

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

P. DUHEM

**Commentaire aux principes de la thermodynamique ; troisième partie. Les équations générales de la thermodynamique**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 4<sup>e</sup> série*, tome 10 (1894), p. 207-285.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1894\\_4\\_10\\_207\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10_207_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Commentaire aux principes de la Thermodynamique* (1);

PAR M. P. DUHEM.

---

## TROISIÈME PARTIE.

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THERMODYNAMIQUE.

---

### CHAPITRE I.

PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME EN ÉQUILIBRE (2).

1. *Le potentiel thermodynamique interne.* — Soient

$$U(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta) \quad \text{et} \quad S(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$$

l'énergie interne et l'entropie d'un système. Ce système est, bien en-

---

(1) Voir t. VIII, p. 269, et t. IX, p. 293.

(2) Nous avons développé en détail les propriétés thermodynamiques des systèmes en équilibre dans un Mémoire récent : *Sur les équations générales de la Thermodynamique* (*Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. VII, p. 231). Pour éviter autant que possible de reproduire ici ce Mémoire, nous avons limité le présent Chapitre à l'exposé des propriétés indispensables pour l'intelligence des Chapitres suivants.



D'autre part, nous avons [II<sup>e</sup> Partie, Chap. III, égalités (16)],

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_\alpha = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial x}, \\ R_\beta = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \beta}, \\ \dots\dots\dots, \\ R_\lambda = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ C = F(\vartheta) \frac{\partial S}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

Les égalités (1), (2) et (3) donnent sans peine

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \\ B = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta}, \\ \dots\dots\dots, \\ L = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda}, \\ \Theta = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} + ES \frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}. \end{array} \right.$$

Si à ces équations on joint la condition que les corps étrangers au système aient la même température que lui, on obtient les *conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système*.

La dernière égalité (4) donne

$$(5) \quad ES = \frac{1}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left( \Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} \right).$$

Les égalités (1) et (5) donnent

$$(6) \quad EU = \mathfrak{F} + \frac{F(\vartheta)}{\frac{dF(\vartheta)}{d\vartheta}} \left( \Theta - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \vartheta} \right).$$



température en tous ses points;  $\vartheta_1$  sera la température de la partie 1 et  $\vartheta_2$  la température de la partie 2; pour le moment, nous supposons ces températures quelconques; tout à l'heure, nous leur imposerons la condition d'être égales entre elles.

Soient  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1$  les variables indépendantes qui déterminent l'état du système 1, y compris sa position absolue dans l'espace; l'énergie interne, l'entropie, le potentiel thermodynamique interne du système 1 seront des fonctions uniformes de ces variables, ou, du moins, de celles d'entre elles qui ne servent pas uniquement à déterminer la position absolue du système dans l'espace; désignons respectivement ces trois fonctions par

$$\begin{aligned} Y_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1), \\ \Sigma_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1), \\ \mathcal{F}_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1). \end{aligned}$$

Soient, de même,  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \vartheta_2$  les variables indépendantes qui définissent l'état du système 2. Soient

$$\begin{aligned} Y_2(\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \vartheta_2), \\ \Sigma_2(\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \vartheta_2), \\ \mathcal{F}_2(\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \vartheta_2) \end{aligned}$$

l'énergie interne, l'entropie et le potentiel thermodynamique interne du système 2.

L'état du système complexe (1, 2), formé par l'ensemble des deux systèmes 1 et 2, et sa position absolue dans l'espace sont déterminés lorsqu'on connaît l'ensemble des variables

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \vartheta_2.$$

L'énergie interne de ce système (1, 2) aura donc pour valeur

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} U = & Y_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1) \\ & + Y_2(\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \vartheta_2) \\ & + X_{1,2}(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \vartheta_2), \end{aligned} \right.$$

$X_{1,2}$  étant une fonction uniforme des variables mises en évidence, ou,

du moins, de celles de ces variables qui ne servent pas uniquement à fixer la position absolue du système (1, 2); en outre, on peut convenir de prendre cette fonction égale à 0 lorsque les deux systèmes 1 et 2 sont infiniment éloignés l'un de l'autre.

Si nous désignons par  $U$  l'énergie interne des corps étrangers au système (1, 2), l'énergie interne du système formé par le système (1, 2) et par les corps extérieurs aura pour valeur

$$(9) \quad v = U + U' + \Psi.$$

La fonction  $\Psi$  dépendra des variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \varrho_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \varrho_2$ , et aussi des variables qui déterminent l'état des corps extérieurs au système (1, 2).

Les actions extérieures exercées sur le système (1, 2) auront pour valeurs [I<sup>re</sup> Partie, Chap. III, égalités (4)],

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{A}_1 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1}, & \mathfrak{A}_2 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2}, \\ \mathfrak{B}_1 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_1}, & \mathfrak{B}_2 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \\ \mathfrak{L}_1 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1}, & \mathfrak{L}_2 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2}, \\ \mathfrak{E}_1 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho_1}, & \mathfrak{E}_2 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \varrho_2}. \end{array} \right.$$

D'autre part, les corps extérieurs au système 1 se composent :

- 1° Des corps extérieurs au système (1, 2);
- 2° Du corps 2.

Dès lors, il est facile de voir que les actions extérieures appliquées au système 1 ont pour valeurs

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 = -E \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (X_{12} + \Psi), \\ \mathfrak{B}_1 = -E \frac{\partial}{\partial \beta_1} (X_{12} + \Psi), \\ \dots\dots\dots \\ \mathfrak{L}_1 = -E \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (X_{12} + \Psi), \\ \mathfrak{E}_1 = -E \frac{\partial}{\partial \varrho_1} (X_{12} + \Psi). \end{array} \right.$$





En second lieu, en vertu des égalités (4), (10) et (14), les égalités

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_1}, \quad E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha_2}, \\ E \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_1} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta_1}, \quad E \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_2} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta_2}, \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \\ E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1}, \quad E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_2}, \\ E \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \varpi_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial \varpi_2} \right) = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varpi} - E F'(\varpi) S. \end{array} \right.$$

Le principe énoncé il y a un instant exige que, moyennant les égalités (12), l'ensemble des égalités (15) soit équivalent à l'ensemble des égalités (13) et (13 bis); cette condition s'exprime par les égalités

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1 - EX_{1,2}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_2 - EX_{1,2}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1 - EX_{1,2}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \beta_2} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_2 - EX_{1,2}) = 0, \\ \dots\dots\dots, \quad \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_1 - EX_{1,2}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\mathcal{F} - \mathcal{F}_2 - EX_{1,2}) = 0, \end{array} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varpi} - \frac{\partial}{\partial \varpi_1} (\mathcal{F}_1 + EX_{1,2}) - \frac{\partial}{\partial \varpi_2} (\mathcal{F}_2 + EX_{1,2}) \\ \quad + E F'(\varpi) (S - \Sigma_1 - \Sigma_2) = 0. \end{array} \right.$$

La fonction  $\mathcal{F}_1$  ne dépend pas des variables  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$ ; la fonction  $\mathcal{F}_2$  ne dépend pas des variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$ ; les égalités (16) peuvent donc s'écrire

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{1,2} - \mathcal{F}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta_1} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{1,2} - \mathcal{F}) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{1,2} - \mathcal{F}) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{1,2} - \mathcal{F}) = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{1,2} - \mathcal{F}) = 0. \end{array} \right.$$

En vertu des égalités (12), on a

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathcal{S}_1} = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \mathcal{S}}, \quad \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathcal{S}_2} = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \mathcal{S}}.$$

En vertu de ces mêmes égalités,  $X_{12}$  peut être regardé comme une fonction des variables

$$\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \mathcal{S},$$

et l'on a

$$\frac{\partial X_{12}}{\partial \mathcal{S}} = \frac{\partial X_{12}}{\partial \mathcal{S}_1} + \frac{\partial X_{12}}{\partial \mathcal{S}_2}.$$

L'égalité (17) peut donc s'écrire

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial \mathcal{S}} (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} - \mathcal{F}) + EF'(\mathcal{S})(\Sigma_1 + \Sigma_2 - S) = 0.$$

Les égalités (18) donnent

$$(20) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12} + f(\mathcal{S}),$$

$f(\mathcal{S})$  étant une fonction arbitraire de la température  $\mathcal{S}$ ; l'égalité (19) donne alors

$$(21) \quad S = \Sigma_1 + \Sigma_2 - \frac{f'(\mathcal{S})}{EF'(\mathcal{S})}.$$

*Si l'on convient de prendre pour potentiel thermodynamique interne d'un système formé de deux parties à la même température, infiniment éloignées l'une de l'autre, la somme des potentiels thermodynamiques internes des deux parties, on aura identiquement, d'après l'égalité (20),*

$$f(\mathcal{S}) = 0.$$

Les égalités (20) et (21) deviendront donc

$$(20 \text{ bis}) \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + EX_{12},$$

$$(21 \text{ bis}) \quad S = \Sigma_1 + \Sigma_2.$$

*Lorsqu'un système est formé de plusieurs parties indépendantes, toutes à la même température, le potentiel thermodynamique interne du système s'obtient en faisant la somme des potentiels thermodynamiques internes des parties, et en y ajoutant l'une des déterminations du potentiel des actions mutuelles de ces parties, celle qui s'annule lorsqu'on éloigne infiniment ces parties les unes des autres.*

*L'entropie du système est égale à la somme des entropies des diverses parties.*

Ces théorèmes ont de fréquentes applications en Thermodynamique; on peut les rapprocher d'un théorème analogue, relatif à l'énergie interne, démontré dans la I<sup>re</sup> Partie (Chap. III, n<sup>o</sup> 2); mais ce dernier était général, tandis que les théorèmes que nous venons de démontrer supposent que les diverses parties du système sont à la même température, et que chacune d'elles vérifie les conditions indiquées au Chapitre III de la II<sup>e</sup> Partie.

L'égalité (21 bis) entraîne une nouvelle conséquence importante: Les coefficients calorifiques du système 1 en équilibre sont

$$R_{\alpha_1}, R_{\beta_1}, \dots, R_{\lambda_1}, C_1.$$

Les coefficients calorifiques du système 2 en équilibre sont

$$R_{\alpha_2}, R_{\beta_2}, \dots, R_{\lambda_2}, C_2.$$

Les coefficients calorifiques du système (1, 2) en équilibre sont

$$\rho_{\alpha_1}, \rho_{\beta_1}, \dots, \rho_{\lambda_1}, \rho_{\alpha_2}, \rho_{\beta_2}, \dots, \rho_{\lambda_2}, \gamma.$$

Nous avons, en vertu des égalités (3),

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha_1} &= F(\vartheta) \frac{dS}{d\alpha_1}, & \rho_{\alpha_2} &= F(\vartheta) \frac{dS}{d\alpha_2}, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots & \\ \rho_{\lambda_1} &= F(\vartheta) \frac{dS}{d\lambda_1}, & \rho_{\lambda_2} &= F(\vartheta) \frac{dS}{d\lambda_2}, \\ & & \gamma &= F(\vartheta) \frac{dS}{d\vartheta}. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de l'égalité (21 bis) et si l'on observe que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_2} &= 0, & \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x_1} &= 0, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \\ \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda_2} &= 0, & \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \lambda_1} &= 0, \end{aligned}$$

on pourra écrire

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha_1} &= F(\vartheta) \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_1}, & \rho_{\alpha_2} &= F(\vartheta) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial x_2}, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \\ \rho_{\lambda_1} &= F(\vartheta) \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \lambda_1}, & \rho_{\lambda_2} &= F(\vartheta) \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \lambda_2}, \\ \gamma &= F(\vartheta) \left( \frac{\partial \Sigma_1}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \vartheta} \right), \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (3),

$$(22) \quad \begin{cases} \rho_{\alpha_1} = R_{\alpha_1}, & \rho_{\alpha_2} = R_{\alpha_2}, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, \\ \rho_{\lambda_1} = R_{\lambda_1}, & \rho_{\lambda_2} = R_{\lambda_2}, \\ \gamma = C_1 + C_2. \end{cases}$$

Ces remarquables égalités (22) sont soumises aux mêmes restrictions que l'égalité (21 bis).

**3. Hypothèse fondamentale; variables normales.** — Nous allons maintenant invoquer une hypothèse fondamentale qui, en général, est admise implicitement dans les traités de Thermodynamique.

Soit un système indépendant 1, ayant la même température en tous ses points, défini par des variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1$ ; soit ensuite un autre système indépendant quelconque 2, n'ayant pas forcément la même température en tous ses points, défini par des variables  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$ , formé des corps étrangers au système 1.

L'énergie interne  $U$  du système (1, 2) pourra s'écrire

$$U = Y_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1) \\ + Y_2(\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2) \\ + \Psi(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2),$$

$Y_1$  étant l'énergie interne du système 1 et  $Y_2$  l'énergie interne du système 2.

L'hypothèse que nous voulons énoncer est la suivante :

On peut choisir les variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$ , de telle sorte :

1° Que lorsque  $\vartheta_1$  varie,  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$  gardant des valeurs constantes, aucun point matériel du système 1 ne se déplace dans l'espace; la force vive  $\mathcal{C}_1$  du système 1 est alors indépendante de  $\vartheta_1$  et de  $\frac{d\vartheta_1}{dt}$ ;

2° Que la fonction  $\Psi$  ne dépend pas de la variable  $\vartheta_1$ , et cela quels que soient les corps qui composent le système 2.

Lorsque les variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$  ont été choisies de la sorte, nous dirons que *le système  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1$  forme un système de variables normales* définissant le système 1.

Le travail virtuel des actions extérieures auxquelles est soumis le système 1 est une expression de la forme

$$A_1 \delta\alpha_1 + B_1 \delta\beta_1 + \dots + L_1 \delta\lambda_1 + \Theta_1 \delta\vartheta_1.$$

D'après les égalités (4) du Chapitre III (I<sup>re</sup> Partie), on a

$$\Theta_1 = -E \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta_1}.$$

Si donc le système de variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \vartheta_1$  est un système de variables normales, on a

$$\Theta_1 = 0.$$

*Si un système, ayant la même température en tous ses points, est défini par des variables normales, quels que soient les corps étrangers à ce système, les actions qu'ils exercent sur ce système n'effectuent aucun travail lorsque la température du système varie seule.*

Cette proposition ne suppose pas le système en équilibre.

Que deviennent les propriétés d'un système en équilibre lorsqu'il est défini par des variables normales?

Pour un tel système, la quantité

$$\Theta = f_{\vartheta}(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \vartheta)$$

est identiquement nulle.

Dès lors, les équations (4), (5), (6) et (7) deviennent

$$(4 \text{ bis}) \quad A = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha}, \quad B = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta}, \quad \dots, \quad L = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda},$$

$$(5 \text{ bis}) \quad EF'(\vartheta) S = - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta},$$

$$(6 \text{ bis}) \quad EU = \mathcal{F} - \frac{F(\vartheta)}{F'(\vartheta)} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta},$$

$$(7 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha} = - \frac{F(\vartheta)}{EF'(\vartheta)} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \beta}, \\ R_{\beta} = - \frac{F(\vartheta)}{EF'(\vartheta)} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta \partial \vartheta}, \\ \dots\dots\dots, \\ R_{\lambda} = - \frac{F(\vartheta)}{EF'(\vartheta)} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \partial \vartheta}, \\ C = - \frac{F(\vartheta)}{EF'(\vartheta)} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \vartheta^2} + \frac{F(\vartheta) F''(\vartheta)}{E [F'(\vartheta)]^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vartheta}. \end{array} \right.$$

*Lors donc qu'un système est défini par des variables normales, il suffit de connaître le potentiel thermodynamique interne de ce système pour pouvoir déterminer les équations d'équilibre, l'énergie, l'entropie et les coefficients calorifiques. C'est la proposition bien connue de M. F. Massieu.*

Dorénavant, lorsque nous considérerons un système dont tous les points sont à la même température, nous le supposerons défini par des variables normales.

4. *Le problème de l'équilibre.* — Comment, en général, le pro-



Une fois l'état du système connu, les équations (5 bis), (6 bis), (7 bis) en feront connaître l'énergie, l'entropie et les coefficients calorifiques.

## CHAPITRE II.

### PROPRIÉTÉS D'UN SYSTÈME EN MOUVEMENT.

**1. Sens du mot mouvement.** — Nous prenons, dans ce Chapitre, le mot *mouvement* pour désigner non seulement un changement de position dans l'espace, mais encore un changement d'état quelconque, lors même qu'il ne serait accompagné d'aucun déplacement. Ainsi, il y aurait mouvement si les variables que nous avons désignées par  $a, b, \dots, l$  (I<sup>re</sup> Partie, Chap. III, n<sup>o</sup> 4) variaient seules, les variables  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  gardant des valeurs fixes. De la sorte, le mot *mouvement* s'oppose non pas au mot *repos*, mais au mot *équilibre*.

**2. Mouvement d'un système qui a la même température en tous ses points.** — Imaginons un système qui ait la même température en tous ses points, cette température n'étant pas forcément celle des corps extérieurs; ce système n'est pas en équilibre; il s'agit de déterminer les lois de son mouvement.

A chaque instant  $t$ , l'état des corps extérieurs est supposé donné. Les actions extérieures qui agissent sur le système sont, en général, des fonctions des variables  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ , qui définissent le système, et des variables qui définissent les corps extérieurs; ces dernières étant des fonctions données de  $t$ , les actions extérieures sont, en définitive, des fonctions données de  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, t$ ; nous les désignerons par

$$\begin{aligned} &A'(\alpha, \beta, \dots, \lambda, t), \\ &B'(\alpha, \beta, \dots, \lambda, t), \\ &\dots\dots\dots, \\ &L'(\alpha, \beta, \dots, \lambda, t). \end{aligned}$$

Posons, pour abrégier,

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \quad \dots, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt}.$$

Lorsque le système est en équilibre, on a [Chap. I, égalités (23)],

$$A' - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = 0, \quad B' - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = 0, \quad \dots, \quad L' - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = 0.$$

D'autre part, on a identiquement

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \alpha'} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta'} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \lambda'} = 0.$$

On a donc, dans le cas où le système est en équilibre,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A' - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \alpha'} = 0, \\ B' - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta'} = 0, \\ \dots, \\ L' - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} + \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \lambda'} = 0. \end{array} \right.$$

Lorsque le système n'est pas en équilibre, il n'est pas certain que ces égalités soient vérifiées; les premiers membres pourront avoir des valeurs différentes de 0; désignons par  $-f_\alpha, -f_\beta, \dots, -f_\lambda$  ces valeurs; nous pourrons écrire, *sans aucune hypothèse*,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial (\mathfrak{E} - \mathcal{F})}{\partial \alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \alpha'} + A' + f_\alpha = 0, \\ \frac{\partial (\mathfrak{E} - \mathcal{F})}{\partial \beta} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \beta'} + B' + f_\beta = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial (\mathfrak{E} - \mathcal{F})}{\partial \lambda} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \lambda'} + L' + f_\lambda = 0. \end{array} \right.$$

Les quantités  $f_\alpha, f_\beta, \dots, f_\lambda$  seront nommées les *résistances pas-*

sives que le système a à surmonter; la quantité

$$f_{\alpha} d\alpha + f_{\beta} d\beta + \dots + f_{\lambda} d\lambda$$

se nomme le *travail élémentaire des résistances passives*.

Jusqu'ici, nous l'avons dit, les équations (2) n'ont rien d'hypothétique; elles ne prennent un caractère hypothétique qu'à partir du moment où nous assignons une forme particulière aux résistances passives; or, voici, à cet égard, quelles suppositions nous ferons :

PREMIÈRE CONVENTION. — Les résistances passives  $f_{\alpha}$ ,  $f_{\beta}$ , ...,  $f_{\lambda}$  dépendent uniquement des variables

$$\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mathfrak{S},$$

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \beta' = \frac{d\beta}{dt}, \quad \dots, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{dt},$$

relatives au système, et des variables analogues relatives aux corps extérieurs.

DEUXIÈME CONVENTION. — Les résistances passives ne changent pas de valeur, si l'on change la position absolue ou le mouvement absolu du système complexe formé par le système étudié et les corps qui lui sont étrangers; elles ne dépendent que de la *position relative* des parties du système et des corps étrangers, du *mouvement relatif* des parties du système et des corps étrangers.

Comme toutes les hypothèses que nous faisons, ces suppositions, bien que très naturelles, n'ont rien de logiquement nécessaire; elles ne peuvent être vérifiées qu'en constatant l'accord des conséquences des équations (2) avec les faits d'expérience.

Lorsque l'état des corps extérieurs est donné à chaque instant  $t$ , les résistances passives deviennent des fonctions des variables

$$\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mathfrak{S}, \alpha', \beta', \dots, \lambda', t.$$

Les équations (2) deviennent alors des équations différentielles du second ordre, qui détermineraient les valeurs des variables  $\alpha$ ,  $\beta$ , ...,  $\lambda$ ,







Multiplions de même par  $d\alpha$ ,  $d\beta$ , ...,  $d\lambda$ ,  $d\mathfrak{S}$  les deux membres des équations (4) et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous aurons

$$\begin{aligned} E(R'_\alpha d\alpha + R'_\beta d\beta + \dots + R'_\lambda d\lambda + C d\mathfrak{S}) \\ = EF(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda, \end{aligned}$$

ou bien, en désignant par  $dQ$  la quantité de chaleur dégagée par le système dans une transformation élémentaire,

$$(9) \quad E dQ = -EF(\mathfrak{S}) d\mathfrak{S} - (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda).$$

Écrivons une semblable égalité pour tous les éléments d'un cycle fermé et ajoutons membre à membre toutes ces égalités, après avoir divisé les deux membres de chacune d'elles par  $F(\mathfrak{S})$ ; comme l'intégrale

$$\int d\mathfrak{S},$$

étendue à un cycle fermé, est égale à 0, nous aurons

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = -\frac{1}{E} \int \frac{f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda}{F(\mathfrak{S})}.$$

La quantité  $(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda)$  ne pouvant jamais être positive, on voit que, pour tout cycle fermé réel, on a

$$(10) \quad \int \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} \geq 0.$$

Cette inégalité célèbre est due à Clausius.

Clausius a donné à la quantité

$$-(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda),$$

qui est égale au travail des résistances passives changé de signe, et qui, par conséquent, n'est négative dans aucune modification réelle du système, le nom de *travail non compensé* accompli durant cette

modification. La quantité  $EF(\mathfrak{S}) dS$  est au contraire, pour lui, le *travail compensé* accompli durant cette même modification.

D'après les égalités (2), on a



$$\begin{aligned} & -(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda) \\ & \equiv A' d\alpha + B' d\beta + \dots + L' d\lambda \\ & - \left( \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \beta} d\beta + \dots + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \lambda} d\lambda \right) - d\mathfrak{C}, \end{aligned}$$

ou bien, en désignant par  $d\mathfrak{e}$  le travail des actions extérieures au système,

$$(11) \quad -(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda) = d\mathfrak{e} - d\mathfrak{C} - d\mathfrak{f} + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S}.$$

Dans le cas où la modification est isothermique,  $d\mathfrak{S}$  est égal à 0, et l'égalité (11) devient

$$(11 \text{ bis}) \quad -(f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda) = d\mathfrak{e} - d\mathfrak{C} - d\mathfrak{f}.$$

*Pour calculer le travail non compensé accompli dans une modification isothermique, prenez le travail externe et retranchez-en la somme des accroissements de la force vive et du potentiel thermodynamique interne.* Ce théorème a de fréquentes applications.

Appliquons l'équation (9) aux transformations d'un système isolé dans l'espace; pour un pareil système, nous avons, par définition,

$$dQ = 0.$$

L'équation (9) devient donc

$$dS = - \frac{f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda}{EF(\mathfrak{S})}.$$

Le second membre ne peut être négatif pour aucune transformation réelle du système; donc, *aucune transformation réelle d'un système isolé ne peut faire décroître l'entropie de ce système.* On sait que cette proposition est due à Clausius; il l'avait démontrée seulement dans le cas où la force vive du système est égale à 0.







qui sont également des constantes. Nous savons que nous avons d'une part (I<sup>re</sup> Partie, Chap. III, n<sup>o</sup> 2),

$$U = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + \Psi$$

et, d'autre part (III<sup>e</sup> Partie, Chap. I, n<sup>o</sup> 2),

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 + \dots + \mathfrak{F}_n + E\Psi,$$

$E\Psi$  étant l'une des déterminations du *potentiel des actions mutuelles* des parties 1, 2, ..., n, celle qui s'annule lorsque ces parties sont infiniment éloignées les unes des autres. Les trois quantités  $\mathfrak{F}$ , EU,  $E\Psi$ , ne diffèrent donc les unes des autres que par des constantes.

Ainsi, pour écrire les équations du mouvement d'un système formé de parties indépendantes qui se déplacent sans changer d'état, on peut substituer les unes aux autres, dans les équations de Lagrange, les trois fonctions suivantes :

*Le potentiel thermodynamique interne;*

*Le produit de l'énergie interne par l'équivalent mécanique de la chaleur;*

*Le potentiel des actions mutuelles des diverses parties du système.*

En dehors de ce cas particulier, une pareille substitution entraînerait en général une erreur; cette erreur a été commise fréquemment.

Revenons aux propriétés générales des systèmes dénués de viscosité. Pour un semblable système, les équations (4) deviennent

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} R'_\alpha = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial z}, \quad \dots, \quad R'_\lambda = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \lambda}, \\ C' = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \mathfrak{S}}. \end{array} \right.$$

*Dans un système dénué de viscosité, les coefficients calorifiques ont la même valeur, que le système soit en équilibre ou en mouvement.*

De ces équations (16), on déduit

$$\frac{1}{F(\mathfrak{S})} (R'_\alpha d\alpha + \dots + R'_\lambda d\lambda + C' d\mathfrak{S}) = dS,$$

ou, en désignant par  $dQ$  la quantité de chaleur dégagée dans une modification élémentaire,

$$\frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = -dS.$$

En intégrant cette équation pour un cycle fermé, on trouve la proposition suivante :

*Lorsqu'un système dénué de viscosité parcourt réellement un cycle fermé, on a, pour ce cycle entier,*

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{S})} = 0.$$

Appliquons les équations (16) à un système formé de  $n$  parties indépendantes qui se déplacent les unes par rapport aux autres en gardant un état invariable. Désignons par  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$  les entropies de ces diverses parties, qui sont des constantes. Nous aurons [Chap. I, égalité (21 bis)],

$$S = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n;$$

l'entropie du système sera aussi une constante; les équations (16) nous donneront alors la proposition suivante :

*Lorsqu'un système est formé de parties indépendantes qui se déplacent sans changer d'état, tous les coefficients calorifiques de ce système sont égaux à 0.*

Ce théorème nous fait comprendre pourquoi la méthode indiquée dans la I<sup>re</sup> Partie (Chap. III, n<sup>o</sup> 4) pour relier le problème classique de la Dynamique à la Thermodynamique devient légitime dans ce cas particulier.

Pour terminer ce qui concerne les systèmes dénués de viscosité,

énonçons une conjecture. Il nous semble *probable* que l'on pourra, dans tous les phénomènes physiques, admettre la supposition suivante :

*Les résistances passives qui correspondent aux variables  $a, b, \dots, l$ , qui ne figurent pas dans l'expression de la force vive, sont toujours égales à 0.*

On pourrait alors, en toutes circonstances, remplacer les égalités (2) par les égalités

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\bar{f} - \mathfrak{E})}{\partial x} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x'} = A' + f_x, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial(\bar{f} - \mathfrak{E})}{\partial \lambda} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \lambda'} = L' + f_\lambda, \end{array} \right.$$

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = \mathfrak{A}', \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial l} = \mathfrak{L}'. \end{array} \right.$$

Ce serait la forme générale des équations de la Thermodynamique pour un système de température uniforme; nous le répétons, nous ne donnons cette hypothèse qu'à titre de conjecture; les développements qui suivent en sont indépendants.

**6. Système formé de parties indépendantes qui ont des températures différentes.** — Nous allons maintenant examiner un cas beaucoup plus général que tous ceux qui précèdent; nous allons étudier un système formé d'un nombre quelconque de parties indépendantes les unes des autres; nous supposerons que la température de chacune de ces parties soit uniforme à chaque instant, tout en étant susceptible de varier d'un instant à l'autre; *nous ne supposerons pas que cette température ait à chaque instant la même valeur pour toutes ces parties.*

Pour ne pas compliquer inutilement les écritures, nous considérerons seulement deux parties indépendantes, que nous désignerons par les indices 1 et 2.

Soient  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1$  les variables normales qui définissent l'état de la partie 1, y compris sa position absolue dans l'espace ; soient  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2$  les variables normales qui définissent l'état de la partie 2, y compris sa position absolue dans l'espace.

L'énergie interne du système aura une valeur

$$(19) \quad \begin{cases} U = Y_1(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \mathfrak{S}_1) + Y_2(\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, \mathfrak{S}_2) \\ \quad + X_{12}(\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2). \end{cases}$$

Soit

$$A'_1 d\alpha_1 + B'_1 d\beta_1 + \dots + L'_1 d\lambda_1 + A''_2 d\alpha_2 + B''_2 d\beta_2 + \dots + L''_2 d\lambda_2$$

le travail virtuel des actions extérieures qui agissent sur le système.

Chacune des deux parties 1 et 2 peut être regardée comme un système indépendant. Le travail virtuel des actions extérieures à chacun de ces deux systèmes est représenté par les expressions

$$\begin{aligned} &A'_1 d\alpha_1 + B'_1 d\beta_1 + \dots + L'_1 d\lambda_1, \\ &A'_2 d\alpha_2 + B'_2 d\beta_2 + \dots + L'_2 d\lambda_2, \end{aligned}$$

avec

$$(20) \quad \begin{cases} A'_1 = A''_1 - E \frac{\partial X_{12}}{\partial \alpha_1}, & A'_2 = A''_2 - E \frac{\partial X_{12}}{\partial \alpha_2}, \\ \dots, & \dots, \\ L'_1 = L''_1 - E \frac{\partial X_{12}}{\partial \lambda_1}, & L'_2 = L''_2 - E \frac{\partial X_{12}}{\partial \lambda_2}. \end{cases}$$

La partie 1 forme un système indépendant, de température uniforme, cette température n'étant pas forcément la même que celle des corps étrangers ; on peut appliquer à ce système les considérations exposées dans les paragraphes précédents ; il admet un potentiel thermodynamique interne  $\mathfrak{F}_1$ , et l'on a, à chaque instant,

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{E}_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \alpha'_1} = A'_1 + f_{\alpha_1}, \\ \dots, \\ \frac{\partial(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{E}_1)}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \lambda'_1} = L'_1 + f_{\lambda_1}. \end{cases}$$



deux équations

$$(25) \quad \vartheta_1 = \varphi_1(t), \quad \vartheta_2 = \varphi_2(t),$$

qui feraient connaître, à chaque instant, la température de chacune des deux parties indépendantes dont se compose le système.

Calculons la quantité de chaleur  $dQ$  dégagée par le système durant une modification élémentaire.

Nous avons (I<sup>re</sup> Partie, Chap. III, n<sup>o</sup> 3)

$$dQ = dQ_1 + dQ_2,$$

$dQ_1$ , et  $dQ_2$  étant les quantités de chaleur dégagées par les parties 1 et 2, durant la même modification.

Soient  $S_1$ ,  $S_2$  les entropies des parties 1 et 2. Nous aurons [égalité (9)],

$$(26) \quad \begin{cases} E dQ_1 = - E F(\vartheta_1) dS_1 - (f_{\alpha_1} dx_1 + f_{\beta_1} d\beta_1 + \dots + f_{\lambda_1} d\lambda_1), \\ E dQ_2 = - E F(\vartheta_2) dS_2 - (f_{\alpha_2} dx_2 + f_{\beta_2} d\beta_2 + \dots + f_{\lambda_2} d\lambda_2). \end{cases}$$

Nous déduisons de ces égalités (26)

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} &= - d(S_1 + S_2) \\ &\quad - \frac{f_{\alpha_1} dx_1 + f_{\beta_1} d\beta_1 + \dots + f_{\lambda_1} d\lambda_1}{E F(\vartheta_1)} \\ &\quad - \frac{f_{\alpha_2} dx_2 + f_{\beta_2} d\beta_2 + \dots + f_{\lambda_2} d\lambda_2}{E F(\vartheta_2)}. \end{aligned} \right.$$

Intégrons cette égalité (27) pour un cycle fermé, et nous aurons cette généralisation du théorème de Clausius, due à M. H. Poincaré :

*Lorsqu'un système formé de n parties indépendantes, dont chacune a une température distincte, mais uniforme, décrit un cycle fermé, on a*

$$(28) \quad \int \left[ \frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} + \dots + \frac{dQ_n}{F(\vartheta_n)} \right] \geq 0.$$

*Dans le cas particulier où le système est dénué de viscosité, le signe d'inégalité disparaît.*

On voit ainsi comment plusieurs des propriétés d'un système de température uniforme s'étendent à un système composé de parties indépendantes, portées à des températures différentes les unes des autres.

### CHAPITRE III.

#### LES LIAISONS.

1. *Liaisons bilatérales et liaisons unilatérales.* — Imaginons un système formé de parties séparées, indépendantes les unes des autres. Pour simplifier et préciser les raisonnements, sans d'ailleurs nuire à leur généralité, réduisons le nombre de ces parties à deux et désignons-les par les indices 1 et 2.

Supposons chacune de ces parties de température uniforme et définie par des variables normales; soient  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1, a_1, b_1, \dots, l_1, \mathfrak{S}_1$  les variables normales qui définissent la partie 1 et  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2, a_2, b_2, \dots, l_2, \mathfrak{S}_2$  les variables normales qui définissent la partie 2.

Imaginons que, par un déplacement continu, on amène ces parties au contact. Tandis que ces parties tendent à se mettre au contact, les variables

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_1, & \dots, & \lambda_1, & a_1, & \dots, & l_1, & \mathfrak{S}_1, \\ \alpha_2, & \dots, & \lambda_2, & a_2, & \dots, & l_2, & \mathfrak{S}_2 \end{array}$$

tendent vers des valeurs limites, et nous admettrons que la connaissance de ces valeurs limites suffit à déterminer l'état du système au moment où le contact est établi.

Cela revient à faire l'hypothèse suivante : *L'état du système au moment où les parties 1 et 2 sont contiguës diffère infiniment peu de l'état du système au moment où ces parties sont infiniment près de se toucher.* Ce qui va suivre ne pourrait s'appliquer à un système pour lequel on ne supposerait pas vérifiée cette hypothèse.

En général, une fois le contact établi, les parties 1 et 2 cessent d'être indépendantes.

En premier lieu, il est parfois possible d'imposer au système, une fois le contact établi, des modifications virtuelles dans lesquelles l'état de chacune des parties 1 et 2 éprouve des variations qui seraient inconcevables si ces parties n'étaient pas contiguës.

Si, par exemple, les parties 1 et 2 sont des corps électrisés, la distribution électrique peut varier sur chacune d'elles, mais, tant qu'elles sont séparées, la charge totale de chacune d'elles demeure forcément constante; au contraire, lorsque le contact est établi entre elles, la charge totale de l'une peut diminuer, pourvu que la charge de l'autre augmente d'une quantité égale.

De même, lorsque les parties 1 et 2 sont au contact, il peut se faire qu'elles se mélangent l'une à l'autre, modification inconcevable tant qu'elles sont séparées.

Laissons de côté ces cas où le contact des diverses parties introduit de nouveaux modes de variation dans le système; supposons que, dans toute variation virtuelle du système, chacune des deux parties 1 et 2 éprouve une modification qui serait encore une variation virtuelle de cette partie si elle était isolée; ces deux parties ne seront pas, néanmoins, deux systèmes indépendants.

En effet, une fois le contact établi, les déplacements virtuels de chacune de ces deux parties ne sont plus absolument arbitraires; ces déplacements virtuels peuvent ou bien maintenir le contact des parties, ou bien faire cesser ce contact soit en certains points, soit en totalité, ou bien encore établir de nouveaux contacts; mais, puisque nous excluons l'hypothèse du mélange, ils ne doivent pas tendre à faire pénétrer les deux parties l'une dans l'autre, à amener en un même lieu une portion de l'une et une portion de l'autre.

Cherchons une méthode analytique propre à exclure les déplacements qui amèneraient les deux parties à se pénétrer.

Imaginons que la surface  $S_1$ , qui termine la partie 1, et la surface  $S_2$ , qui termine la partie 2, soient en contact en un certain point  $p$ . Soient  $p_1$  le point matériel de la partie 1 et  $p_2$  le point matériel de la partie 2 qui se trouvent en  $p$ . Soient  $N_1$ ,  $N_2$  les normales en  $p$  aux surfaces  $S_1$ ,  $S_2$ , dirigées respectivement vers l'intérieur des parties 1 et 2. Pour qu'un déplacement  $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$  du point  $p_1$  et un déplacement  $(\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2)$  du point  $p_2$  amènent les parties 1 et 2 à se pénétrer au

voisinage de ces points, il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} & \cos(N_1, x) \delta x_1 + \cos(N_1, y) \delta y_1 + \cos(N_1, z) \delta z_1 \\ & + \cos(N_2, x) \delta x_2 + \cos(N_2, y) \delta y_2 + \cos(N_2, z) \delta z_2 < 0. \end{aligned}$$

On exclura donc les déplacements qui tendraient à faire pénétrer les deux corps l'un dans l'autre en imposant aux déplacements virtuels la condition

$$\begin{aligned} & \cos(N_1, x) \delta x_1 + \cos(N_1, y) \delta y_1 + \cos(N_1, z) \delta z_1 \\ & + \cos(N_2, x) \delta x_2 + \cos(N_2, y) \delta y_2 + \cos(N_2, z) \delta z_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Or  $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$  s'expriment en fonction linéaire et homogène de  $\delta \alpha_1, \dots, \delta \lambda_1$ ;  $\delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$  s'expriment en fonction linéaire et homogène de  $\delta \alpha_2, \dots, \delta \lambda_2$  [I<sup>re</sup> Partie, Chap. I, égalités (2)]. La condition précédente peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} & M_1 \delta \alpha_1 + N_1 \delta \beta_1 + \dots + P_1 \delta \lambda_1 \\ & + M_2 \delta \alpha_2 + N_2 \delta \beta_2 + \dots + P_2 \delta \lambda_2 \geq 0, \end{aligned}$$

$M_1, N_1, \dots, P_1$  étant des fonctions des variables  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \lambda_1$  et  $M_2, N_2, \dots, P_2$  étant des fonctions des variables  $\alpha_2, \beta_2, \dots, \lambda_2$ .

Ainsi, les déplacements virtuels d'un système formé de diverses parties au contact sont soumis à un certain nombre de conditions de la forme

$$(1) \quad \begin{cases} M_1 \delta \alpha_1 + \dots + P_1 \delta \lambda_1 + M_2 \delta \alpha_2 + \dots + P_2 \delta \lambda_2 \geq 0, \\ M'_1 \delta \alpha_1 + \dots + P'_1 \delta \lambda_1 + M'_2 \delta \alpha_2 + \dots + P'_2 \delta \lambda_2 \geq 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

que l'on nomme les *conditions de liaisons du système*.

Si l'on voulait conserver seulement les déplacements virtuels qui n'altèrent pas le contact des parties 1 et 2, on devrait remplacer les *conditions* (1) par les *équations*

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 \delta \alpha_1 + \dots + P_1 \delta \lambda_1 + M_2 \delta \alpha_2 + \dots + P_2 \delta \lambda_2 = 0, \\ M'_1 \delta \alpha_1 + \dots + P'_1 \delta \lambda_1 + M'_2 \delta \alpha_2 + \dots + P'_2 \delta \lambda_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Lorsqu'on exclut les déplacements virtuels qui feraient cesser un contact, lorsque, par conséquent, on suppose tous les déplacements virtuels soumis aux équations (2), on dit que le système est soumis seulement à des *liaisons bilatérales*; dans ce cas, si

$$\delta\alpha_1, \dots, \delta\lambda_1, \delta\alpha_2, \dots, \delta\lambda_2$$

est un déplacement virtuel du système,

$$\begin{aligned} &(-\delta\alpha_1), \dots, (-\delta\lambda_1), \\ &(-\delta\alpha_2), \dots, (-\delta\lambda_2) \end{aligned}$$

est aussi un déplacement virtuel du système, en sorte que tous les déplacements virtuels du système sont *renversables*.

Lorsque, au contraire, on laisse libres les déplacements qui peuvent faire cesser des contacts, les liaisons du système, exprimées par les conditions (1), sont dites *liaisons unilatérales*; les déplacements virtuels *ne sont plus tous renversables*.

**2. Énergie interne d'un système à liaisons.** — Imaginons un système formé de deux parties 1 et 2, susceptibles d'être séparées ou au contact. Désignons par  $\mathfrak{v}$  l'énergie interne du système lorsque les deux parties 1 et 2 sont au contact.

Séparons infiniment peu ces deux parties; l'énergie interne du système prendra la valeur

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_1(\alpha_1, \dots, \lambda_1, a_1, \dots, l_1, \mathfrak{S}_1) + Y_2(\alpha_2, \dots, \lambda_2, a_2, \dots, l_2, \mathfrak{S}_2) \\ + \Psi(\alpha_1, \dots, \lambda_1, a_1, \dots, l_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2, a_2, \dots, l_2), \end{array} \right.$$

les variables ayant des valeurs infiniment voisines de celles qui assurent le contact des parties 1 et 2.

Mais la modification que nous venons de considérer change infiniment peu, par hypothèse, l'état du système; par conséquent, l'œuvre accomplie dans cette modification est infiniment petite; par conséquent aussi l'énergie interne du système varie infiniment peu; la quantité  $\mathfrak{v}$  est égale à la limite vers laquelle tend la quantité (3) lorsque les parties 1 et 2 tendent à s'appliquer l'une contre l'autre. D'où la proposition suivante :

*L'énergie interne d'un système formé de plusieurs parties en*

*contact est égale à la limite vers laquelle tend l'énergie interne du système lorsque ses diverses parties, séparées les unes des autres, tendent à s'appliquer les unes contre les autres.*

Prenons un système isolé formé de plusieurs parties, dans un état où ses diverses parties 1 et 2 sont infiniment près d'être au contact; calculons les quantités

$$\begin{aligned} E \frac{\partial \Psi}{\partial z_1} &= -A_1, & E \frac{\partial \Psi}{\partial z_2} &= -A_2, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \\ E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} &= -L_1, & E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} &= -L_2, \\ E \frac{\partial \Psi}{\partial a_1} &= -\mathfrak{a}_1, & E \frac{\partial \Psi}{\partial a_2} &= -\mathfrak{a}_2, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \\ E \frac{\partial \Psi}{\partial l_1} &= -\xi_1, & E \frac{\partial \Psi}{\partial l_2} &= -\xi_2. \end{aligned}$$

Calculons les *valeurs limites* vers lesquelles tendent ces quantités lorsque les parties 1 et 2 tendent à s'appliquer l'une contre l'autre; *par définition*, les limites des quantités  $A_1, \dots, L, \mathfrak{a}_1, \dots, \xi_1$  seront les actions que la partie 2, appliquée contre la partie 1, exerce sur cette partie 1; de même, les limites des quantités  $A_2, \dots, L_2, \mathfrak{a}_2, \dots, \xi_2$  seront les actions que la partie 1 exerce sur la partie 2. Les travaux virtuels de ces actions auront pour valeurs respectives

$$\begin{aligned} A_1 \delta z_1 + \dots + L_1 \delta \lambda_1 + \mathfrak{a}_1 \delta a_1 + \dots + \xi_1 \delta l_1, \\ A_2 \delta z_2 + \dots + L_2 \delta \lambda_2 + \mathfrak{a}_2 \delta a_2 + \dots + \xi_2 \delta l_2, \end{aligned}$$

$\delta a_1, \dots, \delta \lambda_1, \delta z_2, \dots, \delta \lambda_2$  étant d'ailleurs soumis aux conditions de liaisons.

Ce que nous venons de dire constitue une définition; en effet, les actions mutuelles de deux systèmes 1 et 2 n'étaient définies jusqu'ici qu'autant que ces systèmes étaient indépendants et ce n'est pas ici le cas.

3. *Entropie et potentiel thermodynamique d'un système à liaisons.* — Imaginons encore un système formé de plusieurs parties, deux par exemple, les parties 1 et 2, et supposons que ces parties soient toutes à la même température; ce système aura alors une entropie et un potentiel thermodynamique interne, que les parties qui le composent soient ou ne soient pas au contact. En raisonnant comme dans le cas précédent, on prouvera que *l'entropie et le potentiel thermodynamique interne d'un système de température uniforme, formé de plusieurs parties en contact, sont égaux respectivement aux limites vers lesquelles tendent l'entropie et le potentiel thermodynamique du système lorsque les diverses parties, isolées, tendent à s'accoler les unes aux autres.*

Si nous conservons nos notations habituelles, cette entropie  $s$  et ce potentiel thermodynamique interne  $\mathfrak{F}$  seront les valeurs limites des quantités

$$s = \Sigma_1(\alpha_1, \dots, \lambda_1, a_1, \dots, l_1, \mathfrak{S}) + \Sigma_2(\alpha_2, \dots, \lambda_2, a_2, \dots, l_2, \mathfrak{S}),$$

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1(\alpha_1, \dots, \lambda_1, a_1, \dots, l_1, \mathfrak{S}) + \mathfrak{F}_2(\alpha_2, \dots, \lambda_2, a_2, \dots, l_2, \mathfrak{S}),$$

$$+ E\Psi(\alpha_1, \dots, \lambda_1, a_1, \dots, l_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2, a_2, \dots, l_2, \mathfrak{S}).$$

4. *Équilibre d'un système soumis à des liaisons bilatérales.* — Imaginons un système formé de deux parties 1 et 2, entre lesquelles existent des conditions de liaisons

$$(1) \quad \begin{cases} M_1 \delta\alpha_1 + \dots + P_1 \delta\lambda_1 + M_2 \delta\alpha_2 + \dots + P_2 \delta\lambda_2 \geq 0, \\ M'_1 \delta\alpha_1 + \dots + P'_1 \delta\lambda_1 + M'_2 \delta\alpha_2 + \dots + P'_2 \delta\lambda_2 \geq 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Supposons que nous soyons assuré d'une manière quelconque que le système ne peut prendre aucun mouvement durant lequel quelqu'une des inégalités

$$M_1 \delta\alpha_1 + \dots + P_1 \delta\lambda_1 + M_2 \delta\alpha_2 + \dots + P_2 \delta\lambda_2 > 0,$$

$$M'_1 \delta\alpha_1 + \dots + P'_1 \delta\lambda_1 + M'_2 \delta\alpha_2 + \dots + P'_2 \delta\lambda_2 > 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

serait satisfaite.

Dès lors, en remplaçant les conditions de liaisons (1) par les équations de liaisons (2), nous sommes assurés de ne rien modifier à l'état d'équilibre ou de mouvement du système; nous pouvons donc considérer le système comme soumis uniquement aux liaisons bilatérales

$$(2) \quad \begin{cases} M_1 \delta\alpha_1 + \dots + P_1 \delta\lambda_1 + M_2 \delta\alpha_2 + \dots + P_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1 \delta\alpha_1 + \dots + P'_1 \delta\lambda_1 + M'_2 \delta\alpha_2 + \dots + P'_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Supposons que les deux parties 1 et 2 soient à la même température  $\vartheta$ . Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du système que forment ces deux parties.

Donnons à ce système un déplacement virtuel, isothermique, compatible avec les égalités (2). Les actions extérieures effectuent un travail virtuel  $d\epsilon$ ; le potentiel thermodynamique interne subit une variation  $\delta\mathcal{F}$ ; d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, les conditions nécessaires et suffisantes que nous cherchons s'obtiendront en écrivant que, pour tout déplacement virtuel isothermique du système, on a

$$(4) \quad \delta\mathcal{F} = d\epsilon.$$

Or, on peut écrire

$$\begin{aligned} d\epsilon &= A_1 \delta\alpha_1 + \dots + L_1 d\lambda_1 + \mathfrak{A}_1 \delta\alpha_1 + \dots + \mathfrak{L}_1 \delta l_1 \\ &\quad + A_2 \delta\alpha_2 + \dots + L_2 d\lambda_2 + \mathfrak{A}_2 \delta\alpha_2 + \dots + \mathfrak{L}_2 \delta l_2, \\ \delta\mathcal{F} &= \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \lambda_1} \delta\lambda_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial a_1} \delta a_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial l_1} \delta l_1 \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2} \delta\lambda_2 + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial l_2} \delta l_2 \\ &\quad + E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \delta\lambda_1 + E \frac{\partial \Psi}{\partial a_1} \delta a_1 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial l_1} \delta l_1 \\ &\quad + E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} \delta\lambda_2 + E \frac{\partial \Psi}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial l_2} \delta l_2. \end{aligned}$$

L'égalité (4) peut donc s'écrire

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & \left( A_1 - E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_1} \right) \delta \alpha_1 + \dots + \left( L_1 - E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \lambda_1} \right) \delta \lambda_1, \\ & + \left( \mathcal{A}_1 - E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_1} \right) \delta a_1 + \dots + \left( \mathcal{L}_1 - E \frac{\partial \Psi}{\partial l_1} - \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial l_1} \right) \delta l_1, \\ & + \left( A_2 - E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2} \right) \delta \alpha_2 + \dots + \left( L_2 - E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2} \right) \delta \lambda_2, \\ & + \left( \mathcal{A}_2 - E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2} \right) \delta a_2 + \dots + \left( \mathcal{L}_2 - E \frac{\partial \Psi}{\partial l_2} - \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial l_2} \right) \delta l_2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Mais cette égalité doit avoir lieu non pas quelles que soient les variations

$$\delta \alpha_1, \dots, \delta \lambda_1, \delta a_1, \dots, \delta l_1, \delta \alpha_2, \dots, \delta \lambda_2, \delta a_2, \dots, \delta l_2,$$

mais seulement lorsque les égalités (2) sont satisfaites.

Il faut et il suffit pour cela qu'il existe des facteurs  $\Pi, \Pi', \dots$ , en nombre égal à celui des équations (2), ces facteurs dépendant uniquement des variables  $\alpha_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2$ , tels que l'égalité (5) ait lieu quels que soient

$$\begin{aligned} & \delta \alpha_1, \dots, \delta \lambda_1, \delta a_1, \dots, \delta l_1, \\ & \delta \alpha_2, \dots, \delta \lambda_2, \delta a_2, \dots, \delta l_2, \end{aligned}$$

lorsqu'on ajoute à son premier membre l'expression

$$\begin{aligned} & \Pi (M_1 \delta \alpha_1 + \dots + P_1 \delta \lambda_1 + M_2 \delta \alpha_2 + \dots + P_2 \delta \lambda_2) \\ & + \Pi' (M'_1 \delta \alpha_1 + \dots + P'_1 \delta \lambda_1 + M'_2 \delta \alpha_2 + \dots + P'_2 \delta \lambda_2) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

En d'autres termes, pour que le système soumis aux liaisons bilaté-





Si l'on tient compte des égalités (2), on peut énoncer le théorème suivant :

*Le travail virtuel de toutes les forces de liaisons qui s'exercent entre les deux systèmes (1) et (2) est nul pour tout déplacement virtuel qui respecte les liaisons bilatérales existant entre les deux systèmes.*

Les conditions d'équilibre d'un système qui est assujetti aux corps étrangers par des liaisons bilatérales diffèrent en un point essentiel des conditions d'équilibre d'un système indépendant.

Supposons que l'on donne à un système indépendant une modification virtuelle  $\delta\alpha, \dots, \delta\lambda, \delta\alpha, \dots, \delta l$ , l'état des corps étrangers demeurant invariable; le travail virtuel des actions extérieures sera, dans ce cas, la différentielle totale d'une fonction des variables  $\alpha, \dots, \lambda, a, \dots, l$  (voir Chap. I, n° 4). Considérons au contraire un système assujetti à des liaisons bilatérales avec les corps extérieurs; le travail virtuel des actions extérieures et des forces de liaison, qui doit, dans ce cas, remplacer le travail des seules actions extérieures, ne sera plus, en général, une différentielle totale. Comme nous avons eu soin de ne jamais supposer, dans nos démonstrations, que le travail virtuel des actions extérieures fût une différentielle totale, les résultats de ces démonstrations s'appliquent aux systèmes qui présentent, avec les corps extérieurs, des liaisons bilatérales.

5. *Équilibre d'un système soumis à des liaisons unilatérales.* — Pourquoi, en traitant, au numéro précédent, de l'équilibre d'un système soumis à des liaisons, avons-nous dû ajouter cette restriction que ces liaisons étaient bilatérales? La raison en est simple. Nous avons fait usage des lois de l'équilibre des systèmes telles qu'elles ont été établies au Chapitre I. Or, tout, dans l'établissement de ces lois, suppose que le système soit défini, au voisinage de l'état étudié, par un système unique de paramètres, variables arbitrairement d'une manière continue. Cette condition n'est pas réalisée dans un système soumis à des liaisons unilatérales. Prenons un système formé de diverses parties qui, dans l'état étudié, sont au contact; deux systèmes différents de

variables devront être employés pour définir les états du système voisins de celui-là, selon qu'en ces états le contact sera conservé ou supprimé. On voit donc bien que nos raisonnements tomberaient si le système présentait des liaisons unilatérales.

Les raisonnements précédents supposent que l'on soit assuré de la proposition suivante : Le système ne peut, à partir de l'état considéré, et les vitesses des diverses parties étant toutes égales à 0, prendre un mouvement dont le premier élément représenterait un déplacement virtuel non renversable; nous aurons donc les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre du système si, aux conditions établies dans le numéro précédent, nous joignons des conditions nécessaires et suffisantes pour que tout mouvement de ce type soit exclu.

Malheureusement, nous ne pouvons établir avec une entière rigueur ces conditions nécessaires et suffisantes; nous ne pouvons indiquer d'une manière assurée qu'une condition qui est *suffisante* pour rendre impossible tout mouvement du système débutant, sans vitesse initiale, par un déplacement non renversable.

Cette condition est la suivante :

*Si, pour toute modification virtuelle non renversable, on a l'inégalité*

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_1} - A_1 \right) \delta a_1 + \dots + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_1} - L_1 \right) \delta \lambda_1 \\ & + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_1} - \mathfrak{A}_1 \right) \delta a_1 + \dots + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_1} - \mathfrak{L}_1 \right) \delta l_1 \\ & + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_2} - A_2 \right) \delta a_2 + \dots + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda_2} - L_2 \right) \delta \lambda_2 \\ & + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_2} - \mathfrak{A}_2 \right) \delta a_2 + \dots + \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2 \right) \delta l_2 > 0, \end{aligned}$$

*on est assuré que le système ne peut prendre, sans vitesse initiale, aucun mouvement commençant par un déplacement virtuel non renversable.*

Imaginons, en effet, que le système puisse prendre un semblable mouvement. Soit  $t_0$  l'instant initial de ce mouvement. Soient  $da_1, \dots, d\lambda_1, da_1, \dots, dl_1, da_2, \dots, d\lambda_2, da_2, \dots, dl_2$  le premier élément de

ce mouvement. Supposons que l'on ait

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \dots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2 > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité varie d'une manière continue durant le mouvement du système; nous pourrions donc déterminer un instant  $t_1$ , postérieur à  $t_0$  et assez voisin de  $t_0$ , pour que, entre les instants  $t_0$  et  $t_1$ , ce premier membre demeure constamment positif; nous aurions certainement alors

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \dots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2 \right] > 0.$$

Mais, le système ayant rompu à l'instant  $t_0$  certaines liaisons unilatérales, on peut toujours supposer l'instant  $t_1$  assez voisin de l'instant  $t_0$  pour que, entre ces deux instants, le système soit soumis exclusivement à des liaisons bilatérales. Pendant ce temps, son état sera défini par un système unique de paramètres, variables arbitrairement d'une manière continue; sa température étant uniforme on pourra lui appliquer les lois du mouvement d'un système de température uniforme, telles qu'elles ont été établies au Chapitre II; ces lois nous donneront immédiatement l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \dots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2 \right] \\ & = \mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}_1 + \int_{t_0}^{t_1} (f_{\alpha_1} d\alpha_1 + \dots + f_{l_2} dl_2). \end{aligned}$$

Les vitesses initiales étant toutes égales à 0 par hypothèse, il en est de même de  $\mathfrak{C}_0$ , et l'égalité précédente nous donne l'inégalité

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[ \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \alpha_1} - A_1\right) d\alpha_1 + \dots + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial l_2} - \mathfrak{L}_2\right) dl_2 \right] < 0,$$

qui est en contradiction avec la précédente.

Cette contradiction démontre l'exactitude de la proposition énoncée.

La condition précédente, suffisante pour entraver tout mouvement qui débiterait par un déplacement non renversable, est-elle en même temps nécessaire à cet objet? Fourier, Gauss, Cauchy et, depuis,

beaucoup d'autres géomètres l'ont pensé; mais il nous semble difficile de le démontrer rigoureusement en s'appuyant uniquement sur ce qui précède.

**6. Mouvement d'un système, de température uniforme, soumis à des liaisons bilatérales.** — Pour ne pas allonger outre mesure le présent travail, nous n'étudierons le mouvement d'un système qu'autant que les liaisons entre ses diverses parties demeurent bilatérales.

Considérons un système formé de deux parties 1 et 2, entre lesquelles existent des liaisons bilatérales; supposons les deux parties 1 et 2 à la même température  $\vartheta$ . L'ensemble de ces deux parties formera alors un système auquel on pourra appliquer les lois générales du mouvement exposées au Chapitre II.

Nous pouvons, sans avoir besoin de connaître explicitement les variables indépendantes qui définissent ce système, énoncer les lois du mouvement de la manière suivante :

Soient

$d\bar{\epsilon}$  le travail virtuel des actions extérieures;  
 $\delta\mathcal{F}$  la variation isothermique du potentiel thermodynamique interne;  
 $d\tau$  le travail virtuel des forces d'inertie;  
 $d\phi$  le travail virtuel des résistances passives.

Pour tout déplacement virtuel du système, nous devons avoir

$$(9) \quad d\bar{\epsilon} + d\phi - \delta\mathcal{F} = d\tau.$$

Or, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon} = & A_1 \delta\alpha_1 + \dots + L_1 \delta\lambda_1 + \alpha_1 \delta a_1 + \dots + \xi_1 \delta l_1 \\ & + A_2 \delta\alpha_2 + \dots + L_2 \delta\lambda_2 + \alpha_2 \delta a_2 + \dots + \xi_2 \delta l_2, \\ \delta\mathcal{F} = & \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \lambda_1} \delta\lambda_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial a_1} \delta a_1 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial l_1} \delta l_1 \\ & + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \lambda_2} \delta\lambda_2 + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial l_2} \delta l_2 \\ & + E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_1} \delta\alpha_1 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} \delta\lambda_1 + E \frac{\partial \Psi}{\partial a_1} \delta a_1 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial l_1} \delta l_1 \\ & + E \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_2} \delta\alpha_2 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_2} \delta\lambda_2 + E \frac{\partial \Psi}{\partial a_2} \delta a_2 + \dots + E \frac{\partial \Psi}{\partial l_2} \delta l_2, \end{aligned}$$

$$d\varphi = f_{\alpha_1} \delta\alpha_1 + \dots + f_{\lambda_1} \delta\lambda_1 + f_{a_1} \delta a_1 + \dots + f_{l_1} \delta l_1$$

$$+ f_{\alpha_2} \delta\alpha_2 + \dots + f_{\lambda_2} \delta\lambda_2 + f_{a_2} \delta a_2 + \dots + f_{l_2} \delta l_2,$$

$$d\tau = \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial x'_1} \right) \delta\alpha_1 + \dots + \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \lambda_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \lambda'_1} \right) \delta\lambda_1,$$

$$+ \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial x_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial x'_2} \right) \delta\alpha_2 + \dots + \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial \lambda'_2} \right) \delta\lambda_2.$$

L'égalité (9) peut donc s'écrire

$$(9 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} A_1 \delta\alpha_1 + \dots + L_2 \delta l_2 - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_1} \delta\alpha_1 + \dots - \frac{\partial \mathfrak{F}_2}{\partial l_2} \delta l_2 \\ - E \frac{\partial \Psi}{\partial a_1} \delta a_1 - \dots - E \frac{\partial \Psi}{\partial l_2} \delta l_2 + f_{\alpha_1} \delta\alpha_1 + \dots + f_{l_2} \delta l_2 \\ = \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial x_1} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial x'_1} \right) \delta\alpha_1 + \dots + \left( \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial \lambda_2} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial \lambda'_2} \right) \delta\lambda_2. \end{array} \right.$$

Mais, dans cette égalité (9 bis), les quantités  $\delta\alpha_1, \dots, \delta\lambda_2$  n'ont pas des valeurs arbitraires; elles sont soumises aux équations de liaison

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} M_1 \delta\alpha_1 + \dots + P_1 \delta\lambda_1 + M_2 \delta\alpha_2 + \dots + P_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1 \delta\alpha_1 + \dots + P'_1 \delta\lambda_1 + M'_2 \delta\alpha_2 + \dots + P'_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Dès lors, il existe des facteurs  $\Pi, \Pi', \dots$ , tels qu'en multipliant par  $\Pi$  le premier membre de la première équation (2), par  $\Pi'$  le premier membre de la seconde, etc., et en ajoutant les résultats obtenus au premier membre de l'équation (9 bis), celle-ci ait lieu quelles que soient les quantités  $\delta\alpha_1, \dots, \delta l_2$ .

Les facteurs  $\Pi, \Pi', \dots$  dépendent uniquement des variables  $\alpha_1, \dots, \lambda_1, \alpha_2, \dots, \lambda_2$  et de leurs dérivées premières et secondes par rapport au temps et point des variables  $a_1, \dots, l_1, a_2, \dots, l_2$ , ni des dérivées de ces variables par rapport au temps.

On doit donc avoir, à chaque instant du mouvement,

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} A_1 - E \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \dots \\ + f_{\alpha_1} - \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial x_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial x'_1} - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \dots \dots \\ L_1 - E \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_1} + \Pi P_1 + \Pi' P'_1 + \dots \\ + f_{\lambda_1} - \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \lambda_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \lambda'_1} - \frac{\partial \mathfrak{F}_1}{\partial \lambda_1} = 0; \end{array} \right.$$



Cette proposition, toutefois, n'est démontrée qu'autant que l'ensemble formé par le système et les corps extérieurs a, à chaque instant, une température uniforme.

Considérons une modification infiniment petite quelconque du système dont les deux parties 1 et 2, à la même température, ont entre elles des liaisons bilatérales; le travail total des forces de liaisons qui s'exercent entre ces deux parties aura pour valeur

$$\left[ (\Pi M_1 + \Pi' M'_1 + \dots) \frac{dx_1}{dt} + \dots + (\Pi P_1 + \Pi' P'_1) \frac{d\lambda_1}{dt} + (\Pi M_2 + \Pi' M'_2 + \dots) \frac{dx_2}{dt} + \dots + (\Pi P_2 + \Pi' P'_2) \frac{d\lambda_2}{dt} \right] dt.$$

Mais les équations de liaison (2) doivent être vérifiées si l'on pose

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} dt &= \delta\alpha_1, & \frac{dx_2}{dt} dt &= \delta\alpha_2, \\ \dots\dots\dots, & & \dots\dots\dots, & \\ \frac{d\lambda_1}{dt} dt &= \delta\lambda_1, & \frac{d\lambda_2}{dt} dt &= \delta\lambda_2. \end{aligned}$$

Le travail précédent est donc égal à 0.

**7. Mouvement d'un système dont les diverses parties, portées à des températures différentes, sont assujetties à des liaisons bilatérales.** — Tout ce que nous avons dit jusqu'ici sur les liaisons a été déduit de ce qui a été établi dans les deux Chapitres précédents, sans que nous ayons eu besoin d'invoquer aucune hypothèse nouvelle. Il n'en sera pas de même de ce qui va être exposé au présent numéro.

Nous avons traité, au Chapitre II, n° 6, le mouvement d'un système formé de diverses parties indépendantes portées à des températures différentes. Les équations que nous avons obtenues peuvent être condensées dans la proposition suivante :

Supposons que le système soit formé de deux parties 1 et 2. Soit

$$\vartheta = Y_1 + Y_2 + \Psi$$

l'énergie interne de ce système, et posons

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + E\Psi,$$



La somme

$$-(R_\alpha \delta\alpha + \dots + R_\lambda \delta\lambda + \mathfrak{R}_\alpha \delta\alpha + \dots + \mathfrak{R}_l \delta l)$$

sera, par définition, la *quantité de chaleur dégagée* par le système durant la modification réelle ou virtuelle  $\delta\alpha, \dots, \delta\lambda, \delta\alpha, \dots, \delta l$ .

Il résulte évidemment de cette définition, qui renferme comme cas particulier celle que nous avons donnée pour un système indépendant (I<sup>re</sup> Partie, Chap. III, n<sup>o</sup> 3), qu'une modification réelle ou virtuelle d'un système isolé entraîne un dégagement de chaleur égal à 0.

Considérons un système formé de deux parties 1 et 2. Soient  $\alpha_1, \dots, \lambda_1, a_1, \dots, l_1$  les variables qui définissent la première partie;  $\alpha_2, \dots, \lambda_2, a_2, \dots, l_2$  les variables qui définissent la seconde partie.

Ces deux parties présentent entre elles des contacts qu'expriment les équations de liaisons

$$(14) \quad \begin{cases} M_1 \delta\alpha_1 + \dots + P_1 \delta\lambda_1 + M_2 \delta\alpha_2 + \dots + P_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ M'_1 \delta\alpha_1 + \dots + P'_1 \delta\lambda_1 + M'_2 \delta\alpha_2 + \dots + P'_2 \delta\lambda_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

En outre, elles présentent avec les corps extérieurs des contacts qu'expriment les équations de liaisons

$$(15) \quad \begin{cases} m_1 \delta a_1 + \dots + p_1 \delta\lambda_1 + \mu_1 \delta a + \dots + \varpi_1 \delta l, \\ \dots\dots\dots \\ m_2 \delta a_2 + \dots + p_2 \delta\lambda_2 + \mu_2 \delta a + \dots + \varpi_2 \delta l, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

$a, \dots, l$  étant les variables qui définissent la position des corps extérieurs.

L'énergie interne du système formé par l'ensemble des deux parties sera désignée par

$$v = Y_1 + Y_2 + \Psi.$$

Les actions extérieures appliquées au système formé des deux parties









Intégrons cette égalité pour un cycle fermé, en observant que l'on a

$$\int ds = 0,$$

$$f_{\alpha_1} d\alpha_1 + \dots + f_{l_1} dl_1 \leq 0,$$

$$f_{\alpha_2} d\alpha_2 + \dots + f_{l_2} dl_2 \leq 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f_{\alpha_n} d\alpha_n + \dots + f_{l_n} dl_n \leq 0,$$

et nous trouverons l'inégalité

$$(19) \quad \int \left[ \frac{dQ_1}{F(\vartheta_1)} + \frac{dQ_2}{F(\vartheta_2)} + \dots + \frac{dQ_n}{F(\vartheta_n)} \right] \geq 0.$$

Cette inégalité est ainsi étendue aux systèmes que forment des parties portées à des températures différentes et présentant entre elles des liaisons bilatérales.

## CHAPITRE IV.

### STABILITÉ ET DÉPLACEMENT DE L'ÉQUILIBRE.

**1. Du potentiel thermodynamique total.** — Le travail virtuel des actions extérieures à un système (en y comprenant, au besoin, les forces de liaisons extérieures)

$$A \delta\alpha + B \delta\beta + \dots + L \delta\lambda + \mathfrak{a} \delta a + \mathfrak{b} \delta b + \dots + \mathfrak{z} \delta l$$

n'est pas, en général, la différentielle totale d'une fonction uniforme des variables normales  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, a, b, \dots, l$ . Cependant, s'il n'en est pas ainsi en général, il en est ainsi dans un grand nombre de cas particuliers importants.

Lorsqu'il existe une fonction uniforme  $\Omega$  telle que l'on ait

$$(1) \quad A d\alpha + B d\beta + \dots + L d\lambda + \mathfrak{a} da + \mathfrak{b} db + \dots + \mathfrak{z} dl = -d\Omega,$$

on dit que *les actions extérieures au système admettent un potentiel*

et que  $\Omega$  est ce potentiel. Ce potentiel, lorsqu'il existe, est évidemment déterminé à une constante près.

Lorsque les actions extérieures admettent un potentiel, nous donnons le nom de *potentiel thermodynamique total* du système à la somme

$$(2) \quad \Phi = \mathfrak{F} + \Omega$$

du potentiel thermodynamique interne et du potentiel des actions extérieures.

Voici un cas important où un système admet un potentiel thermodynamique total :

Imaginons les variations réelles ou virtuelles des corps extérieurs tellement liées aux variations réelles ou virtuelles du système que les actions extérieures  $A, B, \dots, L, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots, \mathfrak{L}$  gardent des valeurs invariables. On pourra alors écrire

$$\begin{aligned} A d\alpha + B d\beta + \dots + L d\lambda + \mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b + \dots + \mathfrak{L} l \\ = d(A\alpha + B\beta + \dots + L\lambda + \mathfrak{a} a + \mathfrak{b} b + \dots + \mathfrak{L} l) \end{aligned}$$

et le système admettra pour potentiel thermodynamique total la quantité

$$(3) \quad \Phi = \mathfrak{F} - (A\alpha + B\beta + \dots + L\lambda + \mathfrak{a} da + \mathfrak{b} db + \dots + \mathfrak{L} dl).$$

Nous donnerons à cette quantité, que l'on a souvent à considérer dans les applications, le nom de *potentiel thermodynamique sous actions constantes*.

**2. Stabilité de l'équilibre à température constante.** — Il nous est désormais inutile de distinguer les variables  $a, b, \dots, l$  des variables  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ . Considérons donc un système dont la température soit uniforme et qui soit défini par les variables normales  $\alpha, \beta, \dots, \lambda, \mathfrak{S}$ . Pour tout mouvement réel de ce système, nous aurons [Chap. II, équation (11)],

$$\begin{aligned} d\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S} - (A d\alpha + B d\beta + \dots + L d\lambda) \\ = - d\mathfrak{U} + (f_a d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda). \end{aligned}$$

Si les actions extérieures admettent un potentiel  $\Omega$ , cette égalité, jointe aux égalités (1) et (2), deviendra

$$d\Phi - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{E}} d\mathcal{E} = -d\mathcal{C} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda.$$

Si la modification est isothermique, cette égalité deviendra

$$(4) \quad d\Phi = -d\mathcal{C} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda.$$

Intégrée entre un état initial 0 et un état final 1 du système, elle deviendra

$$(4 \text{ bis}) \quad \Phi_0 - \Phi_1 = \mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_0 - \int_0^1 (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda).$$

Il suffit alors d'observer que la quantité

$$\int_0^1 (f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda)$$

ne peut jamais être positive, et de répéter presque textuellement la démonstration, devenue classique, de Lejeune-Dirichlet (1) pour parvenir au théorème suivant :

*Un système dont la température est maintenue constante est assurément en équilibre stable dans un état où son potentiel thermodynamique total présente une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la même température.*

Il n'est pas du tout certain qu'il n'y ait, pour un système, d'autre état d'équilibre stable que ceux qui correspondent à un minimum du potentiel thermodynamique total.

Dans ce qui va suivre, lorsque nous parlerons d'un système *en équilibre*, nous entendrons désigner abrégativement par là un sys-

---

(1) LEJEUNE-DIRICHLET, *Ueber die Stabilität des Gleichgewichts* (*Journal de Crelle*, t. 22, p. 85; 1846).





est positive, quelles que soient les valeurs, différentes de 0, que l'on attribue aux quantités  $a, b, \dots, l$ .

Il en sera ainsi, en particulier, si l'on fait

$$a = \frac{d\alpha}{d\mathfrak{S}}, \quad b = \frac{d\beta}{d\mathfrak{S}}, \quad \dots, \quad l = \frac{d\lambda}{d\mathfrak{S}}.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left( \frac{d\alpha}{d\mathfrak{S}} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \left( \frac{d\beta}{d\mathfrak{S}} \right)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} \left( \frac{d\lambda}{d\mathfrak{S}} \right)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \partial \nu} \frac{d\mu}{d\mathfrak{S}} \frac{d\nu}{d\mathfrak{S}} > 0.$$

Cette inégalité, jointe à l'égalité (7), donne l'inégalité

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \mathfrak{S}} \frac{d\alpha}{d\mathfrak{S}} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta \partial \mathfrak{S}} \frac{d\beta}{d\mathfrak{S}} + \dots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} \frac{d\lambda}{d\mathfrak{S}} < 0.$$

Posons

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{d\mathfrak{S}} d\mathfrak{S}, \quad d\beta = \frac{d\beta}{d\mathfrak{S}} d\mathfrak{S}, \quad d\lambda = \frac{d\lambda}{d\mathfrak{S}} d\mathfrak{S}.$$

L'inégalité que nous venons d'obtenir pourra s'énoncer de la manière suivante.

La quantité

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta \partial \mathfrak{S}} d\beta + \dots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda$$

est de signe contraire à  $d\mathfrak{S}$ .

Les actions extérieures A, B, ..., L, égales au signe près aux dérivées partielles de la fonction  $\Omega$  par rapport à  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ , sont indépendantes de la température  $\mathfrak{S}$ ; on a donc

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \beta \partial \mathfrak{S}} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} = 0.$$

Dès lors, en vertu de l'égalité (1), le résultat que nous venons d'obtenir peut s'énoncer ainsi :

La quantité

$$(8) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \beta \partial \mathfrak{S}} d\beta + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda$$

est de signe contraire à  $d\mathfrak{S}$ .

En vertu de l'égalité (5 bis) du Chapitre I, la quantité (8) peut s'écrire

$$- E F'(\vartheta) \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta + \dots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d\lambda \right).$$

En vertu des égalités (3) du même Chapitre, elle devient

$$- \frac{E F'(\vartheta)}{F(\vartheta)} (R_\alpha d\alpha + R_\beta d\beta + \dots + R_\lambda d\lambda).$$

La quantité  $\frac{F'(\vartheta)}{F(\vartheta)}$  étant assurément positive, on voit que la quantité

$$R_\alpha d\alpha + R_\beta d\beta + \dots + R_\lambda d\lambda$$

est de même signe que  $d\vartheta$ , ce qui exprime la loi suivante :

*Considérons un système soumis à des actions qui admettent un potentiel. Ce système est en équilibre à une température donnée. Si l'on élève cette température, il s'établit un équilibre différent du premier; les variables normales qui caractérisent l'état du système subissent certaines variations; si elles subissaient ces mêmes variations à température constante, la modification virtuelle imposée au système entraînerait une absorption de chaleur.*

Cette loi, entrevue par Lavoisier et Laplace, a été énoncée par M. J.-H. Van t' Hoff.

4. *Déplacement isothermique de l'équilibre.* — Un système est soumis à des actions constantes A, B, ..., L, et porté à la température  $\vartheta$ ; il prend un certain état d'équilibre stable rendant minimum le potentiel thermodynamique sous les actions constantes A, B, ..., L. Les variables normales  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  ont des valeurs définies en fonctions de A, B, ..., L,  $\vartheta$ , par les équations

$$(9) \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \alpha} = A, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \beta} = B, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \lambda} = L.$$

Laissons à la température la valeur  $\vartheta$  et donnons aux actions A,



Par hypothèse, les valeurs de  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ , que définissent les égalités (9), font prendre à ce potentiel une valeur minima parmi toutes celles qu'il peut prendre à la température  $\vartheta$ . Si donc on donne à  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  ces valeurs, la forme quadratique

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} a^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} b^2 + \dots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} l^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \partial \nu} mn$$

sera positive quelles que soient les valeurs non nulles attribuées aux quantités  $a, b, \dots, l$ ; elle le sera, en particulier, si l'on pose

$$a = d\alpha, \quad b = d\beta, \quad \dots, \quad l = d\lambda.$$

On aura donc

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} (d\beta)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \partial \nu} dm du > 0.$$

Mais les actions  $A, B, \dots, L$ , qui figurent dans l'expression (11) de  $\Phi$ , étant des constantes, on a

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mu \partial \nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \beta^2} (d\beta)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu > 0.$$

L'égalité (10) nous conduit donc à l'inégalité

$$dA d\alpha + dB d\beta + \dots + dL d\lambda > 0,$$

qui exprime la proposition suivante :

*Un système est en équilibre, à une température donnée, sous certaines actions extérieures; à ces actions extérieures, on ajoute certaines actions perturbatrices infiniment petites, la température demeurant la même; l'équilibre primitif est troublé, et un nouvel*



Joignons-y l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} = 0$$

qui peut encore s'écrire, puisque  $\Omega$  peut toujours être pris indépendant de  $\mathfrak{S}$ ,

$$(13 \text{ bis}) \quad E \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - E F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} + \frac{\partial \Omega}{\partial \mathfrak{S}} = 0.$$

Multiplions les deux membres de la première égalité (13) par  $d\alpha$ , les deux membres de la seconde par  $d\beta$ , ..., les deux membres de la dernière par  $d\lambda$ , les deux membres de l'égalité (13 bis) par  $d\mathfrak{S}$ ,  $d\alpha$ ,  $d\beta$ , ...,  $d\lambda$ ,  $d\mathfrak{S}$  définissant une modification isentropique; ajoutons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de l'égalité (12) et nous trouverons

$$(14) \quad d(EU + \Omega) = 0.$$

Ainsi toute modification isentropique imposée à un système à partir d'un état d'équilibre vérifie l'égalité (14); du reste, cette égalité exprime simplement que la modification considérée est adiabatique.

Reprenons l'égalité générale [(Chap. II, égalité (11)],

$$d\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S} + d\Omega = -d\mathfrak{C} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda.$$

Elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} & E \left( \frac{\partial U}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} d\beta + \dots + \frac{\partial U}{\partial \lambda} d\lambda \right) \\ & - EF(\mathfrak{S}) \left( \frac{\partial S}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial S}{\partial \beta} d\beta + \dots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d\lambda \right) + d\Omega \\ & = -d\mathfrak{C} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda \end{aligned}$$

et l'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} - F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} = 0$$

permet de la transformer en

$$d(\text{EU} + \Omega) - \text{EF}(\mathfrak{S}) d\text{S} = -d\mathfrak{U} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda.$$

Pour une modification isentropique, cette égalité se réduit à

$$(15) \quad d(\text{EU} + \Omega) = -d\mathfrak{U} + f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda.$$

La quantité

$$f_\alpha d\alpha + f_\beta d\beta + \dots + f_\lambda d\lambda$$

ne pouvant jamais être positive, on peut, à partir des égalités (14) et (15), construire une démonstration semblable à celle de Lejeune-Dirichlet, et obtenir le théorème suivant :

*L'équilibre d'un système est assurément stable pour toutes les modifications isentropiques que l'on peut lui imposer si la quantité (EU + Ω) a une valeur minima parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans changement de valeur de l'entropie.*

Ce théorème a été énoncé par M. J.-W. Gibbs. On peut dire avec lui que si la quantité ( $\mathfrak{F} + \Omega$ ) est le *potentiel thermodynamique à température constante*, la quantité (EU + Ω) est le *potentiel thermodynamique à entropie constante*.

Considérons un système en équilibre. Si l'équilibre de ce système est stable pour toutes les modifications isothermiques qu'on peut lui imposer, est-il stable aussi pour toutes les modifications isentropiques? En d'autres termes, s'il est stable lorsqu'on suppose le système entouré de sources de chaleur qui en maintiennent la température constante, est-il encore stable lorsqu'on suppose le système entouré d'une enceinte imperméable à la chaleur?

Pour répondre à cette question, il nous faut invoquer un postulat fondamental, que nous nommerons *Postulat d'Helmholtz*, M. H. von Helmholtz étant le seul physicien, à notre connaissance, qui l'ait explicitement énoncé <sup>(1)</sup>. Ce postulat est le suivant :

---

<sup>(1)</sup> H. VON HELMHOLTZ, *Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge*. I. (*Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1882, 1<sup>er</sup> semestre, p. 12 et 19).

POSTULAT D'HELMHOLTZ. — *Lorsqu'un système est rapporté à des variables normales, la capacité calorifique de ce système est positive.*

Ce postulat s'exprime par l'inégalité

$$(16) \quad C > 0,$$

que les égalités

$$C = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{E}},$$

$$C = F(\mathfrak{E}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{E}},$$

$$C = \frac{F(\mathfrak{E}) F''(\mathfrak{E})}{E[F'(\mathfrak{E})]^2} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{E}} - \frac{F(\mathfrak{E})}{E F'(\mathfrak{E})} \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{E}^2}$$

permettent d'écrire sous l'une quelconque des trois formes

$$(16 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{E}} > 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{E}} > 0, \\ \frac{F''(\mathfrak{E})}{F'(\mathfrak{E})} \frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{E}} - \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \mathfrak{E}^2} > 0. \end{array} \right.$$

Il faut bien observer que ce postulat pourrait cesser d'être conforme à l'expérience si le système n'était pas défini par des variables normales; c'est ainsi que la capacité calorifique de la vapeur d'eau *sous tension de vapeur saturée* est négative. Cette remarque montre en outre que le postulat qui précède, pour naturel qu'il paraisse, n'est ni évident, ni nécessaire.

Ce postulat admis, nous allons montrer que la stabilité isothermique de l'équilibre entraîne la stabilité isentropique.

Conservons le symbole  $d$  pour désigner les variations isentropiques et servons-nous du symbole  $\delta$  pour désigner les variations isothermiques. La proposition à démontrer se ramène évidemment à celle-ci : *Sachant que, pour un système en équilibre, on a*

$$(17) \quad \delta^2(\mathfrak{f} + \Omega) > 0,$$

démontrer que l'on a

$$(18) \quad d^2(EU + \Omega) > 0.$$

L'inégalité (17) peut s'écrire plus explicitement

$$(17 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial x^2} (\delta\alpha)^2 + \dots \\ + \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial \lambda^2} (\delta\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial \mu \partial \nu} \delta\mu \delta\nu > 0. \end{array} \right.$$

Dans une modification isothermique, les quantités  $\delta\alpha, \delta\beta, \dots, \delta\lambda$  sont absolument arbitraires; l'inégalité précédente (17 bis) aura donc encore lieu si l'on remplace  $\delta\alpha, \delta\beta, \dots, \delta\lambda$  par les variations  $d\alpha, d\beta, \dots, d\lambda$ , qui correspondent à une modification isentropique. Nous aurons par conséquent, pour toute modification isentropique,

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial x^2} (d\alpha)^2 + \dots \\ + \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2(\mathcal{F} + \Omega)}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu > 0. \end{array} \right.$$

D'autre part, l'identité

$$(12) \quad \frac{\partial S}{\partial x} d\alpha + \dots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial S}{\partial \mathcal{S}} d\mathcal{S} = 0,$$

qui définit une modification isentropique, donne par différentiation

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} (d\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 S}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu \\ + \frac{\partial S}{\partial x} d^2\alpha + \dots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} d^2\lambda \\ + \left( 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \mathcal{S}} d\alpha + \dots + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda \partial \mathcal{S}} d\lambda + \frac{\partial^2 S}{\partial \mathcal{S}^2} d\mathcal{S} \right) d\mathcal{S} + \frac{\partial S}{\partial \mathcal{S}} d^2\mathcal{S} = 0. \end{array} \right.$$

Ajoutons membre à membre l'inégalité (19) et l'égalité (20), cette dernière ayant été au préalable multipliée par  $E F(\mathcal{S})$ ; tenons compte, en outre, de l'identité

$$(21) \quad \mathcal{F} + E F(\mathcal{S}) S = EU,$$

et nous obtiendrons l'inégalité

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2(\text{EU} + \Omega)}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \dots \\ + \frac{\partial^2(\text{EU} + \Omega)}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2(\text{EU} + \Omega)}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu \\ + \text{EF}(\mathfrak{S}) \left( \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} d^2 \alpha + \dots + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \lambda} d^2 \lambda \right) \\ + \text{EF}(\mathfrak{S}) \left( 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \dots + 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \mathfrak{S}^2} d\mathfrak{S} \right) d\mathfrak{S} \\ + \text{EF}(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \mathfrak{S}} d^2 \mathfrak{S} > 0. \end{array} \right.$$

Mais le système étant en équilibre, on a

$$\frac{\partial(\mathfrak{F} + \Omega)}{\partial \alpha} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial(\mathfrak{F} + \Omega)}{\partial \lambda} = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial(\mathfrak{F} + \Omega)}{\partial \alpha} d^2 \alpha + \dots + \frac{\partial(\mathfrak{F} + \Omega)}{\partial \lambda} d^2 \lambda = 0,$$

ce qui, en vertu de l'identité (21), peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\text{EU} + \Omega)}{\partial \alpha} d^2 \alpha + \dots + \frac{\partial(\text{EU} + \Omega)}{\partial \lambda} d^2 \lambda \\ & = \text{EF}(\mathfrak{S}) \left( \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \alpha} d^2 \lambda + \dots + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \lambda} d^2 \lambda \right). \end{aligned}$$

Moyennant cette égalité, l'inégalité (22) devient

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2(\text{EU} + \Omega)}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \dots \\ + \frac{\partial^2(\text{EU} + \Omega)}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2(\text{EU} + \Omega)}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu \\ + \frac{\partial(\text{EU} + \Omega)}{\partial \alpha} d^2 \alpha + \dots + \frac{\partial(\text{EU} + \Omega)}{\partial \lambda} d^2 \lambda \\ + \text{EF}(\mathfrak{S}) \left( 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \dots + 2 \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda + \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial \mathfrak{S}^2} d\mathfrak{S} \right) d\mathfrak{S} \\ + \text{EF}(\mathfrak{S}) \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial \mathfrak{S}} d^2 \mathfrak{S} > 0. \end{array} \right.$$

L'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}}$$

peut s'écrire, en observant que  $\Omega$  est indépendant de  $\mathfrak{S}$ ,

$$E F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S} = \frac{\partial(EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{S}} d\mathfrak{S}.$$

Différentiée, elle donne

$$\begin{aligned} & E F(\mathfrak{S}) \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda + \frac{\partial^2 S}{\partial \mathfrak{S}^2} d\mathfrak{S} \right) d\mathfrak{S} \\ & + E F'(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} (d\mathfrak{S})^2 + E F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} d^2 \mathfrak{S} \\ & = \left[ \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial x \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda + \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{S}^2} d\mathfrak{S} + \right] d\mathfrak{S} + \frac{\partial(EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{S}} d^2 \mathfrak{S}. \end{aligned}$$

Comparée à l'inégalité (23), cette égalité nous permet d'écrire

$$(24) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial x^2} (d\alpha)^2 + \dots \\ & + \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu \\ & + \left[ \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial x \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \dots \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda + \frac{\partial^2(EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{S}^2} d\mathfrak{S} \right] d\mathfrak{S} \\ & + \frac{\partial(EU + \Omega)}{\partial x} d^2 \alpha + \dots \\ & + \frac{\partial(EU + \Omega)}{\partial \lambda} d^2 \lambda + \frac{\partial(EU + \Omega)}{\partial \mathfrak{S}} d^2 \mathfrak{S} \\ & + E F(\mathfrak{S}) \left( \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \mathfrak{S}} d\alpha + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} d\lambda \right) d\mathfrak{S} \\ & \quad - E F'(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}} (d\mathfrak{S})^2 > 0. \end{aligned} \right.$$

L'identité

$$\frac{\partial U}{\partial \mathfrak{S}} = F(\mathfrak{S}) \frac{\partial S}{\partial \mathfrak{S}}$$





Multiplions la première des égalités (29) par  $d\alpha, \dots$ , la dernière par  $d\lambda$ , et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu \\ & + \left( \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha \partial \mathcal{S}} d\alpha + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda \partial \mathcal{S}} d\lambda \right) d\mathcal{S} \\ & = dA d\alpha + \dots + dL d\lambda, \end{aligned}$$

égalité que la relation (28) transforme en

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu \\ & - \left[ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mathcal{S}^2} - \frac{F''(\mathcal{S})}{F'(\mathcal{S})} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathcal{S}} \right] (d\mathcal{S})^2 \\ & = dA d\alpha + \dots + dL d\lambda, \end{aligned}$$

ou bien en

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} & dA d\alpha + \dots + dL d\lambda \\ & = \frac{EF'(\mathcal{S})}{F(\mathcal{S})} C (d\mathcal{S})^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \dots \\ & + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu. \end{aligned} \right.$$

L'inégalité (27) ayant lieu quels que soient  $\delta\alpha, \delta\beta, \dots, \delta\lambda$  doit avoir lieu si l'on fait

$$\delta\alpha = d\alpha, \quad \dots, \quad \delta\lambda = d\lambda.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (d\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (d\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu} d\mu d\nu > 0.$$

D'autre part, le postulat d'Helmholtz donne

$$\frac{EF'(\mathcal{S})}{F(\mathcal{S})} C (d\mathcal{S})^2 > 0.$$

On a donc

$$(31) \quad dA d\alpha + \dots + dL d\lambda > 0.$$



$\Gamma$  est ce que nous nommerons la *capacité calorifique sous les actions constantes* A, B, ..., L. C'est la capacité calorifique relative au système de variables (1) non normal A, B, ..., L,  $\mathfrak{S}$ .

On a donc, par définition,

$$(\Gamma - C) D\mathfrak{S} = R_\alpha D\alpha + \dots + R_\lambda D\lambda,$$

ou bien [Chap. I, égalités (7 bis)],

$$(33) \quad (\Gamma - C) D\mathfrak{S} = - \frac{F(\mathfrak{S})}{EF'(\mathfrak{S})} \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{S}} D\alpha + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} D\lambda \right)$$

Mais des égalités (32), on déduit aisément l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha^2} (D\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda^2} (D\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mu \partial \nu} D\mu D\nu \\ + \left( \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha \partial \mathfrak{S}} D\alpha + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda \partial \mathfrak{S}} D\lambda \right) D\mathfrak{S} = 0. \end{aligned}$$

Cette égalité, comparée à l'égalité (33), donne

$$(34) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\Gamma - C) (D\mathfrak{S})^2 \\ & = \frac{F(\mathfrak{S})}{EF'(\mathfrak{S})} \left[ \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha^2} (D\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda^2} (D\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mu \partial \nu} D\mu D\nu \right]. \end{aligned} \right.$$

Si le système est en équilibre stable lorsque les actions extérieures A, B, ..., L sont maintenues constantes, la quantité

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \alpha^2} (\delta\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \lambda^2} (\delta\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial \mu \partial \nu} \delta\mu \delta\nu$$

est, comme nous l'avons vu au n° 4, positive quels que soient  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$ , ...,  $\delta\lambda$ . L'égalité (34) nous donne donc l'inégalité

$$\Gamma - C > 0.$$

---

(1) Au sujet de ce système de variables, voir notre *Mémoire sur les équations générales de la Thermodynamique*, Chap. V (*Annales de l'École Normale*, 3<sup>e</sup> série, t. VII, 1891).

Par conséquent, *si un système est en équilibre stable lorsqu'on maintient constantes les actions extérieures qui le sollicitent, sa capacité calorifique est plus grande lorsqu'on maintient constantes les actions A, B, ..., L, que lorsqu'on maintient constantes les variables normales  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ .*

Imaginons que l'on veuille imposer aux variables  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  les variations  $D\alpha, D\beta, \dots, D\lambda$ , la température  $\vartheta$  étant maintenue constante. Il faudra adjoindre aux actions extérieures A, B, ..., L des actions perturbatrices  $\delta A, \delta B, \dots, \delta L$ . On aurait, d'après l'égalité (10),

$$(35) \quad \begin{cases} \delta A D\alpha + \dots + \delta L D\lambda \\ = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (D\alpha)^2 + \dots + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (D\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu} D\mu D\nu. \end{cases}$$

Imaginons que l'on veuille imposer aux variables  $\alpha, \beta, \dots, \lambda$  les mêmes variations  $D\alpha, \dots, D\lambda$  par une modification isentropique; la température variera alors d'une quantité  $d\vartheta$  définie par l'égalité

$$(36) \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} D\alpha + \dots + \frac{\partial S}{\partial \lambda} D\lambda + \frac{\partial S}{\partial \vartheta} d\vartheta = 0.$$

Pour accomplir cette transformation isentropique, on devra adjoindre aux actions extérieures des actions perturbatrices  $dA, dB, \dots, dL$ , et l'on aura, d'après l'égalité (30),

$$(37) \quad \begin{cases} dA D\alpha + \dots + dL D\lambda \\ = \frac{E F'(\vartheta)}{F(\vartheta)} C (d\vartheta)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \alpha^2} (D\alpha)^2 + \dots \\ + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \lambda^2} (D\lambda)^2 + 2 \sum \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu \partial \nu} D\mu D\nu. \end{cases}$$

Les égalités (34), (35), (37) donnent

$$\frac{E F'(\vartheta)}{F(\vartheta)} (\Gamma - C)(D\vartheta)^2 = \delta A D\alpha + \dots + \delta L D\lambda,$$

$$\frac{E F'(\vartheta)}{F(\vartheta)} C (d\vartheta)^2 = (dA - \delta A) D\alpha + \dots + (dL - \delta L) D\lambda.$$

On déduit de là

$$(38) \quad \frac{\Gamma - C}{C} \left( \frac{D\mathfrak{z}}{d\mathfrak{z}} \right)^2 = \frac{\delta A D\alpha + \dots + \delta L D\lambda}{(dA - \delta A) D\alpha + \dots + (dL - \delta L) D\lambda}.$$

Cette relation, où  $D\mathfrak{z}$  vérifie les égalités (32) et  $d\mathfrak{z}$  l'égalité (36), est la généralisation de celle par laquelle Laplace a expliqué l'expérience de Desormes et Clément.

#### CONCLUSION.

Les physiciens qui ont traité de la Thermodynamique ont placé cette science, vis-à-vis de la Dynamique, dans deux positions distinctes.

Les fondateurs de la Thermodynamique ont presque tous incliné à faire de cette science une application de la Dynamique; regardant la chaleur comme un mouvement très petit et très rapide des particules qui constituent les corps, la température comme la force vive moyenne de ce mouvement, les changements d'état physique comme des modifications dans les éléments caractéristiques de ce mouvement, ils ont tenté de déduire les théorèmes de la Thermodynamique des théorèmes de la Mécanique rationnelle; leurs tentatives ont été aisément couronnées de succès dans le domaine du principe de la conservation de l'énergie; elles ont été moins heureuses lorsqu'elles ont abordé le principe de Carnot; malgré les essais audacieux de Clausius, de M. Boltzmann et de M. H. von Helmholtz, le principe de Carnot n'a pu, jusqu'ici, être déduit d'une manière pleinement satisfaisante des propositions de la Dynamique.

Beaucoup de physiciens ont cherché à rendre la Thermodynamique indépendante de toute hypothèse sur la nature de la chaleur; ils ont essayé de l'établir non sur des théorèmes empruntés à la Mécanique rationnelle, mais sur des principes qui lui soient propres; Clausius avait déjà été guidé, dans la rédaction de ses plus beaux Mémoires, par le désir de faire de la Thermodynamique une science indépendante; G. Kirchhoff, comme en témoignent ses *Leçons* récemment publiées, avait montré, dans son enseignement, que ce désir pouvait être réalisé; élève de G. Kirchhoff, M. G. Lippmann a préconisé en

France cette tendance qui domine, aujourd'hui, dans l'enseignement de nos Facultés.

Nous avons essayé, dans le présent travail, d'indiquer une troisième position de la Dynamique par rapport à la Thermodynamique; nous avons fait de la Dynamique un cas particulier de la Thermodynamique, ou plutôt, nous avons constitué, sous le nom de *Thermodynamique*, une science qui embrasse dans des principes communs tous les changements d'état des corps, aussi bien les changements de lieu que les changements de qualités physiques.

Les principes de cette science sont les lois expérimentales que Sadi Carnot, Mayer, Joule, Clausius, W. Thomson, Helmholtz ont établies ou éclaircies. Sa mise en équations, ébauchée par Clausius, perfectionnée par Massieu, Gibbs et Helmholtz, nous ramène à une forme analytique semblable à celle que Lagrange a donnée à la Mécanique; ainsi se trouve maintenue, au travers des évolutions de la Science, cette continuité de tradition qui en assure le progrès.

Il nous semble qu'une conclusion générale se dégage de cette étude: si la science des mouvements cesse d'être, dans l'ordre logique, la première des Sciences physiques, pour devenir seulement un cas particulier d'une science plus générale embrassant dans ses formules toutes les modifications des corps, la tentation sera moindre, pensons-nous, de ramener l'étude de tous les phénomènes physiques à l'étude du mouvement; on comprendra mieux que le changement de lieu dans l'espace n'est pas une modification plus simple que le changement de température ou de quelque autre qualité physique; on fuira dès lors plus volontiers ce qui a été jusqu'ici le plus dangereux écueil de la Physique théorique, la recherche d'une explication mécanique de l'Univers.

