JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

R. PERRIN

Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences)

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 10 (1894), p. 129-167.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1894_4_10__129_0>

Sur le sous-discriminant (ou covariant biquadratique lié à l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences);

PAR M. R. PERRIN.

---

1. Soient U la forme binaire générale d'ordre n, et $V=0$ l'équation aux carrés des différences des racines de U. On sait que chacun des coefficients de V est la source d'un certain covariant de U. Le degré de V étant $m=\frac{n(n-1)}{2}$, il existe ainsi m covariants liés respectivement au second, au troisième, etc., au dernier terme de V; le dernier se réduit d'ailleurs, comme on sait, au discriminant de U, et le premier au hessien. Je me propose, dans le présent travail, d'étudier en particulier celui de ces covariants de U qui est lié à l'*avant-dernier* terme de V, et que je désignerai par ce motif sous le nom de *sous-discriminant* de la forme binaire : après avoir établi d'une manière générale les propriétés de ce covariant, j'indiquerai une méthode spéciale pour le calculer en partant du discriminant supposé connu, et pour trouver rapidement son expression en fonction des covariants simples, pourvu que l'on connaisse la chaîne des syzygies qui relient le discriminant lui-même aux $n-1$ covariants principaux (associés à la forme). Je ferai l'application de cette méthode aux formes binaires des troisième, quatrième, cinquième et sixième ordres, en insistant plus spécialement sur le cas de la forme du cinquième ordre, où la considération du sous-discriminant conduit, comme on le verra, à plusieurs conséquences nouvelles et intéressantes.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU SOUS-DISCRIMINANT.

2. *Le sous-discriminant de la forme binaire d'ordre n est un covariant du quatrième ordre par rapport aux variables, et du degré $2(n-1)$ par rapport aux coefficients de la forme.*

Cette propriété découle immédiatement de la proposition suivante, facile à établir :

Le covariant lié au $p+1^{\text{ième}}$ terme de l'équation aux carrés des différences des racines de la forme d'ordre n, est de degré $2p$ par rapport aux coefficients de la forme, et d'ordre $2p(n-2)$ par rapport aux variables, si $p \leqq n-1$; de degré $2(n-1)$ et d'ordre $4(m-p)$, si $p \geqq n-1$.

En effet, la source de ce covariant étant la somme des produits p à p des m carrés des différences des racines, l'une quelconque des racines figure, dans l'un au moins des produits, au degré $2p$, si $p \leqq n-1$, et au degré $2(n-1)$, si $p \geqq n-1$, comme combinée par différence avec chacune des $n-1$ autres racines; d'après un théorème connu, le degré par rapport aux coefficients de la forme est donc aussi $2p$ ou $2(n-1)$. Le poids de la même expression est d'ailleurs évidemment dans tous les cas $2p$. Mais l'ordre du covariant d'une forme de degré n, dont la source est de degré δ et de poids π, est fourni, comme on sait, par la formule $n\delta - 2\pi$; ce qui conduit à la proposition énoncée ci-dessus.

Ainsi, dans l'équation aux carrés des différences, l'ordre des covariants liés aux termes successifs commence par croître de $2(n-2)$, en partant du premier terme dont le coefficient est l'unité, et du second dont le coefficient est la source du covariant hessien, jusqu'au terme de rang n pour lequel l'ordre du covariant atteint sa valeur maxima $2(n-1)(n-2)$; l'ordre décroît ensuite par 4 unités jusqu'à l'avant-dernier terme (de rang m) qui fournit le sous-discriminant, covariant biquadratique, et au dernier qui fournit le discriminant, invariant de la forme.

Il est donc possible, étant donnée une forme binaire d'ordre quelconque, de la transformer par substitution linéaire, par la résolution d'une seule équation du quatrième degré, de manière à annuler la somme des inverses des carrés des différences de ses racines.

3. *Si une forme binaire admet un facteur carré et un seul, le sous-discriminant de cette forme se réduit à la quatrième puissance de ce facteur.*

En effet dans ce cas le discriminant est nul, l'équation aux carrés des différences a une racine nulle. Effectuons une transformation linéaire en prenant pour nouvel y un des facteurs linéaires du sous-discriminant : la source de ce covariant devra s'annuler, l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences disparaîtra comme le dernier; cette équation aura donc deux racines nulles, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'un seul facteur carré dans la forme binaire. La transformation linéaire considérée est donc impossible : ce qui exige que tout facteur du sous-discriminant soit aussi un facteur de la forme. Mais, par raison de symétrie, si un facteur simple de la forme est un facteur du sous-discriminant, il faut qu'il en soit de même de tout autre facteur simple : ce qui est évidemment impossible pour $n > 6$. Donc enfin le facteur double de la forme est le seul facteur du sous-discriminant, et il y entre à la quatrième puissance.

Nous vérifierons directement qu'il en est bien ainsi pour $n = 3$, 4 et 5.

4. *Si une forme binaire admet un facteur triple, quadruple, etc., ou au moins deux facteurs carrés, le sous-discriminant s'évanouit identiquement.*

En effet, dans ces divers cas, l'équation aux carrés des différences admet au moins deux racines nulles, et le coefficient de son avant-dernier terme doit rester constamment nul, de quelque manière qu'on transforme linéairement les variables. Le sous-discriminant devrait donc rester constamment divisible par y, ce qui revient à dire qu'il est identiquement nul.

5. *Le sous-discriminant s'exprime, en fonction des racines* α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *de la forme binaire, par la formule*

$$(1) \qquad \varpi = \sum_{r,s} \delta_{rs}^2 (x - \alpha_r y)^2 (x - \alpha_s y)^2,$$

où δ_{rs} *désigne le produit des* $m-1$ *différences de racines autres que* $\alpha_r - \alpha_s$, *et où le signe de sommation* $\sum$ *s'applique à toutes les combinaisons possibles de valeurs, depuis* 1 *jusqu'à* n, *données à* r *et* s.

En effet l'expression (1) représente bien un covariant, puisque toutes les racines α y figurent au même degré $2(n-1)$. Ce covariant est du quatrième ordre, et sa source (coefficient de x^4) se réduit bien à $\sum_{r,s} \delta_{rs}^2$, coefficient de l'avant-dernier terme de l'équation aux carrés des différences; c'est donc bien le sous-discriminant.

L'expression (1) rend évidentes les propriétés précédemment démontrées pour le sous-discriminant. Si $\alpha_1 = \alpha_2$ par exemple, tous les δ autres que δ_{12} s'annulent comme renfermant $\alpha_1 - \alpha_2$, et ϖ se réduit à $\delta_{12}^2 (x - \alpha_1 y)^4$; si la forme admet un facteur triple ou plus d'un facteur double, tous les δ s'annulent, et il en est de même de ϖ.

MÉTHODE POUR CALCULER LE SOUS-DISCRIMINANT.

6. J'ai montré ailleurs [1] que si l'on applique à un péninvariant relatif à la forme binaire $(a_0, a_1, \ldots, a_n)(x, y)^n$ l'opérateur

$$(2) \qquad \zeta_p = a_0 \frac{d}{da_p} + \frac{p+1!}{p!\,1!} a_1 \frac{d}{da_{p+1}} + \ldots + \frac{p+r!}{p!\,r!} a_r \frac{d}{da_{p+r}} + \ldots,$$

[1] *Comptes rendus*, t. CVI, p. 1131; 1888.

le résultat est un péninvariant de la forme. Cet opérateur ne modifie pas le degré, mais diminue de p le poids du péninvariant; il augmente donc de $2p$ l'ordre (par rapport aux variables) du covariant correspondant.

Ceci rappelé, je vais établir le théorème suivant :

Si Δ *est le discriminant d'une forme binaire,* $\zeta_2(\Delta)$ *est (à un facteur numérique près) la source de son sous-discriminant.*

Désignons en effet par $A_0, A_1, \ldots, A_n$ les coefficients de la forme binaire écrite sans les coefficients binomiaux, de telle sorte que

$$A_q = \frac{n!}{q!\,n-q!}\,a_q;$$

par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \varepsilon$ les racines de la forme. L'opérateur ζ_2, rapporté aux coefficients A, devient

$$\zeta_2 = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{q=n-1}(n-q+1)(n-q)\,A_{q-1}\frac{d}{dA_{q+1}}. \tag{3}$$

D'autre part, on a (*voir* SALMON, *Algèbre supérieure*)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dA_q} &= 2\,A_0^{2n-3}\sum_\alpha \alpha^{n-q}(\beta-\gamma)^2(\beta-\delta)^2\ldots(\delta-\varepsilon)^2 \\ &\quad\times[(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\ldots(\alpha-\varepsilon)+(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)\ldots], \end{aligned}\right. \tag{4}$$

où le signe $\sum$ s'applique, pour les diverses racines telles que α, au produit des carrés de toutes les différences où n'entre pas α, par la somme des produits $n-2$ à $n-2$ des différences où entre α. Si donc nous désignons par P_α l'inverse du produit des carrés de toutes les différences de racines où entre la racine α, et par Q_α la somme des produits $n-2$ à $n-2$ de ces mêmes différences, nous pourrons écrire ainsi la formule (4)

$$\frac{d\Delta}{dA_q} = \frac{2\Delta}{A_0}\sum \alpha^{n-q}P_\alpha Q_\alpha \tag{5}$$

et l'application de la formule (3) nous donnera

$$(6)\quad \begin{cases} \zeta_2(\Delta) = \dfrac{\Delta}{A_0}\sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha \\ \qquad \times [n(n-1)\alpha^{n-2}A_0 + (n-1)(n-2)\alpha^{n-3}A_1 + \ldots \\ \qquad + (n-q)(n-q-1)\alpha^{n-q-2}A_q + \ldots + 2.1\,A_{n-2}]. \end{cases}$$

Mais si $S_{\alpha,q}$ désigne la somme des produits q à q, des racines autres que α, on a généralement

$$A_q = (-1)^q A_0 (S_{\alpha,q} + \alpha S_{\alpha,q-1}).$$

Remplaçant A_q par cette valeur dans la formule (6) et ordonnant par rapport aux puissances de α, il vient

$$\zeta_2(\Delta) = 2\Delta \sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha [(n-1)\alpha^{n-2} - (n-2)\alpha^{n-3}S_{\alpha,1} + (n-3)\alpha^{n-4}S_{\alpha,2} - \ldots + (-1)^{n-2}S_{\alpha,n-2}].$$

Mais il est facile de voir que, si l'on développe Q_α suivant les puissances de α, on obtient précisément l'expression écrite ci-dessus entre parenthèses dans le second membre; de sorte qu'on peut écrire simplement

$$(7)\qquad \zeta_2(\Delta) = 2\Delta \sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha^2.$$

Formons maintenant directement le carré de Q_α, défini comme la somme des produits $n-2$ à $n-2$ des $n-1$ différences où figure α. Ce carré se composera évidemment de deux parties :

1° La somme des produits $n-2$ à $n-2$ des carrés de ces $n-1$ différences;

2° La double somme de tous les produits obtenus en multipliant entre eux $n-3$ de ces mêmes carrés, et les multipliant encore par les deux différences non employées.

Par conséquent, $P_\alpha Q_\alpha^2$ se composera de la somme des inverses des carrés des différences de racines où entre α, plus deux fois la somme des inverses des produits deux à deux de ces mêmes différences; savoir

$$P_\alpha Q_\alpha^2 = \left\{ \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\gamma)^2} + \ldots + \frac{1}{(\alpha-\varepsilon)^2} \right.$$
$$+ 2\left[\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\delta)}\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)} + \ldots\right]\right\}.$$

Formons enfin $\sum\limits_\alpha P_\alpha Q_\alpha^2$. Il est clair que dans cette somme chacune des quantités telles que $\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}$ figurera deux fois, comme provenant de $P_\alpha Q_\alpha^2$ et de $P_\beta Q_\beta^2$; quant aux quantités telles que $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, nous pouvons les associer ensemble trois par trois, pour former des groupes tels que

$$\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

chaque élément d'un tel groupe étant fourni par trois termes distincts, savoir : par $P_\alpha Q_\alpha^2$, $P_\beta Q_\beta^2$, $P_\gamma Q_\gamma^2$. Mais il est facile de vérifier que chacun de ces groupes est identiquement nul. Toutes les quantités telles que $\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$ disparaissent donc du résultat, et il vient simplement

$$\sum_\alpha P_\alpha Q_\alpha^2 = 2\left[\frac{1}{(\alpha-\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\gamma)^2} + \frac{1}{(\beta-\gamma)^2} + \ldots\right],$$

et, par suite, (7) devient

$$\zeta_2(\Delta) = 4\Delta\sum\frac{1}{(\alpha-\beta)^2},$$

c'est-à-dire, enfin,

$$\zeta_2(\Delta) = 4A_0^{2n-2}\Pi_{m-1}, \tag{8}$$

Π_{m-1} étant la somme des produits $m-1$ à $m-1$ des carrés des différences des racines : ce qui démontre le théorème.

Si Δ est exprimé au moyen des coefficients de la forme écrite avec les coefficients binomiaux, l'opérateur ζ_2 doit être pris sous la forme (2), et il s'introduit un coefficient numérique que l'on trouve facilement être égal à $\frac{1}{4}n^n$. Autrement dit, le dernier terme de l'équation aux carrés des différences étant supposé $(-n)^n\Delta$, le coefficient de l'avant-dernier terme sera $-\frac{1}{4}(-n^n\Delta'$, où

$$(9) \qquad \Delta' = \zeta_2(\Delta) = \left(a_0\frac{d}{da_2} + 3a_1\frac{d}{da_3} + 6a_2\frac{d}{da_4} + 10a_3\frac{d}{da_5} + \ldots\right)\Delta.$$

Le théorème qui vient d'être démontré fournit immédiatement l'expression de la source du sous-discriminant en fonction des coefficients de la forme, si l'on connaît celle du discriminant; et la source du covariant une fois connue, le covariant tout entier est aisément calculable.

Mais on peut aussi utiliser ce théorème pour obtenir l'expression du sous-discriminant en fonction des covariants distincts qui appartiennent à la forme, pourvu que l'on connaisse une chaîne de syzygies reliant le discriminant aux covariants principaux : il suffit de considérer ces syzygies comme des relations entre les péninvariants sources des covariants, et d'appliquer l'opérateur ζ_2 à ces relations, en écrivant que le résultat est nul : on obtiendra ainsi, de proche en proche, en partant des péninvariants simples pour lesquels le résultat de l'opérateur ζ_2 est facile à calculer directement et à exprimer comme péninvariant le résultat de ce même opérateur sur les péninvariants intermédiaires et finalement sur le discriminant, ce qui fournira l'expression demandée. C'est ce qu'éclairciront les applications que je vais faire maintenant aux formes binaires des troisième, quatrième, cinquième et sixième ordres.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME CUBIQUE.

7. Soit la forme cubique

$$U = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3.$$

Son discriminant est

$$\Delta = a^2d^2 - 3b^2c^2 - 6abcd + 4ac^3 + 4b^3d.$$

On en déduit

$$(10) \qquad \zeta_2(\Delta) = \left(a\frac{d}{dc} + 3b\frac{d}{dd}\right)\Delta = 12(ac - b^2)^2.$$

Et comme $ac - b^2$ est la source du hessien H, on en conclut que le sous-discriminant de la forme cubique se réduit au carré de son covariant hessien.

Lorsque U possède un facteur carré, il est connu que H se réduit au carré de ce facteur; le sous-discriminant devient donc bien la quatrième puissance de ce facteur. Quand U possède un facteur triple, le hessien et, par suite, le sous-discriminant s'évanouissent identiquement.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME BIQUADRATIQUE.

8. Soit la forme biquadratique

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Les sources des covariants principaux sont :

$h = ac - b^2$, source du hessien H;

$n = a^2d - 3abc + 2b^3$, source du covariant sextique N;

$S = ae - 4bd + 3c^2$, invariant quadratique,

auxquels on peut ajouter l'invariant cubique

$$T = ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3.$$

On trouve immédiatement, d'après ces formules,

$$\zeta_2(S) = 12h, \qquad \zeta_2(T) = aS.$$

D'ailleurs le discriminant ayant pour expression

$$\Delta = S^3 - 27T^2;$$

on en conclut

$$\zeta_2(\Delta) = 3S^2\zeta_2(S) - 54T\zeta_2(T) = 18S(2Sh - 3Ta).$$

Mais a est la source de la forme U elle-même; le sous-discriminant a donc pour expression

$$W' = S(3UT - 2HS). \tag{11}$$

Ce covariant biquadratique est bien du sixième degré par rapport aux coefficients de la forme. Au moyen des formules connues, on trouve que ses deux invariants quadratique S′ et cubique T′ ont respectivement pour expressions

$$S' = \tfrac{1}{3}\Delta S^3, \qquad T' = \tfrac{1}{27}\Delta^2 S^3, \tag{12}$$

et, par suite, son discriminant

$$\Delta' = S^6 T^2 \Delta^3. \tag{13}$$

On trouve aussi pour le hessien H′ de W

$$H' = -\tfrac{1}{3}\Delta S^2 H, \tag{14}$$

et, par suite, le sous-discriminant de W a pour expression

$$W' = S'(3WT' - 2H'S') = \tfrac{1}{9}\Delta^3 S^7 TU. \tag{15}$$

On est ainsi ramené à la forme primitive elle-même, ce qui donne cette proposition :

Les racines du sous-discriminant d'une forme biquadratique sont composées avec les racines de la forme, comme ces dernières avec celles du sous-discriminant.

C'est ce que l'on voit aussi en formant les invariants absolus $I = \frac{T^2}{S^3}$, $I' = \frac{T'^2}{S'^3}$ de la forme et de son sous-discriminant : ils sont liés par la relation symétrique

$$I + I' = \tfrac{1}{27}. \tag{16}$$

Lorsque $\Delta = 0$, la formule (14) donne $H' = 0$, et, par suite, en vertu d'une propriété connue des formes biquadratiques, W devient la quatrième puissance d'un facteur linéaire, lequel ne peut être que le facteur double de U, puisque ce dernier divise U et H, et, par conséquent, W.

Lorsque $S = 0$, avec $\Delta \gtrless 0$, W s'annule identiquement. Mais on sait que $S = 0$ indique que les quatre racines de la forme sont en rapport équi-anharmonique. D'où cette proposition, aisée d'ailleurs à démontrer directement :

Si quatre points sur une droite sont en situation équi-anharmonique, la somme des inverses des carrés de leurs distances mutuelles est nulle.

Lorsque $T = 0$ sans que Δ soit nul, W se réduit à $-2HS^2$, et ne diffère de son propre hessien que par un facteur constant; il se réduit donc à un carré parfait, comme il est connu pour le hessien.

Enfin on sait que la condition nécessaire et suffisante pour que la forme U soit un carré parfait (admette deux facteurs doubles distincts) est qu'elle ne diffère de H que par un facteur constant. Le sous-discriminant doit alors s'annuler identiquement, et, effectivement, on a dans ce cas comme il est connu, $\frac{H}{U} = \frac{3T}{2S}$.

En tenant compte des valeurs connues de S et de $3UT - 2HS$ en fonction de x et des racines α, β, γ, δ de U, ainsi que de la formule (1), on obtient la relation identique suivante entre cinq quantités quelconques x, α, β, γ, δ, ou plutôt entre les différences de ces quantités prises deux à deux (j'écris $\overline{\alpha\beta}$ au lieu de $\alpha - \beta$) :

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\alpha\beta}^2\,\overline{\gamma\delta}^2 + \overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\beta\delta}^2 + \overline{\alpha\delta}^2\,\overline{\beta\gamma}^2\right)\left(\overline{\beta\gamma}^2\,\overline{\gamma\delta}^2\,\overline{\delta\beta}^2\,\overline{x\alpha}^4 + \overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\gamma\delta}^2\,\overline{\delta\alpha}^2\,\overline{x\beta}^4 + \ldots\right)\\ &\quad = 4\left(\overline{\alpha\beta}^2\,\overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\alpha\delta}^2\,\overline{\beta\gamma}^2\,\overline{\beta\delta}^2\,\overline{x\gamma}^2\,\overline{x\delta}^2 + \overline{\alpha\beta}^2\,\overline{\alpha\gamma}^2\,\overline{\alpha\delta}^2\,\overline{\beta\gamma}^2\,\overline{\gamma\delta}^2\,\overline{x\beta}^2\,\overline{x\delta}^2 + \ldots\right).\end{aligned}$$

Si l'on annule séparément le coefficient de chaque puissance de x, cette identité se décompose en cinq autres qui ont lieu entre quatre quantités quelconques α, β, γ, δ.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME QUINTIQUE.

9. Soit la forme générale U du cinquième ordre

$$U = ax^5 + 5bx^4y + 10cx^3y^2 + 10dx^2y^3 + 5exy^4 + fy^5.$$

Elle possède en tout, comme on sait, 23 invariants ou covariants distincts (y compris la forme elle-même), que je désignerai comme suit, chacun par une lettre majuscule :

	Formes droites.	Formes gauches.
4 invariants..............	J(4), K(8), L(12)	I(18)
4 covariants linéaires......	P(5), P‴(13)	P′(7), P″(11)
3 » quadratiques..	S(2), S′(6)	S″(8)
3 » cubiques.....	T(3)	T′(5), T″(9)
2 biquadratiques.........	Q(4)	Q′(6)
3 quintiques.............	U(1)	U′(3), U″(7)
2 sextiques..............	H(2)	H′(4)
1 du septième ordre......	»	R(5)
1 du neuvième ordre......	»	N(3)

Soit 11 formes droites dont 3 invariants, et 12 formes gauches dont 1 invariant. Dans le Tableau ci-dessus, le nombre entre parenthèses placé à droite de la lettre qui désigne chaque forme indique le degré de cette forme par rapport aux coefficients de U.

Pour préciser le sens de ces désignations, il est indispensable de dire comment les péninvariants, sources de ces divers covariants, peuvent se calculer de proche en proche en partant des coefficients de U. En affectant à chaque péninvariant la même lettre qu'au covariant dont il est la source, mais en caractères minuscules, on aura tout d'abord pour les sources des covariants principaux (associés de U),

$$(17)\qquad \begin{cases} u = a, \\ h = ac - b^2, \\ n = a^2d - 3abc + 2b^3, \\ s = ae - 4bd + 3c^2, \\ u' = a^2f - 5abe + 2acd + 8b^2d - 6bc^2. \end{cases}$$

Les autres péninvariants et invariants droits se déduiront ensuite des précédents par les relations

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
u^3 t &= u^2 hs - n^2 - 4h^3,\\
u^2 q &= u^2 s^2 - 6uht - nu' - 4h^2 s,\\
u^2 \mathrm{J} &= 12ust + u'^2 + 4hs^2,\\
up &= \mathrm{J}h + 2qs - s^3 + 9t^2,\\
us' &= s^2 t - 3qt - hp,\\
u\mathrm{K} &= (\mathrm{J}s - 12s')t - p(q + s^2),\\
3u\mathrm{L} &= (p^2 + 4\mathrm{J}s' - \mathrm{K}s)t - 3pss',\\
up''' &= (2\mathrm{J}st + s't - ps^2)p - (\mathrm{J}^2 - 3\mathrm{K})t^2,
\end{aligned}\right.$$

et les péninvariants et invariant gauches par les relations

$$(19)\quad\left\{\begin{aligned}
uh' &= hu' - ns,\\
ur &= 2hh' - 3nt,\\
ut' &= 3tu' - 2h's,\\
uq' &= u'q - 2rs,\\
up' &= pu' + 2q's,\\
uu'' &= -np - 2hq',\\
us'' &= u's' + h'p - hp' + s^2 t',\\
ut'' &= -2h's' - 3tu'' - 3stt',\\
up'' &= pu'' + 2pst' - q's' - \mathrm{J}tt' - \mathrm{K}h',\\
6u\mathrm{I} &= (6s'^2 - \mathrm{K}q)p' + (6pt - 6ss' - \mathrm{J}q)p''.
\end{aligned}\right.$$

Les relations (18) et (19) deviennent des syzygies entre les invariants et les covariants eux-mêmes, lorsqu'on y remplace les péninvariants par les covariants dont ils sont respectivement les sources, c'est-à-dire les lettres minuscules par les majuscules correspondantes. Ce sont ces mêmes syzygies que j'ai données dans un travail antérieur (*Comptes rendus*, 1er semestre 1883, p. 426, 479 et 563), comme constituant, avec les suivantes

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} u(ps - \mathrm{J}t) - q^2 + 3st^2 + 4hs' = 0, \\ \mathrm{K}h + 3\mathrm{J}t^2 - 4pst - s'(q + s^2) = 0, \\ \mathrm{L}h - \mathrm{K}t^2 - ps't - ss'^2 = 0, \\ 12s'^2 - 4p^2s - \mathrm{J}ss' + 3\mathrm{J}pt + \mathrm{K}(s^2 - 3q) = 0, \\ 4\mathrm{J}s'^2 - \mathrm{K}ss' - 3\mathrm{L}s^2 + 4p^2s' + 3\mathrm{K}pt + 9\mathrm{L}q = 0, \end{array}\right.$$

qui s'en déduisent par des éliminations faciles, la base de toute étude sur les formations dépendant de la forme du cinquième ordre.

10. On sait que le discriminant de la forme du cinquième ordre a pour expression

$$(21)\qquad \mathrm{D} = \mathrm{J}^2 - 128\mathrm{K}.$$

Pour obtenir la source du sous-discriminant W, nous avons à appliquer à D l'opérateur

$$\zeta_2 = a\frac{d}{dc} + 3b\frac{d}{dd} + 6c\frac{d}{de} + 10d\frac{d}{df}.$$

Or les formules (17) donnent directement

$$\zeta_2(u) = 0, \qquad \zeta_2(h) = u^2, \qquad \zeta_2(n) = 0, \qquad \zeta_2(s) = 12h,$$
$$\zeta_2(u') = 12n.$$

En appliquant alors l'opérateur ζ_2 aux deux membres de chacune des relations (18), et tenant compte des relations (18) et (20), on trouve successivement

$$\begin{aligned} \zeta_2(t) &= us, \\ \zeta_2(q) &= 6ut - 2hs, \\ \zeta_2(\mathrm{J}) &= 40s^2 - 24q, \\ \zeta_2(p) &= u\mathrm{J} + 30st, \\ \zeta_2(s') &= -2up - qs - 9t^2, \\ \zeta_2(\mathrm{K}) &= 10ss' + 30pt - \mathrm{J}q, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut

$$\zeta_2(\mathrm{D}) = 2\mathrm{J}\zeta_2(\mathrm{J}) - 128\zeta_2(\mathrm{K}) = 80[\mathrm{J}(q+s^2) - 16(ss'+3pt)].$$

En négligeant le facteur numérique, nous obtenons donc le résultat que voici :

Le sous-discriminant W *de la forme du cinquième ordre a pour expression*

$$(22)\qquad \mathrm{W} = 16(\mathrm{SS}' + 3\mathrm{PT}) - \mathrm{J}(\mathrm{Q} + \mathrm{S}^2),$$

où S *et* S' *sont les deux covariants quadratiques droits (du deuxième et du sixième degré),* P *le covariant linéaire le plus simple (du cinquième),* T *le covariant cubique droit (covariant canonique),* Q *le covariant biquadratique droit, et* J *l'invariant du quatrième degré.*

11. Je vais maintenant étudier le sous-discriminant W considéré comme forme biquadratique fondamentale, mais dont les coefficients dépendent de ceux de la forme quintique U en vertu de la formule (22).

Je me servirai dans ce but des formules et des procédés indiqués dans le travail déjà cité ci-dessus (p. 480 et 563). U étant supposé ramené à la forme type

$$(23)\qquad \begin{cases} \mathrm{U} = u[x^5 + 10hx^3y^2 + 10nx^2y^3 \\ \qquad + 5(u^2s - 3h^2)xy^4 + (u^2u' - 2hn)y^5], \end{cases}$$

les formes types des divers covariants sont

$$(24)\qquad \begin{cases} \mathrm{S} = sx^2 + u'xy - (hs + 3ut)y^2, \\ \mathrm{S}' = s'x^2 - (u'' + st')xy + [u(\mathrm{J}t - ps) - hs']y^2, \\ \mathrm{P} = px - q'y, \\ \mathrm{T} = tx^3 + h'x^2y - (uq + 3ht)xy^2 + (nt - hh')y^3, \\ \mathrm{Q} = qx^4 + 4rx^3y - 6(ust + hq)x^2y^2 \\ \qquad - 2(u^2t' + uu't + 2hr)xy^3 \\ \qquad - (u^3p + u^2qs - 12u^2t^2 - 2uhst - h^2q)y^4. \end{cases}$$

et, par suite, la forme type de W sera

$$W = \varpi x^4 + \varpi_1 x^3 y + \varpi_2 x^2 y^2 + \varpi_3 xy^3 + \varpi_4 y^4,$$

avec les valeurs suivantes de ϖ, ϖ_1, ϖ_2,

$$\begin{aligned}
\varpi &= 16ss' + 48pt - Jq - Js^2,\\
\varpi_1 &= 16[u's' - s(u'' + st')] + 48(h'p - q't) - J(4r + 2u's),\\
\varpi_2 &= 16[s(uJt - ups - hs') - u'(u'' + st') - s'(hs + 3ut)]\\
&\quad - 48[p(uq + 3ht) + h'q']\\
&\quad - J[-6(ust + hq) + u'^2 - 2s(hs + 3ut)].
\end{aligned}$$

Les valeurs de ϖ_3, ϖ_4 sont inutiles pour l'étude que nous avons en vue.

Formons d'abord le hessien $\mathfrak{H}$ de W. Sa source sera évidemment, à une certaine puissance près de u,

$$\tag{25} \tfrac{1}{6}\varpi\varpi_2 - \tfrac{1}{16}\varpi_1^2,$$

et comme le covariant, dont cette expression serait la source, serait du quatorzième ordre, tandis que le hessien cherché n'est que du quatrième ordre, il faut que l'expression (25) soit divisible par u^2. D'autre part, $\mathfrak{H}$ étant du quatrième ordre ne peut renfermer dans son expression H qui est du sixième; nous pouvons donc simplifier le calcul en supposant nul le péninvariant h qui doit disparaître de lui-même du résultat; ce qui revient à supposer que l'on ait opéré préalablement une transformation linéaire en prenant pour nouvel y un des facteurs de H. Sous le bénéfice de cette hypothèse, nous pouvons prendre

$$\begin{aligned}
\varpi &= 16ss' + 48pt - Jq - Js^2,\\
\tfrac{1}{2}\varpi_1 &= (8s' - Js)u' - 8su'' - 8s^2t' + 24ph' - 24tq' - 2Jr,\\
\varpi_2 &= u(28Jst - 48s't - 16ps^2 - 48pq)\\
&\quad - Ju'^2 - 48h'q' - 16u'u'' - 16su't'.
\end{aligned}$$

Mais on trouve facilement, de proche en proche, au moyen des formules (18), (19) et (20) dans lesquelles on a supposé $h = 0$,

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{c} u'^2 = u^2 J - 12 ust, \qquad n^2 = -u^3 t, \qquad nu' = u^2(s^2 - q), \\ nh' = u^2 st, \qquad u'h' = us(q - s^2), \qquad h'^2 = -us^2 t, \\ nr = 3u^2 t^2, \qquad u'r = 3ut(q - s^2), \\ h'r = -3ust^2, \qquad r^2 = -9ut^3, \\ nt' = u^2 s', \qquad u't' = u(3Jt - 2ps) + 2s(qs - 9t^2), \\ h't' = -uss', \\ rt' = -3us't, \qquad t'^2 = 2s^2 s' + 6qs' + 12pst - 9Jt^2, \\ nq' = u^2(Jt - 2ps) + us^2(3q - s^2), \qquad u'q' = u(Jq + 6ss'), \\ h'q' = u^2 K + u(2pq + 15s't), \qquad q'r = 3u(2Jt^2 - 2pst - qs'), \\ q't' = -u(Ks + Js') + ps(s^2 - 3q), \\ q'^2 = u[Jps + 3ps^2 - (J^2 - 3K)t], \\ nu'' = u^2 pt, \qquad u'u'' = up(q - s^2), \qquad h'u'' = -upst, \\ u''r = -3upt^2, \qquad u''t' = -ups', \\ u''q' = up(2ps - Jt) + ps^2(s^2 - 3q), \\ u''^2 = -up^2 t. \end{array}\right.$$

Grâce à ces formules et aux syzygies (18) et (20), on peut obtenir w_2 et w_1^2 en fonction des seuls péninvariants droits, sous la forme suivante :

$$w_2 = u^2(16K - J^2) + 24u[4p(s^2 - q) - 3Jst] + 32s^2(9t^2 - qs)$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4} w_1^2 = {} & u^2[J^3 s^2 - 16J^2 ss' + 64Js'^2 - 1152Kpt] \\ & + 4u[9(48K - J^2)t^3 + 64ps^3 s' - 96Ks^3 t - 576p^2 qt + 128p^2 s^2 t \\ & \qquad - 48Jpst^2 - 16.243ps't^2 - 768ss'^2 t - 8Jpqs^2 + 64pqss' \\ & \qquad + 15J^2 qst - 72Js^2 s't - 192Jqs't + 6J^2 s^3 t] \\ & + 32s^3[4s^3 s' + 48ps^2 t + Jqs^2 + 72s't^2 \\ & \qquad - 27Jst^2 + 4qss' - 72pqt], \end{aligned}$$

et dès lors il vient pour la source du covariant $12\,\mathrm{U}^2\mathfrak{Z}$,

$$2\mathfrak{w}\mathfrak{w}_2 - \tfrac{3}{4}\mathfrak{w}_1^2 = 32\,\mathrm{A}s^2 + 12\,\mathrm{A}'u + \mathrm{A}''u^2,$$

où A, A′, A″ ont les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} = {} & 72ss't^2 - 44qs^2s' + 864pt^3 + 120pqst - 18\mathrm{J}qt^3 + 2\mathrm{J}q^2s \\
& + 63\mathrm{J}s^2t^2 - \mathrm{J}qs^3 - 12s^4s' - 144ps^3t, \\
\mathrm{A}' = {} & 192ps^3s' - 320pqss' - 120\mathrm{J}s^2s't + 640p^2s^2t - 192p^2qt \\
& - 528\mathrm{J}pst^2 + 8\mathrm{J}pqs^2 + 16\mathrm{J}pq^2 - 3\mathrm{J}^2qst - 16\mathrm{J}ps^4 \\
& + 6(\mathrm{J}^2 + 16\mathrm{K})s^3t + 768ss'^2t + 9(\mathrm{J}^2 - 48\mathrm{K})t^3 \\
& + 16.243ps't^2 + 192\mathrm{J}qs't, \\
\mathrm{A}'' = {} & -192\mathrm{J}s'^2 + 16(\mathrm{J}^2 + 32\mathrm{K})ss' - \mathrm{J}(\mathrm{J}^2 + 32\mathrm{K})s^2 \\
& + 2\mathrm{J}(\mathrm{J}^2 - 16\mathrm{K})q - 96(\mathrm{J}^2 - 52\mathrm{K})pt.
\end{aligned}$$

Pour mettre en évidence dans A le facteur u qui doit nécessairement s'y trouver, il suffit d'ajouter la quantité suivante, qui est identiquement nulle, en vertu des syzygies (18) et (20), où l'on a fait $h=0$,

$$\begin{aligned}
& (96pt + \mathrm{J}q - \tfrac{32}{3}ss')(up - 2qs + s^3 - 9t^2) \\
& \qquad + (9\mathrm{J}t + \tfrac{86}{3}ps)(us' - s^2t + 3qt) \\
& \qquad - 14st(u\mathrm{K} - \mathrm{J}st + 12s't + pq + ps^2) \\
& \qquad - \tfrac{68}{3}s^2(3\mathrm{J}t^2 - 4pst - qs' - s^2s').
\end{aligned}$$

Tous les termes non divisibles par u disparaissent, et il vient

$$\mathrm{A} = u(96p^2t + \mathrm{J}pq + 9\mathrm{J}s't - 14\mathrm{K}st + 18pss').$$

De même $\dfrac{32\,\mathrm{A}s^2}{u} + 12\,\mathrm{A}'$ doit être divisible par u. Cette quantité a pour expression

$$\begin{aligned}
\frac{32\,\mathrm{A}s^2}{u} + 12\,\mathrm{A}' = 4[& 720ps^3s' - 960pqss' - 288\mathrm{J}s^2s't + 2688p^2s^2t \\
& - 576p^2qt - 1584\mathrm{J}pst^2 + 32\mathrm{J}pqs^2 + 48\mathrm{J}pq^2 \\
& - 9\mathrm{J}^2qst - 48\mathrm{J}ps^4 + (18\mathrm{J}^2 + 176\mathrm{K})s^3t \\
& + 2304ss'^2t + 27(\mathrm{J}^2 - 48\mathrm{K})t^3 \\
& \qquad + 16.729ps't^2 + 576\mathrm{J}qs't].
\end{aligned}$$

Ajoutons à la parenthèse la quantité identiquement nulle pour $h=0$, en vertu des syzygies (18) et (20),

$$\begin{aligned}
&(\alpha J^2 t + \beta K t + \gamma p s' + \delta J p s)(up - 2qs + s^3 - 9t^2)\\
&\quad + (\varepsilon p^2 + \zeta J s' + \eta K s + \theta J^2 s)(us' - s^2 t + 3qt)\\
&\quad + (\lambda s s' + \mu p t + \nu J q + \xi J s^2)(uK - Jst + 12 s' t + pq + ps^2)\\
&\quad + (\pi s^2 + \rho q)(3uL - p^2 t - 4 J s' t + K s t + 3 p s s')\\
&\quad + \sigma J p (ups - uJt - q^2 + 3 s t^2)\\
&\quad + (\tau J t + \varphi p s)(3 J t^2 - 4 p s t - q s' - s^2 s')\\
&\quad + \psi t (K t^2 + p s' t + s s'^2),
\end{aligned}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \psi$ désignent dix-huit coefficients numériques arbitraires. Déterminons ces dix-huit coefficients par la condition que tous les termes indépendants de u disparaissent à la fois : nous aurons à satisfaire à dix-huit équations du premier degré qu'il est inutile d'écrire. On trouve qu'elles sont satisfaites en laissant η et ν indéterminés [1], et en donnant aux autres arbitraires les valeurs suivantes

$$\alpha = 19, \qquad \beta = -528, \qquad \gamma = -1968 - 4\eta, \qquad \delta = \tfrac{1}{3}(80+\nu),$$
$$\varepsilon = 560, \qquad \zeta = -1584 - 4\eta - 4\nu, \qquad \theta = \tfrac{1}{3}(47+\nu) \qquad \lambda = 96,$$
$$\mu = -2160 - 3\eta, \qquad \xi = \tfrac{1}{3}(64 - \nu),$$
$$\pi = 352 + \eta, \qquad \rho = -1056 - 3\eta,$$
$$\sigma = 48 + \nu, \qquad \tau = 48, \qquad \varphi = -96 - \eta, \qquad \psi = -3456.$$

Dès lors il vient

$$\begin{aligned}
\frac{32 A s^2}{u^2} + \frac{12 A'}{u} = 4\big[&(352+\eta)(3Ls^2 - 9Lq - 4p^2 s') + \tfrac{4}{3}(56+\nu)Jps\\
&-(29+\nu)J^2 pt - 3(896+\eta)Kpt\\
&-16(396+\eta+\nu)Js'^2 + (96+\eta)Kss'\\
&+\tfrac{1}{3}(47+\nu)J^2 ss' + \nu JKq + \tfrac{1}{3}(64-\nu)JKs^2\big].
\end{aligned}$$

---

(1) Cette indétermination correspond à la possibilité de modifier la forme du résultat du calcul par l'emploi des deux dernières syzygies du groupe (20).

En ajoutant A'' à l'expression écrite dans le second membre, nous obtiendrons $12\mathfrak{H}$; en donnant aux arbitraires η et ν les valeurs respectives -352 et -56, il viendra

$$12\mathfrak{H} = 12J^2pt - 1536Kpt - 512Kss' + 4J^2ss' - 256JKq \\ + 128JKs^2 - J^3s^2 + 2J^3q.$$

Ce qu'on peut écrire, en vertu de (21) et de (22),

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{12}D(4ss' + 12pt - Js^2 + 2Jq), \\ = \tfrac{1}{48}D[w + 3J(3q - s^2)].$$

Ainsi le hessien du sous-discriminant W a pour expression, en fonction des covariants de U,

$$\mathfrak{H} = \tfrac{1}{48}D[W + 3J(3Q - S^2)]. \tag{27}$$

Cette formule très simple montre immédiatement :

1° *Que si la forme quintique* U *a un facteur double, le hessien de son sous-discriminant s'évanouit identiquement, ce qui revient à dire que le sous-discriminant est un bicarré parfait, comme nous le savions d'avance;*

2° *Que si l'invariant biquadratique* J *est nul, le sous-discriminant se confond avec son propre hessien, et est, par suite, un carré parfait; il se réduit d'ailleurs dans ce cas au covariant*

$$SS' + 3PT.$$

12. Proposons-nous maintenant de calculer, en fonction de J, K, L, les deux invariants Σ et Θ du sous-discriminant, considéré comme forme biquadratique indépendante.

On sait que, si Σ et Θ sont les deux invariants d'une forme biquadratique V, dont le hessien est V', les invariants correspondants de $\alpha' V + 6\beta V'$, où α et β sont deux arbitraires, ont respectivement pour expressions

$$(28) \quad \begin{cases} \Sigma' = \Sigma\alpha^2 + 18\Theta\alpha\beta + 3\Sigma^2\beta^2, \\ \Theta' = \Theta\alpha^3 + \Sigma^2\alpha^2\beta + 9\Sigma\Theta\alpha\beta^2 + (54\Theta^2 - \Sigma^3)\beta^3. \end{cases}$$

Prenons pour V et V′ le sous-discriminant W et son hessien $\mathfrak{H}$, et posons $\alpha = -\frac{1}{3J}$, $\beta = \frac{8}{3JD}$, il viendra, à cause de (27),

$$\alpha V + 6\beta V' = 3Q - S^2,$$

et nous sommes amené à calculer les deux invariants Σ' et Θ' de la forme $3Q - S^2$: une fois ces invariants connus, les équations (28), qui deviennent

$$(29)\quad \begin{cases} 9J\ D^2\Sigma' = D^2\Sigma - 144 D\Theta + 192\Sigma^2, \\ 27J^3D^3\Theta' = -D^3\Theta + 8D^2\Sigma^2 - 576 D\Sigma\Theta + 512(54\Theta^2 - \Sigma^3), \end{cases}$$

nous serviront à déterminer Σ et Θ.

D'après les formes-types données plus haut pour L et Q (24), on a pour la forme-type de $3Q - S^2$,

$$\begin{aligned} 3Q - S^2 &= v_0 x^4 + v_1 x^3 y + v_2 x^2 y^2 + v_3 x y^3 + v_4 y^4; \\ v_0 &= 3q - s^2, \\ v_1 &= 12r - 2u's, \\ v_2 &= -12ust + 2hs^2 - 18hq - u'^2, \\ v_3 &= -6u^2t' + 2hu's - 12hr, \\ v_4 &= -3u^3p + 3u^2(9t^2 - qs) + h^2(3q - s^2). \end{aligned}$$

Puisqu'il s'agit de calculer des invariants, rien n'empêche de supposer $h = 0$, comme dans le calcul du numéro précédent, et de poser simplement, en vertu des relations (26),

$$(30)\quad \begin{cases} v_0 = 3q - s^2, \qquad v_1 = 2(6r - u's), \qquad v_2 = -u^2 J, \\ v_3 = -6u^2 t', \qquad v_4 = 3u^2(-up + 9t^2 - qs). \end{cases}$$

L'invariant Σ' est par définition

$$(31)\qquad u^4\Sigma' = v_0 v_4 - \tfrac{1}{4} v_1 v_3 + \tfrac{1}{12} v_2^2.$$

Remplaçant v_0, v_1, ... par leurs valeurs (30), puis rt', $u't'$ au moyen de (26), il vient

$$u^2\Sigma' = \tfrac{1}{12}u^2 J^2 - 9u(pq - ps^2 + 6s't + Jst)$$
$$+ 3(27qt^2 + 9s^2t^2 - 3q^2s - qs^3).$$

Ajoutons au second membre la quantité identiquement nulle, en vertu des syzygies (18) et (20) où l'on a fait $h = 0$,

$$3q(up - 2qs + s^3 - 9t^2) - 18t(us' - s^2t + 3qt)$$
$$- 15s(ups - uJt - q^2 + 3st^2),$$

nous pourrons diviser les deux membres par u, et il viendra

$$u\Sigma' = \tfrac{1}{12}uJ^2 + 6(Jst - 12s't - pq - ps^2).$$

Mais la parenthèse du second membre est précisément égale à uK, en vertu de la sixième des syzygies (18). Il vient donc enfin

$$\Sigma' = 6K + \tfrac{1}{12}J^2. \tag{32}$$

Un calcul tout semblable, dont il est inutile d'indiquer les détails, fournit

$$\Theta' = \tfrac{1}{216}J^3 - \tfrac{7}{4}JK. \tag{33}$$

D'autre part, les équations (29) montrent immédiatement que Σ et Θ doivent être respectivement divisibles par D et D^2; comme d'ailleurs ils sont respectivement des degrés 16 et 24 par rapport aux coefficients de U (puisque W est de degré 8), on peut poser

$$\Sigma = D(\alpha D + \beta K), \qquad \Theta = D^2(\gamma D + \delta K), \tag{34}$$

α, β, γ, δ étant quatre coefficients numériques qu'il nous reste à déterminer. Pour cela, il suffit de remplacer dans les deux équations (29) Σ' et Θ' par leurs valeurs (32) et (33), Σ et Θ par leurs expressions (34), J^2 par D + 128K, et, puisqu'alors ces deux équations doivent se réduire à des identités, d'annuler séparément les coefficients des diverses puissances de $\frac{D}{K}$. On obtient ainsi sept équations de condition, savoir

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &768\alpha^2 + 4\alpha - 576\gamma - 3 = 0,\\ &384\alpha\beta + \beta - 144\delta - 246 = 0,\\ &\beta^2 - 100 = 0,\\ &2^{12}\alpha^3 - 2^{13}.3^3\gamma^2 - 2^6\alpha^2 - 2^9.3^2\alpha\gamma + 2^3\gamma + 1 = 0,\\ &2^{11}.3\alpha^2\beta - 2^{13}.3^3\gamma\delta - 2^6\alpha\beta + 2^8.3^2\alpha\delta\\ &\qquad\qquad + 2^8.3^2\beta\gamma + 2^2\delta + 3 = 0,\\ &2^6.3\alpha\beta^2 - 2^7.3^3\delta^2 - \beta^2 + 2^3.3^2\beta\delta - 2^3.3.31 = 0,\\ &\beta^3 - 1000 = 0,\end{aligned}\right.$$

auxquelles doivent satisfaire les coefficients numériques α, β, γ, δ. Une discussion facile montre que les seules valeurs convenables sont les suivantes

$$\alpha = \tfrac{1}{12}, \qquad \beta = 10, \qquad \gamma = \tfrac{1}{216}, \qquad \delta = \tfrac{7}{12},$$

en sorte que les expressions cherchées sont

$$\Sigma = D(\tfrac{1}{12}D + 10K), \qquad \Theta = D^2(\tfrac{1}{216}D + \tfrac{7}{12}K),$$

ou encore

$$(36)\qquad \Sigma = \tfrac{1}{12}D(J^2 - 8K), \qquad \Theta = \tfrac{1}{216}D^2(J^2 - 2K).$$

On en conclut pour le discriminant de W,

$$(37)\qquad \Delta = \Sigma^3 - 27\Theta^2 = \tfrac{1}{16}J^2KD^3(J^2 - 3K),$$

et pour le sous-discriminant de W, toutes réductions faites,

$$(38)\quad W' = \tfrac{1}{288}JD^3(J^2 - 8K)[4J(SS' + 3PT) - 2KS^2 - (J^2 - 6K)Q].$$

La formule (37) est particulièrement simple et remarquable; elle fait connaître quatre cas différents où W admet un facteur double, savoir :

1° Quand la forme primitive U admet elle-même un facteur double ($D = 0$);

2° Quand elle est divisible par le covariant linéaire P, sans que T le soit ($J^2 - 3K = 0$);

3° Quand le covariant quadratique S est carré parfait ($J = 0$);

4° Quand l'invariant K est nul.

Remarquons en passant que, lorsque toutes les racines de U sont réelles, toutes celles de W sont nécessairement imaginaires; il faut donc que Δ soit positif. Comme $D = J^2 - 128K$ est d'ailleurs positif, et, par suite, aussi $J^2 - 3K$, la formule (37) montre que K doit être aussi positif, comme l'a trouvé M. Hermite.

13. Je vais maintenant calculer les résultants du sous-discriminant W et des deux covariants P (linéaire) et T (canonique) de la forme fondamentale. Je suivrai pour cela la méthode que j'ai indiquée dans les *Comptes rendus* (*voir* au n° **9** ci-dessus), en écrivant les six relations

$$(39)\qquad \begin{cases} w = 16ss' + 48pt - J(q + s^2) = 0, \\ up - Jh - 2qs + s^3 - 9t^2 = 0, \\ us' - s^2t + 3qt + hp = 0, \\ uK - Jst + 12s't + pq + ps^2 = 0, \\ 3uL - p^2t - 4Js't + Kst + 3pss' = 0, \\ ups - uJt - q^2 + 3st^2 + 4hs' = 0, \end{cases}$$

ajoutant une septième relation qui s'obtient en égalant à zéro la source du covariant dont on veut obtenir le résultant avec W, éliminant entre ces sept relations six des péninvariants u, h, p, s, s', t, q; le septième disparaît de lui-même en vertu de l'homogénéité, et il reste une relation entre les invariants J, K, L qui donne le résultant cherché égalé à zéro.

Appliquons cette méthode au résultant de W et de P, qui doit être de degré 28 par rapport aux coefficients de U. Il suffit d'ajouter aux équations (39) celle-ci

$$p = 0.$$

La quatrième et la cinquième du groupe (39) donnent alors

$$u = \frac{(J^2 - 3K)st}{JK + 9L}, \qquad s' = \frac{(K^2 + 3JL)s}{4(JK + 9L)};$$

d'où, au moyen de la première,

$$q = \frac{4K^2 - J^2K + 3JL}{J(JK + 9L)} s^2.$$

Ces valeurs de u, s', q étant portées dans la troisième, $s^2 t$ disparaît de lui-même, et il reste, tous calculs faits, pour le résultant demandé

$$(J^2 - 3K)(5JK^2 - J^2L + 48KL).$$

Cette expression montre que, lorsque $J^2 - 3K = 0$, le facteur linéaire fourni par le covariant P divise W en même temps que U; $J^2 - 3K$ doit donc entrer en facteur dans le résultant de U et de W. D'autre part, si $D = 0$, l'expression ci-dessus se réduit à

$$625K^2(JK - 16KL)$$

et s'annule, par conséquent, si U admet deux facteurs carrés; ce qui devait être, puisqu'alors W doit s'annuler identiquement.

Passons au calcul du résultant de W et de T, qui doit être de degré 36.

Il suffit d'ajouter au groupe (39) l'équation

$$t = 0.$$

La première et la quatrième équation du groupe (39) combinées donnent

$$uJK + 16pss' = 0.$$

Comparant avec la cinquième, savoir

$$uL + pss' = 0.$$

Il vient simplement

$$u(JK - 16L) = 0.$$

Le résultant demandé est donc

$$(JK - 16L)^3.$$

14. Le résultant de la forme U et de son sous-discriminant W peut s'obtenir par un calcul analogue, bien qu'un peu plus compliqué. Ajoutons au groupe (39) l'équation

$$u = 0,$$

et comme l'invariant L disparaîtrait des données, remplaçons la dernière relation du groupe (39) par une autre qui contienne L, par exemple par la troisième syzygie du groupe (20),

$$(40) \qquad Lh - Kt^2 - ps't - ss'^2 = 0.$$

Les cinq premières relations du groupe (39) deviennent d'ailleurs, pour $u = 0$,

$$(41) \qquad \begin{cases} Jh + 2qs - s^3 + 9t^2 = 0, \\ s^2 t - 3qt - hp = 0, \\ Jst - 12s't - p(q + s^2) = 0, \\ p^2 t + 4Js't - Kst - 3pss' = 0, \\ 16ss' + 48pt - J(q + s^2) = 0. \end{cases}$$

L'élimination de $q + s^2$ entre la troisième et la cinquième relation du groupe (41) donne tout d'abord

$$t = \frac{16pss'}{J^2 s - 12Js' - 48p^2}.$$

De la quatrième on tire directement

$$t = \frac{3pss'}{p^2 + 4Js' - Ks}.$$

D'où par comparaison, en posant, pour abréger les calculs,

$$s = p^2 z, \qquad J^2 - 3K = N, \qquad J^2 - 128K = D :$$

$$\frac{s'}{p^2} = \frac{(16N - D)z - 2^5.5^2}{2^2.5^3 J}$$

et, par suite,

$$\frac{t}{p^3} = \frac{z[(16N - D)z - 2^5.5^2]}{2^2.5J(Nz - 45)}.$$

La dernière équation du groupe (41) donne alors

$$\frac{q}{p^4} = - z^2 + \frac{4z(Nz + 30)[(16N - D)z - 2^5.5^2]}{5^3 J^2 (Nz - 45)}.$$

D'autre part, si l'on élimine h entre les deux premières relations du groupe (41) et la relation (40), on obtient les deux relations

$$\begin{gathered} ps^3 - 9pt^2 + q(3Jt - 2ps) - Js^2 t = 0, \\ L(s^2 - 3q)t - Kpt^2 - p^2 s' t - pss'^2 = 0. \end{gathered}$$

Remplaçant dans ces deux relations s, s', t et q par leurs expressions données ci-dessus, on obtient

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2^4 DN^2 z^3 + 5(2^8 N^2 - 2^6.3DN + 3^2 D^2) z^2 \\ & \qquad - 2^4.3.5^2(2^6 N - 3.5D)z + 2^{10}.3^2.5^3 = 0, \end{aligned} \right.$$

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} & N^2[2^8.5^3 L - J(2^4 N - D)] z^3 \\ & \quad + [2^4.3.5^4(3D - 2^6 N)L \\ & \qquad + 5J(2^5.11 N^2 + 2^2 ND - D^2)] z^2 \\ & \quad + 2^2.5^2[2^8.3^2.5^3 L - J(2^4.3.13N + 31D)] z \\ & \qquad\qquad\qquad + 2^7.3^2.5^4 J = 0. \end{aligned} \right.$$

Le résultant de ces deux équations en z sera, comme il est facile de le voir, de degré 84 par rapport aux coefficients de U, et il sera formé du résultant cherché de U et W (de degré 44) multiplié par un facteur parasite de degré 40.

Pour obtenir ce résultant, on pourrait employer la formule connue qui donne le résultant de deux formes cubiques en fonction de leurs coefficients. Mais on peut éviter ce calcul pénible et fastidieux en remarquant que l'équation (42) admet la racine $-\frac{2^4.5}{D}$, et se décompose par suite en deux, savoir

$$(44) \qquad Dz + 2^4.5 = 0,$$

$$(45) \qquad 2^4 N^2 z^2 + 15(3D - 2^6 N)z + 2^6.3^2.5^2 = 0,$$

en sorte qu'il suffit de calculer successivement le résultant de (44) et de (43), celui de (45) et (43), et de former leur produit.

Le résultant de (44) et (43) s'obtient immédiatement; son expression est, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned} R_1 = {} & (2^4 N + 3^2 D) \\ & \times [2^6.5^3(2^4 N + 3D)L - J(2^6 N^2 + 2^4 3DN + 13D^2)]. \end{aligned}$$

Pour obtenir le résultant de (45) et de (43), remarquons que le premier membre de (45), multiplié par $2^4.5^3 z$, donne précisément le coefficient de L dans le premier membre de (43). On peut donc remplacer (43) par

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & J[N^2(D - 2^4 N)z^3 + 5(2^5.11 N^2 + 2^2 ND - D^2)z^2 \\ & \qquad - 2^2.5^2(2^4.3.13N + 31D)z + 2^7.3^2.5^4] = 0 \end{aligned} \right.$$

et cette équation, à son tour, par la suivante, obtenue en la combinant avec (42),

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} & J[N^2(D - 2^4 N)z^2 + 5(2^6.3N^2 + 2^2.ND - D^2)z \\ & \qquad - 2.5^2(2^5.3^2 N + 107D)] = 0. \end{aligned} \right.$$

On est ainsi ramené à calculer le résultant des deux équations quadratiques (45) et (47), et la formule connuè fournit aisément, toutes réductions faites,

$$R_2 = J^4 N^2 D^2 (2^4 N + 3^2 D).$$

D'où enfin, pour le résultant des deux équations en z,

$$(48)\quad \begin{cases} R_1 R_2 = N^2 D^2 J^4 (2^4 N + 3^2 D)^2 \\ \quad \times [2^6.5^3 (2^4 N + 3D) L - J(2^8 N^2 + 2^4.3DN + 13D^2)], \end{cases}$$

expression qui est bien du degré 84.

Pour savoir quels sont les facteurs parasites, examinons ce que deviennent les relations (40) et (41) lorsqu'on annule successivement les divers facteurs de (48):

1° Supposons $J = 0$; il vient successivement

$$s = \frac{10p^2}{K}; \qquad s' = \pm p^2 \sqrt{\frac{10}{3K}}, \qquad t = \mp \frac{10p^3}{3K}\sqrt{\frac{10}{3K}}, \qquad h = 0$$

et la relation (40) n'est pas satisfaite. Le facteur J^4 doit donc être rejeté.

2° Supposons $2^4 N + 3^2 D = 0$, c'est-à-dire $J^2 - 48K = 0$. Ce facteur, existant à la fois dans R_1 et dans R_2, correspond aussi bien à la racine $z_1 = -\frac{2^4.5}{D}$ de (44), qu'aux deux racines de (45), qui dans cette hypothèse deviennent l'une $-\frac{2^6.5}{3^2 D}$, et l'autre $-\frac{2^4.5}{D}$, égale à z_1. Si donc on fait d'abord $s = -\frac{2^4.5}{D}p^2$, on trouve que les relations (40) et (41) ne sont satisfaites que par l'une des deux hypothèses $K = 0$, $J^3 - 2^9.3^2 L = 0$, qui l'une et l'autre annulent le second facteur de R_1. De même si l'on fait $s = -\frac{2^6.5p^2}{3^2 D}$, on trouve que la relation (40) n'est pas satisfaite. Il faut donc rejeter aussi le facteur $2^4 N + 3^2 D$.

Ces deux facteurs étant supprimés, l'expression de $R_1 R_2$ se réduit au degré 52, et ne contient plus qu'un facteur parasite de degré 8; ce ne peut donc être que N ou D; et on arrive finalement à ce résultat, que le résultant de U et de W est le produit des trois facteurs invariants

$$(49)\quad \begin{cases} J^2 - 3K, \quad J^2 - 128K, \\ 64(19J^2 - 432K)L - J(J^4 - 80JK + 1856K^2), \end{cases}$$

dont l'un des deux premiers est élevé au carré.

Nous savions déjà (n° **13**) que $J^2 - 3K$ devait être un facteur du résultant de U et W, et que lorsque $J^2 - 3K = 0$, le facteur linéaire commun à U et W n'est autre que le covariant linéaire P. Il est facile d'exprimer en fonction de ce covariant P, du second covariant linéaire droit P''' et des invariants, le facteur commun à U et W, dans les deux autres cas où il en existe un, en employant par exemple la syzygie suivante, qui se déduit aisément de celles que j'ai données (*loc. cit.*):

$$(50) \qquad 3pp''' = Kp^2 + (JK + 9L)s' - \tfrac{1}{4}(K^2 + 3JL)s.$$

Supposons par exemple que le troisième des invariants (49) s'annule, ce qui correspond à $z = \frac{s}{p^2} = -\frac{2^4.5}{D}$.

Les relations données ci-dessus fournissent

$$s' = \frac{4(48K - J^2)p^2}{JD}$$

et la syzygie (50) devient

$$(51) \qquad JDp''' + [JK(J^2 - 28K) - 8L(J^2 + 72K)]p = 0.$$

Le covariant linéaire composé qui forme le premier membre de (51) est donc le facteur linéaire commun à U et W dans cette hypothèse.

Supposons maintenant $D = 0$; en suivant la même marche, nous devons prendre pour $z\left(\text{ou } \frac{s}{p^2}\right)$ l'une des racines de (45); les deux racines de cette équation deviennent dans ce cas égales à $\frac{30}{N}$. On en conclut $s' = \frac{96K - 7J^2}{10JN}p^2$, et la syzygie (50) devient

$$(52) \qquad 10Jp''' + (96L - JK)p = 0.$$

Le premier membre de (52) *donne par conséquent l'expression, en fonction des deux covariants linéaires droits et des invariants, du facteur double de la forme fondamentale* U, *lorsque son discriminant* D *est nul.*

15. Cet important résultat est facile à vérifier. J'ai donné en effet pour le cas général (sous la seule condition que l'invariant gauche I ne soit pas nul) la syzygie

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} I^4 u = {} & (9L^4 + 2KL^2M - M^3)p^5 \\ & + 5(KM^2 - 6L^2M - K^2L^2)p^4 p''' \\ & + 10(6KL^2 - 3M^2 - JLM)p^3 p'''^2 \\ & + 10(JKL + 2KM - 9L^2)p^2 p'''^3 \\ & - 25(M + JL)pp'''^4 - (J^2 - 3K)p'''^5, \end{aligned}\right.$$

où l'on a mis pour abréger M pour $\frac{1}{4}(K^2 - JL)$. Or il est aisé de vérifier que cette syzygie peut s'écrire

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} 2^{14} I^4 u = \Big\{ & [10Jp''' + (96L - JK)p]^2 \\ & \times [(16L^2 + 3JKL - 2K^3)p^3 \\ & + 10JLp^2p''' - 40Kpp'''^2 - 160p'''^3] \\ & + (J^2 - 128K)[(2K^5 - 208K^2L^2 - 3JK^3L + 256JL^3)p^5 \\ & \qquad + 10(160L^2 + 5JKL - 4K^3)Kp^4p''' \\ & \qquad + 20(12K^3 - 5JKL - 528L^2)p^3p'''^2 \\ & \qquad - 40(16K^2 + 25JL)p^2p'''^3 \\ & \qquad\qquad + 800Kpp'''^4 - 384p'''^5]\Big\}, \end{aligned}\right.$$

et, sous cette forme, elle met en évidence le mode de décomposition de U *quand le discriminant est nul, l'expression du facteur double telle que nous l'avons trouvée directement, et celle du facteur cubique qui le complète.*

Le discriminant de ce facteur cubique a d'ailleurs pour expression

$$\begin{aligned} & 2^9K^6 - 2^5.3.11\,JK^4L + 11.37\,J^2K^2L^2 - 100J^3L^3 \\ & \quad - 2^7.59K^3L^2 + 2^{10}.3^3L^4 + 2^6.3^2.13JKL^3, \end{aligned}$$

et, si l'on suppose $J^2 - 128K = 0$, il devient

$$J^{12} - 3.11.2^{10}J^9L + 3.29.2^{21}J^6L^2 - 83.2^{32}J^3L^3 + 3^3.2^{43}L^4,$$

ce que l'on peut encore écrire

$$(J^3 - 2^{11}L)^3(J^3 - 2^{10}.3^3L).$$

Cette expression semble indiquer que la forme U admet deux facteurs doubles, lorsque, outre le discriminant, l'un des invariants $J^3 - 2^{11}L$, $J^3 - 2^{10}.3^3 L$ s'annule. Mais cette conclusion serait erronée pour le dernier, car I^2 s'annule aussi dans ce cas, et la syzygie (54) cesse d'exister, ou plutôt de donner la représentation de U en fonction des covariants linéaires droits, qui se confondent l'un avec l'autre. De même, si l'on exprime que, pour $J^2 = 128K$, le reste de la division du facteur cubique par le facteur linéaire double est nul, ce qui doit donner la condition pour que U admette un facteur triple, on trouve $I^2 = 0$, ce qui rend la syzygie illusoire; et, en effet, on sait que, si U possède un facteur triple, tous ses invariants doivent s'annuler.

16. Pour terminer ce qui concerne le sous-discriminant de la forme du cinquième ordre, je vais donner l'expression de ce sous-discriminant en fonction des deux covariants linéaires droits, P, P''', et des invariants.

La formule (22) et les sixième et septième syzygies du groupe (18) donnent tout d'abord l'identité

$$pw = p[16ss' + 48pt - J(q + s^2)] + J(uK - Jst + 12s't + pq + ps^2) - \tfrac{16}{3}(3uL - p^2 t - 4Js't + Kst + 3pss'),$$

qui conduit à la syzygie suivante

$$(55)\quad pw = u(JK - 16L) + \tfrac{1}{3}[160p^2 + 100Js' - (3J^2 + 16K)s]t.$$

Cette syzygie montre en passant que, *lorsque* $JK - 16L$ *est nul, sans que* I (*résultant de* P *et de* T) *le soit,* W *admet non seulement un des facteurs de* T, *comme nous l'avions trouvé* (n° **13**), *mais les trois facteurs de* T; et en outre que, dans la même hypothèse, P divise $100JS' - 3(J^2 + 16K)S$. Cette dernière circonstance est d'ailleurs une conséquence immédiate des deux syzygies suivantes, que j'ai données dans le travail déjà cité plusieurs fois (¹),

$$(56)\quad \begin{cases} I^2 s = -L(M + JL)p^2 + (3KL + JM)pp''' - (JK + 9L)p'''^2, \\ I^2 s' = (3KL^2 - M^2)p^2 + (KM - 9L^2)pp''' - (M + JL)p'''^2. \end{cases}$$

(¹) Une erreur d'impression y avait fait mettre dans la première de ces syzygies $(3KL - JM)pp'''$ au lieu de $(3KL + JM)pp'''$.

Au moyen des trois syzygies (55) et (56) et de celle-ci que j'ai également donnée dans le même travail,

$$\mathrm{I}^2 t = -\mathrm{L}^2 p^3 + \mathrm{M} p^2 p''' - \mathrm{K} p p'''^2 + p'''^3, \tag{57}$$

il est facile d'exprimer en fonction de p, p''' et des invariants le second membre de (55), qui devient divisible par p; d'où, toutes réductions faites, la syzygie

$$\left\{\begin{aligned}
\mathrm{I}^4 w = {} & [(16\mathrm{L} - \mathrm{JK})\mathrm{M}^3 - 12\mathrm{JL}^2\mathrm{M}^2 + (\mathrm{J}^3 - 144\mathrm{K})\mathrm{L}^3\mathrm{M} \\
& \qquad + (117\mathrm{K} - \mathrm{J}^2)\mathrm{JL}^4 + 1296\mathrm{L}^5]p^4 \\
& + 2[20\mathrm{JM}^3 + (3\mathrm{J}^2 + 16\mathrm{K})\mathrm{LM}^2 \\
& \quad + (\mathrm{J}^3 - 93\mathrm{JK} - 288\mathrm{L})\mathrm{L}^2\mathrm{M} \\
& \qquad + (198\mathrm{L} - \mathrm{JK})\mathrm{JL}^3]p^3 p''' \\
& - [(\mathrm{J}^3 + 22\mathrm{JK} + 32\mathrm{L})\mathrm{M}^2 \\
& \quad + 2(7\mathrm{JK} - 208\mathrm{L})\mathrm{JLM} \\
& \quad + 2\mathrm{J}^3\mathrm{KL}^2 - (187\mathrm{J}^2 + 432\mathrm{K})\mathrm{L}^3]p^2 p'''^2 \\
& + 2(\mathrm{J}^2 - 3\mathrm{K})[(\mathrm{JK} + 16\mathrm{L})\mathrm{M} + 7\mathrm{JL}^2]p p'''^3 \\
& - (\mathrm{J}^2 - 3\mathrm{K})(5\mathrm{JM} + 12\mathrm{KL} + \mathrm{J}^2\mathrm{L})p'''^4,
\end{aligned}\right. \tag{58}$$

qui fournit l'expression cherchée. Le coefficient de p'''^4 reproduit, comme cela devait être, le résultant de W et de P, tel que nous l'avions obtenu au nº **13** par une autre méthode. Celui de p^4 donne évidemment le résultant de W et de P'''.

Si l'on suppose $\mathrm{J}^2 - 3\mathrm{K} = 0$, W devient divisible par P^2 : P est donc bien le facteur double de W dans ce cas.

Si l'on suppose $\mathrm{J} = 0$, l'expression de W se réduit à

$$[\tfrac{1}{2}(\mathrm{K}^3 - 72\mathrm{L}^2)p^2 + 2\mathrm{K}^2 p p''' - 6\mathrm{K} p'''^2]^2,$$

ce qui confirme le résultat trouvé au nº **11**, savoir que le sous-discriminant devient carré parfait quand $\mathrm{J} = 0$.

Si l'on suppose $\mathrm{K} = 0$, l'expression de W se réduit à

$$\tfrac{1}{4}\mathrm{L}(\mathrm{J}p''' + 6\mathrm{L}p)^2[\mathrm{J}^2 p'''^2 + 12\mathrm{JL}pp''' + \mathrm{L}(144\mathrm{L} - \tfrac{1}{4}\mathrm{J}^3)p^2],$$

ce qui met en évidence le facteur double correspondant à cette hypothèse.

Enfin, il est aisé de vérifier que la syzygie (58) peut s'écrire encore

$$(59)\quad \begin{cases} 2^{20}I^4 \varpi = (16L - JK)[10Jp''' + (96L - JK)p]^4 \\ \qquad + (J^2 - 128K)(Ap'''^4 + Bpp'''^3 + Cp^2p'''^2 + Dp^3p''' + Ep^4), \end{cases}$$

avec ces valeurs des coefficients invariants

$$\begin{aligned} A &= 2^8.3L(133J^2 - 384K) + 2^4.5JK(125J^2 - 384K), \\ B &= 2^{12}.3^2JL^2 - 2^9KL(149J^2 - 384K) - 2^5JK^2(125J^2 - 384K), \\ C &= -2^{17}.3^3L^3 - 2^{13}JL^2(2J^2 + 27K) \\ &\quad + 2^7K^2L(49J^2 + 128K) + 2^3JK^3(75J^2 + 1408K), \\ D &= -2^{17}.3L^3(2J^2 - 3K) + 2^{12}.101JK^2L^2 \\ &\quad + 2^7K^3L(95J^2 - 128K) - 2^3.5JK^4(J^2 + 128K), \\ E &= -2^{18}.3^2JL^4 + 2^{14}KL^3(J^2 + 18K) + 2^{12}.3JK^3L^2 \\ &\quad - 2^4KL(25J^2 + 128K) + JK^5(J^2 + 128K). \end{aligned}$$

La syzygie (59) montre de nouveau que W devient, lorsque le discriminant de U est nul, la quatrième puissance du facteur double de U.

Si l'on suppose que l'invariant $16L - JK$ soit nul, tous les coefficients A, B, ... deviennent divisibles par $J^2 - 3K$, en même temps que I^2 qui se réduit à

$$\frac{JK^2(J^2 - 3K)(J^2 - 128K)}{2^{12}};$$

et la syzygie (59) devient

$$\begin{aligned} I^2K\varpi &= 2^6p'''^4 - 2^5Kpp'''^3 - K(J^2 + 16K)p^2p''^2 \\ &\quad - \frac{K^2}{4}(3J^2 - 32K)p^3p''' - \frac{J^2K^3}{8}p^4. \end{aligned}$$

En même temps la syzygie (57) devient

$$I^2t = p'''^3 - Kpp'''^2 - \frac{K(J^2 - 16K)}{64}p^2p''' - \frac{J^2K^2}{256}p^3.$$

D'où l'on déduit immédiatement

$$K\varpi = 32t(2p''' + Kp),$$

relation qui concorde avec les résultats trouvés au nº **16**, et fournit une expression simple du quotient de W par le covariant canonique T, lorsque $16L - JK = 0$.

SOUS-DISCRIMINANT DE LA FORME SEXTIQUE.

17. Soit la forme générale U du sixième ordre,

$$\begin{aligned} U = ax^6 + 6bx^5y + 15cx^4y^2 + 20\,dx^3y^3 \\ + 15ex^2y^4 + 6fxy^5 + gy^6. \end{aligned}$$

J'ai donné dans les *Comptes rendus* (t. XCVI, 1883, p. 1717, 1776 et 1842) les résultats de l'application à la forme du sixième ordre des mêmes méthodes que j'avais employées pour celle du cinquième et qui ont été utilisées dans les paragraphes précédents. Je vais rappeler sommairement ici ces résultats.

La forme sextique possède en tout 26 invariants et covariants distincts (y compris la forme elle-même) dont voici le Tableau :

	Formes droites.	Formes gauches.
5 invariants......................	A(2), B(4), C(6), D(10)	E(15)
6 covariants quadratiques.........	S(3), S′(5), S″(7)	S‴(8), S$^{\text{IV}}$(10), S$^{\text{V}}$(12)
5 covariants biquadratiques.......	Q(2), Q′(4)	Q″(5), Q‴(7), Q$^{\text{IV}}$(9)
5 covariants sextiques............	U(1), U′(3)	U″(4), U‴(6), U$^{\text{IV}}$(6)
3 covariants du huitième ordre.....	H(2)	H′(3), H″(5)
1 covariant du dixième ordre......	»	P(4)
1 covariant du douzième ordre.....	»	N(3)

Soit 12 formes droites dont 4 invariants, et 14 formes gauches dont 1 invariant (le nombre entre parenthèses à droite de chaque lettre indique le degré de la forme correspondante par rapport aux coefficients de U).

Les sources des 6 covariants principaux (associés de U) sont données par les formules suivantes :

$$(60)\quad \begin{cases} u = a, \\ h = ac - b^2, \\ n = a^2 d - 3abc + 2b^3, \\ q = ae - 4bd + 3c^2, \\ h' = a^2 f - 5abe + 2acd + 8b^2 d - 6bc^2, \\ \mathrm{A} = ag - 6bf + 15ce - 10d^2. \end{cases}$$

Les autres péninvariants et invariants droits se déduisent des précédents par les relations

$$(61)\quad \begin{cases} u^3 u' = u^2 hq - n^2 - 4h^3, \\ u^2 q' = 12uu'q + h'^2 + 4hq^2, \\ u^3 s = u^2(\mathrm{A}h + 2q^2) - 18uhu' - 3nh' - 12h^2 q, \\ 3u^2\mathrm{B} = u(3\mathrm{A}u' - 2qs) + q^3 - 27u'^2 + h(2\mathrm{A}q - 3q'), \\ 3us' = -u\mathrm{A}s + (\mathrm{A}^2 - 36\mathrm{B})h + 36u's + q(3q' - 4\mathrm{A}q), \\ 3u\mathrm{C} = -4u\mathrm{AB} + (\mathrm{A}^2 - 36\mathrm{B})u' - qs' + s(3\mathrm{A}q - 4q'), \\ us'' = u'(3s' - \mathrm{A}s) + q'(2\mathrm{A}q - q') + (4\mathrm{B} - \mathrm{A}^2)q^2, \\ u\mathrm{D} = 3(\mathrm{B}q - s^2)s' + (q' - \mathrm{A}q)s'' + (\mathrm{A}s^2 + 4\mathrm{B}q')s \\ \qquad - (4\mathrm{C} + 9\mathrm{AB})qs + (\mathrm{A}^2\mathrm{B} + 3\mathrm{AC} + 108\mathrm{B}^2)u', \end{cases}$$

et les autres péninvariants et invariants gauches par les relations

$$(62)\quad \begin{cases} up = hh' - nq, \\ uh'' = 3h'u' - 2pq, \\ u^2 u'' = u(\mathrm{A}n - h'q) + 12hp - 18nu', \\ uq'' = u''q - h's, \\ uu^{\mathrm{IV}} = 2ps - 3u'u'', \\ uu''' = 4ps + 2h''q + (q' - \mathrm{A}q)h' - 6u'u'', \\ uq''' = (\mathrm{A}u'' + 2u''')q - h's', \end{cases}$$

$$(62)\quad \left\{\begin{aligned} uq^{\text{IV}} &= \tfrac{4}{3}\mathrm{A}(h's' - u''q') - h''s' - u'''q', \\ us''' &= (\mathrm{A}u'' + 2u''')s - u''s', \\ us^{\text{IV}} &= (4\mathrm{B}s - s'')u'' + \tfrac{2}{3}(\mathrm{A}u^{\text{IV}} + 5q''s)s, \\ us^{\text{V}} &= (4\mathrm{B}s' - \mathrm{A}s'')u'' - 2u'''s'' \\ &\quad + \tfrac{2}{3}(\mathrm{A}u^{\text{IV}} + 5q''s)s', \\ u\mathrm{E} &= (\mathrm{A}s^2 - 2ss' - 2\mathrm{B}q' - \mathrm{C}q)s''' \\ &\quad + 2(2\mathrm{B}q - s^2)s^{\text{IV}} + (q' - \mathrm{A}q)s^{\text{V}}. \end{aligned}\right.$$

Les relations (61) et (62) deviennent des syzygies, quand on y remplace les péninvariants par les covariants correspondants. Il existe d'ailleurs entre les formes droites d'autres syzygies qui se déduisent des précédentes par des éliminations faciles, et dont voici les plus importantes :

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &(12\mathrm{A}q - 9q')u' - 4q^2s + (\mathrm{A}s - 3s')h - u(s^2 + 12\mathrm{B}q) = 0, \\ &3u'(s' - \mathrm{A}s) + q(3s^2 + 4\mathrm{B}q) - (3\mathrm{C} + 4\mathrm{AB})h + 4u\mathrm{B}s = 0, \\ &q(s'' - \mathrm{A}s') + q'(s' - \mathrm{A}s) + (\mathrm{A}^2 - 8\mathrm{B})qs \\ &\qquad + 3(3\mathrm{C} + 4\mathrm{AB})u' - u(\mathrm{AC} + \mathrm{A}^2\mathrm{B} + 12\mathrm{B}^2) = 0, \\ &hs'' + u's^2 + (\mathrm{A}q - q')(2qs - \mathrm{A}u') - u(\mathrm{C}q + \mathrm{B}q') = 0, \\ &u'(3s'' - \mathrm{A}s' + 12\mathrm{B}s) + (\mathrm{C} + 4\mathrm{AB})q^2 + qs(s' - \mathrm{A}s) \\ &\qquad + q'(s^2 - 4\mathrm{B}q) + u[\mathrm{B}s' + (\mathrm{C} + \mathrm{AB})s] = 0, \\ &s'^2 - 4ss'' - 4\mathrm{B}s^2 - 4(\mathrm{AC} + \mathrm{A}^2\mathrm{B} + 12\mathrm{B}^2)q \\ &\qquad + (3\mathrm{C} + 4\mathrm{AB})q' = 0, \\ &\mathrm{A}s'^2 - 4s's'' - 16\mathrm{B}ss' - 4(\mathrm{AB} + \mathrm{C})s^2 \\ &\qquad + 4(\mathrm{D} - 3\mathrm{BC} - 4\mathrm{AB}^2)q - (\mathrm{AC} + 48\mathrm{B}^2)q' = 0, \\ &s''^2 - \mathrm{B}s'^2 + (\mathrm{AC} + \mathrm{A}^2\mathrm{B} + 8\mathrm{B}^2)s^2 - 2(\mathrm{C} + \mathrm{AB})ss' \\ &\qquad + (48\mathrm{B}^3 - 3\mathrm{C}^2 - 9\mathrm{ABC} - 8\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2 - \mathrm{AD})q \\ &\qquad + (\mathrm{D} + 4\mathrm{AB}^2 + 3\mathrm{BC})q' = 0. \end{aligned}\right.$$

Enfin le discriminant de la forme U s'exprime en fonction des quatre invariants fondamentaux A, B, C, D, par la formule

$$(64)\quad \Delta = \mathrm{A}^5 - 375\mathrm{A}^3\mathrm{B} - 25000\mathrm{AB}^2 - 625\mathrm{A}^2\mathrm{C} - 46875\mathrm{BC} + 3125\mathrm{D}.$$

18. Pour obtenir le sous-discriminant de U, il suffit d'appliquer l'opérateur ζ_2, qui est ici

$$\zeta_2 = a\frac{\partial}{\partial c} + 3b\frac{\partial}{\partial d} + 6c\frac{\partial}{\partial e} + 10d\frac{\partial}{\partial f} + 15e\frac{\partial}{\partial g}$$

aux péninvariants principaux définis par les formules (60), puis aux relations successives (61), enfin à la relation (64), en utilisant au besoin les relations (61) et (63). On trouve ainsi successivement

$$\begin{aligned}
&\zeta_2(u) = 0,\\
&\zeta_2(h) = u^2,\\
&\zeta_2(n) = 0,\\
&\zeta_2(q) = 12h,\\
&\zeta_2(h') = 12n,\\
&\zeta_2(A) = 30q,\\
&\zeta_2(u') = uq,\\
&\zeta_2(q') = 8(Ah + 4q^2 - us),\\
&\zeta_2(s) = uA + 18u',\\
&\zeta_2(B) = Aq - q',\\
&\zeta_2(s') = 30Au' - 22qs - 36uB,\\
&\zeta_2(C) = 12(s^2 - 2Bq),\\
&\zeta_2(s'') = 3u(5C + 4AB) + 2(A^2 + 36B)u' + (36q' - 40Aq)s,\\
&\zeta_2(D) = (22A^2B + 27AC + 600B^2)q\\
&\qquad\qquad + 3(A^2 + 20B)s^2 - 6Ass' - (15C + 28AB)q' - 15s'^2,
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\zeta_2(\Delta) = 75\{&5(A^3 + 400AB + 375C)q' - [3A^3 + 2500(C + AB)]Aq\\
&+ 25(A^2 - 300B)s^2 - 250Ass' - 2500ss''\}.
\end{aligned}$$

En supprimant le facteur numérique 75, et tenant compte de la sixième syzygie (63), on peut donner au sous-discriminant W de la forme sextique diverses expressions équivalentes en fonction des invariants et covariants de U; par exemple celle-ci :

$$(65)\quad \begin{cases} \mathrm{W} = 25(\mathrm{A}^2 - 200\mathrm{B})\mathrm{S}^2 - 250\mathrm{A}\mathrm{S}\mathrm{S}' - 625\mathrm{S}'^2 \\ \qquad - 3(\mathrm{A}^4 - 10000\mathrm{B}^2)\mathrm{Q} + 5\mathrm{A}(\mathrm{A}^2 - 100\mathrm{B})\mathrm{Q}', \end{cases}$$

$$(66)\quad \begin{cases} \mathrm{W} = (\mathrm{A}^2 - 100\mathrm{B})[50\mathrm{S}^2 - 3(\mathrm{A}^2 + 100\mathrm{B})\mathrm{Q} + 5\mathrm{A}\mathrm{Q}'] \\ \qquad - 25(\mathrm{AS} + 5\mathrm{S}')^2. \end{cases}$$

On voit que le sous-discriminant ne dépend explicitement que des deux premiers invariants A, B, des deux premiers covariants quadratiques S, S′, et des deux premiers covariants biquadratiques Q et Q′. L'expression (66) montre, en outre, que lorsque l'invariant composé $\mathrm{A}^2 - 100\mathrm{B}$ est nul, le sous-discriminant devient un carré parfait. On sait d'ailleurs que cet invariant s'annule en même temps que le discriminant Δ, lorsque U admet un facteur triple; dans cette hypothèse, W doit s'annuler identiquement : il faut donc que $\mathrm{AS} + 5\mathrm{S}'$ s'annule aussi identiquement. C'est ce que l'on vérifie aisément en supposant que l'on ait pris pour y le facteur triple : e, f, g sont nuls; les formules (60), (61) et (62) permettent de calculer les divers péninvariants en fonction de a, b, c, d; comme on a, d'ailleurs, d'une manière générale, en ramenant U à sa forme-type,

$$\mathrm{S} = sx^2 + u''xy + [u(\mathrm{A}q - q') - hs]y^2,$$
$$\mathrm{S}' = s'x^2 + (\mathrm{A}u'' + 2u''')xy + [2u(2\mathrm{B}q - s^2) - hs']y^2,$$

il est aisé de s'assurer que

$$\mathrm{A}s + 5s', \qquad 3\mathrm{A}u''' + 5u''', \qquad (\mathrm{A}^2 + 20\mathrm{B})q - \mathrm{A}q' - 10s^2,$$

sont nuls, et que, par suite, $\mathrm{AS} + 5\mathrm{S}'$ s'évanouit bien identiquement.

Je ne pousserai pas plus loin ici l'étude du sous-discriminant de la forme sextique, étude qui, pour être complète, exigerait des développements étendus, et dont je me propose de faire le sujet d'un travail ultérieur.