JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PAUL PAINLEVÉ

Note au sujet du Mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 203-206.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__203_0>

Note au sujet du Mémoire précédent;

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

Le Mémoire de M. Humbert me donne l'occasion de revenir sur quelques points de la théorie des transformations rationnelles des courbes algébriques, dont je me suis occupé incidemment dans mon Mémoire *Sur les équations différentielles du premier ordre* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1891).

Je rectifierai d'abord une égalité inexacte qui figure au Chapitre II de ce Mémoire (nº **3**). Soient

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

et

$$F_1(x_1, y_1) = 0 \tag{2}$$

les équations de deux courbes algébriques, la première de genre $p > 1$, la seconde de genre p_1, et admettons qu'on puisse passer de (1) à (2) par la transformation rationnelle

$$x = g(x_1, y_1), \qquad y = h(x_1, y_1) \tag{3}$$

telle qu'à un point arbitraire de (1) correspondent μ points variables de (2). A l'égalité

$$\mu(p - 1) = p_1 - 1$$

du paragraphe cité, il faut substituer l'*inégalité* (¹)

$$(4) \qquad \mu(p-1) \leqq p_1 - 1.$$

Cette substitution ne change d'ailleurs absolument rien à la suite du Mémoire où l'égalité en question ne joue qu'un rôle secondaire et n'intervient que pour fournir une limite *supérieure* de μ : $\frac{p_1-1}{p-1}$, limite qui subsiste *a fortiori*.

L'inégalité (4) est la conséquence même du raisonnement que j'ai employé. Soient en effet m et m_1 les degrés de (1) et de (2), P et Q deux polynomes *adjoints quelconques* de degré $(m-3)$ de (1), P_1 et Q_1 deux polynomes analogues de (2). La transformation (3) vérifie une égalité de la forme

$$\frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}.$$

A chaque courbe adjointe (C) ou $\frac{P}{Q} = h$ de (1) correspond ainsi une courbe (C_1) ou $\frac{P_1}{Q_1} = h_1$ de (2). Aux $2(p-1)$ points M d'intersection de C avec (1) (variables avec h), correspondent $2\mu(p-1)$ points M_1 communs à C_1 et à (2), variables avec h_1 ; d'où l'inégalité

$$(4) \qquad (p-1)\mu \leqq p_1 - 1.$$

Comme, d'autre part, on peut, moyennant une transformation convenable effectuée sur (1), supposer qu'un des rapports $\frac{P}{Q}$ se réduit identiquement à x, le nombre des points M_1 variables avec h_1 est précisément égal à $2\mu(p-1)$. Mais les courbes C_1 (faisceau linéaire à p paramètres) peuvent avoir [en dehors des points multiples de (2)] des

---

(¹) C'est d'ailleurs cette *inégalité* (et l'inégalité correspondante relative aux surfaces) qui figure dans tous mes autres travaux tant antérieurs que postérieurs au Mémoire cité (*voir* notamment mes Notes *Sur les transformations rationnelles des surfaces et les applications aux équations différentielles du second ordre* (*Comptes rendus*, janvier, février 1890; janvier, février 1893; novembre 1893).

points fixes, parmi lesquels j peuvent se trouver précisément sur la courbe (2) : ce qui entraîne l'égalité

$$2(p_1 - 1) = 2\mu(p - 1) + j. \tag{5}$$

Cette égalité est d'ailleurs conforme à la formule de M. Zeuthen, retrouvée directement par M. Humbert dans ce cas particulier (p. 180).

J'ai montré dans le Mémoire cité que toutes les courbes (1) de genre plus grand que 1, dont une courbe *donnée* (2) est la transformée rationnelle, ne forment qu'un nombre fini de classes, et qu'on peut déterminer algébriquement un type de chaque classe ainsi que les substitutions (3) correspondantes qui sont aussi en nombre fini. La même question se trouve résolue par le fait même quand on admet seulement que *x et y sont des fonctions uniformes du point analytique (x_1, y_1) sans lignes singulières;* j'entends par là que x et y sont des fonctions à m_1 valeurs de x_1 sans *coupures*. Je dis que *x et y sont alors nécessairement algébriques en x_1, donc rationnels en x_1, y_1*. Autrement, en effet, ces deux fonctions admettraient au moins un point essentiel $x_1 = a_1$ dans le voisinage duquel x et y seraient uniformes en $x_1 - a_1$, ou en $(x_1 - a_1)^{\frac{1}{n}}$, et d'après un théorème de M. Picard la relation entre x et y devrait être de genre zéro ou 1.

Quand p est nul, x et y s'expriment rationnellement en t, et t en x, y, et l'on peut passer de (1) à une courbe (2) quelconque par la transformation *uniforme*

$$t = \mathrm{F}(x_1, y_1),$$

où F est une fonction *uniforme* quelconque du point analytique (x_1, y_1).

Quand p est égal à 1, x et y sont fonctions doublement périodiques d'un paramètre t tel qu'à tout point x, y de (1) corresponde une seule valeur de t (abstractions faites des valeurs congruentes $t + m\omega + m\omega'$ si ω et ω' sont ces périodes). On obtient toutes les transformations uniformes de (1) en une courbe *quelconque* (2) en faisant

$$t = \int \mathrm{F}(x_1, y_1)\, dx_1,$$

F désignant une fonction uniforme du point analytique x_1, y_1 dont l'intégrale a toutes ses périodes de la forme $m\omega + m\omega'$. En particulier, on peut prendre pour t une fonction uniforme de x_1, y_1. Observons que le genre p_1 de (2) peut être nul, comme on le voit, en prenant $t = x_1$.

Ce qui précède suppose essentiellement que x et y soient sans coupures.