{A} + [\mathrm{L} - \xi_1(x)].$$

En prenant, ce qui est permis, $\mathrm{A} = 2\pi$, on voit que $\sin^2(\xi - \mathrm{L})$ est une fonction uniforme de x. Si la seconde série de valeurs de ξ disparaît, c'est-à-dire si tous les chemins suivis par x donnent seulement

$$\xi = m\mathrm{A} + \xi_1(x),$$

on fera $\mathrm{A} = 2i\pi$ et l'on verra que e^ξ est une fonction uniforme de x. Cela étant, supposons successivement que $\mathrm{X}(x)$ n'a qu'une période, puis qu'elle n'en a pas.

Première hypothèse. — L'intégrale x n'a qu'une période α. Si les divers chemins suivis par ξ donnent deux séries de valeurs pour x, nous aurons, par les formules (3) et (4),

$$x - \lambda = 2\mu\pi - [\lambda - x_1(\xi)],$$
$$x - \lambda = 2\mu'\pi + [\lambda - x_1(\xi)],$$

en appelant 2π la période, ce qui est permis. Donc $\sin^2(x - \lambda)$ est une fonction uniforme de ξ et il existe une relation homographique entre $\sin^2(x - \lambda)$ et $\sin^2(\xi - \mathrm{L})$ ou bien entre $\sin^2(x - \lambda)$ et e^ξ.

Soit d'abord, en négligeant L et λ,

$$\sin^2\xi = h + \frac{g}{\mathrm{A}\sin^2 x + \mathrm{B}}.$$

Nous tirons de là

$$\mathrm{X} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(\mathrm{M}\sin^4 x + \mathrm{N}\sin^2 x + \mathrm{P})(\mathrm{A}\sin^2 x + \mathrm{B})^2}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

et une expression absolument de même forme pour $\Xi(\xi)$. Ces deux expressions rentrent dans un type déjà signalé (1er CAS, 2e *hypothèse*).

Soit maintenant

$$\sin^2 x = h + \frac{g}{Ae^\xi + B}.$$

En différentiant et éliminant ξ, nous trouvons

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(\sin^2 x - h)^2 (P \sin^2 x + Q)^2}{\sin^2 x \cos^2 x},$$

expression qui rentre dans le même type que la précédente. Introduisant ξ au lieu de x, nous avons

$$\Xi(\xi) = \frac{(Me^{2\xi} + Pe^\xi + Q)(Ae^\xi + B)^2}{e^{2\xi}},$$

ce qui donne, après changement de ξ en $2ix$, un polynome homogène et du quatrième degré en $\sin x$ et $\cos x$, compris dans un type déjà rencontré (1er CAS, à la fin).

Il faut maintenant supposer que tous les chemins suivis par ξ ne donnent pour x qu'une seule série de valeurs

$$x = \mu\alpha + x_1(\xi).$$

Si l'on prend $\alpha = 2i\pi$, ce qui est permis, on voit que e^x est une fonction uniforme de ξ. Il n'y a pas lieu de supposer $\sin^2(\xi - L)$ fonction uniforme de x : ce serait l'hypothèse précédente, sauf échange de x en ξ et de ξ en x. On fera donc

$$e^x = h + \frac{g}{Ae^\xi + B}.$$

Cette relation étant de même forme par rapport à x et à ξ, il suffit de calculer $X(x)$. On trouve aisément

$$X(x) = \frac{(Me^x + P)(Ae^x + B)^2}{e^{2x}}.$$

Cette expression est comprise dans celle que nous venons d'obtenir pour Ξ. D'ailleurs, $\Xi(\xi)$ a exactement la même forme. Nous avons épuisé la première hypothèse du second cas.

Deuxième hypothèse. — L'intégrale x n'a pas de période. On a vu qu'alors x^2 ou x est une fonction uniforme de ξ (1^{er} CAS, 3^e *hypothèse*). Il suit de là qu'il existe une relation homographique entre $\sin^2(\xi - L)$ ou e^ξ et x^2 ou x.

1° Soit d'abord, en négligeant L,

$$\sin^2\xi = h + \frac{g}{Ax^2+B}.$$

Cette équation donne

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = Mx^2 + P + \frac{Q}{x^2},$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = M_1 + \frac{P_1}{\sin^2\xi} + \frac{Q_1}{\cos^2\xi}.$$

Ce sont là, parmi les six formes de $X(x)$ qui correspondent aux développables (Chap. II), les deux seules qui ne rentrent pas dans celles que donnent pour la même fonction les surfaces à courbure totale. Comme le montre le Tableau placé au début du Chapitre, dans les solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques déduites par réciprocité de celles qui sont déterminées au Chapitre II, toutes les expressions de X rentrent, soit dans les deux que nous venons d'écrire, soit dans les cinq relatives aux surfaces à courbure constante. Ainsi nous avons dès maintenant retrouvé toutes les formes que nous connaissions déjà pour X. Il ne s'en présentera pas de nouvelle dans la suite de notre discussion.

2° Soit maintenant

$$\sin^2\xi = h + \frac{g}{Ax+B}.$$

Cette équation conduit à

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = (Mx^2+Px+Q)(Ax+B)^2,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{M_1(\sin^2\xi - h)^4}{\sin^2\xi\cos^2\xi},$$

expressions qui rentrent dans des types déjà rencontrés.

3° Nous arrivons à l'exponentielle e^ξ. Soit d'abord

$$e^\xi = h + \frac{g}{\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}}.$$

De cette équation on tire

$$\mathrm{X}(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(\mathrm{M}x^2 + \mathrm{P})^2(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B})}{x^2},$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{(\mathrm{M}_1 e^\xi + \mathrm{P}_1)^2(e^\xi - h)^2}{e^{2\xi}},$$

expressions qui rentrent également dans des types déjà rencontrés.

4° Soit enfin, pour achever l'examen du second cas,

$$e^\xi = h + \frac{g}{\mathrm{A}x + \mathrm{B}}.$$

On déduit de cette relation

$$\mathrm{X}(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = (\mathrm{M}x + \mathrm{P})^2(\mathrm{A}x + \mathrm{B})^2,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = \frac{\mathrm{M}_1(e^\xi - h)^4}{e^{2\xi}}.$$

Ce sont là encore des formes particulières de solutions déjà obtenues.

12. Troisième cas : $\Xi(\xi)$ n'a pas de période.

D'après ce que nous avons déjà vu, ξ^2 ou ξ est une fonction uniforme de x. On doit supposer $\mathrm{X}(x)$ sans aucune période; autrement, on serait ramené (sauf échange de ξ avec x) à l'un des cas déjà examinés. En conséquence, x^2 ou x est une fonction uniforme de ξ et il existe une relation homographique entre ξ^2 ou ξ et x^2 ou x.

1° Soit d'abord

$$\xi^2 = h + \frac{g}{\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}}.$$

Cette équation conduit à des expressions de même forme exactement, aux coefficients près, pour $X(x)$ et $\Xi(\xi)$. Le calcul donne

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = \frac{(Mx^2 + P)(Ax^2 + B)^3}{x^2}.$$

2° Soit à présent

$$\xi^2 = h + \frac{g}{Ax + B}.$$

On déduit de là

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = (Mx + P)(Ax + B)^3,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = M_1 \frac{(\xi^2 - h)^4}{\xi^2}.$$

3° Quand ξ est uniforme en x, il n'y a pas lieu d'établir une relation homographique entre ξ et x^2. C'est, aux notations près, ce qui vient d'être fait. Soit donc

$$\xi = h + \frac{g}{Ax + B}.$$

Cette relation donne

$$X(x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 = M(Ax + B)^4,$$

$$\Xi(\xi) = \left(\frac{d\xi}{dx}\right)^2 = M_1(\xi - h)^4.$$

On voit que toutes les expressions de X et de Ξ obtenues dans le troisième cas rentrent dans des types déjà rencontrés.

13. Arrivés au terme de notre discussion, nous reconnaissons que le problème fonctionnel, en apparence fort indéterminé, que nous nous proposions, n'admet que des solutions dont les formes analytiques sont parfaitement déterminées, et où il ne reste d'arbitraire que certaines constantes, en nombre restreint, huit au plus. Ce problème admet comme solutions *toutes* les fonctions X que nous connaissions déjà comme concourant à former des solutions de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques et il n'en a *pas d'autres*. C'est ce qui ressort de la discussion même.

Mais nous avons aussi acquis un autre résultat important, c'est que *toute solution du problème est une fonction rationnelle, soit de* $\mathfrak{p}(x)$, *soit de* e^{mx}, *soit de* x *lui-même.* Il en est donc de même de toute solution X de l'équation aux éléments linéaires doublement harmoniques; et la loi de réciprocité nous apprend que les formes analytiques des fonctions $\varphi(x+y)$, $f(x-y)$ ne seront pas différentes de celles de X, qui sont aussi celles de Y.

La détermination complète de tous les éléments linéaires doublement harmoniques est donc ramenée dès maintenant à une simple question de calcul. Dans l'équation fondamentale

$$\begin{aligned}(X''-Y'')(\varphi-f)+3X'(\varphi'-f')\\ -3Y'(\varphi'+f')+2(X-Y)(\varphi''-f'')=0,\end{aligned}$$

on substituera les diverses expressions qui viennent d'être trouvées pour X, pour Y, pour φ et pour f, en les combinant de toutes les manières possibles, et on déterminera les constantes restées arbitraires dans ces expressions de manière à vérifier, quels que soient x et y, l'équation proposée. C'est là une pure question d'Algèbre, qui ne présente aucune difficulté, puisque dans chaque cas les inconnues sont en nombre limité, assez restreint même. Mais elle semblerait exiger d'assez longs développements, à raison du nombre des cas à traiter. Nous allons voir qu'on peut réduire dans une proportion considérable les calculs à effectuer.

Écartons d'abord les cas où l'on combinerait une fonction $\varphi(x+y)$ et une fonction $f(x-y)$ telles que l'élément linéaire $(\varphi-f)\,dx\,dy$ convînt à une surface de révolution (développables et surfaces à courbure constante comprises). Nous connaissons les solutions X et Y correspondantes.

Si l'élément linéaire $(\varphi-f)\,dx\,dy$ ne convient pas à une surface de révolution, nous savons et nous avons rappelé au début de ce Chapitre que les deux dérivées logarithmiques de $X-Y$ sont entièrement déterminées par la connaissance de $\varphi-f$. Il suit de là que, si l'une des fonctions φ ou f, la première par exemple, admet la période 2ω, les fonctions X et Y auront la même période. Car, augmentant x et y de ω, ce qui ne change pas $\varphi(x+y)$ par hypothèse, ni $f(x-y)$ qui ne dépend que de la différence $x-y$, on ne change pas les dérivées logarithmiques de $X - Y$. En conséquence, on a

$$X(x+\omega) - Y(y+\omega) = C[X(x) - Y(y)],$$

C étant une constante. De là résulte, avec une nouvelle constante γ,

$$X(x+\omega) = CX(x) + \gamma, \qquad Y(y+\omega) = CY(y) + \gamma.$$

Donc les fonctions X et Y ne sont pas rationnelles (à moins d'être linéaires, cas qui se traite à vue). Elles sont donc périodiques de période $m\omega$, m étant un entier, ce qui permet de leur attribuer la même période qu'à φ. On déduit alors de la loi de réciprocité que f a aussi la même période, en sorte qu'on ne devra grouper ensemble, pour les substituer dans l'équation fondamentale, que quatre fonctions X, Y, φ, f rationnelles, ou quatre fonctions simplement périodiques de même période, ou quatre fonctions doublement périodiques aux mêmes périodes.

Ce dernier cas peut d'ailleurs être laissé de côté, ayant été déjà traité. Les deux autres ne présentent aucune difficulté et ne donnent que des éléments linéaires de développables, de surfaces à courbure constante, de surfaces de révolution ou des éléments linéaires figurant dans le Tableau placé en tête de ce Chapitre. *Le problème des éléments linéaires doublement harmoniques est donc complètement résolu.*

CHAPITRE V.

LES SURFACES HARMONIQUES ET LES SURFACES DE TROISIÈME CLASSE DE M. SOPHUS LIE.

1. Dans son Mémoire déjà cité ([1]), M. S. Lie s'est proposé de trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces dont les lignes

([1]) *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Mathem. Annalen*, t. XX, p. 357-454).

géodésiques admettent des transformations infinitésimales. Il a été conduit à répartir ces surfaces en trois classes, et il a montré que pour toute surface de troisième classe l'élément linéaire est réductible à la forme harmonique

$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\, dx\, dy.$$

Mais les fonctions φ et f ne sont pas arbitraires; car, si l'on pose

$$\varphi_0(x+y) = \int \varphi(x+y)\, d(x+y),$$
$$f_0(x-y) = \int f(x-y)\, d(x-y),$$

il doit exister deux fonctions, l'une X_0 de x, l'autre Y_0 de y, telles qu'on ait identiquement

$$(27)' \quad \left\{ \begin{aligned} &(X'_0 + Y'_0)(\varphi - f) + X_0(\varphi' - f') + Y_0(\varphi' + f') \\ &\quad = A(\varphi - f) + 4(\varphi^2 - f^2) - 2(\varphi_0\varphi'' - f_0 f''), \end{aligned} \right.$$

A étant une constante indéterminée (p. 379. Nous avons dû modifier légèrement les notations de l'auteur).

Arrivé à cette équation, M. Lie fait observer qu'en la traitant par des différentiations successives on serait conduit à des équations différentielles très compliquées. « C'est pourquoi, dit-il, j'ai dû me borner à en déterminer par des méthodes spéciales, mais rationnelles, une série de solutions particulières ».

2. Avant d'aller plus loin, remarquons que si l'on désigne par Ω le premier membre de l'équation $(27)'$, cette équation entraîne

$$\Omega''_{x^2} - \Omega''_{y^2} = 0,$$

ou, tous calculs faits,

$$(27)'' \quad \left\{ \begin{aligned} &2(X'_0 - Y'_0)(\varphi'' - f'') + 3X''_0(\varphi' - f') \\ &\quad - 3Y''_0(\varphi' + f') + (X'''_0 - Y'''_0)(\varphi - f) = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est précisément l'équation fondamentale qui exprime que l'élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ reste harmonique après le changement de variables

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{X'_0(x)}}, \qquad dy' = \frac{dy}{\sqrt{Y'_0(y)}};$$

c'est-à-dire qu'il est doublement harmonique, si X'_0 et Y'_0 ne se réduisent pas à la même constante. On a donc cette propriété, trouvée autrement par M. Lie dans la Note II de son Mémoire :

Toute surface de troisième classe pour laquelle on n'a pas $X'_0 = Y'_0 =$ *const. est une surface doublement harmonique.*

Il suit de là que la troisième classe de M. Lie comprend *deux* catégories de surfaces : 1° celles pour lesquelles $X'_0 - Y'_0$ est différent de zéro; 2° celles pour lesquelles $X'_0 - Y'_0$ est nul.

Les surfaces de la seconde catégorie sont certainement harmoniques; elles peuvent être applicables sur des surfaces de révolution (p. 409) sans être, à proprement parler, harmoniques, c'est-à-dire sans que leur élément linéaire soit réductible à la forme $(\varphi - f)\,dx\,dy$ autrement qu'avec la restriction $\varphi f = 0$. Mais elles peuvent aussi être doublement harmoniques, l'équation $(27)'$ admettant d'autres solutions en même temps que $X'_0 = Y'_0 =$ const.

La première catégorie ne comprend que des surfaces doublement harmoniques; mais il s'en faut de beaucoup qu'elle les comprenne toutes. *C'est une catégorie de surfaces doublement harmoniques très particulières* puisque leur élément linéaire $(\varphi - f)\,dx\,dy$ doit satisfaire, non pas à l'équation générale

$$\begin{aligned}(X'_0 + Y'_0)(\varphi - f) + X_0(\varphi' - f') + Y_0(\varphi' + f')\\ = \Phi(x+y) - F(x-y),\end{aligned}$$

rigoureusement équivalente à l'équation $(27)''$ *quelles que soient les fonctions* Φ *et* F, mais à l'équation $(27)'$, où ces fonctions dépendent de φ et de f :

$$\Phi = A\varphi + 4\varphi^2 - 2\varphi_0\varphi'', \qquad F = Af + 4f^2 - 2f_0 f''.$$

Donc la recherche des surfaces de troisième classe est un problème beaucoup plus déterminé que la recherche des surfaces doublement harmoniques.

3. C'est ce qui explique pourquoi M. Lie rencontre parfois des éléments linéaires doublement harmoniques sans les signaler comme tels et restreint leur généralité pour les faire rentrer dans la troisième classe. Ainsi, soit à *trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces qui peuvent être représentées sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des familles de longueur nulle, et sur d'autres avec conservation de ces deux familles.* L'ensemble des solutions de ce problème est fourni, d'après M. Lie, par les trois expressions

$$ds^2 = [L_1 \sin y \sin(2x+h) + M_1 \sin x] \cos y \, dx\, dy,$$

$$ds^2 = \{A[(x+y)^4-(x-y)^4] + B[(x+y)^2-(x-y)^2] + C[(x+y)-(x-y)]\}\, dx\, dy,$$

$$ds^2 = \{A[(x+y)^3-(x-y)^3] + B[(x+y)^2-(x-y)^2] + C[(x+y)-(x-y)]\}\, dx\, dy,$$

où L_1, M_1, h, A, B, C sont des constantes arbitraires. Particularisées de manière à rentrer dans la seconde et la troisième classe, elles se réduisent (p. 403) au seul élément linéaire $(xy+a)\,dx\,dy$. Mais on peut, ce que ne fait pas l'auteur, remarquer que *ces éléments linéaires, pris dans toute leur généralité, sont doublement harmoniques.* Car ils rentrent visiblement dans les types I et II du second groupe de solutions (provenant des surfaces à courbure constante) qui figurent au Tableau de notre précédent Chapitre (n° **3**). On arrive ainsi à cette proposition, qui complète la théorie de la représentation géodésique des surfaces : *Toute surface susceptible d'être représentée géodésiquement sur certaines surfaces avec conservation d'une seule des familles de longueur nulle et sur d'autres avec conservation de ces deux familles est une surface doublement harmonique.*

4. En ce qui concerne la recherche des éléments linéaires de troisième classe et de première catégorie, observons que ce problème est implicitement résolu au Chapitre précédent. Puisque nous avons trouvé *tous* les éléments linéaires doublement harmoniques $(\varphi - f)\,dx\,dy$ et *tous* les couples correspondants de fonctions X et Y, il suffira d'effectuer les quadratures

$$\varphi_0 = \int \varphi\, dt, \qquad f_0 = \int f\, dz, \qquad X_0 = \int X\, dx, \qquad Y_0 = \int Y\, dy,$$

et de substituer dans l'équation (27)′ de M. Lie pour en obtenir toutes les solutions, en particularisant d'une façon convenable les constantes qui sont arbitraires dans nos formules.