JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. HUMBERT

Théorie générale des surfaces hyperelliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9 (1893), p. 29-170.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1893_4_9__29_0>

Théorie générale des surfaces hyperelliptiques [1];

PAR M. G. HUMBERT.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS.

Introduction.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude des surfaces remarquables, introduites dans la Science par M. Picard, et pour lesquelles les coordonnées non homogènes d'un point quelconque peuvent s'exprimer en fonction uniforme, quadruplement périodique, de deux paramètres.

Pour abréger le discours, nous désignerons ces surfaces sous le nom de *surfaces hyperelliptiques*, qui rappelle leur propriété fondamentale.

Les travaux de M. Poincaré sur les zéros communs à plusieurs fonctions abéliennes thêta sont, avec ceux de M. Picard sur les surfaces qui nous occupent, la base de nos recherches.

Notre Mémoire, après un Chapitre consacré à des généralités, est divisé en deux Sections principales : la première est relative à la sur-

---

(1) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Prix Bordin, 1892).

face de Kummer; la seconde aux surfaces hyperelliptiques en général.

La surface de Kummer a déjà été l'objet de travaux nombreux et importants, en Allemagne surtout. Nous n'avons pas prétendu en faire une étude complète, en réunissant et en reliant les résultats obtenus par nos devanciers; nous nous sommes borné à lui appliquer les méthodes dont nous faisons usage dans la suite pour les surfaces hyperelliptiques générales : c'est ainsi que nous avons laissé systématiquement de côté les questions qui se rapportent à la surface de Kummer considérée comme surface des singularités de complexes du second ordre, ou comme surface focale de congruences rectilignes. De même, bien que nos méthodes fussent facilement applicables à ce problème, nous n'avons pas parlé des quinze transformations linéaires de la surface en elle-même.

Ce que nous avons eu surtout en vue, c'est l'étude des courbes tracées sur la surface de Kummer et celle des propriétés des surfaces qui passent par ces courbes.

Nous commençons par établir la relation qui existe entre les fonction thêta et les courbes tracées sur la surface de Kummer, et nous démontrons, à ce point de vue, un théorème fondamental (n° 16), qui domine toute la théorie; on en déduit, en particulier, que toutes les courbes tracées sur la surface sont d'ordre pair et que, le long de chacune d'elles, on peut inscrire à la surface de Kummer une surface algébrique ne coupant pas la surface proposée en dehors de la courbe considérée.

Avant de pousser plus loin cette étude, nous donnons un nouvel algorithme, qui nous paraît simple et utile, pour représenter les seize points et les seize plans singuliers; nous en faisons ensuite quelques applications, soit à des problèmes déjà résolus, soit à des problèmes nouveaux, sur certains groupements remarquables des seize coniques de la surface.

Viennent ensuite la classification et la détermination des courbes d'un degré donné qu'on peut tracer sur la surface de Kummer; nous parvenons, sur ce sujet, à des propositions nouvelles remarquablement simples et qui reposent sur ce théorème :

Une courbe quelconque devient l'intersection complète *de la sur-*

face avec une surface algébrique si on lui adjoint 0, 1, 2, 3 *ou* 4 *coniques de la surface de Kummer.*

Ces principes posés, nous étudions avec détails les courbes de degrés 4, 6, 8 et les surfaces inscrites le long de ces courbes, dont les degrés sont 2, 3, 4.

MM. Darboux et Rohn ont établi que la surface de Kummer admet trente séries de quadriques inscrites; nous complétons leurs recherches en étudiant les relations qui existent entre une de ces séries et les vingt-neuf autres; pour les surfaces inscrites d'ordre trois ou quatre, nous donnons une théorie très complète qui conduit à des résultats géométriques simples.

Les Chapitres suivants se rapportent à l'étude des sections de la surface par ses plans tangents : c'est pour nous l'occasion de faire connaître et d'appliquer des formules analytiques importantes, dont plusieurs appartiennent à M. Klein et sont établies ici par une voie nouvelle.

Après un Chapitre consacré aux relations qui lient la surface de Kummer à sa réciproque, nous passons à l'examen du *genre* des courbes tracées sur la surface et à celui des propriétés qui se rattachent à la notion de genre; pour terminer nous étudions des courbes remarquables que nous appelons *univoques,* et qui possèdent d'importantes propriétés géométriques.

La surface de Kummer occupe, parmi les surfaces hyperelliptiques, une place particulière, non seulement parce qu'elle est la plus simple, mais surtout parce que, à un de ses points, correspondent *deux* couples d'arguments hyperelliptiques. Les surfaces les plus générales ne possèdent évidemment pas cette propriété : aussi leurs caractères fondamentaux sont-ils différents de ceux de la surface de Kummer.

Cinq Chapitres sont consacrés à l'étude de ces surfaces et des courbes qu'on peut tracer sur elles; le plus important est celui où se trouve établie la liaison entre les fonctions hyperelliptiques et les surfaces adjointes à une surface donnée.

Grâce à cette liaison, qui est la généralisation directe de notre théorème *fondamental* pour la surface de Kummer, nous donnons un certain nombre de résultats géométriques se rapportant au nombre des surfaces adjointes, aux surfaces adjointes de contact, aux sections planes, etc.

Les deux derniers Chapitres de cette Section font connaître quelques familles de surfaces et quelques surfaces hyperelliptiques remarquables; nous signalerons, en particulier, une intéressante surface d'ordre huit.

La dernière Partie du Mémoire, fort courte, se rapporte aux surfaces hyperelliptiques telles qu'à chacun de leurs points correspondent deux couples d'arguments : ces surfaces sont représentables point par point sur la surface de Kummer.

Nous donnons un procédé simple pour trouver celles d'entre elles qui sont du quatrième ordre, et à titre d'exemple, nous étudions le lieu des sommets des cônes du second ordre passant par six points, surface remarquable, déjà examinée par plusieurs auteurs et dont M. Darboux, le premier, a signalé la liaison avec la surface de Kummer.

Généralités.

1. Nous appellerons *surface hyperelliptique* toute surface telle que les coordonnées x, y, z d'un de ses points puissent s'exprimer par des fonctions uniformes de deux paramètres ayant quatre paires de périodes.

M. Appell a établi [1], ce qu'on déduit d'ailleurs d'un théorème célèbre de MM. Poincaré et Picard, qu'on peut mettre x, y, z sous la forme

$$x = \frac{\theta_1(u,v)}{\theta_0(u,v)}, \qquad y = \frac{\theta_2(u,v)}{\theta_0(u,v)}, \qquad z = \frac{\theta_3(u,v)}{\theta_0(u,v)},$$

les fonctions θ_h étant uniformes, et vérifiant les relations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\theta_h(u+2\pi i, v) = \theta_h(u, v+2\pi i) = \theta_h(u,v)\\ &\theta_h(u+a, v+b) = e^{-mu+\alpha}\theta_h(u,v)\\ &\theta_h(u+b, v+c) = e^{-mv+\beta}\theta_h(u,v). \end{aligned}\right\} \quad (h = 0, 1, 2, 3).$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VII, p. 211.

Dans ces formules, a, b, c, α, β sont des constantes et *m désigne un entier*. Les quatre paires de périodes de x, y, z sont

$$2\pi i, 0; \quad 0, 2\pi i; \quad a, b; \quad b, c.$$

De plus, la partie réelle de $ac - b^2$ doit être positive, pour la convergence des séries obtenues en développant $\theta_h(u, v)$ suivant les puissances de e^u et e^v; quant à l'entier m, il est positif ou négatif selon que la partie réelle de a est négative ou positive.

Dans tout ce qui suit nous supposerons, pour fixer les idées, que la partie réelle de a est négative, et par suite que m est positif.

Nous appellerons *fonctions thêta d'ordre m* les fonctions qui vérifient des relations de la forme (1); nous dirons que deux fonctions thêta de même ordre ont *mêmes multiplicateurs* si α et β sont les mêmes, dans les relations (1), pour ces deux fonctions.

2. On peut préciser davantage la forme des fonctions thêta qui figurent dans l'expression de x, y, z. Soient en effet λ et μ des constantes, posons

$$\theta_h(u+\lambda, v+\mu) = \Theta_h(u, v),$$

on aura

$$\begin{aligned}
\Theta_h(u+2\pi i, v) &= \Theta(u, v+2\pi i) = \Theta_h(u, v),\\
\Theta_h(u+a, v+b) &= e^{-mu+\alpha-m\lambda}\,\Theta_h(u, v),\\
\Theta_h(u+b, v+c) &= e^{-mv+\beta-m\mu}\,\Theta_h(u, v),
\end{aligned}$$

on pourra toujours déterminer λ et μ de manière à vérifier les conditions

$$\alpha - m\lambda = -\tfrac{1}{2}ma, \qquad \beta - m\mu = -\tfrac{1}{2}mc,$$

et l'on aura finalement

$$(2)\qquad \begin{cases}
\Theta_h(u+2\pi i, v) = \Theta_h(u, v+2\pi i) = \Theta_h(u, v),\\
\Theta_h(u+a, v+b) = e^{-mu-\frac{ma}{2}}\,\Theta_h(u, v)\\
\Theta_h(u+b, v+c) = e^{-mv-\frac{mc}{2}}\,\Theta_h(u, v).
\end{cases}$$

Nous dirons que les fonctions $\Theta(u, v)$, qui satisfont à des relations de cette forme, sont des fonctions thêta, d'ordre m, *normales, à caractéristique nulle.*

Plus généralement, si une fonction $\Theta(u, v)$ satisfait aux relations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \Theta(u+2\pi i, v) &= e^{\omega\pi i}\Theta(u, v),\\ \Theta(u, v+2\pi i) &= e^{\omega'\pi i}\Theta(u, v),\\ \Theta(u+a, v+b) &= e^{\theta\pi i}\, e^{-mu-\frac{ma}{2}}\Theta(u, v),\\ \Theta(u+b, v+c) &= e^{\theta'\pi i}\, e^{-mv-\frac{mc}{2}}\Theta(u, v), \end{aligned}\right.$$

où ω, ω', θ, θ' sont des nombres égaux à 0 ou à 1, nous dirons que cette fonction est une fonction Θ (ou thêta) d'ordre m, *normale, et que sa caractéristique est* $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

Les fonctions de caractéristique nulle sont celles pour lesquelles ω, ω', θ, θ' sont tous nuls.

Il y a seize valeurs pour la caractéristique; il y a donc seize systèmes de fonctions Θ normales.

3. Avant de commencer l'étude des surfaces hyperelliptiques, nous ferons connaître quelques propriétés des fonctions Θ normales, sur lesquelles nous aurons souvent à nous appuyer.

Une fonction Θ développée, par la formule de Fourier, en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de e^u et e^v, est de la forme

$$\Theta(u, v) = \sum_{\nu}\sum_{\varpi} A_{\nu\varpi}\, e^{\nu u+\varpi v},$$

la double sommation s'étendant aux valeurs entières de ν et ϖ, de $-\infty$ à $+\infty$ et les coefficients $A_{\nu\varpi}$ étant indépendants de u et v. En écrivant que cette fonction satisfait aux relations (3), on trouve, par un calcul facile et bien connu, qu'elle est fonction linéaire et homogène, à coefficients constants quelconques, des m^2 fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ ainsi définies

$$\Theta_{p,q}(u, v) = \sum_{\rho}\sum_{\sigma} e^{\left(p+\frac{\omega}{2}+m\rho\right)u+\left(q+\frac{\omega'}{2}+m\sigma\right)v}\, e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')}\, e^{\frac{1}{2m}\varphi\left(p+\frac{\omega}{2}+m\rho,\; q+\frac{\omega'}{2}+m\sigma\right)}.$$

Dans le second membre, la double sommation s'étend aux valeurs entières de ρ et σ, de $-\infty$ à $+\infty$; p et q désignent deux entiers quelconques de la série $0, 1, \ldots, m-1$; $\varphi(x, y)$ est la fonction

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

En donnant à p et q tous les systèmes de valeurs dont ils sont susceptibles, on trouve bien m^2 fonctions $\Theta_{p,q}$: toute fonction thêta normale, d'ordre m, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ pourra s'exprimer en fonction linéaire et homogène de ces m^2 fonctions.

4. Il est intéressant, pour ce qui suit, de chercher ce que deviennent les fonctions $\Theta_{p,q}$ quand on y change simultanément les signes de u et de v.

Examinons d'abord, à part, le cas où la caractéristique est nulle : $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

La formule qui donne $\Theta_{p,q}(u, v)$ montre tout d'abord que, si l'on change u et v en $-u$, $-v$, on obtient le même résultat qu'en laissant u et v inaltérés et en changeant simultanément les signes de p, q, ρ, σ : comme ρ et σ varient de $-\infty$ à $+\infty$, on n'altère pas $\Theta_{p,q}$ en changeant ρ en $-\rho$ et σ en $-\sigma$; par suite, on a

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{-p,-q}(u, v).$$

D'ailleurs il est clair que $\Theta_{p,q}$ ne change pas si l'on augmente p ou q de multiples de m; donc

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{m-p,m-q}(u, v).$$

Si m est impair, les deux fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ et $\Theta_{m-p,m-q}(u, v)$ seront toujours distinctes, hors le cas où p et q sont nuls à la fois : il résulte de cette remarque et de la relation précédente :

1° Que la fonction $\Theta_{00}(u, v)$ et les $\frac{1}{2}(m^2-1)$ fonctions

$$\Theta_{p,q}(u, v) + \Theta_{m-p,m-q}(u, v)$$

sont *paires*, c'est-à-dire ne changent pas si l'on remplace u et v par $-u$, $-v$;

2° Que les $\frac{1}{2}(m^2-1)$ fonctions

$$\Theta_{p,q}(u,v)-\Theta_{m-p,m-q}(u,v)$$

sont *impaires*.

Si m est pair, les deux fonctions $\Theta_{p,q}(u,v)$ et $\Theta_{m-p,m-q}(u,v)$ coïncideront pour les quatre système de valeurs

$$p=0,\quad q=0;\qquad p=0,\quad q=\frac{m}{2};$$
$$p=\frac{m}{2},\quad q=0;\qquad p=\frac{m}{2},\quad q=\frac{m}{2},$$

et, par suite, les quatre fonctions $\Theta_{p,q}(u,v)$ correspondantes sont paires.

Les m^2-4 autres fonctions $\Theta_{p,q}$, groupées deux à deux comme plus haut, donnent $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions impaires.

Ainsi :

Si m est pair, les fonctions thêta d'ordre m, de caractéristique nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions impaires.

Si m est impair, elles s'expriment en fonction de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires.

En particulier : *les fonctions d'ordre deux, de caractéristique nulle, sont toutes paires.*

5. Considérons maintenant le cas des fonctions normales de caractéristique quelconque, non nulle, $\begin{vmatrix}\omega & \omega' \\ \theta & \theta'\end{vmatrix}$.

Si dans $\Theta_{p,q}(u,v)$ on change u et v en $-u$, $-v$ on voit aisément que cela revient à laisser u et v inaltérés et à changer p et q en $-p-\omega$

et $-q-\omega'$; d'ailleurs changer p en $p+m$ revient à changer ρ en $\rho+1$, et, par suite, à multiplier $\Theta_{p,q}$ par $e^{\pi i\theta}$; de même, changer q en $q+m$ revient à multiplier la fonction par $e^{\pi i\theta'}$: donc on a, en désignant par ε, ε' deux quantités égales à 0 ou à 1, à volonté,

$$\Theta_{p,q}(-u,-v)=\Theta_{\varepsilon m-p-\omega,\varepsilon' m-p-\omega'}(u,v)\,e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon'\theta')}.$$

Il résulte de cette relation que :

1° Si m est pair et si ω, ω' ne sont pas nuls à la fois, les indices p et q ne peuvent jamais devenir respectivement égaux à $\varepsilon m-p-\omega$ et $\varepsilon' m-p-\omega'$, quels que soient ε et ε'; en ce cas, aucune des fonctions $\Theta_{p,q}$ n'est paire ou impaire, et la formule précédente montre qu'en associant deux à deux ces fonctions, on obtient $\frac{m^2}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^2}{2}$ fonctions impaires.

2° m étant toujours pair, et ω, ω' étant nuls tous deux, les quatre fonctions Θ_{00}, $\Theta_{\frac{m}{2},0}$, $\Theta_{0,\frac{m}{2}}$, $\Theta_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}}$ sont paires ou impaires. La première est toujours paire; la deuxième, la troisième et la quatrième sont respectivement paires ou impaires, selon que les nombres θ, θ', $\theta+\theta'$ sont pairs ou impairs : comme θ et θ' ne sont pas nuls à la fois, la caractéristique étant supposée non nulle, deux des quatre fonctions précédentes seront paires, les deux autres seront impaires; les m^2-4 autres fonctions $\Theta_{p,q}$, combinées deux à deux comme plus haut, donnent $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions paires et autant de fonctions impaires.

3° Si m est impair, on pourra satisfaire aux relations

$$p=\varepsilon m-p-\omega; \qquad p=\varepsilon' m-q-\omega',$$

d'une seule manière, en posant

$$p=\frac{\omega(m-1)}{2}, \qquad \varepsilon=\omega',$$

$$q=\frac{\omega'(m-1)}{2}, \qquad \varepsilon'=\omega.$$

Il y aura, pour ces valeurs de p et q, une fonction $\Theta_{p,q}$ qui sera paire ou impaire, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ sera pair ou impair. Les autres fonctions $\Theta_{p,q}$, combinées deux à deux, donnent $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions paires et autant de fonctions impaires.

En résumé :

Si m est pair, les fonctions Θ normales, d'ordre m, de caractéristique donnée $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, non nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2}{2}$ fonctions impaires.

Si m est impair, elles s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires, ou de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions impaires, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair ou impair.

6. En particulier, si m est égal à 1, il résulte, des considérations précédentes, qu'il y a une seule fonction Θ normale, d'ordre 1, ayant une caractéristique donnée; parmi les seize fonctions d'ordre 1 ainsi définies, dix sont paires et six impaires. Les fonctions paires sont celles pour lesquelles $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair; pour les fonctions impaires, $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair.

Nous emploierons, pour représenter les fonctions normales du premier ordre, qui sont les seize fonctions hyperelliptiques bien connues, le caractère $\mathfrak{S}$.

7. Pour compléter ces résultats, nous allons montrer que les fonctions Θ normales paires ou impaires s'annulent pour certaines valeurs remarquables de u et de v.

Considérons un couple de périodes simultanées de u et de v,

$$\alpha = 2h\pi i + \lambda a + \mu b,$$
$$\beta = 2k\pi i + \lambda b + \mu c,$$

h, k, λ, μ étant des entiers.

On a, en désignant par $\theta(u, v)$ une fonction normale, d'ordre m, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$,

$$\theta(u+\alpha, v+\beta) = \theta(u, v) e^{\pi i(h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta') - m\lambda u - m\mu v - m\lambda\frac{a}{2} - m\mu\frac{c}{2} - m\lambda\mu b - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}ma - \frac{\mu(\mu-1)}{2}mc}.$$

Faisons dans cette relation $u = -\frac{\alpha}{2}$, $v = -\frac{\beta}{2}$; il vient

$$(4) \qquad \theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \theta\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) e^{m\pi i(\lambda h + \mu k) + \pi i(h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta')}.$$

Cette relation montre, si $\theta(u, v)$ est pair, que $\theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ sera nul quand la quantité $m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$ sera impaire; et, si $\theta(u, v)$ est impair, que $\theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ sera nul quand la même quantité sera paire.

Il en résulte tout d'abord que, parmi les fonctions θ normales, d'ordre et de caractéristique donnés, toutes celles qui sont paires, ou bien toutes celles qui sont impaires, s'annulent pour *une demi-période donnée* $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$; en second lieu, la parité ou l'imparité du nombre

$$(5) \qquad m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$$

ne pouvant dépendre, quand ω, ω', θ, θ', h, k, λ, μ sont donnés, que de la parité ou de l'imparité de m, on voit que si une fonction θ, normale, paire (ou impaire), d'ordre m, s'annule pour une demi-période, toutes les fonctions paires (ou impaires) de même caractéristique, et dont l'ordre est de même parité que m, s'annuleront pour la même demi-période.

Il suffit donc d'étudier successivement le cas de m pair, et celui de m impair. Or on voit sans difficulté, à l'aide de la formule (4), que :

Si l'ordre m est pair

1° *Les fonctions normales, paires, de caractéristique nulle, ne s'annulent simultanément pour aucune demi-période;*

2° *Les fonctions normales, impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les seize demi-périodes ;*

3° *Les fonctions normales paires, de même caractéristique non nulle, s'annulent pour huit demi-périodes, et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les huit autres demi-périodes.*

Si l'ordre m est impair,

Les fonctions normales, paires, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, *s'annulent pour six ou dix demi-périodes, et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les dix ou six autres demi-périodes, selon que* $\omega\theta + \omega'\theta'$ *est pair ou impair.*

Dans ce dernier cas (m impair), la quantité

$$m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$$

a la même parité que la quantité

$$\lambda h + \mu k + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta',$$

qui peut s'écrire

$$(h+\theta)(\lambda+\omega) + (k+\theta')(\lambda+\omega') - \omega\theta - \omega'\theta'.$$

En particulier, pour $m = 1$, la fonction $\mathfrak{S}(u, v)$, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ s'annulera pour la demi-période

$$h\pi i + \lambda\frac{a}{2} + \mu\frac{b}{2}, \qquad k\pi i + \lambda\frac{b}{2} + \mu\frac{c}{2},$$

si l'on a

$$(6) \qquad (h+\theta)(\lambda+\omega) + (k+\theta')(\mu+\omega') \equiv 1 \pmod 2$$

et l'on en déduit qu'une fonction $\mathfrak{S}$ s'annule pour six demi-périodes.

On vérifie, inversement, qu'une même demi-période annule six fonctions $\mathfrak{S}$.

8. Établissons enfin une proposition générale, applicable à toutes les surfaces hyperelliptiques.

D'après le n° 2, les coordonnées homogènes des points d'une surface hyperelliptique, S, peuvent se mettre sous la forme

$$\rho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité et les Θ_i des fonctions thêta normales de même ordre, de caractéristique nulle.

Proposons-nous de chercher la forme de l'équation qui lie u et v le long d'une courbe algébrique quelconque tracée sur S, c'est-à-dire *l'équation hyperelliptique* de cette courbe.

Soit C une courbe algébrique indécomposable sur S; nous pouvons évidemment mener par cette courbe deux surfaces algébriques de même degré, S_1 et S_2, telles que les trois surfaces S, S_1, S_2 n'aient pas d'autre courbe commune que la courbe C; S_1 et S_2 peuvent être, par exemple, les cônes qui projettent C à partir de deux points quelconques de l'espace.

Dans les premiers membres des équations de S_1 et S_2, remplaçons x_1, x_2, x_3, x_4 par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_4(u, v)$, et désignons par $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ les résultats de ces substitutions.

La fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ sera une fonction uniforme, quadruplement périodique de u et v; d'après un théorème connu de M. Poincaré [1], elle pourra se mettre sous la forme $\frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_2(u, v)}$, les fonctions $\varphi_1(u, v)$ et $\varphi_2(u, v)$ étant uniformes, entières, et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ est indéterminée.

Les arguments u, v d'un point de la courbe C annulent $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$, d'après la définition même des deux fonctions; mais, en général, le point u, v n'est pas un point d'indétermination de la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$. En effet, si $u + du$, $v + dv$ est un point infiniment voisin du

---

(1) *Acta mathematica*, t. II.

point (u, v), sur la courbe C, on a

$$du \frac{\partial f_1}{\partial u} + dv \frac{\partial f_1}{\partial v} = 0,$$

$$du \frac{\partial f_2}{\partial u} + dv \frac{\partial f_2}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre qu'au point (u, v) le déterminant

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} \frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{\partial f_2}{\partial u}$$

s'annule, et, par conséquent, qu'en ce point la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ n'est pas indéterminée.

Il en résulte que les deux fonctions $\varphi_1(u, v)$ et $\varphi_2(u, v)$ ne s'annulent pas en tous les points de la courbe C.

Or, d'après un théorème de M. Appell ([1]), l'identité

$$\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)} = \frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_2(u, v)}$$

entraîne, lorsque φ_1 et φ_2 ne s'annulent simultanément qu'aux points où le premier membre est indéterminé, la relation

$$\frac{f_1(u, v)}{\varphi_1(u, v)} = \frac{f_2(u, v)}{\varphi_2(u, v)} = G(u, v),$$

$G(u, v)$ étant une *fonction entière et uniforme de* u, v.

Les points où $G(u, v)$ s'annule sont les points (de la surface S) où $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ s'annulent simultanément, c'est-à-dire les points de la courbe C; on peut donc dire que $G(u, v) = 0$ est l'équation de cette courbe.

Mais à chaque point de S correspondent une infinité de couples d'arguments u, v différant entre eux de multiples des périodes; il faut donc que la fonction $G(u, v)$, quand on augmente u et v de périodes simultanées, se reproduise, à un facteur près. Ce facteur, devant évi-

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 183.

demment être entier ainsi que son inverse, sera de la forme $e^{g(u,v)}$, où $g(u,v)$ est une fonction entière.

Or M. Appell a montré [1] qu'une fonction $G(u,v)$, jouissant de ces propriétés, est égale au produit d'une exponentielle, $e^{\lambda(u,v)}$, où $\lambda(u,v)$ est une fonction entière, et d'une fonction entière $\Phi(u,v)$, vérifiant les relations

$$\begin{aligned}
\Phi(u+2\pi i, v) &= \Phi(u,v),\\
\Phi(u, v+2\pi i) &= e^{lu}\Phi(u,v),\\
\Phi(u+a, v+b) &= e^{lu+pv+\frac{na}{2\pi i}v+\alpha}\Phi(u,v),\\
\Phi(u+b, v+c) &= e^{l'u+p'v+\frac{nc}{2\pi i}v+\beta}\Phi(u,v),
\end{aligned}$$

où α et β sont des constantes, n, l, p, l', p' des entiers.

Ces conditions entraînent la relation

$$lb+pc+\frac{nac}{2\pi i}=l'a+p'b+\frac{nb^2}{2\pi i}+2N\pi i,$$

N étant entier.

Mais, si *nous supposons que les quantités* $2\pi i$, a, b, c, $\frac{b^2-ac}{2\pi i}$ *ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers*, il faut que la relation précédente soit une identité, c'est-à-dire qu'on ait

$$n=p=l'=0, \qquad l=p'.$$

La fonction $\Phi(u,v)$ est donc *une fonction thêta* d'ordre $-l$, aux périodes $2\pi i$, 0; 0, $2\pi i$; a, b; b, c et l'équation de la courbe considérée peut s'écrire $\Phi(u,v)=0$.

Il est clair, *réciproquement*, qu'en égalant à zéro une fonction thêta quelconque, formée avec les périodes précédentes, on obtient l'équation d'une courbe algébrique de la surface S, car le quotient de cette fonction par une fonction thêta de même ordre et de mêmes multiplicateurs est une fonction quadruplement périodique, liée,

(1) *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 196.

comme on sait, par une relation algébrique à $\frac{x_1}{x_4}$ et $\frac{x_2}{x_4}$; x_1, x_2, x_3, x_4 étant les coordonnées d'un point de S exprimées en fonction de u, v. Ainsi :

Sur une surface dont les coordonnées non homogènes s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres, u et v, à quatre paires de périodes, l'équation de toute courbe algébrique s'obtiendra en égalant à zéro une fonction thêta, formée avec les mêmes paires de périodes, et réciproquement.

Il est bien entendu, et *cette condition restrictive s'étend à tout le présent Mémoire,* que les quantités $2\pi i$, a, b, c et $\frac{ac-b^2}{2\pi i}$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers.

D'après ce qui précède (n° 2), l'équation d'une courbe algébrique quelconque sur une surface hyperelliptique pourra se mettre aussi sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

λ et μ étant des constantes, et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta normale, de caractéristique nulle.

9. *Remarque I.* — Soit $\theta(u, v)$ une fonction thêta d'ordre m, qui se décompose en un produit de deux fonctions entières, $G_1(u, v)$, $G_2(u, v)$: on voit, comme plus haut, que la première de ces fonctions est nécessairement égale au produit d'une fonction thêta, $\theta_1(u, v)$, par une exponentielle, $e^{\lambda(u,v)}$, où $\lambda(u, v)$ est une fonction entière. On a ainsi

$$\theta(u, v)=\theta_1(u, v)e^{\lambda(u,v)}G_2(u, v).$$

Cette identité montre que la fonction entière $e^{\lambda(u,v)}G_2(u, v)$ satisfait, quand on augmente u et v de périodes simultanées, aux relations qui caractérisent les fonctions thêta; c'est donc une fonction thêta, et, par suite,

Si une fonction thêta se décompose en un produit de m fonctions entières, on peut la mettre sous la forme du produit de m fonctions thêta aux mêmes périodes que la première.

10. *Remarque II.* — Si dans une fonction $\theta(u, v)$, d'ordre m, on change u et v en $-u$, $-v$, on obtient une nouvelle fonction

$$\varphi(u, v) = \theta(-u, -v),$$

qui est aussi une fonction thêta, d'ordre m.

On le voit immédiatement à l'aide des relations (1).

Cherchons dans quels cas le quotient $\dfrac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ pourra être une fonction entière.

Ce quotient est une fonction qui admet les périodes $2\pi i, 0$; $0, 2\pi i$, et qui se reproduit multiplié par une constante quand on augmente u et v des périodes a, b ou b, c; il en résulte aisément, M. Appell a d'ailleurs établi ce fait ([1]), que le quotient considéré est de la forme $Ae^{p'u+q'v}$, p' et q' désignant des entiers, et A une constante.

On a ainsi

$$\theta(u, v) = Ae^{p'u+q'v}\theta(-u, -v).$$

Si l'on change dans cette équation u, v en $-u$, $-v$, on trouve

$$\theta(-u, -v) = Ae^{-p'u-q'v}\theta(u, v),$$

d'où

$$A^2 = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad A = \pm 1.$$

Ces résultats montrent que la fonction

$$e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v}\theta(u, v)$$

est *paire ou impaire*, selon que A est égal à $+1$ ou à -1.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient $\dfrac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$, et aussi son inverse, soit une fonction entière, est que $\theta(u, v)$ soit une fonction paire ou impaire, ou le devienne quand on la multiplie par une exponentielle de la forme $e^{-\left(\frac{p'}{2}u+\frac{q'}{2}v\right)}$.

([1]) *Journal de Mathématiques*, 4^e série, t. VII, p. 195.

11. *Remarque III.* — De la même manière, si λ, μ, λ_0, μ_0 sont des constantes, on voit que le quotient $\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)}$, où Θ et Θ_0 désignent deux fonctions thêta de même ordre m, à caractéristique nulle, ne peut être entier (ainsi que son inverse), que s'il est égal à une exponentielle, Ae^{hu+kv}. Les constantes h et k sont des entiers, puisque $\varphi(u, v)$ admet la période $2\pi i$ par rapport à u et à v; on a, de plus, d'après (2),

$$\varphi(u+a, v+b) = e^{m(\lambda-\lambda_0)}\varphi(u, v), \qquad \varphi(u+b, v+c) = e^{m(\mu-\mu_0)}\varphi(u, v),$$

d'où

$$ha + kb = m(\lambda - \lambda_0) + 2\rho\pi i, \qquad hb + kc = m(\mu - \mu_0) + 2\sigma\pi i,$$

ρ et σ étant entiers. Ces conditions peuvent s'écrire

$$m(\lambda - \lambda_0) \equiv 0, \qquad m(\mu - \mu_0) \equiv 0 \qquad (\text{mod. périodes}).$$

Il résulte de là que si λ, μ, λ_0, μ_0 sont liés par deux relations de cette forme, la courbe qui, sur une surface hyperelliptique quelconque, a pour équation $\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0) = 0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta donnée d'ordre m, à caractéristique nulle, pourra aussi être représentée par une équation de la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction de même ordre et de même caractéristique que $\Theta_0(u, v)$.

DEUXIÈME PARTIE.

SURFACE DE KUMMER.

CHAPITRE I.

Premières propriétés.

12. Si les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface sont exprimables par des fonctions uniformes de deux paramètres, u et v, à quatre paires de périodes, on peut poser, d'après ce qui a été dit au n° **2**, en introduisant, à la place de x, y, z, des coordonnées homogènes, $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$,

$$\rho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{7}$$

ρ étant le facteur de proportionnalité et les $\Theta_i(u, v)$ des fonctions Θ normales, d'un même ordre m, à caractéristique nulle.

Il existe m^2 fonctions Θ_i, linéairement indépendantes; la première surface hyperelliptique que l'on rencontrera s'obtiendra donc en faisant $m = 2$: les quatre fonctions Θ_i sont alors quatre fonctions *normales d'ordre* 2, linéairement distinctes; de plus, et c'est là un point fondamental, elles sont toutes *paires*, puisque, d'après le n° **4**, les quatre fonctions normales du second ordre, à l'aide desquelles s'expriment linéairement toutes les autres, sont des fonctions paires. Il en résulte qu'à un point de la surface (7) correspondent, abstraction faite des multiples des périodes, deux couples d'arguments (u, v) et $(-u, -v)$.

La surface ainsi définie est *une surface de Kummer* : le mode de représentation indiqué est en effet le même, comme on s'en assure aisément, que celui indiqué par M. Weber au tome 84 du *Journal de Crelle*. M. Weber exprime les coordonnées homogènes d'un point de la surface de Kummer par des fonctions linéaires des carrés de quatre fonctions $\mathfrak{S}$ normales du premier ordre, de caractéristiques différentes; or il est clair que ces carrés sont des fonctions Θ, du second ordre, normales et à caractéristique nulle. Les deux modes de représentation sont donc identiques (¹).

On peut d'ailleurs vérifier directement que la surface définie par les équations (7), où les Θ sont des fonctions normales du second ordre, est une surface d'ordre 4; car, d'après un théorème de M. Poincaré, qui est fondamental dans nos recherches actuelles, deux fonctions Θ, d'ordres m et n respectivement, ont $2mn$ zéros communs

(¹) Weber, *Journal de Crelle*, t. 84. — Cayley, *Journal de Crelle*, t. 83, p. 210.

(les solutions qui ne diffèrent que de périodes étant regardées comme identiques) [1]. Or les arguments des points communs à la surface (7) et à une droite, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, vérifient les équations

$$\Theta_1(u, v) = 0, \qquad \Theta_2(u, v) = 0,$$

qui ont un nombre de solutions communes égal à huit, d'après la formule de M. Poincaré; mais ces huit solutions sont deux à deux égales et de signes contraires, de la forme (u, v) et $(-u, -v)$, puisque les fonctions Θ_i sont paires, et, par suite, il ne leur correspond que quatre points de la surface. Celle-ci est donc bien du quatrième ordre.

13. Les *seize points doubles* de la surface correspondent aux valeurs de u et v égales à des moitiés de périodes simultanées, ou, en langage plus court, à des demi-périodes : en effet, si l'on développe $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, suivant les puissances croissantes de u et v, ces développements manqueront de termes du premier ordre, puisque les fonctions considérées sont paires. Il en résulte que le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double, et un raisonnement tout pareil établit la proposition pour les quinze autres demi-périodes.

14. *Courbes tracées sur la surface.* — D'après le n° **8**, sur la surface de Kummer, comme sur toute surface hyperelliptique, l'équation d'une courbe algébrique s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta, quelconque, $\theta(u, v)$.

Or, soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface passant par la courbe *indécomposable* de la surface de Kummer, $\theta(u, v) = 0$; désignons par $f(u, v)$ ce que devient f quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_4(u, v)$.

Il est clair que $f(u, v)$ est divisible par $\theta(u, v)$, le quotient étant une fonction thêta (n° **9**), on a ainsi

$$f(u, v) = \theta(u, v)\,\theta_1(u, v).$$

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X.

Mais la fonction $f(u, v)$ étant paire, on a identiquement

$$\theta(u, v)\theta_1(u, v) = \theta(-u, -v)\theta_1(-u, -v).$$

Si le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ n'est pas une fonction entière, cette identité montre que $\theta_1(u, v)$ sera divisible par $\theta(-u, -v)$, le quotient étant entier; on aura ainsi

$$f(u, v) = \theta(u, v)\theta(-u, -v)\theta_2(u, v),$$

θ_2 étant une fonction thêta.

Si le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ est entier, ce résultat n'est plus vrai; mais alors la fonction $\theta(u, v)$, multipliée par une exponentielle

$$e^{-\left(\frac{p'}{2}u + \frac{q'}{2}v\right)},$$

est égale à une fonction $\theta'(u, v)$, paire ou impaire (n° **10**).

Il résulte de cette discussion que :

1° Dans le premier cas, l'équation de la courbe considérée

$$\theta(u, v) = 0$$

doit être en réalité remplacée par l'équation

$$\theta(u, v)\theta(-u, -v) = 0;$$

2° Dans le second cas, la courbe a une équation de la forme

$$\theta'(u, v) = 0,$$

$\theta'(u, v)$ étant une fonction *paire ou impaire*, qui satisfait aux mêmes équations fondamentales que les fonctions thêta, avec cette différence, due au facteur $e^{-\frac{p'}{2}u - \frac{q'}{2}v}$, que, si l'on augmente u ou v de $2\pi i$, elle se reproduit multipliée par ± 1.

En d'autres termes, si l'on observe que $\theta(u, v)\,\theta(-u, -v)$ est toujours *pair*, on voit que, pour obtenir toutes les courbes algébriques de la surface de Kummer, il suffira d'égaler à zéro les fonctions $\theta(u, v)$ satisfaisant aux conditions

$$\left.\begin{aligned} \theta(u, v) &= \varepsilon\,\theta(-u, -v)\\ \theta(u + 2\pi i, v) &= \varepsilon_1\,\theta(u, v),\\ \theta(u, v + 2\pi i) &= \varepsilon_2\,\theta(u, v), \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1).$$
$$\theta(u + a, v + b) = e^{-pu+\alpha}\,\theta(u, v),$$
$$\theta(u + b, v + c) = e^{-pv+\beta}\,\theta(u, v).$$

Si dans l'avant-dernière de ces relations on change u et v en $-u$, $-v$, en tenant compte de la première, il vient

$$\theta(u - a, v - b) = e^{pu-\alpha}\,\theta(u, v);$$

remplaçant u et v par $u + a$, $v + b$, on trouve

$$\theta(u + a, v + b) = e^{-pu-pa-\alpha}\,\theta(u, v):$$

d'où l'on conclut, par comparaison,

$$e^{2\alpha} = e^{-pa}; \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad e^{\alpha} = \pm e^{-\frac{pa}{2}}.$$

De même on aurait $e^{\beta} = \pm e^{-\frac{pc}{2}}$, et, par suite, les équations auxquelles satisfait la fonction θ deviennent

$$\theta(u + 2\pi i, v) = \pm\,\theta(u, v),$$
$$\theta(u, v + 2\pi i) = \pm\,\theta(u, v),$$
$$\theta(u + a, v + b) = \pm\, e^{-pu-\frac{pa}{2}}\,\theta(u, v),$$
$$\theta(u + b, v + c) = \pm\, e^{-pv-\frac{pc}{2}}\,\theta(u, v).$$

En d'autres termes, $\theta(u, v)$ est une fonction Θ, *normale*, d'ordre p, à caractéristique quelconque (n° 2), paire ou impaire, et, par suite,

L'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer s'obtient en égalant à zéro une fonction Θ normale, d'ordre et de caractéristique quelconques, paire ou impaire; et réciproquement.

15. On en déduit de suite une conséquence intéressante. Soit en effet p l'ordre de la fonction Θ considérée, pour avoir le degré de la courbe correspondante, coupons-la par un plan, $x_2 = 0$, par exemple; les arguments des points communs vérifient les équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad \Theta_2(u, v) = 0.$$

Elles ont, d'après le théorème de M. Poincaré, $2.2p = 4p$ solutions communes, qui sont deux à deux égales et de signes contraires, puisque Θ_2 est une fonction paire, et que Θ est une fonction paire ou impaire. Le nombre des points communs au plan et à la courbe est donc $\frac{1}{2}4p$, c'est-à-dire $2p$, et la courbe est de degré $2p$. Ainsi :

Toutes les courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer sont de degré pair.

16. *Intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique;* THÉORÈME FONDAMENTAL. — L'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique d'ordre p,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

aura pour équation hyperelliptique

$$f(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) = 0,$$

les Θ_i étant toujours des fonctions normales du second ordre, à caractéristique nulle.

Le premier membre de cette équation est une fonction Θ, normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle.

Or la *réciproque* de cette proposition est vraie, et c'est là un fait capital pour l'étude des courbes tracées sur la surface de Kummer.

Soit, en effet, $\Theta(u, v)$ une fonction normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle; nous allons établir que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ est l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface algébrique d'ordre p.

Toutes les fonctions telles que Θ peuvent (n° 4) s'exprimer linéairement à l'aide de $2p^2 + 2$ d'entre elles; or toute fonction de la forme

$$(8)\qquad \Theta_1^\alpha \Theta_2^\beta \Theta_3^\gamma \Theta_4^\delta,$$

où $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$ ont la signification indiquée tout à l'heure, est une fonction normale, à caractéristique nulle, d'ordre $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$; de plus, c'est une fonction paire, puisque les Θ_i sont pairs. Si l'on pose $\alpha + \beta + \gamma + \delta = p$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant bien entendu des entiers non négatifs), on obtient ainsi, en donnant à ces nombres toutes les valeurs compatibles avec les conditions précédentes, des fonctions $\Theta_1^\alpha \Theta_2^\beta \Theta_3^\gamma \Theta_4^\delta$ en nombre égal à

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}.$$

Mais toutes les fonctions thêta ainsi formées ne sont pas linéairement distinctes. En effet, Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 sont liées par une équation du quatrième ordre, $K = 0$, celle de la surface de Kummer représentée par les équations (7); on a donc

$$0 = K(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4)\varphi_{p-4},$$

φ_{p-4} étant une fonction homogène quelconque entière, d'ordre $p - 4$, de $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$. Cette fonction renferme $\frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{6}$ coefficients arbitraires; comme le produit $K\varphi_{p-4}$ est une somme de fonctions thêta, de la forme (8), où $\alpha + \beta + \gamma + \delta = p$, il en résulte que les fonctions de cette forme sont liées par $\frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{6}$ relations linéaires. Il est clair, d'ailleurs, que l'on a ainsi obtenu toutes les relations linéaires existant entre ces fonctions, car toute relation homogène, entière, de degré p entre Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 a nécessairement son premier membre divisible par K. Par suite, le nombre des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$ (où $\alpha+\beta+\gamma+\delta=p$), qui sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire, à l'aide desquelles on peut exprimer linéairement les autres, est égal à

$$\tfrac{1}{6}(p+1)(p+2)(p+3)-\tfrac{1}{6}(p-3)(p-2)(p-1).$$

ou

$$2p^2+2.$$

Or ce nombre est précisément égal à celui des fonctions thêta normales, paires, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle, et linéairement indépendantes, à l'aide desquelles on peut exprimer toutes les autres; comme d'ailleurs les fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$, $(\alpha+\beta+\gamma+\delta=p)$ sont des fonctions thêta de cette catégorie, on voit que toute fonction Θ normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle, s'exprimera linéairement à l'aide des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$; c'est-à-dire sera une fonction entière, homogène, d'ordre p, de Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4.

$$\Theta=\varphi_p(\Theta_1,\ldots,\Theta_4).$$

En d'autres termes, la courbe $\Theta(u,v)=0$ sera l'intersection *complète* de la surface de Kummer avec la surface algébrique d'ordre p, $\varphi_p(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

L'équation de la courbe complète, d'ordre $4p$, commune à la surface de Kummer et à une surface algébrique d'ordre p, s'obtient en égalant à zéro une fonction Θ normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle.

Réciproquement, *la courbe qu'on définit, en égalant à zéro une telle fonction Θ, est l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre p.*

17. *Corollaire.* — Le premier membre de l'équation d'une courbe

algébrique sur la surface de Kummer étant (n° **14**) une fonction thêta d'ordre p, normale, paire ou impaire son carré est toujours une fonction Θ normale, d'ordre $2p$, *de caractéristique nulle et paire;* il peut donc s'exprimer en fonction entière, homogène, d'ordre p, de $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$; soit $\varphi_p(\Theta_1, \ldots, \Theta_4)$, et, par suite, la surface

$$\varphi_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

est circonscrite à la surface de Kummer le long de la courbe considérée, et ne la coupe pas en dehors de cette courbe.

Donc :

Le long de toute courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer et de degré 2p, on peut circonscrire à cette surface une surface algébrique de degré p, ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée (¹).

Avant d'aller plus loin dans l'étude des courbes algébriques de la surface de Kummer, il est nécessaire de présenter quelques remarques sur les points singuliers et sur les seize coniques de la surface; les propriétés des uns et des autres sont bien connues, mais nous devons exposer ici un algorithme nouveau destiné à représenter les éléments de la configuration de Kummer et dont l'utilité sera grande dans nos recherches ultérieures.

Points et plans singuliers.

18. Les courbes du degré le moins élevé qu'on peut tracer sur la surface de Kummer sont des coniques; on obtient seize coniques en égalant à zéro les seize fonctions ϑ normales du premier ordre, puisque la courbe obtenue en égalant à zéro une fonction normale, paire ou impaire, d'ordre p, est d'ordre $2p$ (n° **15**).

(¹) Cette propriété curieuse n'appartient évidemment qu'à des surfaces exceptionnelles; en dehors de la surface de Kummer, nous ne connaissons, pour la posséder, que les cônes du second ordre.

Chaque fonction $\mathfrak{S}$ s'annulant pour six demi-périodes, chaque conique passe par six points singuliers.

D'après le théorème du n° **17**, le plan de chaque conique touche la surface le long de la conique; les plans des seize coniques seront dits *plans singuliers*.

On peut donner, pour représenter les seize points et les seize plans singuliers, un *algorithme* qui jouit de propriétés remarquables.

Écrivons les deux Tableaux identiques :

$$\begin{array}{cccc} & \text{I.} & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} & \text{II.} & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

et numérotons les colonnes, dans le premier de 1 à 4, dans le second de $1'$ à $4'$, à partir de la gauche. Soit une fonction $\mathfrak{S}$ du premier ordre, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; nous prendrons la première colonne de cette figure, soit la colonne $\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$, dans le Tableau I, où elle a le numéro d'ordre 2; de même la seconde colonne, $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$, a le numéro d'ordre $1'$ dans le tableau II; nous représenterons alors la fonction $\mathfrak{S}$ de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ par le symbole $21'$. Inversement, un symbole, tel que $34'$ par exemple, représente la fonction de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

On peut donner un symbole analogue pour représenter les demi-périodes. Soit, par exemple, la demi-période

$$h\pi i + \lambda a + \mu b; \quad k\pi i + \lambda b + \mu c,$$

où

$$h = 0, \qquad k = 1, \qquad \lambda = 1, \qquad \mu = 1.$$

Nous écrirons le Tableau

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1+h & 1+k \end{vmatrix},$$

qui représentera la demi-période; nous négligerons, dans chaque terme $1+\lambda, \ldots, 1+k$, les multiples de 2, en sorte que, dans l'exemple considéré, le Tableau s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et nous donnerons à la demi-période le symbole $(34')$, 3 étant l'ordre de la première colonne $\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ dans le Tableau I, et $4'$ celui de la seconde, $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$, dans le Tableau II. Inversement, un symbole, tel que $(13')$, représentera la demi-période pour laquelle on a

$$1+\lambda \equiv 1, \quad 1+h \equiv 1, \quad 1+\mu \equiv 0, \quad 1+k \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Pour distinguer des symboles des $\mathfrak{S}$ les symboles des demi-périodes, nous mettons ces derniers entre parenthèses.

Cela posé, je dis que les six demi-périodes qui annulent une fonction $\mathfrak{S}$, de symbole $\alpha\alpha'$, ont les symboles qu'on obtient en faisant suivre le chiffre α des trois chiffres accentués de la série 1, 2, 3, 4, qui diffèrent de α, et en faisant précéder le chiffre α' des trois chiffres de cette série qui diffèrent de α' : ainsi les six demi-périodes annulant $12'$ sont $(11')$, $(13')$, $(14')$ et $(22')$, $(32')$, $(42')$.

Nous savons, en effet, que les demi-périodes qui annulent la fonction $\mathfrak{S}$ de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ sont données par la congruence (n° **7**, équation 6)

$$(h+\theta)(\lambda+\omega)+(k+\theta')(\mu+\omega') \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Cette congruence admet six solutions, dont l'une, par exemple, est

$$h+\theta \equiv 0, \quad \lambda+\omega \equiv 0, \quad k+\theta' \equiv 1, \quad \mu+\omega' \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Le Tableau qui caractérise la demi-période correspondante, à savoir

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1+h & 1+k \end{vmatrix}, \quad \text{est alors} \quad \begin{vmatrix} 1+\omega & \omega' \\ 1+\theta & \theta' \end{vmatrix},$$

en négligeant dans chaque terme les multiples de 2; pour les cinq autres solutions, on obtient de même les cinq Tableaux

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 1+\theta & \theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+\omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega & 1+\omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & 1+\theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega & 1+\omega' \\ \theta & 1+\theta' \end{vmatrix}.$$

On voit que, dans trois de ces six Tableaux, la première colonne est $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$, et que, dans les trois autres, la seconde colonne est $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$. Dans les Tableaux qui commencent par la colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$, la seconde colonne prend trois des formes $\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}$, la forme exceptée étant $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$. On peut faire la même remarque pour les Tableaux qui se terminent par la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$, et ces deux remarques démontrent la règle énoncée : si, en effet, p est l'ordre de la colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$ dans le Tableau I; q' celui de la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$ dans le Tableau II, la fonction $\mathfrak{S}$ considérée aura le symbole pq', et, des six demi-périodes qui l'annulent, trois auront des symboles commençant par p, trois des symboles finissant par q', le symbole (pq') ne devant pas figurer.

On verrait de même qu'on obtient les symboles des six fonctions $\mathfrak{S}$ s'annulant pour la demi-période (pq') en faisant suivre p des trois chiffres accentués de la série 1, 2, 3, 4, qui diffèrent de q' et en faisant précéder q' des trois chiffres de cette série qui diffèrent de p : ainsi la demi-période $(12')$ annule les six $\mathfrak{S}$: $11'$, $13'$, $14'$ et $22'$, $32'$, $42'$.

Il est même inutile de faire de nouveaux calculs pour le vérifier, car, d'après ce qui précède, les fonctions pq' et sr' s'annulent pour la demi-période (pr') si $r' \gtrless q'$ et $p \gtrless s$.

On voit sans difficulté que les six fonctions $\mathfrak{S}$ *impaires*, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair, ont pour symboles

$$12', \quad 13', \quad 14', \quad 21', \quad 31', \quad 41';$$

ce sont les six symboles qui contiennent une et une seule fois le chiffre 1, accentué ou non.

19. Revenons maintenant à la surface de Kummer; nous représenterons un plan singulier par le symbole de la fonction $\mathfrak{S}$ correspondante, et un point singulier par celui de la demi-période qui donne ses arguments : nous arrivons ainsi à l'algorithme suivant, qui peut être présenté indépendamment de toute considération analytique :

Soient 1, 2, 3, 4 *et* 1′, 2′, 3′, 4′ *deux séries de quatre caractères; désignons par* α *un caractère quelconque de la première série, par* β, γ, δ *les trois autres; par* α' *un caractère de la seconde, par* β', γ', δ' *les trois autres.*

Les seize symboles $\alpha\alpha'$ *représenteront les seize plans singuliers, et les seize symboles* $(\alpha\alpha')$ *les seize points singuliers de la surface de Kummer, de telle façon :*

1° *Que les six points singuliers contenus dans le plan* $\alpha\alpha'$ *soient*

$$(\alpha\beta'),\quad (\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\alpha'),\quad (\gamma\alpha')\quad (\delta\alpha');$$

2° *Que les six plans singuliers passant par le point* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta',\quad \alpha\gamma',\quad \alpha\delta',\quad \beta\alpha',\quad \gamma\alpha',\quad \delta\alpha'.$$

Cette notation a, sur celle de M. Weber (¹), l'avantage d'être symétrique par rapport aux points ou aux plans singuliers de la surface de Kummer; elle est, de plus, réciproque par rapport aux points et aux plans singuliers. Nous verrons enfin qu'elle se rattache étroitement à la notation proposée par Hesse pour les bitangentes d'une quartique plane.

On vérifie immédiatement, à l'aide de notre notation, que deux plans singuliers ont en commun deux points singuliers, et que par deux points singuliers passent deux plans singuliers.

(¹) Weber, *Journal de Crelle*, t. 84.

Groupes remarquables de points et de plans singuliers.

20. Il existe des groupes remarquables de points et de plans singuliers, que les travaux antérieurs de divers géomètres ont fait connaître (¹), mais sur lesquels nous avons à revenir en vue de nos recherches; l'algorithme nouveau va nous permettre de les retrouver de suite.

I. *Groupes de Rosenhain.* — Ce sont des groupes de quatre plans singuliers formant un tétraèdre ayant pour sommets quatre points singuliers.

On trouve que les symboles des quatre plans d'un groupe sont de quatre types :

1°	$\alpha\alpha'$,	$\alpha\beta'$,	$\alpha\gamma'$,	$\alpha\delta'$;	ce type donne	4	tétraèdres,
2°	$\alpha\alpha'$,	$\beta\alpha'$,	$\gamma\alpha'$,	$\delta\alpha'$;	»	4	»
3°	$\alpha\alpha'$,	$\alpha\beta'$,	$\beta\gamma'$,	$\beta\delta'$;	»	36	»
4°	$\alpha\alpha'$,	$\beta\alpha'$,	$\gamma\beta'$,	$\delta\beta'$;	»	36	»

Il y a donc, en tout, 80 groupes ou tétraèdres de Rosenhain. Au point de vue géométrique, il n'y a aucune différence entre les groupes des divers types.

Si, imitant la méthode proposée par M. Cayley pour la représentation graphique des bitangentes d'une quartique plane, nous convenons de disposer les caractères α', β', γ', δ' sur une ligne horizontale, et les caractères α, β, γ, δ sur une ligne horizontale au-dessous de la première, et si nous représentons le plan $\alpha\alpha'$ par la droite qui joint les caractères α et α', les symboles graphiques des groupes de Rosenhain

(¹) ROSENHAIN, Mémoires couronnés *Savants étrangers*, t. XI; WEBER, *Journal de Crelle*, t. 84; GÖPEL, *Journal de Crelle*, t. 35; KRAZER, *Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen* (Teubner, 1882); REICHARDT, *Darstellung der Kummerschen Fläche*, ... (*Nova Acta de l'Académie Leop.-Carol. de Halle*, t. L.)

sont ([1])

⩔	et	⩓	pour les types 1° et 2°,
$\vee\vee$	et	$\wedge\wedge$	pour les types 3° et 4°.

21. Le produit des quatre fonctions ϑ qui correspondent aux plans d'un groupe de Rosenhain est évidemment une fonction Θ normale, d'ordre quatre : je dis que c'est une fonction *impaire*, de caractéristique *nulle*.

Elle est impaire, car la représentation graphique montre que les quatre symboles des plans d'un groupe renferment un nombre impair de fois, au total, un symbole de la première catégorie, α, par exemple, et un symbole de la seconde β', par exemple : en particulier, ils renferment un nombre impair de fois, au total, les symboles 1 et 1'; par suite, sur les quatre fonctions ϑ correspondantes, une ou trois sont impaires (n° **18**), et le produit est impair.

Pour étudier la caractéristique, considérons, d'une manière plus générale, le produit d'un nombre quelconque de ϑ, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$. Les nombres qui composent la caractéristique de ce produit sont évidemment

$$\Omega \equiv \Sigma\omega, \qquad \Omega' \equiv \Sigma\omega', \qquad \Theta \equiv \Sigma\theta, \qquad \Theta' \equiv \Sigma\theta' \pmod 2,$$

les sommes s'étendant aux nombres ω, ω', θ, θ', qui correspondent aux fonctions ϑ du produit considéré. Or le premier caractère, α, du symbole $\alpha\alpha'$ d'une fonction ϑ, représente, dans notre notation, la première colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$ de la caractéristique; de même α' représente la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$; il en résulte sans difficulté, si l'on se reporte aux Tableaux I et II du n° **18**, la conséquence suivante.

Écrivons à la suite les uns des autres les symboles $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$ des ϑ dont on considère le produit, et regardons cette expression comme un produit algébrique auquel nous appliquerons les règles du calcul algébrique; nous aurons ainsi

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta\ldots\gamma\delta' = 1^h 2^k 3^l 4^m . 1'^{h'} 2'^{k'} 3'^{l'} 4'^{m'},$$

([1]) D'après cette convention, les six plans singuliers qui passent par un même point auront pour symbole ⩓⩔.

$h, k, \ldots, m'$ étant des entiers positifs : les nombres $\Omega, \Omega', \Theta, \Theta'$ seront donnés par les relations

$$\Omega \equiv h + k, \quad \Omega' \equiv h' + k', \quad \Theta \equiv h + l, \quad \Theta' \equiv h' + l' \quad (\text{mod } 2).$$

Le produit considéré aura donc sa caractéristique nulle si les nombres h, k, l sont de même parité, ainsi que les nombres h', k', l'.

Dans le cas où le produit comprend un nombre pair de fonctions $\mathfrak{S}$, cette règle se simplifie et il n'est pas besoin d'introduire les caractères 1, 2, 3, 4 à la place des $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. En ce cas, en effet, les nombres (égaux entre eux), $h + k + l + m$ et $h' + k' + l' + m'$ sont pairs ; la condition pour que le produit étudié soit de caractéristique nulle est donc que les nombres h, k, l, m soient de même parité, ainsi que les nombres h', k', l', m'. Or cette condition est symétrique par rapport aux caractères 1, 2, 3, 4 et par rapport aux caractères 1', 2', 3', 4' ; il en résulte que, si l'expression $\alpha\alpha' . \alpha\beta' \ldots \gamma\delta'$ prend, par l'application des règles du calcul algébrique, la forme $\alpha^h \beta^k \gamma^l \delta^m . \alpha'^{h'} \beta'^{k'} \gamma'^{l'} \delta'^{m'}$, la condition nécessaire et suffisante pour que le produit considéré soit de caractéristique nulle est que les nombres h, k, l, m soient de même parité, ainsi que h', k', l', m', sans qu'on ait besoin de savoir à quels caractères des séries 1, 2, 3, 4 et 1', 2', 3', 4' correspondent les caractères $\alpha, \beta, \ldots, \delta'$.

Cette observation montre que le produit des quatre $\mathfrak{S}$ d'un groupe de Rosenhain est une fonction de caractéristique nulle, car on a, pour les groupes du premier type,

$$\alpha\alpha' . \alpha\beta' . \alpha\gamma' . \alpha\delta' = \alpha^4 \alpha' \beta' \gamma' \delta',$$

et pour ceux du troisième,

$$\alpha\alpha' . \alpha\beta' . \beta\gamma' . \beta\delta' = \alpha^2 \beta^2 \alpha' \beta' \gamma' \delta' ;$$

de même pour les groupes des types 2° et 4°.

Le produit des quatre $\mathfrak{S}$ d'un groupe de Rosenhain étant une fonction normale, d'ordre quatre, impaire et de caractéristique nulle, les résultats du n° 7 montrent que l'ensemble des quatre plans d'un groupe de Rosenhain passe par tous les points singuliers; ce qui se vérifie d'ailleurs directement à l'aide de l'algorithme.

Trois coniques dont les plans appartiennent à un même groupe de Rosenhain ont un point singulier commun, d'après la définition même des groupes de Rosenhain; réciproquement, si trois coniques ont un point singulier commun, leurs plans appartiennent à un de ces groupes : on le voit immédiatement à l'aide du symbole graphique. En effet, les plans des six coniques qui passent par un même point singulier ont pour symbole ⩚⩛, trois de ces plans seront représentés par un des symboles ⩚, ⩛, ∧|, |∨, qui font respectivement partie des symboles ⩚, ⩛, ∧∧, ∨∨, correspondant à des groupes de Rosenhain.

22. *Remarque.* — Soient des fonctions $\mathfrak{S}$ en nombre pair, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$; écrivons, comme tout à l'heure,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta' = \alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'}.$$

Pour que le produit des $\mathfrak{S}$ considérés ait sa caractéristique nulle, il faut et il suffit que h, k, l, m soient de même parité, ainsi que h', k', l', m'; pour que ce produit soit pair, il faut que les symboles 1 et $1'$ figurent au total un nombre pair de fois dans $\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta'$, c'est-à-dire que h, k, l, m soient de même parité que h', k', l', m', quels que soient ceux des caractères α, β, ..., δ' qui correspondent aux caractères 1 et $1'$.

En d'autres termes, si nous nous reportons au théorème fondamental du n° **16**, nous voyons que $2p$ coniques de la surface de Kummer, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$, seront sur une surface algébrique d'ordre p, si, étant posé

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta' = \alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'},$$

les exposants h, k, l, ..., l', m' sont tous de même parité.

Cette condition est nécessaire et suffisante; nous en ferons plus loin des applications.

23. II. *Groupes de Göpel.* — Ce sont des groupes de quatre plans formant un tétraèdre qui n'a aucun point singulier pour sommet.

On trouve aisément, à l'aide de l'algorithme, que les symboles des quatre plans d'un groupe sont de deux types.

1° $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$; ce type donne 24 groupes.

2° $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$; ce type donne 36 groupes.

Il y a donc 60 groupes de Göpel.

Les mêmes symboles, avec parenthèses, désignent 60 groupes de quatre points singuliers, sommets d'un tétraèdre qui n'a pour face aucun plan singulier; nous appellerons ces groupes : *groupes de points de Göpel,* les précédents étant les *groupes de plans, ou tétraèdres de Göpel.*

Les symboles graphiques des groupes de points ou plans de Göpel sont

$$|\,|\,|\,| \quad \text{et} \quad \bowtie.$$

Le produit des quatre $\mathfrak{S}$ qui correspondent aux plans d'un tétraèdre de Göpel est une fonction paire, à caractéristique nulle; car on a, par exemple,

$$\alpha\alpha'.\beta\beta'.\gamma\gamma'.\delta\delta' = \alpha\beta\gamma\delta.\alpha'\beta'\gamma'\delta'$$

et tous les exposants au second membre sont de même parité; de même,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'.\beta\alpha'.\beta\beta' = \alpha^2\beta^2\alpha'^2\beta'^2.$$

Donc (n^{os} **16** et **22**) :

Les faces d'un tétraèdre de Göpel touchent la surface de Kummer suivant quatre coniques, qui sont situées sur une même surface du second ordre.

24. III. *Octaèdres de Göpel.* — Nous donnerons le nom d'*octaèdres de Göpel* à des groupes remarquables de huit plans singuliers, en relation intime avec les tétraèdres de Göpel, et qu'on définit comme il suit.

Deux plans singuliers quelconques appartiennent à trois tétraèdres de Göpel : on le voit aisément à l'aide de l'algorithme ou du symbole graphique; ainsi les plans | | font partie des tétraèdres [><], ||||, ||X; nous dirons que les deux plans donnés et les trois couples de plans qui, associés à ceux-ci respectivement, forment trois tétraèdres de Göpel, constituent un octaèdre de Göpel.

Un octaèdre de Göpel est donc défini ainsi par quatre couples de plans singuliers; il résulte de ce qui a été dit au numéro précédent que les produits des ϑ qui correspondent aux quatre plans de deux quelconques de ces couples sont, pour un même octaèdre, des fonctions paires et de caractéristique nulle.

Cherchons les symboles des octaèdres, et considérons, à cet effet, deux plans singuliers : si leurs symboles n'ont aucun caractère commun, on pourra les représenter par $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$; les trois couples de plans qui, avec le couple précédent, forment des tétraèdres de Göpel sont, d'après les notations données au n° 23,

$$\alpha\beta' \text{ et } \beta\alpha', \quad \gamma\gamma' \text{ et } \delta\delta', \quad \gamma\delta' \text{ et } \delta\gamma'.$$

Si les deux plans singuliers primitifs ont un caractère commun, α, on les représentera par $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$; les trois couples formant avec ce couple un octaèdre de Göpel sont

$$\beta\alpha' \text{ et } \beta\beta', \quad \gamma\alpha' \text{ et } \gamma\beta', \quad \delta\alpha' \text{ et } \delta\beta'.$$

Si enfin les deux plans primitifs ont, dans leurs symboles, un même caractère, α', on les représentera par $\alpha\alpha'$ et $\beta\alpha'$, et l'on aura pour symboles des trois autres couples

$$\alpha\beta' \text{ et } \beta\beta', \quad \alpha\gamma' \text{ et } \beta\gamma', \quad \alpha\delta' \text{ et } \beta\delta'.$$

On trouve donc, pour représenter les quatre couples de plans d'un octaèdre de Göpel, trois types de notations,

1° $\quad \alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'$, $\gamma\gamma'$ et $\delta\delta'$, $\gamma\delta'$ et $\delta\gamma'$;

2° $\quad \alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$ et $\beta\beta'$, $\gamma\alpha'$ et $\gamma\beta'$, $\delta\alpha'$ et $\delta\beta'$;

3° $\quad \alpha\alpha'$ et $\beta\alpha'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\beta'$, $\alpha\gamma'$ et $\beta\gamma'$, $\alpha\delta'$ et $\beta\delta'$.

Le premier type donne par permutation de α, β, γ, δ, α', β', γ', δ', dix-huit octaèdres, le deuxième et le troisième en donnent six chacun : il y a donc en tout *trente octaèdres* de Göpel.

On vérifie maintenant sans difficulté, à l'aide de l'algorithme, que les quatre couples de plans d'un même octaèdre passent par huit mêmes points singuliers, qui sont respectivement, pour les types 1°, 2° et 3° :

$$(\alpha\gamma'),\ (\alpha\delta'),\ (\beta\gamma'),\ (\beta\delta'),\ (\gamma\alpha'),\ (\gamma\beta'),\ (\delta\alpha'),\ (\delta\beta');$$
$$(\alpha\alpha'),\ (\alpha\beta'),\ (\beta\alpha'),\ (\beta\beta'),\ (\gamma\alpha'),\ (\gamma\beta'),\ (\delta\alpha'),\ (\delta\beta');$$
$$(\alpha\alpha'),\ (\beta\alpha'),\ (\alpha\beta'),\ (\beta\beta'),\ (\alpha\gamma'),\ (\beta\gamma'),\ (\alpha\delta'),\ (\beta\delta').$$

Nous obtenons ainsi *trente* groupes remarquables de huit points singuliers, par chacun desquels passent quatre couples de plans singuliers; on trouve l'un quelconque de ces groupes en prenant les huit points situés dans deux plans singuliers, en dehors de leur droite d'intersection.

Observons enfin que les huit plans singuliers qui n'appartiennent pas à un octaèdre forment eux-mêmes un octaèdre; les huit points singuliers communs aux quatre couples de plans du premier octaèdre sont différents des huit points communs aux couples de plans du second : les trente groupes de huit plans et les trente groupes de huit points trouvés tout à l'heure sont donc associés deux à deux, deux groupes associés n'ayant aucun plan ou aucun point commun.

25. Avant d'abandonner la théorie des plans singuliers, nous appliquerons notre algorithme à la recherche de nouveaux groupes intéressants formés par les coniques de la surface.

Groupe de quatre coniques situées sur une même quadrique. — Pour que quatre coniques soient sur une même quadrique, il faut et il suffit (n° **22**) que le produit de leurs symboles puisse se mettre sous la forme

$$\alpha^h \beta^k \gamma^l \delta^m \alpha'^{h'} \beta'^{k'} \gamma'^{l'} \delta'^{m'},$$

$h, k, \ldots, m'$ étant des nombres entiers de même parité. D'ailleurs, puisqu'il entre quatre coniques dans le groupe considéré, on a

$$h + k + l + m = h' + k' + l' + m' = 4.$$

On est conduit ainsi à deux types d'expressions.

1° Exposants impairs :

$$h = k = \ldots = l' = m' = 1.$$

Type $\qquad \alpha\beta\gamma\delta.\alpha'\beta'\gamma'\delta'.$

Ce type donne les 24 groupes : $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ (||||).

2° Exposants pairs :

$$h = k = h' = k' = 2, \qquad l = m = l' = m' = 0.$$

Type $\qquad \alpha^2\beta^2.\alpha'^2\beta'^2$ ou $\alpha\alpha\beta\beta.\alpha'\alpha'\beta'\beta'.$

Ce type donne les 36 groupes : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$ (▷◁), en excluant les groupes tels que $\alpha\alpha'.\alpha\alpha'.\beta\beta'.\beta\beta'$, qui contiennent deux fois une même conique.

Les $24 + 36 = 60$ groupes ainsi obtenus coïncident avec les 60 tétraèdres de Göpel, qu'on devait (n° **23**) trouver comme solutions; on voit que ces tétraèdres donnent d'ailleurs toutes les solutions.

26. *Groupes de six coniques situées sur une même surface cubique.* — On devra, pour trouver ces groupes, partir d'expressions du sixième ordre en α, β, γ, δ et du même ordre en α', β', γ', δ', les exposants étant de même parité.

1° Exposants impairs.

Type unique $\qquad \alpha\alpha\alpha\beta\gamma\delta.\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\gamma'\delta'.$

Ce type donne (¹)

16 groupes : $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\alpha'$ (/ΛΛ),

144 groupes : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\delta'$ (|VΛ).

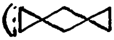
Les seize premiers groupes sont formés par les six coniques qui passent par un même point singulier.

(¹) Nous supposons ici, comme dans tout ce qui suit, qu'on exclut les groupes dans lesquels une même conique figure deux ou plusieurs fois.

2° Exposants pairs.

Type $\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma.\alpha'\alpha'\beta'\beta'\gamma'\gamma'$.

Ce type donne 96 groupes :

$$\alpha\alpha',\quad \alpha\beta',\quad \beta\alpha',\quad \beta\gamma',\quad \gamma\beta',\quad \gamma\gamma'$$ (; ).

Types

$$\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta,\quad \alpha'\alpha'\beta'\beta'\gamma'\gamma',$$
$$\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta,\quad \alpha'\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\beta',$$
$$\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma,\quad \alpha'\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\beta'.$$

Ces types doivent être exclus, comme donnant nécessairement deux fois au moins la même conique.

On a donc en tout deux cent cinquante-six groupes de six coniques différentes situées sur une même surface cubique.

Les symboles de ces groupes montrent immédiatement qu'on obtient chacun d'eux en prenant les plans singuliers non communs à deux groupes de Rosenhain, qui ont un et un seul plan singulier commun.

CHAPITRE II.

Classification des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer.

27. La première question que nous traiterons dans l'étude générale des courbes algébriques de la surface de Kummer est celle de la détermination et de la classification des courbes d'un degré donné.

On connaît peu de surfaces pour lesquelles ce problème soit résolu ; ces surfaces (surface de Steiner, surface du troisième ordre, quadriques, etc.) sont représentables point par point sur le plan, et la question se ramène dès lors à une question de Géométrie plane.

Pour les quadriques, un élégant théorème d'Halphen donne implicitement la solution géométrique du problème : Halphen a montré, en effet, que la surface du moindre degré qu'on peut mener par une courbe tracée sur une surface du second ordre ne coupe, en outre, cette dernière que suivant des génératrices d'un même système (¹).

Sur la surface de Kummer, le résultat est plus simple encore : nous allons voir que, par une courbe algébrique quelconque tracée sur cette surface, on peut mener une seconde surface qui ne coupe, en outre, la première que suivant h coniques, h pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4; et nous obtiendrons en même temps la classification des courbes d'un degré donné.

Nous savons (nº **14**) que l'équation d'une courbe algébrique, sur la surface de Kummer, est de la forme $\Theta(u, v) = 0$, Θ désignant une fonction thêta normale, d'ordre et de caractéristique quelconques, paire ou impaire; soit μ son ordre, la courbe correspondante est d'ordre 2μ.

Deux cas sont à distinguer, selon que μ est pair ou impair.

28. I. Soit d'abord μ pair, $\mu = 2m$; les courbes correspondantes sont d'ordre $4m$.

Les fonctions Θ normales, d'ordre $2m$, paires ou impaires, se répartissent en seize systèmes selon les valeurs de la caractéristique.

1º Si la *caractéristique* est *nulle* (nº **4**), les fonctions normales *paires*, d'ordre $2m$, s'expriment linéairement en fonction de $2m^2 + 2$ d'entre elles; les courbes correspondantes sont, d'après le théorème fondamental du nº **16**, les intersections complètes de la surface de Kummer et de surfaces algébriques d'ordre m.

2º Les fonctions normales, à *caractéristique nulle*, d'ordre $2m$ et *impaires* sont au nombre de $2m^2 - 2$ linéairement distinctes; les courbes correspondantes, de degré $4m$, passent par les seize points singuliers de la surface de Kummer, puisque les fonctions thêta normales, à caractéristique nulle et impaires, s'annulent pour les seize demi-périodes (nº **7**). Si l'on multiplie une fonction impaire, d'ordre $2m$, à caractéristique nulle, par le produit des quatre fonctions $\mathfrak{S}$ du premier ordre correspondant aux plans singuliers d'un groupe de Rosenhain, on obtient (nº **21**) une fonction *paire*, d'ordre $2m + 4$, à caractéristique nulle; il résulte de là (nº **16**) que chacune des courbes

(¹) *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. I, p. 19.

précédentes est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m+2$, passant par les quatre coniques d'un groupe de Rosenhain, quelconque d'ailleurs.

On obtient donc toutes les courbes de la famille considérée en prenant l'intersection de la surface de Kummer avec des surfaces d'ordre $m+2$, menées par quatre coniques d'un même groupe Rosenhain, et réciproquement.

Si m est égal à 1, $2m^2-2$ est nul; il n'y a pas de fonction impaire normale, d'ordre 2, à caractéristique nulle et la famille précédente n'existe pas.

3° Considérons maintenant les fonctions Θ normales, d'ordre $2m$, à *caractéristique non nulle;* elles forment quinze systèmes, selon les valeurs de la caractéristique, et, dans chaque système, il y a $2m^2$ fonctions paires et $2m^2$ fonctions impaires, linéairement distinctes (n° **5**); d'où trente familles de courbes d'ordre $4m$.

On peut toujours trouver deux fonctions $\mathfrak{S}$, du premier ordre, telles que leur produit soit une fonction paire ou impaire, à volonté, ayant une caractéristique non nulle donnée à l'avance. Soient, en effet, ω, ω', θ, θ' les éléments de la caractéristique donnée; ω_1, ω'_1, θ_1, θ'_1 et ω_2, ω'_2, θ_2, θ'_2 ceux des caractéristiques respectives des deux $\mathfrak{S}$ cherchés. On aura

$$(9)\quad \omega_1+\omega_2\equiv\omega,\quad \omega'_1+\omega'_2\equiv\omega',\quad \theta_1+\theta_2\equiv\theta,\quad \theta'_1+\theta'_2\equiv\theta' \pmod 2;$$

de plus la quantité

$$\omega_1\theta_1+\omega'_1\theta'_1+\omega_2\theta_2+\omega'_2\theta'_2$$

aura une parité donnée (n° **6**).

Si l'on tire ω_2, ω'_2, θ_2, θ'_2 des quatre premières relations pour les introduire dans la dernière condition, on trouve la congruence

$$\omega_1\theta+\theta_1\omega+\omega'_1\theta'+\theta'_1\omega'\equiv\omega\theta+\omega'\theta'+\varepsilon \pmod 2,$$

ε étant une quantité connue, égale à 0 ou à 1.

Cette congruence a toujours des solutions en ω_1, θ_1, ω'_1, θ'_1, puisque

ω, θ, ω', θ' ne sont pas nuls à la fois, la caractéristique donnée n'étant pas nulle. Chaque système de valeurs de ω_1, θ_1, ω'_1, θ'_1 donne, en vertu de (9), un système de valeurs de ω_2, θ_2, ω'_2, θ'_2, et ces deux systèmes sont différents, puisque ω, θ, ω', θ' ne sont pas tous nuls.

D'après cela, on peut multiplier une fonction Θ, paire ou impaire, normale, d'ordre $2m$, à caractéristique non nulle, par deux fonctions ϑ convenablement choisies, de telle sorte que le produit soit une fonction *paire*, d'ordre $2m+2$, à *caractéristique nulle :* géométriquement, d'après le théorème du n° **16**, cela revient à dire que la courbe d'ordre $4m$ qui correspond, sur la surface de Kummer, à la fonction Θ considérée, est l'intersection de cette surface avec une surface d'ordre $m+1$, passant par deux coniques singulières.

On peut associer deux à deux les seize coniques de la surface de Kummer de $\frac{16.15}{2} = 120$ manières ; il semble donc qu'on doive obtenir géométriquement 120 familles de courbes d'ordre $4m$, tandis que l'Analyse nous a appris qu'on doit en trouver seulement 30. Mais nous savons que, étant donné un couple de fonctions ϑ du premier ordre, il existe trois autres couples tels que le produit des ϑ de deux quelconques des quatre couples soit une fonction Θ paire et de caractéristique nulle (n° **24**) ; les quatre couples de plans singuliers correspondants de la surface de Kummer forment un octaèdre de Göpel. Donc quatre couples de coniques dont les plans forment un octaèdre de Göpel ne donnent naissance, par l'application du procédé géométrique indiqué plus haut, qu'à une seule et même famille de courbes de degré $4m$, et, par suite, le nombre de ces familles de courbes est $\frac{120}{4} = 30$, résultat qui concorde avec celui de l'Analyse.

La courbe d'ordre $4m$, intersection de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre $m+1$ menée par deux coniques singulières, passe évidemment par les huit points singuliers situés dans les plans de ces deux coniques, en dehors de leur droite d'intersection ; ces huit points sont communs (n° **24**) aux quatre couples de plans d'un même octaèdre de Göpel.

Si l'on considère deux octaèdres de Göpel *associés* (n° **24**), les deux familles de courbes d'ordre $4m$ qui correspondent respectivement à chacun d'eux seront dites *associées;* les courbes de l'une des familles passent par huit points singuliers et les courbes de l'autre famille passent par les huit autres points singuliers. Ces résultats concordent avec ceux du n° **7**.

Nous avons ainsi obtenu la définition géométrique de toutes les courbes de degré $4m$ sur la surface de Kummer; elles correspondent à des Θ d'ordre $2m$. Il nous reste à examiner les courbes qui correspondent à des Θ d'ordre μ, impair.

29. II. Soit maintenant $\mu = 2m + 1$; les courbes correspondantes sont d'ordre $4m + 2$.

Les fonctions Θ normales, d'ordre $2m + 1$, paires ou impaires, se répartissent toujours en seize systèmes, selon les valeurs de la caractéristique; et pour une caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, il y a (n^{os} **4** et **5**)

$$2m^2 + 2m + 1 \quad \text{fonctions} \begin{cases} \text{paires} \\ \text{impaires} \end{cases}$$

et

$$2m^2 + 2m \quad \text{fonctions} \begin{cases} \text{impaires}, \\ \text{paires} \end{cases}$$

selon que la quantité

$$\omega\theta + \omega'\theta' \quad \text{est} \begin{cases} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{cases}.$$

1° Supposons d'abord que $\omega\theta + \omega'\theta'$ soit pair; la fonction $\mathfrak{S}_0$, du premier ordre, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ est paire (n° **6**), et le produit de cette fonction par une fonction Θ, *paire,* d'ordre $2m + 1$ et de même caractéristique, est une fonction normale, paire, d'ordre $2m + 2$ et de caractéristique nulle. En d'autres termes, d'après le théorème du n° **16**, la courbe d'ordre $4m + 2$, qui correspond à la fonction Θ d'ordre $2m + 1$ considérée, est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m + 1$ menée par une conique singulière.

Si, $\omega\theta + \omega'\theta'$ étant toujours supposé pair, on considère une fonction Θ *impaire,* d'ordre $2m + 1$, et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, le raisonnement précédent ne peut s'appliquer. En ce cas, soient $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$

trois fonctions $\mathfrak{S}$ d'ordre un, formant un groupe de Rosenhain avec la fonction $\mathfrak{S}_0$ d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & \theta' \end{vmatrix}$: nous savons (n° **21**) que le produit $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3 \mathfrak{S}_0$ est impair et de caractéristique nulle. Il en résulte, puisque $\mathfrak{S}_0$ est pair, que le produit $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3$ est impair, et a même caractéristique que $\mathfrak{S}_0$. Si donc on multiplie la fonction Θ impaire considérée par $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3$, on obtient une fonction normale paire d'ordre $2m + 4$ et de caractéristique nulle. En d'autres termes, d'après le théorème du n° **16**, la courbe d'ordre $4m + 2$ qui correspond à notre fonction Θ impaire est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m + 2$, menée par trois coniques singulières qui font partie d'un même groupe de Rosenhain ([1]).

Nous savons (n° **7**), ce qui se déduirait d'ailleurs aisément des résultats géométriques précédents, que, dans le cas où $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair, les courbes qui correspondent aux Θ pairs, d'ordre $2m + 1$ et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & \theta' \end{vmatrix}$, passent par six points singuliers situés dans un même plan singulier, et que celles qui correspondent aux Θ impairs de même ordre et de même caractéristique passent par les dix autres points singuliers.

2° Le cas où $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair donne lieu à des raisonnements identiques; il suffit d'échanger partout les mots *pair* et *impair*.

30. Nous pouvons maintenant énoncer les propositions suivantes, qui donnent la détermination géométrique et la classification des courbes d'un degré fixé à l'avance, sur la surface de Kummer.

Les courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer sont de degré pair.

Les courbes d'ordre $4m$ tracées sur la surface *se répartissent en* 32 *familles :*

1° *Une famille de courbes dont chacune est l'intersection complète et indécomposable de la surface de Kummer avec une surface*

([1]) D'après le n° 21, ces trois coniques sont trois coniques quelconques, passant par un même point singulier.

d'ordre m générale. L'équation des courbes de cette famille dépend linéairement de $2m^2+1$ paramètres;

2° *Une famille, que nous appellerons* singulière, *de courbes passant par les seize points singuliers, dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre $m+2$, menée par quatre coniques singulières appartenant à un même groupe de Rosenhain, d'ailleurs arbitraire. L'équation des courbes de la famille singulière dépend linéairement de $2m^2-3$ paramètres* (¹);

3° *Trente familles, deux à deux associées, de courbes dont chacune passe par huit points singuliers et constitue l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre $m+1$, menée par deux coniques singulières. L'équation des courbes de chaque famille dépend linéairement de $2m^2-1$ paramètres.*

Les courbes d'une de ces familles passant par huit points singuliers, les courbes de la famille associée passent par les huit autres. Chaque famille est liée à un octaèdre de Göpel.

Les courbes d'ordre $4m+2$ tracées sur la surface *se répartissent en 32 familles.*

1° *Seize familles de courbes passant par six points singuliers et dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre $m+1$ menée par une conique singulière. L'équation des courbes de chaque famille dépend de $2m^2+2m$ paramètres;*

2° *Seize familles de courbes passant par dix points singuliers et dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre $m+2$, menée par trois coniques singulières qui ont en commun un point singulier. L'équation générale des courbes de chaque famille dépend linéairement de $2m^2+2m-1$ paramètres.*

Chacune des seize familles de la première espèce est associée à une famille de la seconde espèce d'après la loi suivante : les courbes

(¹) Pour $m=1$, c'est-à-dire pour les courbes d'ordre quatre, la famille singulière n'existe pas (n° 28).

de la première famille passent par six points singuliers situés sur une même conique, les courbes de la famille associée passent par les dix autres points singuliers.

Dans ces énoncés, quand nous disons que l'équation d'une famille de courbes dépend linéairement de k paramètres, nous entendons que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 \Theta_1(u, v) + \lambda_2 \Theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{k+1} \Theta_{k+1}(u, v) = 0,$$

les λ étant des constantes arbitraires, et les Θ des fonctions normales de même ordre et de même caractéristique, simultanément paires ou impaires.

31. *Remarque.* — Les courbes d'ordre $4m$ ou $4m+2$ dont on vient de donner la détermination sur la surface de Kummer sont les plus générales de leur degré et n'ont pas de points multiples, si l'on ne particularise pas les fonctions thêta correspondantes.

Il est intéressant d'étudier la nature des points multiples qu'elles peuvent présenter en un des points singuliers de la surface; nous choisirons le point $u = 0$, $v = 0$, mais nos raisonnements s'étendraient sans difficulté à tous les autres.

Considérons les fonctions $\Theta_m(u, v)$, d'ordre m, normales, de caractéristique donnée, paires ou impaires.

Si elles ne s'annulent pas toutes pour $u = 0$, $v = 0$, elles sont paires et, par suite, celles d'entre elles qui deviennent nulles au point $(0, 0)$ ont aussi leurs dérivées premières, par rapport à u et à v, nulles au même point. On voit ainsi que les courbes de la famille correspondante ne passent pas toutes par le point $(0, 0)$, mais que celles qui y passent y ont un point double, et plus généralement un point multiple d'ordre pair.

Si les fonctions $\Theta_m(u, v)$ s'annulent toutes pour $u = 0$, $v = 0$, elles sont impaires, et les courbes correspondantes, qui passent toutes par le point $(0, 0)$, ne peuvent avoir en ce point qu'un point multiple d'ordre impair.

Ainsi :

Les courbes d'un même ordre et d'une même famille, qui passent *par un point singulier de la surface de Kummer, ont en ce point un point multiple d'ordre impair ou d'ordre pair, selon que toutes les courbes de la famille passent ou ne passent pas par ce point.*

Dans cet énoncé, le point multiple d'ordre impair peut être un point simple.

Ce résultat permet de déterminer la famille à laquelle appartient une courbe de la surface de Kummer lorsqu'on connaît l'ordre de multiplicité des seize points singuliers sur cette courbe.

Ainsi, une courbe d'ordre $4m$ ayant un point double en chacun des seize points singuliers est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m passant par ces points, etc.

32. Étant données deux courbes d'un même ordre et d'une même famille, il est clair que le produit des fonctions Θ correspondantes est toujours une fonction Θ normale paire, d'ordre pair, à caractéristique nulle : donc (n° **16**) ces deux courbes constituent l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique. Ainsi :

Par deux courbes tracées sur la surface de Kummer, de même degré, $2p$, et appartenant à la même famille, on peut toujours faire passer une surface d'ordre p, ne coupant plus la surface de Kummer en dehors de ces courbes.

Soient

$$\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \ldots + \lambda_{k+1}\Theta_{k+1} = 0,$$
$$\mu_1\Theta_1 + \ldots \quad + \ldots + \mu_{k+1}\Theta_{k+1} = 0$$

les équations des deux courbes considérées.

Les produits Θ_i et Θ_j étant (n° **16**) des fonctions entières, d'ordre p, des coordonnées $x_1, x_2, x_3\ x_4$, d'un point de la surface de Kummer, l'équation de la surface d'ordre p qui passe par les deux courbes s'obtiendra en remplaçant dans l'équation développée :

$$(\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \ldots + \lambda_{k+1}\Theta_{k+1})(\mu_1\Theta_1 + \ldots + \mu_{k+1}\Theta_{k+1}) = 0,$$

les produits Θ_i^2 et $\Theta_i\Theta_j$ par leurs valeurs en fonction entière des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

Dans le cas où les deux courbes coïncident, on obtiendra par ce procédé l'équation d'une surface d'ordre p inscrite à la surface de Kummer le long de la courbe unique considérée (n° 17).

Il va sans dire que si p est égal ou supérieur à 4, on pourra ajouter aux premiers membres des équations des surfaces ainsi obtenues une expression de la forme $K\varphi_{p-4}$, K étant le premier membre de l'équation de la surface de Kummer, et φ_{p-4} un polynôme homogène quelconque d'ordre $p-4$ en x_1, x_2, x_3, x_4.

Surfaces inscrites à la surface de Kummer.

33. Soit l'équation d'une courbe d'ordre $2p$

$$\lambda_1\Theta_1(u, v)+\ldots+\lambda_{k+1}\Theta_{k+1}(u, v)=0,$$

celle de la surface inscrite d'ordre p correspondante sera, comme on vient de le dire, de la forme

$$(10)\qquad \lambda_1^2 A_{11}+2\lambda_1\lambda_2 A_{12}+\lambda_2^2 A_{22}+\ldots+\lambda_{k+1}^2 A_{k+1.k+1}=0,$$

les A étant des polynômes d'ordre p en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette équation, si l'on y fait varier les paramètres λ, représente une famille de surfaces d'ordre p, qui sont toutes inscrites à la surface de Kummer le long des courbes d'ordre $2p$ appartenant à la même famille.

D'après cela, en appelant *surface inscrite* à la surface de Kummer une surface qui touche celle-ci en tous ses points de rencontre avec elle, on voit que la théorie des familles de surfaces inscrites est la même que celle des courbes algébriques de la surface, et qu'on peut énoncer les propositions suivantes :

Il existe trente-deux familles de surfaces d'ordre $2m$ inscrites à la surface de Kummer.

Les surfaces de la première famille sont inscrites suivant les courbes d'ordre $4m$ de la première famille; leur équation générale est de la forme

$$(11)\qquad A_m^2+K\varphi_{2m-4}=0,$$

où A_m et φ_{2m-4} sont des polynômes arbitraires en x_1, x_2, x_3, x_4, d'ordre marqué par l'indice; K est toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer.

Les surfaces de la deuxième famille sont inscrites le long des courbes d'ordre $4m$ de la famille singulière; leur équation générale est de la forme (10), *où $k = 2m^2 - 3$* (¹).

Les surfaces des trente dernières familles sont inscrites le long des courbes d'ordre $4m$ des trente dernières familles; leur équation générale est, pour les surfaces inscrites d'une même famille, de la forme (10) *où k a la valeur $2m^2 - 1$.*

De même :

Il existe trente-deux familles de surfaces d'ordre $2m+1$ inscrites à la surface de Kummer, le long des trente-deux familles de courbes d'ordre $4m+2$ de cette surface.

L'équation générale des surfaces inscrites de l'une des seize premières familles est de la forme (10), *où k a la valeur $2m^2 + 2m$: celle des surfaces inscrites de l'une des seize dernières familles est de la même forme, k ayant la valeur $2m^2 + 2m - 1$.*

34. Soient $A = 0$ et $C = 0$ deux surfaces inscrites du même ordre et d'une même famille; leurs deux courbes de contact sont (nº **32**) sur une surface $B = 0$, de même ordre, h, que les premières.

Si dans A on remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par les coordonnées d'un point de la surface de Kummer, exprimées en fonction hyperelliptique de u et v, et si l'on fait la même substitution dans B et dans C, on trouve, d'après le nº **32**,

$$A = \Theta_1^2(u, v), \qquad C = \Theta_2^2(u, v), \qquad B = \Theta_1\Theta_2,$$

Θ_1 et Θ_2 étant des fonctions thêta; on a donc identiquement, en tout point de la surface de Kummer,

$$AC - B^2 = 0,$$

(¹) Pour $m = 1$, cette famille de surfaces inscrites n'existe pas.

et, par suite, en réintroduisant dans A, B, C les coordonnées courantes, on obtient l'*identité*

$$AC - B^2 = KD,$$

où D est un polynôme entier d'ordre $2h - 4$ en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette identité a lieu *pour tous les points de l'espace;* elle nous sera très utile dans la suite.

35. Il est intéressant de remarquer que le nombre des familles de surfaces d'ordre p inscrites à la surface de Kummer est précisément égal à celui des familles de courbes d'ordre p inscrites à une courbe du quatrième degré, à un point double : par conséquent, si l'on considère la section de la surface de Kummer par un de ses plans tangents, on obtiendra *toutes* les courbes inscrites à cette section en coupant, par le même plan, toutes les surfaces inscrites à la surface de Kummer (¹).

La proposition ne serait plus vraie si, au lieu de la section par un plan tangent, on considérait une section plane quelconque.

CHAPITRE III.

Biquadratiques situées sur la surface de Kummer et quadriques inscrites à cette surface.

36. Après les coniques, les courbes de plus petit degré que l'on rencontre sur la surface de Kummer sont du quatrième ordre : il n'y

(¹) Nous renverrons, pour le nombre des familles de courbes d'ordre p inscrites à une quartique plane, possédant un point double, à notre Mémoire sur l'*Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à la Géométrie* (4ᵉ série de ce Journal, t. II). Il résulte des formules données aux nᵒˢ 39 et 43 de ce Mémoire qu'il existe seize systèmes de courbes d'ordre p inscrites à la quartique, chaque système se décomposant en deux familles, soit en tout trente-deux familles. Si p est pair, $p = 2m$, un des seize systèmes, est particulièrement remarquable : la première des deux familles de ce système comprend les courbes d'ordre m du plan comptées deux fois, et correspond à la première famille (11) de surfaces d'ordre $2m$ inscrites à la surface de Kummer; la seconde famille du système correspond à notre seconde famille (ou singulière) de surfaces inscrites;

a (nº **30**) que trente et une familles de courbes de cet ordre; la première se compose de l'ensemble des sections planes; les trente autres, dont nous allons maintenant aborder l'étude, sont composées de *biquadratiques*, car deux courbes *quelconques* d'une même famille étant (nº **32**) sur une quadrique, chacune de ces courbes est la base d'un faisceau ponctuel de surfaces du second ordre.

Les biquadratiques d'une même famille sont (nº **30**) les intersections de la surface de Kummer avec les quadriques passant par deux coniques singulières : en particulier, ces deux coniques constituent une biquadratique de la famille. Nous savons (nº **28**) que, pour la définition géométrique d'une famille de courbes d'ordre $4m$, on peut remplacer les deux coniques primitives par trois autres couples de coniques, les plans de quatre couples formant un octaèdre de Göpel; il en résulte que, dans une même famille de biquadratiques, figurent quatre couples de coniques.

Le long de toute biquadratique on peut (nº **17**) *inscrire à la surface de Kummer une surface du second ordre;* nous trouvons ainsi trente familles de quadriques inscrites, dont chacune comprend quatre couples de plans singuliers, formant un octaèdre de Göpel (¹).

Les biquadratiques et, par suite, les quadriques inscrites d'une même famille passent par les huit points singuliers communs aux couples de plans de l'octaèdre qui correspond à la famille.

Les trente familles sont deux à deux associées (nº **30**), de telle sorte que les octaèdres correspondant à deux familles associées n'ont aucun plan singulier commun.

Pour définir une famille de quadriques inscrites, il suffit de connaître l'octaèdre de Göpel qui lui correspond; or nous avons trouvé, au nº **24**, trois types de notations pour les octaèdres.

Dans le premier type, que nous désignerons par le symbole (entre crochets) $[\alpha\beta\alpha'\beta']$, les quatre couples de plans singuliers sont

$$\alpha\alpha' \text{ et } \beta\beta', \quad \alpha\beta' \text{ et } \beta\alpha', \quad \gamma\gamma' \text{ et } \delta\delta', \quad \gamma\delta' \text{ et } \delta\gamma';$$

(¹) MM. Rohn et Darboux ont établi l'existence des trente systèmes de quadriques inscrites, dont M. Darboux a fait connaître plusieurs propriétés géométriques que nous retrouvons plus loin (*Voir* Rohn, *Math. Annalen*, t. XV, p. 351; Darboux, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 686).

les huit points singuliers communs à ces quatre couples sont

$$(\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\gamma'),\quad (\beta\delta'),\quad (\gamma\alpha'),\quad (\gamma\beta'),\quad (\delta\alpha'),\quad (\delta\beta')\ (^1).$$

Dans le second type, que nous désignerons par le symbole $[\alpha'\beta']$, les couples de plans sont

$$\alpha\alpha' \text{ et } \alpha\beta',\quad \beta\alpha' \text{ et } \beta\beta',\quad \gamma\alpha' \text{ et } \gamma\beta',\quad \delta\alpha' \text{ et } \delta\beta',$$

et les huit points ont les mêmes symboles que ces huit plans.

Enfin, dans le troisième type, auquel nous attacherons le symbole $[\alpha\beta]$, les couples de plans sont

$$\alpha\alpha' \text{ et } \beta\alpha',\quad \alpha\beta' \text{ et } \beta\beta',\quad \alpha\gamma' \text{ et } \beta\gamma',\quad \alpha\delta' \text{ et } \beta\delta',$$

et les huit points ont les mêmes symboles.

Nous désignerons dans ce qui suit par *plans singuliers d'une famille* de quadriques inscrites les huit plans qui font partie de cette famille; par *points singuliers d'une famille* les huit points par lesquels passent les quadriques inscrites de la famille; nous représenterons une famille de biquadratiques ou de quadriques inscrites par le symbole de l'octaèdre correspondant, tel que $[\alpha\beta]$.

Il est clair que la famille associée de $[\alpha\beta]$ est $[\gamma\delta]$, de même que la famille associée de $[\alpha'\beta']$ est $[\gamma'\delta']$; enfin les familles $[\alpha\beta\alpha'\beta']$ et $[\alpha\beta\gamma'\delta']$ sont associées.

37. Cela posé, on vérifie aisément, à l'aide des notations symboliques, les propositions suivantes :

1° *Les biquadratiques d'une même famille ont deux points singuliers communs avec tout plan singulier n'appartenant pas à la famille*, d'où il suit que ces courbes coupent le plan considéré en *deux* points mobiles.

D'ailleurs toute courbe tracée sur la surface de Kummer touche nécessairement un plan singulier en tous les points, non singuliers, où elle le rencontre, et dès lors les biquadratiques d'une famille touchent

(1) D'après cela, les symboles $[\alpha\beta\alpha'\beta']$ et $[\gamma\delta\gamma'\delta']$ désignent le même octaèdre.

en un point les huit plans singuliers qui ne font pas partie de la famille; donc :

Les quadriques inscrites d'une même famille touchent les huit plans singuliers de la famille associée.

2° *Deux familles de quadriques inscrites, non associées, ont en commun quatre plans et quatre points singuliers;* mais *deux cas* sont ici à distinguer.

Dans le *premier cas,* les quatre plans singuliers communs forment un *tétraèdre de Rosenhain,* dont les sommets sont les quatre points singuliers communs. Ainsi, les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha\gamma]$ ont en commun le tétraèdre de Rosenhain : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$.

Dans le *second cas,* les quatre plans singuliers communs forment un *groupe de Göpel,* et appartiennent à une troisième famille; ainsi les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha'\beta']$ ont en commun les quatre plans $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, qui appartiennent à la famille $[\alpha\beta\alpha'\beta']$. Quant aux quatre points communs aux deux premières familles, ils forment aussi un groupe de Göpel et appartiennent à la famille associée de $[\alpha\beta\alpha'\beta']$.

On trouve sans difficulté à l'aide de la notation symbolique qu'*une famille de quadriques inscrites a en commun, avec* douze *autres familles, quatre plans singuliers formant un groupe de Göpel; avec* seize *autres, quatre plans singuliers formant un groupe de Rosenhain;* la trentième famille est l'*associée* de la première.

Ainsi, les douze familles qui ont en commun avec $[\alpha\beta]$ un groupe de Göpel de plans singuliers sont :

$$[\alpha'\beta'],\quad [\gamma'\delta'],\quad [\alpha'\gamma'],\quad [\beta'\delta'],\quad [\alpha'\delta'],\quad [\beta'\gamma'],$$
$$[\alpha\beta\alpha'\beta'],\quad [\alpha\beta\gamma'\delta'],\quad [\alpha\beta\alpha'\gamma'],\quad [\alpha\beta\beta'\delta'],\quad [\alpha\beta\alpha'\delta'],\quad [\alpha\beta\beta'\gamma'].$$

Les autres familles (l'associée $[\gamma\delta]$ exceptée) ont en commun avec $[\alpha\beta]$ quatre plans formant un groupe de Rosenhain.

3° *Deux biquadratiques appartenant respectivement à deux familles associées se coupent en quatre points mobiles :* cela résulte de la formule de M. Poincaré, car, d'après cette formule, deux fonctions Θ du second ordre ont huit zéros communs; les deux Θ qui correspondent à deux biquadratiques étant des fonctions soit paires, soit impaires, les huit zéros communs sont deux à deux égaux et de signes contraires, et ne donnent dès lors que quatre points de la surface de Kummer.

Deux biquadratiques appartenant à deux familles non associées se coupent en deux points mobiles : car, parmi les huit zéros communs aux deux fonctions Θ correspondantes, figurent *quatre* demi-périodes, donnant les *quatre* points singuliers communs aux deux courbes; les quatre autres zéros, deux à deux égaux et de signes contraires, donnent *deux* points de la surface de Kummer.

En d'autres termes :

Deux quadriques inscrites, appartenant respectivement à deux familles associées, se touchent en quatre points, et se coupent dès lors suivant quatre droites. (DARBOUX.)

Deux quadriques inscrites, appartenant respectivement à deux familles non associées se touchent en deux points.

Nous allons faire voir que, dans ce dernier cas, les deux quadriques se coupent suivant *deux coniques,* ou suivant *une droite et une cubique,* selon que les quatre plans singuliers qui leur sont communs forment un groupe de Göpel ou un groupe de Rosenhain.

38. Considérons d'abord *un groupe de Göpel de plans singuliers;* soient $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=0$ les équations de ces quatre plans; $V=0$ celle de la quadrique qui contient (n° **25**) leurs coniques de contact avec la surface de Kummer; l'équation de celle-ci est de la forme

$$K = V^2 - xyzt = 0. \tag{12}$$

Les quadriques représentées par l'équation

$$\lambda^2 yz + 2\lambda V + xt = 0,$$

où λ est un paramètre variable, sont inscrites à la surface de Kummer, $K=0$, puisque leur enveloppe a pour équation $V^2 - xyzt = 0$, et cette famille de quadriques comprend évidemment les deux couples de plans $yz = 0$ et $xt = 0$. Les équations

$$\mu^2 zx + 2\mu V + yt = 0,$$
$$\varpi^2 xy + 2\varpi V + zt = 0,$$

où μ et ϖ sont des paramètres variables, représentent aussi des quadriques inscrites à $K = 0$, et chacune de ces nouvelles familles comprend, comme la première, les quatre plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Nous avons ainsi les équations de trois familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer, et ayant en commun un groupe de Göpel de plans singuliers; il est clair d'ailleurs, pour que $K = 0$ soit une surface de Kummer, que les coefficients de V doivent vérifier certaines conditions, mais ces conditions sont inutiles à préciser pour ce qui suit. Posons, pour abréger,

$$A = \lambda^2 yz + 2\lambda V + xt,$$
$$B = \mu^2 zx + 2\mu V + yt,$$
$$C = \varpi^2 xy + 2\varpi V + zt,$$

et

$$\varphi = \lambda yz + \mu zx + \varpi xy,$$
$$\psi = \lambda\mu z + \lambda\varpi y + \mu\varpi x,$$
$$S = V(t + \psi) + t\varphi + \lambda\mu\varpi xyz,$$
$$G = 8\lambda\mu\varpi V + 4\lambda\mu\varpi\varphi - (t - \psi)^2,$$

on a *identiquement*

$$ABC - S^2 = KG.$$

On a également les identités

$$4\mu\varpi A = G + (t - \psi + 2\mu\varpi x)^2,$$
$$4\lambda\varpi B = G + (t - \psi + 2\lambda\varpi y)^2,$$
$$4\lambda\mu C = G + (t - \psi + 2\lambda\mu z)^2.$$

Ces dernières relations montrent que les quadriques A, B, C sont circonscrites à la quadrique G, et se coupent deux à deux suivant deux coniques; la première identité fait voir que les trois coniques de contact des quadriques A, B, C, avec la quadrique G, sont sur une surface cubique, $S = 0$, qui passe par les biquadratiques de contact des trois premières quadriques avec la surface de Kummer, $K = 0$. On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Soient deux familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer et ayant en commun quatre plans singuliers formant un groupe de Göpel; ces quatre plans appartiennent à une troisième famille de quadriques inscrites.

Trois quadriques inscrites quelconques, appartenant respectivement à ces trois familles, ont leurs biquadratiques de contact avec la surface de Kummer situées sur une même surface cubique, qui coupe en outre chacune d'elles suivant une conique; il existe une surface du second ordre inscrite aux trois quadriques le long des trois coniques ainsi déterminées.

Les trois quadriques se coupent deux à deux suivant deux coniques.

39. Les identités précédentes donnent encore lieu à d'autres conséquences.

Les deux quadriques A et B se touchent en deux points situés sur la droite $t - \psi + 2\mu\varpi x = 0$; $t - \psi + 2\lambda\varpi y = 0$, qui rencontre évidemment la droite $x = 0$, $y = 0$, et aussi, en vertu de l'expression de ψ, la droite $t = 0$, $z = 0$: donc les trois quadriques A, B, C se touchent deux à deux en deux points, situés d'ailleurs sur la surface de Kummer, et les trois droites qui joignent les points de contact d'un même couple s'appuient sur deux arêtes opposées du tétraèdre de référence. De plus, ces trois droites concourent au point d'intersection des trois plans

$$t - \psi + 2\mu\varpi x = 0, \qquad t - \psi + 2\lambda\varpi y = 0, \qquad t - \psi + 2\lambda\mu z = 0,$$

c'est-à-dire au point

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\varpi} = \frac{t}{\lambda\mu\varpi}.$$

Inversement, si ce point est donné arbitrairement, on déterminera les quadriques A, B, C, qui lui correspondent, par les relations

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{\mu}{y} = \frac{\varpi}{z} = \frac{\lambda\mu\varpi}{t}$$

qui donnent, pour λ, μ, ϖ, deux systèmes de solutions (en écartant la solution $\lambda = \mu = \varpi = 0$),

$$\lambda^2 = \frac{tx}{yz}, \qquad \mu = \lambda\frac{y}{x}, \qquad \varpi = \lambda\frac{z}{x}.$$

Observant que la quadrique $G = 0$ touche évidemment la surface de Kummer aux six points de contact des quadriques A, B, C deux à deux, on déduit de cette analyse les conséquences suivantes :

Trois quadriques inscrites à la surface de Kummer, et appartenant respectivement à trois familles qui ont en commun quatre plans singuliers formant un tétraèdre de Göpel, se touchent deux à deux en deux points; les trois droites qui joignent les trois couples de points de contact sont concourantes et s'appuient respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre; de plus, en ces six points de contact, une même quadrique (celle qui est inscrite aux trois quadriques primitives) *touche la surface de Kummer.*

Inversement, *trois droites menées par un point quelconque de l'espace et s'appuyant respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre de Göpel de plans singuliers, coupent, au total, la surface de Kummer en douze points, qui se partagent en deux groupes de six points, situés par couple sur les trois droites considérées : les six points de chaque groupe sont les points de contact de la surface de Kummer avec une surface du second ordre* (¹).

40. Considérons maintenant deux familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer et ayant en commun *quatre plans formant*

(¹) Ce théorème et celui du n° 36 s'appliquent, avec de simples modifications de langage, à toutes les surfaces du quatrième ordre représentées par une équation de la forme (12), puisque c'est cette forme qui a servi de base à nos calculs.

un groupe de Rosenhain; par exemple, les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha\gamma]$, qui ont en commun les quatre plans $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$: remarquons que les quatre autres plans singuliers de la famille $[\alpha\beta]$ et les quatre autres plans de la famille $[\alpha\gamma]$, à savoir : $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, $\beta\gamma'$, $\beta\delta'$ et $\gamma\alpha'$, $\gamma\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\gamma\delta'$, appartiennent à une même famille $[\beta\gamma]$, et l'on vérifie aisément que c'est là un fait général.

Cela posé, soit un des quatre plans communs aux deux familles considérées primitivement, $\alpha\alpha'$ par exemple; ce plan, associé au plan $\beta\alpha'$, forme une quadrique de la première famille, $[\alpha\beta]$, et, associé au plan $\gamma\alpha'$, une quadrique de la deuxième famille, $[\alpha\gamma]$; les deux plans $\beta\alpha'$ et $\gamma\alpha'$ forment une quadrique de la famille $[\beta\gamma]$ (n° **36**).

Désignons maintenant par $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ les équations respectives des trois plans $\alpha\alpha'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$: ces trois plans se coupent au point singulier $(\delta\alpha')$, et, par suite, leurs coniques de contact avec la surface de Kummer ne peuvent être sur une même quadrique.

L'équation de la surface de Kummer pourra se mettre sous l'une des trois formes

$$L^2 - lyz = 0, \qquad M^2 - mzx = 0, \qquad N^2 - nxy = 0,$$

L, M, N, l, m, n étant des polynômes du second ordre en x, y, z, t. On pourra évidemment disposer des facteurs constants qui figurent dans ces polynômes pour qu'on ait identiquement

$$L^2 - lyz = M^2 - mzx = N^2 - nxy.$$

On en déduit

$$L^2 - M^2 = z(ly - mx),$$

ce qui montre que L − M ou L + M est divisible par z. On a ainsi

$$L \pm M = 2rz, \qquad M \pm N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy,$$

p, q, r étant linéaires en x, y, z, t. Comme L, M, N ne figurent dans l'équation de la surface de Kummer que par leurs carrés, ils ne sont déterminés qu'au signe près et l'on peut écrire, sans diminuer la généralité.

$$L + M = 2rz, \qquad M + N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy.$$

On a donc deux cas à distinguer.

Si l'on prend le signe — dans $N \pm L$, on écrira, en changeant pour la symétrie les signes de M et p,

$$L - M = 2rx, \qquad M - N = 2px, \qquad N - L = 2qy;$$

d'où

$$px + qy + rz = 0;$$

c'est-à-dire

$$2p = cy - bz, \qquad 2q = az - cx, \qquad 2r = bx - ay,$$

a, b, c désignant des constantes. On en conclut

$$L - ayz = M - bzx = N - cxy,$$

et, en appelant V la valeur commune de ces expressions, les trois formes de l'équation de Kummer deviennent

$$V^2 - l'yz = 0, \qquad V^2 - m'zx = 0, \qquad V^2 - n'xy = 0,$$

l', m', n' étant des polynômes du second ordre. On en déduit de suite

$$l' = Tx, \qquad m' = Ty, \qquad n' = Tz,$$

T étant du premier ordre, et la surface de Kummer a pour équation

$$V^2 - xyzT = 0.$$

Les trois coniques de contact des plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sont sur une quadrique, $V = 0$: c'est le cas examiné plus haut, ce n'est pas celui dans lequel nous nous sommes supposés placés; nous devons donc admettre la seconde hypothèse, celle où l'on a

$$L + M = 2rz, \qquad M + N = 2px, \qquad N + L = 2qy,$$

qui donne

$$L = qy + rz - px, \qquad M = rz + px - qy, \qquad N = px + qy - rz.$$

La relation

$$L^2 - M^2 = z(ly - mx)$$

devient alors

$$4r(qy - px) = ly - mx,$$

et, de même, on a

$$4p(rz - qy) = mz - ny,$$

d'où l'on tire

$$\frac{l - 4rq}{x} = \frac{m - 4rp}{y} = \frac{n - 4pq}{z},$$

et, par suite,

$$l = \theta x + 4rq, \qquad m = \theta y + 4rp, \qquad n = \theta z + 4pq,$$

θ étant linéaire en x, y, z, t. L'équation de la surface de Kummer, $L^2 - lyz = 0$, est alors

$$(13) \qquad \theta xyz = p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2pqxy - 2prxz - 2qryz.$$

Les trois familles de quadriques inscrites auxquelles appartiennent respectivement les couples de plans $yz = 0$, $zx = 0$, $xy = 0$ ont pour équations, en désignant par λ, μ, ϖ des constantes arbitraires,

$$\begin{aligned} A &= \lambda^2 yz + 2\lambda(qy + rz - px) + 4rq + \theta x = 0,\\ B &= \mu^2 zx + 2\mu(rz + px - qy) + 4pr + \theta y = 0,\\ C &= \varpi^2 xy + 2\varpi(px + qy - rz) + 4pq + \theta z = 0; \end{aligned}$$

car on vérifie de suite que l'enveloppe des surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ est bien la surface (13).

Ces équations montrent que toute quadrique A coupe toute quadrique B ou C suivant une droite et une cubique gauche; on a, en effet, identiquement,

$$Ay - Bx = (\lambda y + \mu x + 2r)[z(\lambda y - \mu x) + 2(qy - px)].$$

Or le plan

$$o = \lambda y + \mu x + 2r$$

touche A, car on vérifie immédiatement que la droite de ce plan, $\lambda y + 2r = o$, $x = o$ est sur la quadrique A; ce plan touche de même la quadrique B. Il résulte de ces remarques et de l'identité précédente que les deux quadriques A et B ont une droite commune, située dans le plan $\lambda y + \mu x + 2r = o$; on verrait de même que les surfaces A, B, C se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique.

La biquadratique de contact de la surface $A = o$ et de la surface de Kummer est donnée par les deux équations

$$\lambda yz + qy + rz - px = o, \qquad \lambda(qy + rz - px) + 4rq + \theta x = o.$$

Or, considérons le polynôme du troisième ordre,

$$\begin{aligned} S = {} & (\lambda yz + qy + rz - px)(2\varpi r + 2\mu q + \mu\varpi x - \theta) \\ & - (\lambda qy + \lambda rz - \lambda px + 4rq + \theta x)(\varpi y + \mu z + 2p). \end{aligned}$$

D'après la forme même de son équation, la surface cubique, $S = o$, passe par la biquadratique de contact de la quadrique A avec la surface de Kummer : si nous développons cette équation nous trouvons

$$\begin{aligned} S = {} & + \lambda\mu\varpi xyz + \lambda yz(\mu q + \varpi r - \theta) + 2qy(\mu q - \lambda p - \varpi r) \\ & - \lambda\varpi qy^2 \quad + \mu zx(\lambda p + \varpi r - \theta) + 2rz(\varpi r - \mu q - \lambda p) \\ & - \lambda\mu rz^2 \quad + \varpi xy(\lambda p + \mu q - \theta) + 2px(\lambda p - \mu q - \varpi r) \\ & - \mu\varpi px^2 \quad - t(px + qy + rz) - 8pqr. \end{aligned}$$

On voit ainsi que S est symétrique par rapport à x, y, z; p, q, r; λ, μ, ϖ; c'est-à-dire ne change pas quand on permute x, y, z en permutant de la même manière p, q, r et λ, μ, ϖ, et laissant θ invariable : il résulte de cette remarque que la surface $S = o$ passe par les courbes de contact de la surface de Kummer avec les *trois* quadriques A, B, C.

Cette surface cubique, $S = o$, coupe A, en dehors de la biquadratique de contact, suivant une conique; comme on peut écrire identiquement

$$\begin{aligned} S = (\lambda yz + qy + rz - px) \\ \times (\mu\varpi x + \lambda\varpi y + \lambda\mu z + 2\lambda p + 2\mu q + 2\varpi r - \theta) \\ - A(\mu z + \varpi y + 2p), \end{aligned}$$

le plan de cette conique a pour équation

$$P = \mu\varpi x + \lambda\varpi y + \lambda\mu z + 2\lambda p + 2\mu q + 2\varpi r - \theta = 0.$$

Cette équation est encore symétrique en x, y, z; p, q, r; λ, μ, ϖ; il en résulte que les trois coniques suivant lesquelles la surface $S = 0$ coupe les trois quadriques A, B, C sont dans un même plan, $P = 0$.

Or la section de la surface $S = 0$ par ce plan est du troisième degré; on déduit de là, en se rappelant que les quadriques A, B, C se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique, que le plan $P = 0$ coupe $S = 0$ suivant trois droites, qui sont les droites communes aux surfaces A, B, C prises deux à deux.

Ce résultat peut d'ailleurs se vérifier directement sans difficulté.

On a ainsi les propositions suivantes :

Soient deux familles, F_1 et F_2, *de quadriques inscrites à la surface de Kummer, ayant en commun quatre plans singuliers formant un groupe de Rosenhain; les quatre autres plans singuliers de chacune de ces familles appartiennent à une troisième famille* F_3.

Trois quadriques inscrites quelconques, appartenant respectivement à ces trois familles, se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique gauche; les trois droites, communes à ces quadriques prises deux à deux, sont dans un même plan.

Les biquadratiques de contact des trois quadriques avec la surface de Kummer sont sur une même surface du troisième ordre, qui passe en outre par les trois droites précédentes ([1]).

41. *Remarque.* — Les notations que nous avons adoptées pour

([1]) On a des propriétés semblables pour les surfaces du quatrième ordre dont l'équation peut se mettre sous la forme (13).

représenter les plans singuliers de la surface de Kummer sont liées d'une manière très étroite à l'algorithme de Hesse pour la représentation des bitangentes d'une courbe plane du quatrième ordre.

Soient huit caractères, 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4' : combinés deux à deux sans distinction entre les caractères accentués et ceux non accentués, ils donnent vingt-huit symboles, 12, 13, ..., 11', ..., 3'4', qui, dans la notation de Hesse, représentent respectivement les vingt-huit bitangentes d'une quartique, et les symboles peuvent être appliqués aux bitangentes de manière à vérifier les conditions suivantes.

On sait que la courbe du quatrième ordre admet soixante-trois systèmes de coniques inscrites, c'est-à-dire la touchant chacune en quatre points; chacun de ces systèmes comprend six couples de bitangentes, qui, dans la notation de Hesse, correspondent à deux types de symboles.

Dans le premier type, on obtient les six couples de bitangentes en divisant les huit caractères en deux groupes de quatre, et en combinant deux à deux les caractères de chaque groupe; ainsi, en partant de la division 1231', 42'3'4', on obtient les six couples 12,31'; 13,21'; 11',23; 42',3'4'; 43',2'4'; 44',2'3'.

Le système de coniques inscrites correspondant, c'est-à-dire le système auquel appartiennent les six couples précédents, pourra se désigner par [1231'].

Dans le second type, on obtient les six couples de bitangentes d'un même système en combinant deux des caractères, 1 et 2 par exemple, avec les six autres, ce qui donne les six couples 12,23; 14,24; 11',21'; 12',22'; 13',23'; 14',24', et le système de coniques inscrites correspondant pourra se désigner par le symbole [12].

Cela posé, la relation entre la notation de Hesse et la nôtre est la suivante : la section de la surface de Kummer par un plan admet pour tangentes doubles les intersections de ce plan avec les seize plans singuliers; on peut appliquer la notation de Hesse, de telle sorte que ces seize bitangentes aient les mêmes symboles que les seize plans singuliers correspondants dans notre notation.

Ainsi la bitangente située dans le plan 11' aura la notation 11'. On vérifie cette règle sans difficulté, en partant des propriétés des familles de quadriques inscrites.

On voit aussi que les notations, dans le système de Hesse, des trente familles de coniques inscrites qui sont les sections, par le plan considéré, des trente familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer, coïncident avec les notations que nous avons proposées pour ces familles de quadriques.

CHAPITRE IV.

Sextiques et surfaces inscrites du troisième ordre.

42. Il y a, sur la surface de Kummer, trente-deux familles de courbes du sixième ordre ou *sextiques*, se partageant en deux groupes de seize familles chacun (n° **30**).

Les courbes du premier groupe, que nous allons tout d'abord étudier, sont les intersections de la surface de Kummer avec des quadriques menées par une des seize coniques singulières; à chaque conique singulière correspond ainsi une famille de sextiques, que nous représenterons par le symbole même de cette conique, $\alpha\alpha'$.

L'équation générale des sextiques d'une famille $\alpha\alpha'$ est de la forme (n° **30**)

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 + \lambda_5\theta_5 = 0,$$

les λ étant des constantes arbitraires et les θ des fonctions thêta normales, du troisième ordre, de même caractéristique, simultanément paires ou impaires, qui s'annulent pour les six demi-périodes correspondant aux points singuliers du plan $\alpha\alpha'$, points qui sont situés sur toutes les sextiques de la famille $\alpha\alpha'$.

Un plan singulier, autre que $\alpha\alpha'$, passe par deux des points singuliers situés dans ce plan; il en résulte, par la répétition d'un raisonnement fait au n° **37**, que toutes les sextiques de la famille $\alpha\alpha'$ touchent en *deux* points chacun des quinze plans singuliers autres que $\alpha\alpha'$.

Le long de chaque sextique de la famille on peut inscrire à la surface de Kummer une surface cubique (n° **17**), qui, d'après ce qui précède, touchera en *deux* points les plans singuliers, le plan $\alpha\alpha'$ excepté, c'est-à-dire aura une droite dans chacun de ces plans.

Deux sextiques de la famille $\alpha\alpha'$ se coupent en six points en dehors des six points singuliers qui leur sont communs; en effet, les deux fonctions Θ correspondantes ont $2.3.3 = 18$ zéros communs; si l'on retranche les six demi-périodes relatives aux six points singuliers du plan $\alpha\alpha'$, il reste douze zéros, deux à deux égaux et de signes contraires, qui donnent six points de la surface de Kummer.

Ces six derniers points sont sur une conique, car les deux quadriques qui passent respectivement par les deux sextiques considérées se coupent, en dehors de la conique $\alpha\alpha'$, suivant une deuxième conique.

Les surfaces du troisième ordre inscrites à la surface de Kummer le long des deux sextiques précédentes se touchent donc en six points, situés dans un même plan, et ont, par suite, en commun, dans ce plan, une courbe du troisième ordre.

Parmi les surfaces cubiques inscrites le long des sextiques de la famille $\alpha\alpha'$, et que nous appellerons *surfaces inscrites* de la famille $\alpha\alpha'$, figurent des groupes de trois plans singuliers : on les obtient en menant par la conique $\alpha\alpha'$ des quadriques coupant la surface de Kummer suivant trois nouvelles coniques; les plans de ces trois coniques forment évidemment une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$. Le nombre de ces surfaces décomposables est, d'après cela (nº 25), égal au nombre des groupes de Göpel qui comprennent le plan singulier $\alpha\alpha'$: comme il y a soixante groupes de Göpel, chaque plan singulier appartient à $\frac{4.60}{15} = 15$ de ces groupes, et il y a, dans la famille $\alpha\alpha'$, 15 surfaces cubiques inscrites composées de trois plans singuliers.

Une quelconque de ces surfaces décomposables a, comme on vient de le dire, une cubique plane commune, avec une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$: cette cubique plane se décomposé nécessairement en trois droites; en d'autres termes, on peut dire que les quinze droites qu'une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$ a respectivement dans les quinze plans singuliers autres que le plan $\alpha\alpha'$ sont réparties trois à trois dans quinze plans [1].

---

[1] Ces quinze droites forment la figure obtenue en enlevant parmi les vingt-sept droites d'une surface cubique, douze droites d'un même double-six.

Voici quelques propositions géométriques relatives à ces quinze plans, qui sont des *plans tritangents* de la surface cubique inscrite considérée.

Soient $\mathfrak{S}(u, v)$ la fonction du premier ordre qui correspond au plan $\alpha\alpha'$; Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les quatre fonctions normales du second ordre à caractéristique nulle qui sont proportionnelles aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface de Kummer.

Les fonctions Θ, d'ordre trois, qui correspondent aux sextiques $\alpha\alpha'$, ont (n° **29**) même caractéristique que la fonction $\mathfrak{S}$, et sont paires ou impaires en même temps qu'elle; il en résulte qu'on obtiendra quatre de ces fonctions, linéairement indépendantes, en multipliant Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 par $\mathfrak{S}$. Si maintenant nous désignons par θ_5 une autre fonction du troisième ordre, de même caractéristique, et paire ou impaire en même temps que $\mathfrak{S}$, l'équation d'une sextique $\alpha\alpha'$ sera de la forme

$$(1) \qquad \theta_5 = \lambda_1 \mathfrak{S}\Theta_1 + \lambda_2 \mathfrak{S}\Theta_2 + \lambda_3 \mathfrak{S}\Theta_3 + \lambda_4 \mathfrak{S}\Theta_4,$$

les λ étant des constantes.

Soit une autre sextique

$$(1') \qquad \theta_5 = \lambda'_1 \mathfrak{S}\Theta_1 + \lambda'_2 \mathfrak{S}\Theta_2 + \lambda'_3 \mathfrak{S}\Theta_3 + \lambda'_4 \mathfrak{S}\Theta_4,$$

il vient, en retranchant ces équations membre à membre,

$$0 = [(\lambda_1 - \lambda'_1)\Theta_1 + \ldots + (\lambda_4 - \lambda'_4)\Theta_4]\mathfrak{S}.$$

Le plan

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)x_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)x_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)x_3 + (\lambda_4 - \lambda'_4)x_4 = 0$$

est donc celui qui passe par les six points non singuliers communs aux deux sextiques (1) et (1').

La seconde sextique se décompose en trois coniques singulières pour quinze systèmes de valeurs des λ'; pour un de ces systèmes de valeurs, le plan précédent étant, d'après ce qui a été dit plus haut, un plan tritangent de la surface cubique inscrite le long de la sextique (1), il s'ensuit que quinze des plans tritangents de cette surface auront des équations de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 15),$$

les A_i étant des fonctions linéaires des x, dont les coefficients ne dépendent pas de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4.

Ces équations sont linéaires en $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, et, en retranchant membre à membre deux quelconques d'entre elles, on trouve une expression indépendante de λ; les quinze plans se coupent donc deux à deux sur des plans fixes, $A_i - A_j = 0$; quant au fait que les λ figurent linéairement, on peut en déduire aussi quelques conséquences géométriques. En effet, l'équation de la quadrique qui passe par la conique $\vartheta = 0$ et par la sextique donnée par la relation (1) s'obtient en multipliant les deux membres de cette relation par ϑ et en remplaçant ensuite les fonctions $\vartheta\theta_5$, $\vartheta^2\Theta_1$, ... par leurs expressions en fonction quadratique de x_1, x_2, x_3, x_4 : cette équation est donc linéaire par rapport aux λ, et de la forme

$$(2) \qquad R_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) R_1;$$

les R sont des polynômes en x, de degré égal à l'indice; $R_1 = 0$ est le plan de la conique $\vartheta = 0$. Donc, si l'on établit entre les λ deux relations linéaires, homogènes ou non, à coefficients constants, cela revient à écrire que la quadrique (2) passe, en outre, par deux points fixes de l'espace, et réciproquement; si l'on établit trois relations linéaires entre les λ, on exprime de même que la quadrique précédente passe par trois points fixes, et réciproquement. Les équations des quinze plans tritangents, si l'on y remplace deux ou trois des λ en fonction linéaire des autres, deviennent alors

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = A_i + P_3 \quad \text{dans le premier cas,}$$

et

$$\lambda_1 Q_1 = A_i + Q_2 \quad \text{dans le second,}$$

les P et Q étant linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 et restant les mêmes dans les quinze équations. Donc, dans le premier cas les quinze plans tritangents pivotent respectivement autour de quinze points fixes qui sont sur la droite $P_1 = 0$, $P_2 = 0$; et dans le second cas, autour de quinze droites fixes, qui sont dans le plan $Q_1 = 0$. D'ailleurs l'équation (2) de la quadrique devient

$$R_2 + R_1 P_3 = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) R_1 \quad \text{dans le premier cas,}$$

et

$$R_2 + R_1 Q_2 = \lambda_1 Q_1 R_1 \quad \text{dans le second.}$$

On voit ainsi que les deux points fixes par lesquels passe cette quadrique, dans le premier cas, sont sur la droite $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, et que les trois points fixes par lesquels elle passe, dans le second, sont dans le plan $Q_1 = 0$.

43. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude du premier groupe de sextiques et de surfaces cubiques inscrites, et nous énoncerons les propriétés que nous venons d'établir, dans le résumé suivant :

Soit C *une conique de la surface de Kummer; les quadriques menées par* C *coupent en outre la surface suivant une famille quatre fois infinie de sextiques, le long de chacune desquelles on peut inscrire à la surface de Kummer une surface du troisième ordre.*

Deux de ces surfaces inscrites se touchent en six points situés sur une conique et ont en commun une cubique plane dans le plan de cette conique.

Toute surface cubique inscrite, de la famille considérée, a une droite dans chacun des plans singuliers de la surface de Kummer autres que le plan de la conique C; *ces quinze droites sont trois à trois dans quinze nouveaux plans, qui sont, par suite, des plans tritangents de la surface cubique.*

Pour une surface cubique inscrite, variant dans la même famille, les quinze plans tritangents ainsi définis se coupent deux à deux sur des plans fixes.

Par la conique C *et par deux points* A *et* B *de l'espace, faisons passer des quadriques, et considérons, le long des courbes qu'elles découpent sur la surface de Kummer, les surfaces cubiques inscrites à celle-ci : pour chacune de ces surfaces, les quinze plans tritan-*

gents définis plus haut pivotent respectivement autour de quinze points, alignés sur la droite AB.

Si les quadriques qui passent par la conique C *passent par trois points de l'espace* A, B, D, *les quinze plans précédents pivotent respectivement autour de quinze droites, situées dans le plan des points* A, B, D.

44. Arrivons maintenant à l'étude du *second groupe de familles de sextiques* qu'on peut tracer sur la surface de Kummer.

Chacune de ces familles s'obtient par l'intersection de la surface avec des surfaces du troisième ordre menées par trois coniques singulières qui ont un point singulier commun; soit $\Im = 0$ l'équation de la conique $\alpha\alpha'$ qui forme avec les trois précédentes un groupe de Rosenhain: l'équation des sextiques de la famille considérée sera (n° **29**) de la forme

$$(3) \qquad \lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 = 0,$$

les λ étant des constantes et les θ des fonctions normales, d'ordre trois, de même caractéristique que $\Im$, toutes impaires si $\Im$ est pair, et toutes paires si $\Im$ est impair.

Ces courbes passent (n° **29**) par les dix points singuliers qui ne sont pas dans le plan $\alpha\alpha'$; chacun des quinze plans singuliers autres que $\alpha\alpha'$ les coupe donc en quatre points singuliers et les touche par suite en un point; quant au plan $\alpha\alpha'$, il les touche évidemment en trois points, situés sur la conique $\alpha\alpha'$.

Les surfaces cubiques, inscrites le long des sextiques considérées, passent donc par les dix points singuliers qui ne sont pas dans le plan $\alpha\alpha'$, et admettent ce plan pour plan tritangent, les trois points de contact étant sur la conique $\alpha\alpha'$; elles touchent en un point les quinze autres plans singuliers.

Deux sextiques de la famille (3) *se coupent*, en dehors des dix points singuliers qui leur sont communs, *en quatre points :* en effet, les premiers membres des équations des deux courbes ont, d'après la formule de M. Poincaré, $2.3.3 = 18$ solutions communes, parmi lesquelles figurent dix demi-périodes; les huit autres solutions, deux à deux égales et de signes contraires, donnent quatre points de la surface de Kummer.

45. Cela posé, soient $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ les surfaces cubiques inscrites à la surface de Kummer le long de deux sextiques, s_1 et s_2; $S = 0$ la surface cubique qui passe par ces deux courbes; on a identiquement (n° **34**)

$$S_1 S_2 - S^2 = KG, \tag{4}$$

G étant du second ordre par rapport aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, et K désignant toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer.

De cette identité découlent des conséquences nombreuses et importantes.

46. Observons d'abord que les surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$ n'ont pas, en général, de courbe commune. Pour démontrer cette proposition, il suffit de la vérifier dans un cas particulier, celui, par exemple, où la surface S_2 se décompose en trois plans singuliers, formant avec le plan xx' un groupe de Rosenhain: on voit alors de suite que les trois surfaces n'ont pas de courbe commune.

Cela posé, l'*identité* (4) montre d'abord que les points, en nombre égal à 27, communs aux trois surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$, sont des points doubles de la surface $KG = 0$: or, ces trois surfaces passent d'abord par dix mêmes points singuliers de la surface de Kummer; de plus, elles se touchent en chacun des quatre autres points communs aux deux sextiques s_1 et s_2; il est clair, d'ailleurs, qu'elles n'ont pas d'autre point commun sur la surface de Kummer. Les points qui précèdent comptent pour $10 + 4.4 = 26$ points d'intersection; les trois surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$ ont donc un vingt-septième point commun, non situé sur $K = 0$, et ce point, étant un point double de la surface $KG = 0$, est un point double de la quadrique $G = 0$: celle-ci est donc un cône du second ordre.

L'*identité* (4) montre en second lieu que le cône $G = 0$ touche la surface de Kummer en chacun des quatre points communs aux deux sextiques s_1 et s_2, en dehors des points singuliers : la proposition est évidente.

47. En troisième lieu, le cône $G = 0$, en vertu de l'*identité*, est inscrit à chacune des deux surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, le long de la courbe, non située sur $K = 0$, où cette surface, S_1 ou S_2, est coupée par $S = 0$. La courbe commune à S_1 et S comprend la sextique s_1, située sur la surface de Kummer, et une cubique gauche : le cône $G = 0$ touche donc, suivant une cubique gauche, chacune des deux surfaces S_1, S_2.

Remarquons maintenant que l'équation de la surface $S = 0$, lorsque la surface S_1 est donnée, dépend linéairement de quatre coefficients, c'est-à-dire de trois paramètres : soient, en effet,

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3 + \mu_4\theta_4 = 0$$

les deux équations des deux sextiques s_1 et s_2; la surface $S = 0$ qui passe par ces deux sextiques aura une équation de la forme

$$\Sigma\Sigma\lambda_i\mu_h A_{ih} = 0,$$

(n° 32), les A_{ih} étant des polynômes d'ordre trois par rapport aux coordonnées. Si les λ sont donnés, cette équation est linéaire et homogène par rapport aux quatre coefficients μ_1, μ_2, μ_3, μ_4.

Il y a donc une infinité *triple* et linéaire de surfaces, $S = 0$, passant par la courbe de contact des surfaces $K = 0$ et $S_1 = 0$; comme parmi les surfaces $S = 0$ figure évidemment la surface S_1, il en résulte que les surfaces $S = 0$ découpent sur S_1 une infinité *double* de cubiques gauches variables. En d'autres termes, on peut tracer sur S_1 une double infinité de courbes le long de chacune desquelles un cône du second ordre est circonscrit : la réciproque de la surface S_1 admet donc une infinité double de coniques; c'est, par suite, d'après un théorème de M. Darboux, une surface de Steiner, et la surface S_1 est *une surface du troisième ordre à quatre points doubles* (¹).

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2ᵉ série, t. IV, p. 370.

48. Ce résultat peut être retrouvé et complété par une autre voie : en effet, l'identité (4) montre que les points communs aux trois surfaces $S=0$, $K=0$, $G=0$ sont des points doubles de la surface $S_1 S_2=0$. Or les surfaces $S=0$, $K=0$ se coupent suivant les deux sextiques s_1 et s_2, qui ont, en dehors des points singuliers de la surface de Kummer, quatre points communs p_1, p_2, p_3, p_4; la surface $G=0$ passe par ces quatre points et touche, en chacun d'eux, les surfaces $S=0$, $K=0$, comme nous l'avons vu. Chacune des deux sextiques s_1 et s_2 coupe donc le cône $G=0$ en $2.6-8=4$ points, différents des quatre points $p_1, \ldots, p_4$; nous obtenons ainsi, en dehors des points p_i, huit points, qui sont, d'après ce qui précède, des points doubles de la surface $S_1 S_2=0$. Quatre de ces points sont sur la sextique s_1, et les quatre autres sur la sextique s_2; pour démontrer que les quatre premiers sont des points doubles de S_1 et les quatre seconds des points doubles de S_2, il suffira donc d'établir que, en général, aucun d'eux n'est situé à la fois sur S_1 et sur S_2.

Or les points communs à S_1 et S_2, et situés sur la surface de Kummer, sont : 1° les quatre points $p_1, \ldots, p_4$; 2° dix points singuliers. Nous savons que les huit points trouvés plus haut diffèrent, en général, des quatre points $p_1, \ldots, p_4$; pour montrer qu'ils diffèrent des points singuliers, il suffit d'établir, puisqu'ils sont sur le cône $G=0$, que ce cône ne passe par aucun des dix points singuliers considérés.

Soit un de ces points singuliers, que nous supposerons placé à l'origine O des coordonnées, dans le système de coordonnées cartésiennes non homogènes. La surface S_1, étant inscrite à la surface de Kummer et passant par le point O, y touche nécessairement un des plans tangents de cette dernière surface au même point. Soit $x=0$ ce plan; soit de même $y=0$ le plan tangent en O à la surface S_2 : ces deux plans touchent, suivant deux génératrices, le cône des tangentes de la surface de Kummer au point O, et il est clair que le plan des deux génératrices de contact touche en O la surface $S=0$, qui passe par les deux courbes de contact des surfaces S_1 et S_2, avec la surface de Kummer : soit $z=0$ ce troisième plan. Les termes de moindre degré dans les polynômes S_1, S_2 et S sont respectivement x, y et z; les termes de moindre degré dans $S_1 S_2 - S^2$ sont donc $xy - z^2$: l'origine est donc un point double, et seulement double, de la surface

$S_1 S_2 - S^2 = 0$, c'est-à-dire de $KG = 0$. Comme ce point est double pour la surface $K = 0$, par hypothèse, il ne saurait être sur la surface $G = 0$.

Nous voyons ainsi que la surface $S_1 = 0$ a *quatre points doubles* et que ces points sont *sur la surface de Kummer*.

49. Les propositions qu'on vient d'établir peuvent se résumer ainsi :

La surface de Kummer admet seize familles de surfaces inscrites du troisième ordre, à quatre points doubles (¹).

Les points doubles de ces surfaces sont sur la surface de Kummer.

Les surfaces inscrites d'une même famille sont en nombre trois fois infini; elles passent par les dix points doubles de la surface de Kummer qui ne sont pas situés dans un des plans singuliers de cette surface, et elles admettent ce plan pour plan tritangent; elles touchent simplement les quinze autres plans singuliers.

Deux surfaces inscrites d'une même famille se touchent en quatre points de la surface de Kummer; il existe un cône du second ordre tangent à celle-ci en ces quatre points, et circonscrit à chacune des deux surfaces cubiques considérées (²).

50. *Remarque.* — Une surface du troisième ordre à quatre points doubles est, comme on sait, représentable point par point sur un plan, de telle sorte que les sections planes aient pour image des courbes du troisième ordre passant par les six sommets d'un quadrilatère complet (³). Ces sommets sont les images des droites qui joignent les

---

(¹) M. Darboux a fait connaître, sans démonstration et sans détails, que la surface de Kummer admet des surfaces inscrites du troisième ordre, à quatre points doubles (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re série, t. I, p. 355).

(²) On peut dire aussi que *deux sextiques d'une même famille, passant par dix points singuliers, se coupent en outre en quatre points : en ces quatre points les plans tangents à la surface de Kummer sont concourants, et touchent un même cône du second ordre qui passe par les quatre points.*

(³) Voir par exemple Laguerre, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 21.

points doubles de l'espace deux à deux, et les droites du plan sont celles des cubiques gauches le long desquelles on peut circonscrire à la surface des cônes du second ordre. Il en résulte aisément qu'une surface quelconque du troisième ordre menée par une de ces cubiques coupe, en outre, la surface à quatre points doubles suivant une sextique, dont l'image est une courbe du quatrième ordre qui passe par les six sommets du quadrilatère. La sextique de l'espace rencontre par suite en un point, distinct des points doubles, chacune des droites joignant ceux-ci deux à deux.

En faisant application de ce résultat à une surface S_1, à quatre points doubles, inscrite à la surface de Kummer, on voit que chacune des droites qui joignent les quatre points doubles deux à deux rencontre en un nouveau point la sextique de contact, et *touche* par suite en ce point la surface de Kummer.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les quatre points doubles de S_1; désignons par a_{ij} le point où la droite $a_i a_j$ touche la surface de Kummer.

On sait qu'une surface cubique à quatre points doubles n'a, en dehors des droites qui joignent ceux-ci deux à deux, que trois droites, situées dans un même plan tritangent : soient p, q, r les sommets du triangle formé par ces trois droites. Le long de la droite qui joint deux points doubles, la surface admet un plan tangent unique, soit en tout six plans tangents remarquables, dont il passe deux par chacune des trois droites pq, pr, qr.

Pour la surface S_1, le plan tritangent est celui d'une conique singulière, $\alpha\alpha'$; les points p, q, r sont sur cette conique (n° 44), et il est clair que le plan tangent unique le long de la droite $a_i a_j$ touche la surface de Kummer au point a_{ij}.

Cela posé, observons que les points a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent se déduire des points p, q, r par la construction suivante :

Pour chacune des droites pq, pr, rq, on peut mener à la surface de Kummer *deux* plans tangents distincts du plan $\alpha\alpha'$; les six points de contact de ces plans sont, d'après ce qui précède, les points a_{ij}; de plus, le plan tangent en a_{ij} contenant la droite $a_i a_j$ et, par suite, les points a_i et a_j, on voit que les six plans tangents précédents se rencontrent trois à trois, sur la surface de Kummer, en quatre points qui sont les points a_1, a_2, a_3, a_4.

Remarquons maintenant que les points p, q, r peuvent être choisis arbitrairement sur la conique $\alpha\alpha'$: on peut, en effet, par trois points quelconques de cette conique mener une sextique de la famille considérée (c'est-à-dire passant par les dix points singuliers non situés dans le plan $\alpha\alpha'$), puisque l'équation générale (3) des sextiques de la famille renferme trois paramètres; la surface cubique inscrite le long de cette sextique touchera le plan $\alpha\alpha'$ aux trois points choisis.

Donc enfin *le tétraèdre* dont les sommets sont a_1, a_2, a_3, a_4 est *inscrit par ses sommets et circonscrit par ses six arêtes à la surface de Kummer*, et il y a un nombre *triplement infini* de tels tétraèdres. Ce fait constitue un théorème : en effet, les tétraèdres inscrits à une surface dépendent de huit paramètres; en exprimant que les six arêtes touchent la surface, on a six conditions, et, par suite, le nombre des tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à une surface quelconque est doublement infini ([1]).

51. Nous pouvons donc énoncer les propositions qui suivent :

Il existe seize familles de tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à une surface de Kummer, chaque famille comprenant un nombre triplement infini de tétraèdres.

On obtient les tétraèdres d'une même famille par la construction suivante. Soient trois points quelconques d'une même conique de la surface de Kummer : par les trois droites qui les joignent deux à deux passent au total six plans tangents de la surface, distincts du plan de la conique; ces six plans se coupent trois à trois sur la surface de Kummer en quatre nouveaux points qui sont les sommets d'un des tétraèdres cherchés. Les six points de contact des arêtes du tétraèdre avec la surface coïncident avec les six points de contact des plans tangents précédents.

Les sommets d'un des tétraèdres sont les points doubles d'une surface cubique inscrite à la surface de Kummer.

([1]) M. Klein a donné une proposition de même nature pour les tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs faces à la surface de Kummer; ces tétraèdres sont en nombre cinq fois infini (*Math. Annalen*, t. XXVII, p. 111).

Nous retrouverons ces tétraèdres par une voie analytique dans un des Chapitres suivants.

52. Les surfaces cubiques inscrites, à quatre points doubles, peuvent se réduire à des *surfaces réglées* dans le cas suivant :

Supposons que, dans le plan de la conique $\alpha\alpha'$, un des sommets, p par exemple, du triangle pqr, coïncide avec un des six points singuliers situés sur cette conique : les deux plans tangents (¹) autres que $\alpha\alpha'$, menés à la surface de Kummer par la droite pq, sont confondus et leur position commune est celle du plan tangent Q, autre que $\alpha\alpha'$, qu'on peut mener par la droite pq au cône des tangentes au point p. Il en est de même des deux plans tangents passant par pr, qui sont confondus en un plan R, et, par suite, les quatre points doubles de la surface cubique inscrite correspondant au triangle pqr, sont deux à deux confondus et se réduisent ainsi aux deux points distincts, non singuliers, où la surface de Kummer est coupée par la droite D, commune aux plans Q et R. Cette surface cubique passant, d'ailleurs, comme dans le cas général, par les droites pq et pr, et passant évidemment aussi par la droite D, a un nouveau point double au point p, commun à ces trois droites, puisque celles-ci ne sont pas dans un même plan. Il en résulte que la droite D, sur laquelle la surface a trois points doubles, est une *droite double* de cette surface, qui se réduit dès lors à une *surface réglée du troisième ordre.*

La directrice rectiligne simple que rencontrent toutes les droites de la surface est évidemment qr.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Parmi les surfaces cubiques d'une même famille inscrites à la surface de Kummer et passant par les dix points doubles non situés dans un plan singulier, P, *celles qui passent, en outre, par un quelconque des six points doubles situés dans ce plan sont des surfaces réglées : pour chacune d'elles, la directrice double passe par le point double considéré, la directrice simple est dans le plan* P.

(¹) Nous admettons ici, ce qui est d'ailleurs évident, que la surface de Kummer est de quatrième classe; nous l'avons déjà admis au n° 50.

La liaison entre la directrice double et la directrice simple est celle qui a été indiquée plus haut, entre les droites **D** et qr.

Les génératrices rectilignes d'une de ces surfaces réglées inscrites sont évidemment des bitangentes de la surface de Kummer.

CHAPITRE V.

Courbes du huitième ordre et surfaces inscrites du quatrième ordre.

53. Les trente-deux familles de *courbes du huitième ordre* situées sur la surface de Kummer se divisent, d'après la théorie générale du n° **28**, en *trois groupes :*

1° Les courbes suivant lesquelles la surface est coupée par les quadriques de l'espace. Ces courbes ne présentent aucune particularité intéressante.

2° La famille que nous avons appelée *singulière* (n° **30**), et qui est formée de courbes passant par les seize points doubles de la surface de Kummer; nous l'étudierons en dernier lieu.

3° *Trente* familles, deux à deux associées, de courbes passant par huit points doubles, et dont nous allons nous occuper maintenant.

54. L'équation des courbes de l'une de ces trente familles est (n° **30**) de la forme

$$(5) \qquad \lambda_1 \theta'_1 + \lambda_2 \theta'_2 + \ldots + \lambda_8 \theta'_8,$$

les λ étant des constantes arbitraires, et les θ' des fonctions d'ordre quatre, normales, toutes paires ou toutes impaires, de même caractéristique non nulle.

Il est aisé de voir qu'on peut exprimer ces fonctions à l'aide des fonctions normales du second ordre.

Soient, en effet, θ_1 et θ_2 deux fonctions quelconques, linéairement indépendantes, d'ordre deux, ayant même caractéristique que les θ', et paires ou impaires selon que les θ' sont pairs ou impairs; soient toujours Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les fonctions normales d'ordre deux, de caractéristique nulle, qui sont proportionnelles aux coordonnées d'un point de la surface de Kummer; les huit fonctions

$$\begin{array}{cccc} \theta_1\Theta_1, & \theta_1\Theta_2, & \theta_1\Theta_3, & \theta_1\Theta_4, \\ \theta_2\Theta_1, & \theta_2\Theta_2, & \theta_2\Theta_3, & \theta_1\Theta_4 \end{array}$$

sont d'ordre quatre; elles ont même caractéristique que les θ' et sont paires ou impaires en même temps que ces dernières fonctions. De plus, elles sont linéairement indépendantes, car, s'il existait une relation de la forme

$$\theta_1(a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4) = 0,$$

on en déduirait que la courbe $\theta_1 = 0$, qui est une biquadratique quelconque, différente de la courbe $\theta_2 = 0$, serait dans le plan

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,$$

ce qui est impossible.

Par conséquent, les huit fonctions θ' sont des combinaisons linéaires et homogènes des huit fonctions $\theta_k\Theta_l$ précédentes, et l'équation générale des courbes du huitième ordre de la famille considérée sera de la forme

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\theta_1(a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4) \\ &+ \theta_2(b_1\Theta_1 + b_2\Theta_2 + b_3\Theta_3 + b_4\Theta_4) = 0, \end{aligned}\right.$$

les a et b étant des constantes arbitraires.

Cette forme met en évidence une propriété importante des courbes correspondantes : c'est que chacune de celles-ci admet *une sécante quadruple*, ayant pour équations

$$\begin{aligned} P &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \\ Q &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0, \end{aligned}$$

et que tout plan, $\lambda P + \mu Q = 0$, mené par cette sécante, coupe en outre la courbe en quatre points situés sur une même biquadratique, $\mu\theta_1 - \lambda\theta_2 = 0$.

Il est aisé de voir que la courbe étudiée n'a qu'*une seule sécante quadruple*. En effet, cette courbe est (nº **30**) sur une surface du troisième ordre, passant par deux coniques C_1 et C_2 de la surface de Kummer. Les deux coniques C_1 et C_2, se coupant en deux points, sont rencontrées l'une ou l'autre par vingt-six des droites de la surface cubique; la vingt-septième droite est celle qui s'appuie sur les deux droites (concourantes) situées dans les plans de C_1 et C_2; elle ne rencontre ni C_1 ni C_2 et coupe, par suite, la surface de Kummer en quatre points qui sont sur la courbe proposée. Inversement, toute droite coupant cette courbe en quatre points doit être sur la surface du troisième ordre, et, par suite, il n'existe, comme nous l'avions annoncé, qu'une seule sécante quadruple.

L'analyse conduirait aisément au même résultat.

33. Les courbes de la famille (6) passent par les huit points singuliers de la surface de Kummer qui sont communs aux couples d'un octaèdre de Göpel (nº **30**); donc chacune d'elles *touche en deux points* non singuliers *les plans de cet octaèdre*, et *en trois points* non singuliers *les plans de l'octaèdre associé*.

Deux courbes de la famille se rencontrent, en dehors des huit points singuliers qui leur sont communs en $\frac{1}{2}[2.4.4 - 8] = 12$ points de la surface de Kummer; on le démontre à l'aide de la formule de M. Poincaré en répétant un raisonnement fait plusieurs fois.

Les douze points non singuliers communs aux deux courbes

$$(6) \qquad \theta_1(a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4) = 0,$$

$$(6') \qquad \theta_1(a'_1\Theta_1 + \ldots + a'_4\Theta_4) + \theta_2(b'_1\Theta'_1 + \ldots + b'_4\Theta'_4) = 0$$

sont sur la quadrique $PQ' - QP' = 0$, P et Q ayant la signification indiquée plus haut, et P', Q' étant définis de la même manière avec les a' et les b'.

Le long de chaque courbe (6) on peut inscrire à la surface de Kummer une infinité de *surfaces du quatrième ordre* formant un faisceau ponctuel, et *touchant,* d'après ce qui précède, *huit des plans singuliers en deux points et les huit autres en trois points.*

56. Parmi ces surfaces inscrites du quatrième ordre il en est de particulièrement intéressantes, que l'on obtient comme il suit.

Nous savons (nº **16**) que les fonctions θ_1^2, $\theta_1\theta_2$, θ_2^2 sont des fonctions quadratiques entières de Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, que nous désignerons respectivement par A_1, A_{12} et A_2; élevons maintenant au carré l'expression

$$\theta_1(a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4),$$

et remplaçons, dans le développement θ_1^2, $\theta_1\theta_2$, θ_2^2 par leurs valeurs précédentes, en substituant à Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4; nous obtenons une expression S

$$S = A_1 P^2 + 2A_{12}PQ + A_2 Q^2$$

qui, égalée à zéro, représente une surface du quatrième ordre, $S = 0$, inscrite à la surface de Kummer le long de la courbe (6).

Cette surface a la *droite double* $P = 0$, $Q = 0$, qui est la sécante quadruple de la courbe de contact.

L'enveloppe des surfaces $S = 0$, c'est-à-dire la surface de Kummer, a évidemment pour équation

$$A_{12}^2 - A_1 A_2 = 0.$$

Les surfaces du quatrième ordre qui touchent la surface de Kummer, le long de la même courbe que la surface $S = 0$, ont pour équation

$$(7) \qquad A_1 P^2 + 2A_{12}PQ + A_2 Q^2 + \lambda(A_{12}^2 - A_1 A_2) = 0,$$

λ étant une constante arbitraire. Cette équation peut s'écrire, au facteur près $-\frac{1}{\lambda}$,

$$(Q^2 - A_1\lambda)(P^2 - A_2\lambda) - [A_{12}\lambda + PQ]^2 = 0,$$

ce qui montre que, si λ n'est ni nul ni infini, la surface (7) a *huit* *points doubles* situés sur les trois quadriques

$$Q^2 - A_1\lambda = 0, \qquad P^2 - A_2\lambda = 0, \qquad A_{12}\lambda + PQ = 0.$$

Ces huit points sont d'ailleurs sur la surface $A_{12}^2 - A_1 A_2 = 0$, c'est-à-dire sur la surface de Kummer : on le voit en éliminant P, Q et λ entre les trois dernières équations.

57. De toute cette analyse résultent les énoncés suivants :

Soit F *une des trente familles de courbes du huitième ordre déterminées, sur la surface de Kummer, par des surfaces cubiques passant par deux coniques singulières; les courbes de la famille* F *passent toutes par huit points singuliers, situés sur les couples de plans d'un même octaèdre de Göpel; elles touchent en deux points non singuliers les plans de cet octaèdre et en trois points non singuliers les plans de l'octaèdre associé.*

Toute courbe de la famille F *a une et une seule sécante quadruple; chaque plan mené par cette sécante coupe en outre la courbe en quatre points qui sont situés sur une biquadratique de la surface de Kummer, passant par les huit points singuliers communs aux courbes de la famille* F.

Deux courbes de la famille ont, en dehors des points singuliers, douze points communs qui sont situés sur une quadrique passant en outre par les deux sécantes quadruples des deux courbes.

Le long de chaque courbe de la famille on peut inscrire à la surface de Kummer une infinité de surfaces d'ordre 4, *formant un faisceau, et qui ont chacune, sur la courbe considérée, huit points doubles, variables d'une surface à l'autre.*

Parmi ces surfaces, il en est une qui a pour droite double la sécante quadruple de la courbe considérée, sans avoir généralement de point multiple en dehors de cette droite.

58. Il nous reste à étudier les courbes du huitième ordre appartenant à la *famille singulière*, c'est-à-dire (n° **30**) déterminées sur la surface de Kummer par une surface du quatrième ordre, menée par les quatre coniques singulières d'un groupe de Rosenhain.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous nous bornerons à une étude sommaire, nous réservant de revenir, par d'autres méthodes, sur ces courbes intéressantes.

Les courbes du huitième ordre de la famille singulière *passent par les seize points singuliers* de la surface de Kummer et, par suite, *touchent* en un point mobile *chacun des seize plans singuliers.*

Réciproquement, toute courbe du huitième ordre tracée sur la surface de Kummer et passant simplement par les seize points doubles, appartient à la famille singulière (n° **31**).

Deux courbes de la famille se coupent, comme on le voit par la formule de M. Poincaré, *en* $\frac{1}{2}(2.4.4-16)=8$ *points mobiles.*

Soient $S_1=0$ et $S_2=0$ deux surfaces du quatrième ordre, circonscrites à la surface de Kummer le long de deux courbes s_1 et s_2 de la famille singulière; $S=0$ une surface du même ordre passant par ces deux courbes (n^os^ **34**); on a identiquement

$$S_1 S_2 = S^2 + KG,$$

G étant un polynôme d'ordre 4 en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette identité montre que les points communs aux surfaces $S=0$, $K=0$, $G=0$, sont des points doubles de la surface $S_1 S_2=0$.

Or on démontre sans difficulté, en appliquant les méthodes suivies aux n^os^ **46-48**, que les trois surfaces $S=0$, $S_1=0$, $S_2=0$ n'ont pas, en général, de courbe commune, et que la surface $G=0$ ne passe pas par les points singuliers de la surface de Kummer.

Cela posé, nous savons que la surface $S=0$ coupe $K=0$ suivant deux courbes s_1 et s_2 d'ordre 8, qui passent par les seize points singuliers et ont huit autres points communs $p_1, p_2, \ldots, p_8$: en ces huit derniers points, les surfaces $S_1=0$, $S_2=0$, $S=0$, $K=0$, $G=0$ sont tangentes, comme le montre l'identité précédente; la courbe s_1 touche donc en chacun d'eux la surface $G=0$, qu'elle coupe par suite en $4.8-2.8=16$ points distincts des points $p_1, p_2, \ldots, p_8$. Ces seize nouveaux points sont, d'après ce qui a été dit, des points doubles de la surface $S_1 S_2=0$; ils ne sont pas situés sur la surface $S_2=0$, car la courbe s_1 ne rencontre cette dernière qu'aux points $p_1, p_2, \ldots, p_8$ et aux seize points singuliers de la surface de Kummer; ils sont donc des points doubles de la surface $S_1 = 0$. Celle-ci est donc une surface du quatrième ordre à *seize points doubles*, c'est-à-dire une surface de Kummer; les seize points doubles sont sur la surface de Kummer primitive.

Donc :

Les surfaces générales du quatrième ordre inscrites à la surface de Kummer le long des courbes du huitième ordre de la famille singulière sont des surfaces de Kummer, ayant leurs seize points doubles sur la surface de Kummer primitive.

D'après cela, la courbe de contact des deux surfaces de Kummer passe par les points doubles de la seconde, comme elle passait déjà par les points doubles de la première; il en résulte qu'elle appartient à la famille singulière sur l'une et sur l'autre, et qu'elle touche les plans singuliers des deux surfaces. En d'autres termes :

Deux surfaces de Kummer étant inscrites l'une à l'autre, les points singuliers de l'une sont sur l'autre, et les plans singuliers de l'une touchent l'autre en des points situés sur la courbe de contact.

On peut compléter ces résultats en établissant, par la méthode suivie au n° 46, que la surface G est aussi une surface du quatrième ordre à seize points doubles, c'est-à-dire une surface de Kummer; elle est circonscrite à S_1 et S_2, les courbes de contact étant sur S.

M. Klein est arrivé, par des considérations fondées sur la *Liniengeometrie* à démontrer l'existence des surfaces de Kummer inscrites à une surface de Kummer donnée; il en a déduit des conséquences nombreuses et remarquables pour la configuration que forment, sur cette dernière, les seize points ou les seize plans singuliers d'une surface de Kummer inscrite (¹). Nous n'insisterons donc pas sur un sujet traité à fond par l'éminent géomètre; nous nous bornerons, plus tard, à examiner certains cas particuliers dans lesquels les surfaces de Kummer inscrites dégénèrent en surfaces à lignes multiples.

(¹) Klein, *Math. Annalen*, t. XXVII; *Configurationen bei der Kummer'schen Fläche.*

CHAPITRE VI.

Sections de la surface de Kummer par ses plans tangents.

39. Soit $\mathfrak{S}(u, v)$ la fonction normale du premier ordre de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, qui s'annule (n° 7) pour les six demi-périodes

$$0,\ 0;\quad 0,\ \pi i;\quad \frac{b}{2},\ \pi i+\frac{c}{2};\quad \pi i+\frac{b}{2},\ \frac{c}{2};$$
$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\ \frac{b}{2}+\frac{c}{2};\quad \pi i+\frac{a}{2}+\frac{b}{2},\ \frac{b}{2}+\frac{c}{2}.$$

Si l'on désigne par λ et μ deux constantes, la fonction

$$\theta(u, v)=\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu)$$

est une fonction paire de u et v, puisque $\mathfrak{S}(u, v)$ est une fonction impaire. D'ailleurs $\theta(u, v)$ est évidemment une fonction *normale*, du second ordre, à caractéristique nulle; elle est donc exprimable linéairement en fonction des coordonnées d'un point de la surface de Kummer, et, par suite, la courbe $\theta(u, v)=0$ est une section plane de cette surface. Cette courbe a évidemment un point double, car, d'après la formule de M. Poincaré, les équations

$$\mathfrak{S}(u+\lambda, v+\mu)=0, \qquad \mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$$

ont, en u et v, deux solutions communes, égales et de signes contraires, auxquelles correspond un seul point de la surface de Kummer : les coordonnées u, v de ce point annulant $\theta(u, v)$ et ses deux premières dérivées sont celles d'un point double. La courbe est donc la section de la surface par un de ses plans tangents; réciproquement, étant donné un point u_0, v_0, si l'on détermine λ et μ (ce qui est possible d'une seule manière, les solutions λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$ étant considérées comme identiques), par les équations

$$\mathfrak{S}(\lambda+u_0, \mu+v_0)=0, \qquad \mathfrak{S}(\lambda-u_0, \mu-v_0)=0,$$

il est clair que le point u_0, v_0 sera le point double de la courbe

$$\vartheta(u+\lambda, v+\mu)\,\vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Les courbes $\theta(u, v)=0$ *sont donc les sections de la surface de Kummer par ses plans tangents.*

A un système de valeurs des deux arguments hyperelliptiques λ, μ correspond ainsi un plan tangent de la surface de Kummer; réciproquement, à un plan tangent correspondent deux systèmes d'arguments, de la forme λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$.

60. Le fait que le premier membre de l'équation de la section de la surface par un plan tangent se décompose en deux facteurs ϑ du premier ordre est fondamental.

Soit, en effet, un plan tangent quelconque donné; choisissons un des deux systèmes d'arguments λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$, qui lui correspondent, et considérons l'équation

$$(1) \qquad \vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Un point de la section de la surface par ce plan tangent a deux systèmes d'arguments u, v et $-u$, $-v$ (à des périodes près); de ces deux systèmes, *un seul* satisfait à l'équation précédente; on voit ainsi qu'à un point de la courbe (1) ne correspond qu'*un seul* système de valeurs des arguments u, v, à des multiples près des périodes.

Il résulte de là que *les deux courbes*

$$\vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \vartheta(u-\lambda', v-\mu')=0$$

se correspondent point par point. Soient, en effet, u, v un point de la première et u', v' un point de la seconde : on peut établir entre les points des deux courbes la correspondance

$$(2) \qquad u-\lambda=u'-\lambda', \qquad v-\mu=v'-\mu',$$

car, lorsque le point u, v décrit la première, le point u', v' décrit la seconde. Or à un point de la première courbe correspond un seul système de valeurs de u, v à des périodes près, et, par suite, d'après les formules précédentes, un seul système de valeurs de u', v', c'est-à-dire un seul point de la seconde courbe, et réciproquement.

Les sections de la surface par ses plans tangents sont donc des courbes de même genre et de mêmes modules; or, pour une courbe du quatrième ordre à un point double, on sait que les modules sont les rapports anharmoniques des six tangentes issues du point double. Donc :

Les rapports anharmoniques des six tangentes doubles qu'on peut mener à la surface de Kummer, par un de ses points, sont constants.

Il s'agit là des rapports anharmoniques des six droites, prises quatre par quatre.

Ce théorème est analogue à celui qui donne géométriquement l'invariant absolu d'une cubique plane; ici nous avons trois rapports anharmoniques, dépendant des trois périodes a, b, c de nos fonctions Θ.

On peut vérifier la proposition précédente d'une manière élémentaire dans un cas particulier. Menons, en effet, par un point singulier, O, de la surface de Kummer les plans qui touchent le cône, H, des tangentes en ce point, et considérons les sections de la surface par ces plans. Les six tangentes doubles qu'on peut mener de O à l'une d'elles sont évidemment les intersections du plan de la courbe avec les six plans singuliers qui passent par O, plans qui touchent le cône H. Les rapports anharmoniques des six tangentes doubles sont donc ceux des six droites suivant lesquelles un plan mobile, tangent à un cône de second ordre, coupe six plans fixes tangents à ce cône. D'après un théorème bien connu, ces rapports anharmoniques sont constants.

Nous avons ainsi une expression géométrique des modules des sections de la surface par ses plans tangents; on verrait, par voie de réciprocité que *ces modules sont aussi égaux aux rapports anharmoniques de six points singuliers situés sur une même conique.*

61. *Remarque.* — Soit $\Theta_m(u, v)$ une fonction normale d'ordre m; on voit, comme plus haut, que les courbes, d'ordre $4m$,

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu) = 0$$

ont m^2 points doubles, et que deux d'entre elles se correspondent point par point; nous reviendrons plus tard sur ces courbes remarquables.

62. Reprenons la section de la surface de Kummer par un plan tangent correspondant à l'équation

$$(1) \qquad \Im(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Puisque, à un point de cette courbe, on peut faire correspondre un seul système de valeurs de u, v, à des périodes près, les différentielles *du et dv seront,* le long de la courbe, des différentielles abéliennes; comme elles ne deviennent pas infinies, ce seront *des différentielles abéliennes de première espèce.* Par suite, en chaque point de la courbe, les arguments hyperelliptiques u et v seront égaux à deux intégrales de première espèce, appartenant à cette courbe; on aura ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} u=g(t)+\lambda+\alpha, \\ v=g_1(t)+\mu+\beta, \end{cases}$$

α et β étant deux constantes, $g(t)$ et $g_1(t)$ deux intégrales de première espèce, exprimées en fonction d'une variable quelconque, t; cette variable ne jouera d'ailleurs aucun rôle dans ce qui suit, nous ne l'introduisons que pour rappeler que les intégrales $g(t)$ et $g_1(t)$ ont une même limite supérieure [1].

Pour limite inférieure de ces intégrales, ou mieux pour leur point de départ, nous choisirons le point $u=\lambda$, $v=\mu$, qui vérifie bien la relation $\Im(u-\lambda, v-\mu)=0$, et dont nous verrons plus bas la signification géométrique. Il résulte de ce choix que *α et β sont nuls,* puisque, en faisant $gt=g_1t=0$, on doit trouver $u=\lambda$ et $v=\mu$.

En remplaçant u et v par leurs valeurs dans l'équation (1) de la courbe, on a

$$(4) \qquad \Im(gt, g_1t)=0,$$

[1] Dans ce qui suit, nous écrirons gt, g_1t, en supprimant la parenthèse.

équation qui a lieu pour toute valeur de t. On reconnaît là un théorème fondamental de la théorie des fonctions hyperelliptiques du genre 2, qui se trouve établi ici par voie géométrique.

Cela posé, observons que l'équation $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$ ne change pas si l'on y remplace u et v par $2\lambda-u$, $2\mu-v$: le premier membre ne fait, en effet, que changer de signe. Il en résulte que, si le point u, v est sur la courbe $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$, le point $2\lambda-u$, $2\mu-v$ y est également : ces deux points sont évidemment *en involution*, c'est-à-dire que, si l'un est donné, le second s'en déduit sans ambiguïté par une détermination géométrique, et que la même construction, appliquée au second, fait retomber sur le premier. Or, sur une courbe générale du quatrième ordre à un point double, il n'y a d'autre involution que celle que constituent les couples de points situés sur une sécante issue du point double; donc *les points u, v et $2\lambda-u$, $2\mu-v$ sont sur une même sécante issue du point double* de la courbe (1). En particulier, on obtiendra *les points de contact des tangentes* menées par le point double, en écrivant

$$u \equiv 2\lambda-u, \qquad v\equiv 2\mu-v \qquad (\text{mod périodes})$$

c'est-à-dire

$$u=\lambda+\frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v=\mu+\frac{\mathfrak{P}_1}{2};$$

$\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ étant deux demi-périodes correspondantes. Mais pour que le point u, v, ainsi défini, soit sur la courbe (1), il faut que $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)$ soit nul, c'est-à-dire

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right)=0.$$

On a donc pour $\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ les six systèmes de valeurs écrits plus haut (n° 59).

En particulier, au système de valeurs (0, 0) correspond le point $u=\lambda$, $v=\mu$: ce point, que nous avons rencontré tout à l'heure et pris pour point initial des intégrales gt et $g_1 t$, est donc un des points de contact des tangentes menées à la courbe (1) par son point double.

63. *Remarque.* — Les deux courbes $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$ et $\mathfrak{S}(u'-\lambda', v'-\mu')=0$ se correspondent point par point, selon les relations (2); si donc on désigne par $g't$ et $g'_1 t$ les intégrales de première espèce qui correspondent à u' et v' sur la deuxième courbe, et qui ont pour point initial le point λ', μ', on aura, en vertu de (2) et (3) :

$$gt = g't \qquad \text{et} \qquad g_1 t = g'_1 t.$$

En d'autres termes, on pourra supposer, sans nuire à la généralité, que les intégrales gt et $g_1 t$ sont prises le long d'une courbe *déterminée* $\mathfrak{S}(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0$, à partir du point λ_0, μ_0 : c'est ce que nous admettrons dans ce qui suit :

64. L'équation générale qui correspond aux sections de la surface par les plans tangents en un point singulier, $\frac{\mathfrak{P}}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$, est, d'après ce qui précède,

$$(5) \qquad \mathfrak{S}\left(u + g\alpha + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v + g_1\alpha + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0,$$

α étant arbitraire, et $\frac{\mathfrak{P}}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ désignant deux demi-périodes correspondantes.

65. Nous renverrons, pour les résultats connus qu'on pourrait déduire de ces relations analytiques, aux Mémoires de MM. Klein et Rohn [1], et nous aborderons un sujet de recherches différent en étudiant l'intersection d'un plan tangent quelconque avec certaines courbes algébriques tracées sur la surface; dans cette étude nous ferons usage d'une proposition de M. Poincaré, qui revient au théorème d'Abel, et qu'on peut énoncer ainsi [2] :

Soient $\Theta_m(u, v)$ et $\Theta_n(u, v)$ deux fonctions thêta, normales, de ca-

(1) Klein, *Math. Annalen*, t. XXVII, p. 106; Rohn, *Math. Annalen*, t. XV, p. 315.

(2) *American Journal*, t. VIII.

ractéristique nulle; les deux équations

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0$$

ont $2mn$ *solutions communes,* u, v, u_2, v_2, ..., *entre lesquelles existent les relations*

$$u_1+u_2+\ldots=mn(\lambda+\lambda'), \qquad v_1+v_2+\ldots=mn(\mu+\mu').$$

66. Cela posé, reprenons la courbe, que nous désignerons par C_4,

$$\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

On sait, *par le théorème d'Abel,* que les sommes des intégrales gt et $g_1 t$, qui correspondent aux points d'intersection de cette courbe et d'une courbe algébrique d'ordre m, sont constantes.

Inversement, si les sommes des intégrales gt et $g_1 t$ qui correspondent à $4m$ points de la courbe C_4 ont les valeurs constantes précédentes, ces $4m$ points ne sont pas généralement sur une courbe d'ordre m, mais sont sur une courbe d'ordre $m+1$, passant en outre par le point double et par deux points quelconques de C_4, situés sur une même sécante issue de ce point (¹).

Pour simplifier le langage, nous dirons que cette courbe d'ordre $m+1$ *adjointe* (c'est-à-dire passant par le point double) passe en outre par un couple quelconque de *points conjugués.*

Cherchons maintenant l'expression des sommes constantes d'intégrales qui correspondent aux points d'intersection de C_4 avec une courbe algébrique d'ordre m.

Si la courbe d'ordre m est une droite, les deux sommes s'évaluent aisément. En effet, d'après la proposition de M. Poincaré, les sommes des quatre valeurs de u et de v qui vérifient les équations

$$\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta(u, v)=0,$$

(¹) Voir, par exemple, notre Mémoire *Sur l'application des fonctions fuchsiennes à la Géométrie,* tome II de ce journal, 4ᵉ série, p. 260 et suiv.

où Θ est une fonction normale du second ordre, de caractéristique nulle, sont :

$$\sum_1^4 u_i = 2\lambda, \qquad \sum_1^4 v_i = 2\mu.$$

Le long de la courbe C_4, on a

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu,$$

il vient donc

$$\sum_1^4 gt = -2\lambda, \qquad \sum_1^4 g_1 t = -2\mu,$$

les deux sommes s'étendant aux quatre points communs à C_4 et à la courbe *plane* $\Theta(u, v) = 0$.

Ainsi, pour une droite, les sommes d'intégrales g et g_1 ont les valeurs constantes -2λ et -2μ; il en résulte que, pour une courbe d'ordre m, ces sommes ont les valeurs $-2\lambda m$ et $-2\mu m$, puisque la courbe d'ordre m peut, en particulier, se décomposer en m droites.

On déduit de là des conséquences intéressantes.

67. I. Soit toujours $\Theta(u, v)$ une fonction normale, d'ordre deux, à caractéristique nulle, les deux équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad \mathfrak{S}(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

ont quatre solutions. Or la dernière donne

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu.$$

Portant ces valeurs dans la première, celle-ci devient

$$\Theta(gt + \lambda, g_1 t + \mu) = 0; \tag{6}$$

elle est, d'après ce qui précède, vérifiée pour quatre systèmes de valeurs de gt et $g_1 t$, tels que l'on ait

$$\sum gt = -2\lambda, \qquad \sum g_1 t = -2\mu.$$

Ainsi, si nous désignons par t_1, t_2, t_3, t_4 des constantes quelconques, l'équation

$$\Theta[gt - \tfrac{1}{2}(gt_1 + gt_2 + gt_3 + gt_4),\ g_1t - \tfrac{1}{2}(g_1t_1 + \ldots + g_1t_4)] = 0$$

sera vérifiée pour quatre systèmes de valeurs de gt et g_1t, tels qu'on ait

$$\sum gt = gt_1 + gt_2 + gt_3 + gt_4,$$

$$\sum g_1t = g_1t_1 + g_1t_2 + g_1t_3 + g_1t_4.$$

Je dis que, si deux des solutions de l'équation considérée sont gt_1, g_1t_1 et gt_2, g_1t_2, les deux dernières seront gt_3, g_1t_3 et gt_4, g_1t_4.

On a, en effet, en désignant par $g\sigma$, $g_1\sigma$ et $g\tau$, $g_1\tau$ les deux dernières solutions

$$g\sigma + g\tau = gt_3 + gt_4,$$
$$g_1\sigma + g_1\tau = g_1t_3 + g_1t_4,$$

et, d'après la théorie générale de l'inversion, les deux équations précédentes n'ont pas d'autres solutions que

$$\begin{matrix} g\sigma = gt_i, & g\tau = gt_j, \\ g_1\sigma = g_1t_i, & g_1\tau = g_1t_j, \end{matrix} \qquad (i, j = 3, 4 \text{ et } i \gtrless j),$$

ce qui est précisément la proposition à établir.

En d'autres termes, si l'équation $\Theta(u, v) = 0$ est satisfaite pour deux des quatre systèmes de valeurs de u et v inscrits au Tableau suivant, elle sera également satisfaite pour les deux autres

$$\begin{aligned}
u &= \tfrac{1}{2}(gt_1 - gt_2 - gt_3 - gt_4), & v &= \tfrac{1}{2}(g_1t_1 - g_1t_2 - g_1t_3 - g_1t_4),\\
u &= \tfrac{1}{2}(-gt_1 + gt_2 - gt_3 - gt_4), & v &= \tfrac{1}{2}(-g_1t_1 + g_1t_2 - g_1t_3 - g_1t_4),\\
u &= \tfrac{1}{2}(-gt_1 - gt_2 + gt_3 - gt_4), & v &= \tfrac{1}{2}(-g_1t_1 - g_1t_2 + g_1t_3 - g_1t_4),\\
u &= \tfrac{1}{2}(-gt_1 - gt_2 - gt_3 + gt_4), & v &= \tfrac{1}{2}(-g_1t_1 - g_1t_2 - g_1t_3 + g_1t_4).
\end{aligned}$$

Géométriquement, en se rappelant qu'il y a quatre fonctions $\Theta(u, v)$ normales, d'ordre deux, à caractéristique nulle, linéairement indépendantes, et que ces quatre fonctions sont proportionnelles aux coordonnées d'un point de la surface de Kummer, on peut dire que tout plan qui passe par deux points (u, v) du Tableau passe par les deux autres. En d'autres termes, le Tableau donne les arguments de quatre points de la surface de Kummer situés sur une droite, et sur une droite quelconque, puisqu'il y a quatre paramètres arbitraires t_1, t_2, t_3, t_4.

Il va sans dire qu'on peut, dans ce Tableau, changer simultanément les signes des arguments u, v d'un quelconque des quatre points.

Plus simplement, on peut dire que les arguments de quatre points en ligne droite sont donnés par les formules

$$u = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 g t_1 + \varepsilon_2 g t_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 g t_3 + g t_4),$$
$$v = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 g_1 t_1 + \varepsilon_2 g_1 t_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 g_1 t_3 + g_1 t_4),$$

où ε_1 et ε_2 peuvent prendre les valeurs ± 1.

Cette formule importante est due à M. Klein, qui l'a démontrée sous une autre forme et par une voie différente; nous en ferons plus loin quelques applications.

68. II. Considérons maintenant une fonction Θ, d'ordre $2m$, normale, impaire, à caractéristique nulle; soit $\Theta_{2m}(u, v)$.

Les zéros communs aux fonctions $\Theta_{2m}(u, v)$ et $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)$, au nombre de $4m$, vérifient les relations

$$\sum u = 2m\lambda, \qquad \sum v = 2m\mu;$$

le long de la courbe C_1, c'est-à-dire $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu) = 0$, on a

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu;$$

d'où

$$\sum gt = -2m\lambda, \qquad \sum g_1 t = -2m\mu,$$

les sommes s'étendant aux $4m$ points de la courbe C_1 situés sur la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$. Ces deux dernières relations montrent (n° **66**) que les $4m$ points précédents sont sur une courbe d'ordre $m+1$, adjointe à C_4, qui passe en outre par un couple, qu'on peut choisir arbitrairement, de points conjugués.

On peut ajouter que les $4m$ points ne sont jamais sur une courbe d'ordre m, si aucun d'eux ne coïncide avec le point double de C_4.

Nous savons, en effet (n° 30), puisque la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$ appartient à la *famille singulière* de courbes d'ordre $4m$, qu'elle est sur une surface d'ordre $m + 2$ passant par quatre coniques d'un groupe de Rosenhain. Par suite, les $4m$ points où elle coupe le plan de la courbe C_4, c'est-à-dire la courbe C_4 elle-même, sont sur une courbe d'ordre $m + 2$, passant par les points de contact de quatre tangentes doubles de C_4; si donc ces $4m$ points étaient sur une courbe d'ordre m, les huit points de contact des quatre tangentes seraient sur une conique, d'après une propriété générale bien connue des courbes algébriques ([1]).

Or il est aisé d'établir que les huit points d'intersection d'un plan avec quatre coniques singulières d'un groupe de Rosenhain ne peuvent jamais être sur une conique, C. Si cela était, en effet, la surface du second ordre menée par cette conique et les quatre sommets du tétraèdre de Rosenhain considéré couperait chacune des quatre coniques singulières en cinq points, dont deux sur la conique C et trois en trois sommets du tétraèdre : quatre coniques d'un groupe de Rosenhain seraient ainsi sur une même quadrique, ce qui est impossible (n° 25).

Nous avons ainsi démontré que :

Les $4m$ points où une courbe algébrique d'ordre $4m$, tracée sur la surface de Kummer et appartenant à la famille singulière, est coupée par un plan tangent quelconque de la surface, sont situés, avec le point de contact de ce plan, sur une infinité de courbes planes d'ordre $m + 1$.

Chacune de ces courbes d'ordre $m + 1$ coupe en outre la section de la surface par le plan tangent considéré en deux points, qui sont sur une même sécante issue du point de contact.

([1]) Il ne peut y avoir d'exception que si un ou plusieurs des $4m$ points coïncident avec le point double de C_4.

Le plan tangent considéré peut avoir son point de contact sur la courbe d'ordre $4m$; on voit alors sans difficulté, soit directement, soit en partant des résultats précédents, que :

Le plan tangent à la surface de Kummer en un point d'une courbe d'ordre $4m$, de la famille singulière, tracée sur cette surface, coupe en outre la courbe en $4m-2$ points, qui sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une courbe d'ordre m.

Ces propositions s'appliquent en particulier à la courbe d'ordre $4m$ formée par l'ensemble de deux courbes d'ordre $2m$, appartenant respectivement à deux familles associées (n^os^ **28** et **29**); car le produit des Θ qui correspondent à ces deux courbes est une fonction normale, impaire, de caractéristique nulle.

CHAPITRE VII

Applications diverses.

69. Nous réunirons dans ce Chapitre quelques applications des formules des paragraphes précédents et quelques compléments de nos théories générales; nous commencerons par l'étude *des tétraèdres*, en nombre trois fois infini, *inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à la surface de Kummer;* nous montrerons qu'il n'existe pas d'autres figures de cette nature que celles rencontrées au n° **50**, et nous trouverons l'expression analytique de leurs éléments.

D'après les formules du n° **67**, il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite joignant deux points u_1, v_1; u_2, v_2 de la surface de Kummer touche cette surface en un troisième point, est exprimée par les formules

$$u_1 + \varepsilon u_2 = 2g\rho, \qquad v_1 + \varepsilon v_2 = 2g_1\rho,$$

ε désignant ± 1 et ρ étant une constante quelconque.

Soient u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4 les sommets d'un tétraèdre inscrit à la surface de Kummer; écrivons que les six arêtes touchent la surface. On aura d'abord, puisque les signes de u_i et v_i peuvent être changés simultanément,

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} u_1 - u_2 = 2g\rho, & u_1 - u_3 = 2g\sigma, & u_1 - u_4 = 2g\tau, \\ v_1 - v_2 = 2g_1\rho, & v_1 - v_3 = 2g_1\sigma, & v_1 - v_4 = 2g_1\tau. \end{array}\right.$$

Les conditions de contact des trois arêtes qui ne partent pas du point u_1, v_1 seront

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} u_2 + \varepsilon u_3 = 2g\omega, & u_2 + \eta u_4 = 2g\varpi, & u_3 + \zeta u_4 = 2g\upsilon, \\ v_2 + \varepsilon v_3 = 2g_1\omega, & v_2 + \eta v_4 = 2g_1\varpi, & v_3 + \zeta v_4 = 2g_1\upsilon. \end{array}\right.$$

$\rho, \sigma, \tau, \omega, \varpi, \upsilon$ étant des constantes quelconques; ε, η, ζ désignant ± 1.

Supposons d'abord ε, η, ζ égaux à -1. Il vient alors

$$\begin{array}{lll} 2g\omega = 2(g\sigma - g\rho), & 2g\varpi = 2(g\tau - g\rho), & 2g\upsilon = 2(g\tau - g\sigma), \\ 2g_1\omega = 2(g_1\sigma - g_1\rho), & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

d'où, en vertu de la relation $\vartheta(gt, g_1t) = 0$,

$$\vartheta\left(g\sigma - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \; g_1\sigma - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right),$$

$$\vartheta\left(g\tau - g\rho + \frac{\mathfrak{P}'}{2}, \; g_1\tau - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}\right),$$

$$\vartheta\left(g\tau - g\sigma + \frac{\mathfrak{P}''}{2}, \; g_1\tau - g_1\sigma + \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}\right),$$

$\dfrac{\mathfrak{P}}{2}, \dfrac{\mathfrak{P}_1}{2}; \cdots$ étant des demi-périodes simultanées.

Ces trois relations, évidemment distinctes, donnent les valeurs de $g\rho, g_1\rho$; $g\sigma, g_1\sigma$; $g\tau, g_1\tau$ et, par suite, un nombre limité de solutions pour le problème quand le sommet u_1, v_1 est connu: les tétraèdres ainsi trouvés sont en nombre deux fois infini seulement.

Un raisonnement tout semblable montre que, si ε, η, ζ ne sont pas tous les trois égaux à $+1$, les équations (1) et (2) déterminent u_2, v_2 ; u_3, v_3 ; u_4, v_4 en fonction de u_1, v_1 ; il n'y a donc encore qu'un nombre doublement infini de solutions répondant à cette hypothèse.

Reste enfin le cas où $\varepsilon = \eta = \zeta = 1$.

Des deux premiers couples d'équations (1) et du premier couple (2) on tire, en désignant par $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ deux demi-périodes simultanées,

$$u_3 = g\omega - g\sigma + g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_3 = g_1\omega - g_1\sigma + g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$u_2 = g\sigma + g\omega - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_2 = g_1\sigma + g_1\omega - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$u_1 = g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_1 = g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}.$$

Posons

$$u_4 = g\rho + g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2} + \mathrm{U},$$

$$v_4 = g_1\rho + g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2} + \mathrm{V},$$

et portons ces valeurs dans les deux dernières relations (1) et les quatre dernières relations (2), il vient

$$2g\omega - \mathrm{U} = 2g\tau, \qquad 2g\sigma + \mathrm{U} = 2g\varpi, \qquad 2g\rho + \mathrm{U} = 2g\upsilon,$$

$$2g_1\omega - \mathrm{V} = 2g_1\tau, \qquad 2g_1\sigma + \mathrm{V} = 2g_1\varpi, \qquad 2g_1\rho + \mathrm{V} = 2g_1\upsilon.$$

Éliminant τ, ϖ, υ entre ces équations, à l'aide de la relation $\mathfrak{S}(gt, g_1 t)$, on a

$$\mathfrak{S}\left(g\omega - \frac{\mathrm{U}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'}{2}, g_1\omega - \frac{\mathrm{V}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(g\sigma + \frac{\mathrm{U}}{2} + \frac{\mathfrak{P}''}{2}, g_1\sigma + \frac{\mathrm{V}}{2} + \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(g\rho + \frac{\mathrm{U}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'''}{2}, g_1\rho + \frac{\mathrm{V}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2}\right) = 0.$$

Si nous posons pour un instant $\frac{\mathrm{U}}{2} = u$, $\frac{\mathrm{V}}{2} = v$, les trois équations qui précèdent représentent (n° **64**) les sections de la surface de Kummer par des plans tangents, dont les points de contact sont respectivement les trois points singuliers $\frac{\mathfrak{P}'}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}; \frac{\mathfrak{P}''}{2}, \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}; \frac{\mathfrak{P}'''}{2}, \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2}$, et elles expriment que ces trois plans tangents se coupent en un même point u, v de la surface.

Or, pour que le problème ait une infinité triple de solutions, il faut que ω, σ, ρ soient *arbitraires*, c'est-à-dire que trois plans tangents *arbitraires*, dont les points de contact sont respectivement trois points singuliers, distincts ou non, de la surface de Kummer, se coupent en un point de cette surface : cela ne peut évidemment se produire que si les trois points singuliers coïncident; les trois plans sont alors tangents à la surface en un même point singulier, et se coupent en ce point.

D'après cela, nous devons supposer

$$\frac{\mathfrak{P}'}{2} = \frac{\mathfrak{P}''}{2} = \frac{\mathfrak{P}'''}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathfrak{P}'_1}{2} = \frac{\mathfrak{P}''_1}{2} = \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2};$$

et les trois équations précédentes seront satisfaites, quels que soient ω, ρ, σ, par

$$\frac{U}{2} = \frac{\mathfrak{P}'}{2}, \qquad \frac{V}{2} = \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}.$$

Les quantités U et V sont donc nulles, à des périodes près, et les sommets des tétraèdres cherchés ont pour coordonnées hyperelliptiques

$$\begin{aligned}
u_1 &= g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_1 &= g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\
u_2 &= -g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_2 &= -g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\
u_3 &= g\rho - g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_3 &= g_1\rho - g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\
u_4 &= g\rho + g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_4 &= g_1\rho + g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}.
\end{aligned}$$

D'ailleurs les demi-périodes simultanées $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ peuvent prendre seize systèmes de valeurs; *on trouve ainsi seize familles de tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes* à la surface de Kummer, chaque famille dépendant de *trois paramètres arbitraires*. Il n'y a pas d'autre famille analogue dépendant de trois paramètres, comme le montre l'analyse précédente; par suite, les seize familles qu'on vient de trouver doivent se confondre avec les seize familles obtenues par voie géométrique au n° **50**.

70. On peut vérifier ce résultat d'une autre manière.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les sommets (u_1, v_1), ..., (u_4, v_4) d'un des tétraèdres trouvés en dernier lieu; a_{ij} le point de contact de la droite $a_i a_j$ avec la surface de Kummer; pour démontrer que ce tétraèdre est un de ceux rencontrés au n° **50**, il suffit d'établir que les plans tangents à la surface aux six points a_{ij} se coupent deux à deux suivant les trois côtés d'un triangle pqr, inscrit dans une des seize coniques singulières.

Or, considérons la section de la surface par un plan tangent, $\mathfrak{S}(u-\lambda, v-\mu)=0$; écrivons que ce plan passe par les points a_1 et a_2, il vient

$$\mathfrak{S}\left(\quad g\rho+g\sigma+g\omega+\frac{\mathfrak{P}}{2}-\lambda,\quad g_1\rho+g_1\sigma+g_1\omega+\frac{\mathfrak{P}_1}{2}-\mu\right)=0,$$

$$\mathfrak{S}\left(-g\rho+g\sigma+g\omega+\frac{\mathfrak{P}}{2}-\lambda,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right)=0.$$

Ces deux équations, d'après les formules de M. Poincaré, ont deux solutions communes en λ, μ, et la somme des deux valeurs de λ est $2g\sigma+2g\omega$, celle des deux valeurs de μ est $2g_1\sigma+2g_1\omega$. On aperçoit de suite la solution

$$\lambda=\frac{\mathfrak{P}}{2}+g\sigma+g\omega,\qquad \mu=\frac{\mathfrak{P}_1}{2}+g_1\sigma+g_1\omega,$$

car, en remplaçant λ et μ par ces valeurs, les premiers membres des deux équations deviennent $\mathfrak{S}(g\rho, g_1\rho)$ et $\mathfrak{S}(-g\rho, -g_1\rho)$, et sont bien égaux à zéro.

La deuxième solution coïncide, par suite, avec la première, d'après les expressions des sommes des valeurs de λ et de μ.

En d'autres termes, le plan tangent qui coupe la surface suivant la courbe

$$\mathfrak{S}\left(u - g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v - g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0$$

passe par les points a_1, a_2 et compte pour deux dans le nombre des plans tangents menés par ces deux points : c'est donc nécessairement le plan tangent au point a_{12}, où la droite $a_1 a_2$ touche la surface.

On arrive ainsi à établir que les plans tangents de la surface de Kummer aux points a_{ij} correspondent aux équations

$$\mathfrak{S}\left(u - g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v - g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\omega - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\rho - g\sigma + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0.$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\omega + g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}\left(u - g\rho + g\sigma + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0.$$

Les quatre plans dans l'équation desquels figurent $g\rho$ et $g_1\rho$ passent par le point $u = g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}$, $v = g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$, comme on le vérifie immédiatement, soit p ce point. Soient de même q le point $g\sigma + \frac{\mathfrak{P}}{2}$, $g_1\sigma + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$, et r le point $g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}$, $g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$. Les deux plans dans l'équation desquels figurent à la fois les paramètres ρ et σ passent par la droite pq, et de même pour les couples de paramètres ρ et ω, σ et ω. Si l'on observe maintenant que les points p, q, r sont sur la conique singulière $\mathfrak{S}\left(u + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0$, on voit bien que la proposition à établir se trouve maintenant démontrée, et qu'on a retrouvé analytiquement les propositions que la Géométrie avait données sur les seize familles de tétraèdres.

71. La configuration remarquable formée par les sommets et les arêtes d'un des précédents tétraèdres peut être aisément généralisée.

Soient, en effet, quatre couples d'intégrales

$$g\rho_1, g_1\rho_1; \quad g\rho_2, g_1\rho_2; \quad g\rho_3, g_1\rho_3; \quad g\rho_4, g_1\rho_4;$$

considérons les huit points définis, sur la surface de Kummer, par les équations

$$\begin{aligned} u_i &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 g\rho_4 \\ v_i &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \varepsilon_3 g_1\rho_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 g_1\rho_4 \end{aligned} \qquad \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et

$$\begin{aligned} u_j &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 g\rho_4 \\ v_j &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \varepsilon_3 g_1\rho_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 g_1\rho_4 \end{aligned} \qquad \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

On pourrait, en outre, ajouter aux u une même demi-période, et aux v la demi-période correspondante.

La droite qui joint un des quatre premiers points à un des quatre derniers touche la surface en un nouveau point : il suffit d'appliquer, pour le vérifier, la règle indiquée plus haut (n° **69**).

Nous obtenons ainsi sur la surface *seize familles de configurations* remarquables, dont chacune dépend de *quatre arbitraires ;* une de ces configurations est formée par deux groupes de quatre points de la surface de Kummer, tels que les seize droites joignant les points du premier groupe aux points du second soient des tangentes de la surface. Il est clair que sur une surface quelconque il n'y a qu'un nombre limité de telles configurations.

Plus généralement, si l'on considère les 2^{h-1} points donnés par les relations

$$\begin{aligned} u_i &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 + \ldots + \varepsilon_h g\rho_h, \\ v_i &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_h g_1\rho_h, \end{aligned}$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h$ sont des arbitraires et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ des quantités égales à $+1$ ou à -1, on voit aisément que les droites qui joignent un d'entre eux à h autres sont des tangentes de la surface. On obtient ainsi une configuration de 2^{h-1} points de la surface, et de $h.2^{h-2}$ tangentes de cette surface, tels que par chaque point passent h tangentes et que sur chaque tangente soient situés deux points.

72. Comme seconde application des résultats du précédent Chapitre, nous donnerons quelques propriétés des *courbes du huitième ordre de la famille singulière* tracées sur la surface de Kummer. On désignera par C_8 une quelconque de ces courbes.

Tout d'abord les théorèmes du n° **68**, appliqués à ce cas particulier, deviennent :

Les huit points où une courbe C_8 est coupée par un plan tangent quelconque de la surface de Kummer forment, avec le point de contact du plan, la base d'un faisceau de courbes du troisième ordre.

Chaque courbe de ce faisceau coupe en outre la section de la surface par le plan tangent considéré en deux points, qui sont sur une même sécante issue du point de contact.

Le plan tangent à la surface de Kummer en un point d'une courbe C_8 coupe en outre celle-ci en six points qui sont sur une conique passant par le point de contact du plan.

Nous savons de plus (n° **68**) que les huit points où une courbe C_8 est coupée par un plan tangent de la surface de Kummer ne peuvent être sur une conique que si l'un d'eux coïncide avec le point de contact du plan.

Or les courbes C_8 sont, en général, de genre 5, comme nous l'établirons dans le Chapitre suivant; il en résulte, d'après une formule de M. Zeuthen; qu'elles ont chacune *dix sécantes quadruples*. Soit D une sécante quadruple de C_8; menons par D un plan tangent à la surface de Kummer, désignons par A le point de contact et par p_1, p_2, p_3, p_4 les quatre points, non situés sur D, où ce plan coupe C_8; soient enfin q_1 et q_2 deux points quelconques de la section de la surface par le plan tangent, situés sur une sécante issue de A. D'après une proposition précédente, les quatre points de C_8 situés sur D, les points p_i, le point A et les points q_1, q_2 sont sur une cubique; donc les points

p_i, A, q_1, q_2 sont sur une conique, et, si le point A était distinct des points p_i, ces derniers seraient en ligne droite : les huit points d'intersection de C_8 avec le plan tangent considéré seraient alors sur une conique (décomposée en un système de deux droites), ce qui est impossible.

Il faut donc que le point A soit un des points p_i : en ce cas, deux de ces points sont confondus en A et les deux autres sont sur une sécante issue de ce point.

En d'autres termes :

Chacun des quatre plans tangents menés à la surface de Kummer par une sécante quadruple d'une courbe C_8 *a son point de contact sur cette courbe, qu'il coupe en outre en deux points, situés en ligne droite avec le point de contact.*

Les courbes C_8 dépendent linéairement de cinq paramètres (nº **39**), et se coupent deux à deux en huit points non singuliers (nº **58**) : celles de ces courbes qui passent par quatre points de la surface de Kummer ont donc quatre autres points communs, et, d'après cela, la proposition qui précède peut s'énoncer ainsi :

Les courbes C_8 *qui passent par quatre points de la surface de Kummer situés sur une droite, passent par les quatre points de contact des plans tangents qu'on peut mener à la surface par cette droite.*

73. Parmi les surfaces de Kummer inscrites à la surface primitive le long d'une courbe C_8 (nº **58**), il en est dix qui dégénèrent en surfaces du quatrième ordre, possédant une droite double et huit points doubles.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur cette remarque évidente que, si deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre, toute courbe tracée sur la première touche la seconde en tous ses points de rencontre avec elle ; il ne peut y avoir exception que si l'un de ces points est un point singulier de l'une ou l'autre des deux surfaces.

Cela posé, soit D une sécante quadruple d'une courbe C_8 ; un des plans tangents à la surface de Kummer menés par D touche la surface en un point A, de C_8, et coupe en outre C_8 en deux points, p_1, p_2, en ligne droite avec A (nº 72). Parmi les surfaces du quatrième ordre inscrites le long de C_8, surfaces qui forment un faisceau ponctuel, il en est une, et une seule, S, qui passe par un cinquième point de D, et qui, par suite, contient cette droite. En vertu de la remarque précédente, les quatre points où D rencontre la surface de Kummer sont des points doubles de S, et la droite D est dès lors une droite double de S. Observons maintenant que la droite Ap_1p_2 (qui coupe D) est sur la surface S, puisqu'elle a cinq points sur celle-ci, et que les points p_1 et p_2 sont, d'après la remarque, des points doubles de S. Le même raisonnement pouvant être reproduit pour les quatre plans tangents menés à la surface de Kummer par la droite D, on voit que la surface S a huit points doubles. Ainsi :

Le long de toute courbe C_8 générale tracée sur la surface de Kummer, on peut inscrire à cette surface dix surfaces du quatrième ordre, ayant une droite double et huit points doubles.

Pour chacune de ces surfaces, la droite double est une des dix sécantes quadruples de la courbe C_8; les huit points doubles, situés sur C_8, sont par couples dans les quatre plans tangents qu'on peut mener par la droite double à la surface de Kummer.

Il serait aisé de voir que, pour certaines courbes C_8 *particulières*, deux des surfaces précédentes peuvent se confondre en une seule surface du quatrième ordre, à deux droites doubles; dans un autre cas, celui où la courbe C_8 a un point double, une des surfaces du quatrième ordre inscrites a deux droites doubles, concourant au point double et tangentes à la surface de Kummer en ce point; enfin, dans un troisième cas, que nous rencontrerons plus loin, où la courbe C_8 a un point triple en un des points singuliers de la surface de Kummer, une des surfaces du quatrième ordre inscrites est *une surface de Steiner*.

74. En dernier lieu, nous énoncerons, relativement aux courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer, ces quelques propositions évidentes, auxquelles nous aurons à renvoyer par la suite.

Les courbes d'ordre $4m$, qui sont les intersections complètes de la surface et d'une surface d'ordre m, touchent en $2m$ points chacun des plans singuliers.

Les courbes d'ordre $4m$, de la famille singulière, touchent en $2m-3$ points les seize plans singuliers.

Les courbes d'ordre $4m$, appartenant à l'une des trente familles associées deux à deux, touchent huit plans singuliers en $2m-1$ points et les huit autres en $2m-3$ points.

Les courbes d'ordre $4m+2$ qui passent par six points singuliers situés dans un même plan touchent ce plan en $2m-2$ points, et touchent les quinze autres plans singuliers en $2m$ points.

Les courbes d'ordre $4m+2$ qui passent par les dix points singuliers non situés dans un plan singulier, touchent celui-ci en $2m+1$ points et touchent les quinze autres en $2m-1$ points.

CHAPITRE VIII.

Surfaces développables circonscrites à la surface de Kummer.

75. La réciproque d'une surface de Kummer est évidemment une surface de Kummer; aux courbes tracées sur la première correspondent des surfaces développables circonscrites à la seconde, et, par suite, les propositions démontrées sur la classification des courbes d'un degré connu donnent, par dualité, la classification des surfaces développables, d'une classe donnée, circonscrites à la surface de Kummer.

Pour ne pas étendre inutilement ce Mémoire, nous n'énoncerons pas explicitement toutes ces propriétés.

Quand on transforme par réciprocité une surface de Kummer, une courbe C_1 d'ordre $2m$, de cette surface se transforme en une développable de classe $2m$ circonscrite à la surface réciproque suivant une courbe C_2 : pour abréger, nous dirons que *les courbes C_1 et C_2 sont réciproques.*

Cela posé, nous traiterons les questions suivantes :

Étant donnée sur la surface de Kummer une courbe C_1, quel est *le degré de la courbe réciproque, C_2, et à quelle famille appartient celle-ci?*

Le degré de C_2 est d'ailleurs égal à la classe de la développable circonscrite, le long de la courbe C_1, à la surface de Kummer primitive.

Nous pouvons toujours supposer que la quadrique qui sert à définir la transformation réciproque ait pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

soient toujours $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ les quatre fonctions normales, d'ordre 2, à caractéristique nulle, qui sont proportionnelles aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point d'une surface de Kummer, K_1.

Les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 d'un point de la surface K_2, réciproque de K_1, sont données par les formules

$$\rho X_1 = \begin{vmatrix} \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_4 \\ \frac{\partial\Theta_2}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_4}{\partial u} \\ \frac{\partial\Theta_2}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_4}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad -\rho X_4 = \begin{vmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \frac{\partial\Theta_1}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_2}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\Theta_1}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_2}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Désignons par $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ les quatre déterminants précédents : chacune des fonctions θ_i est, comme on le voit aisément, une fonction thêta, normale, paire, d'ordre 6, à caractéristique nulle. Elle s'annule pour la demi-période $u = 0$, $v = 0$, ainsi que ses dérivées premières par rapport à u et v, car les fonctions *impaires* $\frac{\partial\Theta_i}{\partial u}$, $\frac{\partial\Theta_i}{\partial v}$ s'annulent pour $u = 0$, $v = 0$. On démontrerait de même que les quinze autres demi-périodes annulent les quatre fonctions θ_i et leurs dérivées premières.

Géométriquement, les courbes, représentées sur la surface K_1 par l'équation

$$\mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3 + \mu_4\theta_4 = 0,$$

$\mu_1, \ldots \mu_4$ étant des constantes, sont, d'après ce qui vient d'être dit, les intersections de K_1 avec des surfaces du troisième ordre passant par les seize points singuliers : ce résultat était à prévoir, puisque la polaire d'un point quelconque par rapport à K_1 est précisément une surface de cette nature.

Cela posé, soit $\Theta_p(u, v) = 0$ l'équation d'une courbe quelconque C_1 d'ordre $2p$, tracée sur K_1 : Θ_p est une fonction normale, d'ordre p, paire ou impaire. La courbe réciproque C_2 sera représentée, sur la surface K_2, par la même équation; il sera aisé, d'après cela, d'en déterminer le degré et la famille.

76. *Supposons d'abord p pair; $p = 2m$*; trois cas sont à distinguer :

1° Si la courbe C_1, d'ordre $4m$, est l'intersection complète de K_1 et d'une surface d'ordre m, la fonction thêta correspondante $\Theta_{2m}(u, v)$ est paire, d'ordre $2m$, et ne s'annule, en général, pour aucune des seize demi-périodes.

On trouvera le degré de la courbe C_2, c'est-à-dire de la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$ sur la surface K_2, en cherchant en combien de points cette courbe coupe le plan $X_i = 0$. Or X_i est proportionnel à une fonction θ_i, paire et d'ordre 6; le nombre des zéros communs aux fonctions Θ_{2m} et θ_i est égal à $2.2m.6 = 24m$, et comme ces zéros sont deux à deux égaux et de signes contraires, *le degré de C_2 sera* la moitié de ce nombre, c'est-à-dire $12m$.

Si la courbe C_1 passe par un ou plusieurs points doubles de K_1, ce résultat se modifie. Supposons, par exemple, qu'elle passe par le point singulier $u = 0$, $v = 0$: la fonction *paire* $\Theta_{2m}(u, v)$, s'annulant pour $u = 0$, $v = 0$, aura ses dérivées premières nulles en ce point, et, par suite, parmi les $24m$ solutions communes aux deux équations $\theta_i = 0$, $\Theta_{2m} = 0$ figurera quatre fois la solution $u = 0$, $v = 0$ ([1]). Le degré de C_2 sera ainsi $\frac{1}{2}(24m - 4) = 12m - 2$; on voit qu'il s'abaisse de deux unités toutes les fois que C_1 passe par un point singulier de la surface K_1.

([1]) Cela tient, géométriquement, à ce que les deux courbes $\Theta_{2m}(u, v) = 0$, $\theta_i(u, v) = 0$ ont un point double pour $u = 0$, $v = 0$, sur la surface K_1.

La courbe C_1 (n° **74**), si elle ne passe par aucun point singulier, touche en $2m$ points chacun des seize plans singuliers de K_1; les seize points singuliers de K_2 seront donc, sur C_2, des points multiples d'ordre $2m$; il en résulte que C_2 est (n° **31**) l'intersection complète de la surface K_2 avec une surface algébrique d'ordre $3m$ ayant un point multiple d'ordre m en chacun des seize points singuliers de K_2.

Ce dernier résultat, transformé par réciprocité, donne la proposition suivante :

La développable circonscrite à la surface de Kummer le long d'une courbe d'ordre $4m$, intersection de cette surface avec une surface d'ordre m qui ne passe par aucun point singulier, est de classe $12m$; elle est circonscrite à une surface de classe $3m$, qui touche en m points chacun des seize plans singuliers.

2° Si la courbe C_1 appartient à la famille singulière d'ordre $4m$, on trouve sans difficulté, en appliquant les mêmes méthodes que tout à l'heure, que le degré de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12.2m - 2.16] = 12m - 16$.

En général, la courbe C_1 touche en $2m - 3$ points chacun des seize plans singuliers de K_1 (n° **74**); sur C_2 les seize points singuliers de K_2 sont donc des points multiples d'ordre $2m - 3$: il en résulte (n° **31**) que C_2 appartient, sur K_2, à la famille singulière de courbes d'ordre $4(3m - 4)$.

3° La courbe C_1 peut enfin appartenir à l'une des trente familles de courbes qui passent par huit points singuliers de K_1; on trouve, en ce cas, que l'ordre de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12.2m - 16] = 12m - 8$.

En général, la courbe C_1 touche en $2m - 1$ points huit des plans singuliers de K_1 et touche les huit autres en $2m - 2$ points (n° **74**). Donc, sur C_2, huit des points singuliers de K_2 sont multiples d'ordre $2m - 1$, et les huit autres, multiples d'ordre $2m - 2$; par suite (n° **31**), sur la surface K_2, la courbe C_2 appartient à une des trente familles, deux à deux associées, de courbes d'ordre $12m - 8$.

Les résultats qui précèdent ne sont exacts que si les courbes C_1 considérées n'ont de point multiple (d'ordre supérieur ou égal à 2), en aucun des points singuliers de K_1; il est aisé de calculer l'abaissement que la présence d'un tel point multiple amènerait dans le degré de C_2; on trouve, par la méthode suivie plus haut, que, pour un point multiple d'ordre $2h$, l'abaissement est égal à $2h$, et pour un multiple d'ordre $2h+3$, égal à $2h+2$.

De plus, on déterminerait aisément, dans chaque cas particulier, à quelle famille appartient C_2 : il suffit, pour cela, de chercher en combien de points C_1 touche chacun des seize plans singuliers de K_1; on connaît ainsi l'ordre de multiplicité des points singuliers de K_2 sur la courbe C_2, d'où l'on déduit (nº **31**) la famille de celle-ci.

77. *Supposons maintenant p impair; $p = 2m+1$*; deux cas sont à distinguer :

1° Si la courbe C_1, d'ordre $4m+2$, passe par six points singuliers dans un même plan, le degré de C_2 est égal à

$$\tfrac{1}{2}[12(2m+1) - 2.6] = 12m.$$

La courbe C_1, en général, touche (nº **74**) quinze des plans singuliers de K_1 en $2m$ points et le seizième en $2m-2$ points; donc C_2 a un point multiple d'ordre $2m-2$ en un des points singuliers de K_2, et un point d'ordre $2m$ en chacun des quinze autres. La courbe C_2 est donc l'intersection complète de K_2 avec une surface d'ordre $3m$ ayant un point multiple d'ordre $m-1$ en un des points singuliers de K_2 et un point d'ordre m en chacun des quinze autres.

2° Si la courbe C_1 passe par dix points singuliers de K_1, le degré de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12(2m+1) - 2.10] = 12m - 4$; on voit, comme plus haut, qu'elle a, en général, un point multiple d'ordre $2m+1$ en un des points singuliers de K_2 et un point multiple d'ordre $2m-1$ en chacun des quinze autres. La courbe C_2 appartient donc à la famille singulière de courbes d'ordre $12m-4$.

Si la courbe C_1 a un point multiple en un point singulier de K_1, ces résultats cessent d'être exacts, et le degré de C_2 s'abaisse, d'après la loi indiquée au nº **76**.

78. Comme application, on peut observer que la réciproque d'une courbe C_1 de la famille singulière d'ordre 8, n'ayant de point multiple en aucun point double de la surface de Kummer, est également une courbe d'ordre 8 de la famille singulière; par suite la développable circonscrite le long d'une telle courbe est de classe 8.

Dans le cas où la courbe C_1 a un point triple en un point singulier de K_1, elle ne touche aucun des six plans singuliers passant par ce point et touche les dix autres en un point : la réciproque, C_2, est une courbe du sixième ordre (n° **76**), passant par les dix points singuliers de K_2 non situés dans un même plan singulier.

Inversement, la réciproque d'une telle courbe C_2 du sixième ordre est une courbe C_1, d'ordre 8, de la famille singulière, ayant un point triple en un point singulier.

Or, le long de C_2, on peut inscrire à K_2 une surface du troisième ordre à quatre points doubles (n° **49**); donc, le long de C_1 on pourra inscrire à K_1 une *surface de Steiner*, et, par suite :

Il y a seize familles, chacune trois fois infinie, de surfaces de Steiner inscrites à une surface de Kummer; les courbes de contact des surfaces d'une même famille sont les courbes d'ordre 8, *de la famille singulière, qui ont un point triple en un des seize points singuliers.*

79. Voici quelques propriétés de ces surfaces déduites, par dualité, de celles énoncées au n° **49** :

Les surfaces de Steiner inscrites à la surface de Kummer le long des courbes d'ordre 8 *qui ont un point triple en un même point singulier ont chacune pour droites doubles trois droites passant par ce point et formant un trièdre dont les faces touchent le cône des tangentes de la surface de Kummer au point singulier considéré.*

Inversement, *les trois arêtes d'un trièdre, circonscrit au cône des tangentes d'une surface de Kummer en un point singulier, sont les droites doubles d'une surface de Steiner inscrite à cette surface.*

Deux surfaces de Steiner inscrites, appartenant à une même famille, se touchent en quatre points de la surface de Kummer; ces quatre points, situés dans un même plan, sont les points de contact *avec cette surface d'une même conique, qui est tracée sur les deux surfaces de Steiner considérées.*

Observons enfin que les quatre plans singuliers d'une surface de Steiner inscrite, c'est-à-dire les quatre plans qui la touchent chacun suivant une conique, forment un *tétraèdre circonscrit par ses faces et par ses arêtes* à la surface de Kummer. Ces tétraèdres sont les réciproques de ceux du n° **50**, qui sont inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes; le théorème du n° **51** se transforme ainsi :

Les trois arêtes d'un trièdre circonscrit au cône des tangentes d'une surface de Kummer en un point singulier rencontrent respectivement la surface en deux nouveaux points : les six points ainsi obtenus sont trois à trois sur quatre plans qui touchent la surface de Kummer, et ces quatre plans sont les faces d'un tétraèdre dont les six arêtes touchent également la surface. Les points de contact des six arêtes sont les six points primitifs.

CHAPITRE IX.

Genre des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer. Géométrie sur ces courbes.

80. Nous étudierons, dans ce Chapitre, les courbes tracées sur la surface de Kummer, au point de vue de leur genre et de toutes les propriétés qui se rattachent à la notion de genre; nous arriverons ainsi, dans ce sujet de recherches, à des résultats simples et intéressants, liés d'une manière étroite à notre théorie de la classification des courbes d'un degré donné.

La Géométrie permet d'indiquer immédiatement le genre général des courbes d'un même ordre et d'une même famille, sur la surface de Kummer.

Ces courbes, en effet, sont les intersections de la surface de Kummer, qui est d'ordre 4, avec des surfaces d'un même degré, q, passant par h coniques singulières ($h = 0, 1, 2, 3, 4$); or, d'après un théorème de M. Nöther, les surfaces d'ordre $q + 4 - 4$, c'est-à-dire d'ordre q qui passent par les h coniques, coupent une des courbes de la famille considérée en $2(p-1)$ points mobiles, p étant le genre général de ces courbes : en d'autres termes, deux courbes de la famille se coupent en $2(p-1)$ points variables. De plus, ces $2(p-1)$ points forment, sur la courbe à laquelle ils appartiennent, un des *groupes spéciaux* qu'on désigne par la notation $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, ou plus simplement $\mathcal{G}$, et dont voici la définition générale :

Sur une courbe plane d'ordre m, les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ sont les groupes de $2(p-1)$ points mobiles découpés sur la courbe par les courbes adjointes d'ordre $m-3$; sur une courbe gauche, intersection partielle de deux surfaces d'ordres m et n, les groupes $\mathcal{G}$ sont découpés par les surfaces d'ordre $m+n-4$ adjointes, c'est-à-dire passant par le reste de l'intersection des deux surfaces, et par les points doubles de la courbe gauche, si elle en a. Cette dernière définition implique un théorème, qui est dû à M. Nöther et que nous venons de rappeler tout à l'heure. Dans tous les cas, on peut dire que sur une courbe gauche, les groupes $\mathcal{G}$ sont formés par les points qui correspondent univoquement aux points d'un groupe $\mathcal{G}$ sur une courbe plane de même genre et de mêmes modules, ou encore sont formés par les points où s'annule une même différentielle abélienne de première espèce.

Il résulte des définitions et des raisonnements précédents que l'on obtiendra, sur une courbe algébrique générale de la surface de Kummer, *tous* les groupes $\mathcal{G}$, en coupant cette courbe par les courbes du même ordre et de la même famille; or les groupes $\mathcal{G}$ forment, sur une courbe, un système $p-1$ fois infini, d'après leur définition même sur la courbe plane de genre p : on voit ainsi que $p-1$, pour une courbe de la surface de Kummer, est égal au nombre, diminué de 1, des paramètres dont dépend linéairement l'équation des courbes du même ordre et de la même famille.

Ce résultat peut se vérifier autrement : nous avons vu, en effet, que, si N est le nombre des points mobiles communs à deux courbes du même ordre et de la même famille, le genre général, p, de ces courbes est donné par la relation $N = 2(p-1)$; comme nous savons calculer N, par la formule de M. Poincaré, nous pouvons calculer p, et nous arrivons ainsi, sans difficulté, à la formule

$$p = 1 + \tfrac{1}{2}(m^2 - s),$$

$2m$ étant l'ordre de la courbe considérée, supposée sans point multiple, p son genre et $2s$ le nombre des points singuliers de la surface de Kummer par lesquels elle passe.

Ainsi :

Le genre général des courbes d'un même ordre et d'une même famille tracées sur la surface de Kummer est égal au nombre des paramètres dont dépend cette famille.

Deux de ces courbes se coupent en des points mobiles formant sur l'une et sur l'autre un groupe spécial $G_{2(p-1)}$, *et, sur l'une d'elles, tous les groupes spéciaux* $G_{2(p-1)}$ *sont découpés par les autres courbes de la famille.*

81. Ces résultats peuvent être établis par une méthode analytique, que nous aurons occasion d'appliquer dans nos recherches ultérieures.

Soit $\Theta(u, v)$ la fonction normale la plus générale, d'ordre m et de caractéristique donnée, paire ou impaire : $\Theta_0(u, v)$ étant une quelconque des fonctions ainsi définies, la courbe $\Theta_0 = 0$ sera, sur la surface de Kummer, d'ordre $2m$; si nous désignons par x, y, z les coordonnées non homogènes d'un quelconque de ses points, toute *différentielle abélienne* appartenant à cette courbe sera de la forme $F(x, y, z)\,dx$, F étant rationnel en x, y, z.

Considérons, maintenant, le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, la différentielle

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}\,du,$$

où $\Theta(u, v)$ a la signification qu'on vient d'indiquer. Nous allons prouver que c'est *une différentielle abélienne de première espèce.*

Démontrons d'abord que c'est une différentielle abélienne, c'est-à-dire qu'en tout point de la courbe $\Theta_0 = 0$, on a

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} du = F(x, y, z)\, dx,$$

ce qui revient à dire que la fonction

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} \frac{du}{dx}$$

est exprimable, le long de la courbe, en fonction rationnelle des coordonnées.

Or, sur la surface de Kummer et, par suite, le long de la courbe, les coordonnées x, y, z d'un point sont évidemment, d'après le mode de représentation en coordonnées homogènes, des fonctions uniformes, quadruplement périodiques et *paires* des deux paramètres u, v; on a donc

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ étant des fonctions quadruplement périodiques *impaires*. D'ailleurs, le long de la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, on a

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} du + \frac{\partial\Theta_0}{\partial v} dv = 0.$$

Il vient ainsi, pour l'expression de $\varphi(u, v)$, par élimination de dx, du et dv,

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u, v)}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\Theta_0}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}}.$$

Le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, on peut écrire

$$\frac{1}{\varphi(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial v}\Theta_0}{\Theta^2} - \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}\Theta - \frac{\partial\Theta}{\partial u}\Theta_0}{\Theta^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\varphi(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta_0}{\Theta} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta_0}{\Theta}.$$

Sous cette dernière forme, on voit, puisque $\frac{\Theta_0}{\Theta}$ est évidemment une fonction quadruplement périodique paire, que $\varphi(u, v)$ est aussi une fonction quadruplement périodique, *paire*.

Or il est clair que toute fonction $\varphi(u, v)$ quadruplement périodique et paire peut s'exprimer en fonction rationnelle des coordonnées, x, y, z, du point (u, v) de la surface de Kummer; car, si l'on se donne x, y, z, les paramètres u et v n'ont, abstraction faite des multiples des périodes, que deux systèmes de valeurs de la forme u, v et $-u$, $-v$, auxquels ne correspond qu'une seule valeur de $\varphi(u, v)$.

La fonction $\varphi(u, v)$ étant ainsi une fonction rationnelle de x, y, z, notre différentielle est abélienne.

Reste à établir qu'elle est de première espèce. Or cette différentielle,

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}\,du,$$

ne peut devenir infinie, puisque $\Theta(u, v)$ est une fonction entière, qu'aux points de la courbe $\Theta_0 = 0$ qui annulent $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}$. Mais la relation

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}\,du + \frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\,dv = 0$$

montre qu'en ces points *du* s'annule également, et que la différentielle reste finie; l'analogie avec le cas des courbes algébriques planes est évidente.

Il ne peut y avoir d'exception que pour les points de la courbe $\Theta_0 = 0$ qui vérifieraient les relations $\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire pour les points qui seraient *multiples* sur la courbe considérée.

Écartant provisoirement ce cas particulier, nous voyons que pour une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, sans point multiple, les intégrales abéliennes

$$(1) \qquad \int \frac{\Theta(u,v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}\right)} du$$

sont de première espèce.

82. Réciproquement, toute intégrale de première espèce, le long de la courbe $\Theta_0 = 0$ est de la forme précédente; en effet, nous savons (n° **80**) que le genre de $\Theta_0 = 0$ est égal au nombre (diminué de une unité) des paramètres qui figurent dans l'équation des courbes du même ordre et de la même famille; si $\varpi + 1$ est ce nombre, on aura $p = \varpi$. Mais les fonctions telles que Θ, linéairement indépendantes, sont en nombre $\varpi + 1$, par définition; si l'on fait abstraction de la fonction Θ_0, les ϖ autres donnent, sous la forme (1), ϖ (ou p) intégrales distinctes de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$. Le nombre des intégrales distinctes de première espèce, sur une courbe de genre p, étant toujours égal à p, on voit qu'on a ainsi obtenu toutes ces intégrales, pour la courbe $\Theta_0 = 0$, sous la forme (1).

Ce résultat aurait pu d'ailleurs s'établir directement par voie exclusivement analytique. Donc :

Les intégrales abéliennes de première espèce, appartenant à une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ de la surface de Kummer, ont pour expression générale

$$\int \frac{\Theta(u,v)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v)$ désigne la fonction thêta normale la plus générale de même ordre et de même caractéristique que la fonction $\Theta_0(u, v)$, paire ou impaire en même temps que celle-ci.

83. *Remarque*. — Si la courbe $\Theta_0 = 0$ a un point double, il est clair que la courbe $\Theta = 0$ doit passer par ce point pour que l'intégrale abélienne correspondante y reste finie; plus généralement, si $\Theta_0 = 0$ a un point multiple d'ordre h, on voit, comme dans le cas des courbes planes, que la courbe $\Theta = 0$ doit avoir, au même point, un point multiple d'ordre $h-1$. Les courbes $\Theta = 0$ satisfaisant à cette condition seront dites *adjointes* de la courbe $\Theta_a = 0$.

On voit également qu'un point double diminue le genre de une unité, un point triple de trois, etc.; il peut y avoir exception si le point multiple est un des points singuliers de la surface de Kummer; mais nous ne discuterons pas ce cas spécial, facile à examiner, et sans intérêt pour nos recherches actuelles.

84. L'étude des intersections d'une courbe générale de la surface de Kummer avec les courbes de la même famille et du même ordre revient, d'après la théorie précédente, à celle des groupes $\mathcal{G}$ sur cette courbe, et réciproquement. Or on connaît, pour une courbe algébrique quelconque, un certain nombre de propriétés générales des groupes $\mathcal{G}$, qui donneront ainsi autant de propriétés correspondantes, sur la surface de Kummer, relativement aux courbes d'une même famille.

Voici deux exemples :

Parmi les courbes d'ordre $n-3$, adjointes à une courbe plane d'ordre n et de genre p, il en est $2^{p-1}(2^p-1)$ qui touchent celle-ci en tous leurs points, non singuliers, de rencontre avec elle; il en est $p(p^2-1)$ qui ont avec cette courbe un contact d'ordre $p-1$ en un point. Donc :

Parmi les courbes du même ordre et de la même famille qu'une courbe donnée, de genre p, sans point multiple, sur la surface de Kummer : 1° il en est $2^{p-1}(2^p-1)$ qui touchent la proposée en tous leurs points (non fixes) de rencontre avec elle; 2° il en est $p(p^2-1)$ qui ont avec elle, en un point, un contact de l'ordre le plus élevé possible.

85. Des résultats plus nombreux et plus intéressants dérivent de la considération des *groupes* de points sur les courbes de la surface de Kummer, et en particulier de certains *groupes spéciaux;* mais, avant d'aborder ce sujet de recherches, il est nécessaire de rappeler, dans une courte digression, quelques définitions ou propositions de la théorie générale des courbes algébriques.

Soit C une courbe algébrique plane d'ordre n et de genre p : les courbes d'un degré donné, adjointes à C et passant par un certain nombre de points fixes de cette courbe, la coupent en outre en h points mobiles : les groupes de h points ainsi déterminés sont dits *équivalents* entre eux; les groupes équivalents à un groupe donné forment un *système de groupes*.

Analytiquement, deux groupes $a_1, a_2, \ldots, a_h$ et $b_1, b_2, \ldots, b_h$ sont équivalents, lorsque l'on a, en désignant par $\int g\,dx$ une intégrale quelconque de première espèce, appartenant à C,

$$\int_{a_1}^{b_1} g\,dx + \int_{a_2}^{b_2} g\,dx + \ldots + \int_{a_h}^{b_h} g\,dx = 0 \quad (^1).$$

Inversement, si une telle relation existe pour chacune des p intégrales de première espèce, les groupes $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ sont équivalents. C'est le théorème d'Abel et sa réciproque.

Dans un système de groupes, on distingue deux éléments :

1° Le nombre h des points d'un groupe du système;

2° La multiplicité, r, du système, c'est-à-dire le nombre de points d'un groupe qu'on peut se donner arbitrairement.

En général, d'après le théorème d'Abel, p points d'un groupe d'un système donné sont déterminés par les $h - p$ autres; on a donc

$$r = h - p,$$

mais il peut se faire qu'on ait

$$r = h - p + \rho,$$

ρ étant positif; on dit alors que le système correspondant à ces valeurs de h et r est un *système spécial, d'indice* ρ. Les groupes d'un système spécial sont dits *groupes spéciaux*.

---

(1) Le second membre de cette relation n'est nul qu'à des multiples près des $2p$ périodes de l'intégrale $\int g\,dx$.

D'après cela, tout système de groupes comprenant moins de $p+1$ points est spécial.

Les groupes $g_{2(p-1)}$ forment un système spécial, d'indice 1.

La théorie des systèmes spéciaux est dominée par le théorème suivant, dit *de Riemann-Roch* :

Par les points d'un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité r et d'indice ρ, on peut faire passer un nombre $\rho-1$ fois infini de courbes adjointes d'ordre $n-3$: ces courbes déterminent, par leurs points mobiles d'intersection avec C, un nouveau système de multiplicité $\rho-1$, qui est un système spécial d'indice $r+1$.

Les deux systèmes seront dits *complémentaires.*

Une courbe plane d'ordre n est coupée, par les droites de son plan, suivant des groupes de n points, équivalents entre eux : il résulte du théorème de Riemann-Roch que, si le système déterminé par ces groupes est un système spécial, d'indice ρ, la courbe considérée admet une famille linéaire, $\rho-1$ fois infinie, de courbes adjointes d'ordre $n-4$, et réciproquement. Les courbes jouissant de cette propriété sont dites *spéciales.*

De même, si les groupes de points déterminés sur une courbe plane par les coniques de son plan appartiennent à un système spécial d'indice ρ, la courbe proposée admet une famille linéaire $\rho-1$ fois infinie de courbes adjointes d'ordre $n-5$; ....

Sur une courbe gauche C, les groupes, spéciaux ou non, d'un même système, sont formés par les points qui correspondent aux points d'une des courbes planes sur lesquelles C est représentable point par point.

Une courbe gauche, d'ordre n, est dite *spéciale* lorsque le groupe formé par les n points où elle est rencontrée par un plan quelconque détermine un système spécial. Les courbes gauches spéciales présentent un grand intérêt : c'est à leur existence que tiennent les difficultés du problème de la classification des courbes gauches d'un degré donné.

Toute courbe gauche pour laquelle on a $p \geqq n-2$ est spéciale; en effet, les n points où elle est coupée par un plan déterminent un système de groupes dont la multiplicité est au moins égale à 3; par suite, pour ce système, $p - h + r$, c'est-à-dire $p - n + r$, est au moins égal à 1, si $p \geqq n - 2$; le système est donc spécial.

86. Revenons maintenant aux courbes tracées sur la surface de Kummer, et introduisons, pour simplifier le langage, une nouvelle définition.

Nous dirons que deux fonctions thêta normales, simultanément paires ou impaires, appartiennent à la même *série* si leurs ordres diffèrent d'un nombre pair d'unités et si elles ont même caractéristique. D'après cela, les fonctions normales paires et impaires se répartissent en 64 séries; il y a, pour les fonctions paires, 32 séries, se subdivisant en 16 séries de fonctions d'ordre pair et 16 séries de fonctions d'ordre impair; de même pour les fonctions impaires : c'est la traduction des résultats des nos **4** et **5**. Les courbes de la surface de Kummer qui correspondent aux fonctions d'une même série passent toutes par les mêmes points singuliers de la surface; les degrés de deux quelconques d'entre elles diffèrent de $4n$ unités. Nous dirons également qu'elles appartiennent à la même *série*.

87. Si la courbe d'ordre $2m$, passant simplement par $2s$ points singuliers de la surface de Kummer, a d points doubles, la valeur trouvée au n° **80** pour le genre devra être diminuée de d unités. On a ainsi

$$p = 1 + \tfrac{1}{2}(m^2 - s) - d.$$

Si la condition $p \geqq 2m - 2$ est vérifiée, la courbe sera spéciale (n° **85**); or, si d est nul, il est à remarquer que l'inégalité précédente est toujours vérifiée dès que m dépasse 4; ainsi :

Toute courbe de la surface de Kummer, sans point multiple, et d'ordre supérieur à 8, *est une courbe spéciale.*

Pour préciser ce résultat, il y a lieu de déterminer la multiplicité du système spécial qui comprend les groupes de points de la courbe situés dans un même plan; il est évident que ce nombre est au moins égal à 3; nous allons montrer qu'il a précisément la valeur 3.

Soit, en effet, $\Theta_0 = 0$ l'équation d'une courbe C_0 d'ordre $2m$, de genre p, sans point multiple; désignons par Θ' la fonction thêta la plus générale, d'ordre $m-2$, et de la même série que Θ_0, par Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les quatre fonctions normales d'ordre 2, de caractéristique nulle. Il est évident que la fonction

$$\Theta(u, v) = (\lambda_1\Theta_1 + \ldots + \lambda_4\Theta_4)\Theta',$$

où les λ sont des constantes arbitraires, est du même ordre, m, et de la même famille que Θ_0. Par suite, les deux systèmes de groupes définis respectivement, sur la courbe C_0, par les points mobiles d'intersection de cette courbe avec les plans $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_4 x_4 = 0$, et les courbes $\Theta' = 0$, systèmes dont le premier est spécial si p est au moins égal à $2m-2$, sont complémentaires : le second est donc également spécial, d'après le théorème de Riemann-Roch. Pour démontrer que la multiplicité du premier système est égale à 3, il suffit évidemment d'établir que *tous* les groupes de ce système sont formés de points situés dans un même plan, ou bien, en vertu du théorème de Riemann-Roch, de démontrer que toute courbe $\Theta(u, v) = 0$, de même ordre et de même famille que $\Theta_0 = 0$, qui passe par les points non fixes où la courbe C_0 est coupée par une des courbes $\Theta' = 0$, la coupe en outre en $2m$ points situés dans un même plan.

Or les courbes $\Theta = 0$, $\Theta_0 = 0$, $\Theta' = 0$ appartiennent à la même série; la première passe donc par *tous* les points, *fixes ou non*, qui sont communs aux deux dernières, en vertu de l'hypothèse même; la courbe $\Theta + \lambda\Theta_0 = 0$ passe aussi par ces points, et l'on peut choisir la constante λ de manière à la faire passer par un nouveau point de la courbe $\Theta' = 0$: elle coupe ainsi cette dernière en un point de plus que ne l'exige le théorème de M. Poincaré, et, par suite, puisque la courbe $\Theta' = 0$ peut être choisie indécomposable, la fonction $\Theta + \lambda\Theta_0$ devra contenir Θ' en facteur. Le quotient $\frac{\Theta + \lambda\Theta_0}{\Theta'}$ est, d'après la nature de Θ, Θ_0, Θ', une fonction thêta, normale, d'ordre 2, de caractéristique nulle; il vient ainsi

$$\Theta + \lambda\Theta_0 = \Theta'(\lambda_1\Theta_1 + \ldots + \lambda_4\Theta_4),$$

ce qui montre bien que la courbe $\Theta = 0$ coupe en outre $\Theta_0 = 0$ en $2m$ points, situés dans le plan $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_4 x_4 = 0$.

Nous avons ainsi établi que la multiplicité du système spécial formé par les groupes de points de C_0 situés dans un même plan est égale à 3; de même on voit que les groupes du système complémentaire sont formés *uniquement* par les points d'intersection mobiles de la courbe C_0 (d'ordre $2m$) avec les courbes d'ordre $2m - 4$ de la même série.

88. Plus généralement, on établit de la même manière que, si p est supérieur ou égal à $2mq - \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) + 2$, la courbe C_0 est coupée par toute surface d'ordre q suivant un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) - 1$; le système complémentaire est formé par les groupes des points mobiles communs à la courbe proposée et aux courbes de la même série, d'ordre $2m - 4q$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Toute courbe, sans point multiple, tracée sur la surface de Kummer, et d'ordre $2m$, est coupée par les courbes de la même série, d'ordre $2m - 4q$, suivant des groupes de points mobiles formant un système spécial. Ce système ne comprend pas d'autres groupes que ceux ainsi définis.

Le système complémentaire est formé exclusivement par les groupes de $2mq$ points découpés sur la courbe proposée par les surfaces d'ordre q de l'espace.

Il est inutile d'énoncer la condition restrictive

$$p \geqq 2mq - \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) + 2;$$

elle est vérifiée nécessairement s'il existe des courbes d'ordre $2m - 4q$, de la même série que la proposée.

Si la courbe a des points doubles, la proposition précédente s'applique aux courbes d'ordre $2m - 4q$ *adjointes* (n° **83**) à la proposée.

Il résulte aisément de ce qui précède que, sur la surface de Kummer, les seules courbes, sans point multiple, qui ne soient pas *spéciales,* sont les seize coniques, les biquadratiques, les sextiques passant par dix points singuliers et les courbes d'ordre 8 de la famille singulière.

89. *Remarque.* — Les surfaces d'ordre q découpent sur une courbe C_0 de la surface de Kummer des groupes appartenant à un système de multiplicité au moins égal à $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)-1$; si le système est spécial, la multiplicité a précisément cette valeur, comme nous venons de le voir. L'indice, ρ, est égal à

$$p - 2mq + \tfrac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) - 1 \quad (^1),$$

p et $2m$ désignant toujours le genre et l'ordre de la courbe.

La projection de cette courbe sur un plan est une courbe, C'_0, d'ordre $2m$ et de genre p, sur laquelle existe un système de groupes spéciaux d'indice ρ; les intersections de C'_0 avec les courbes d'ordre q de son plan, forment des groupes de ce système, et, par suite (n° **85**), C'_0 admet une famille linéaire, $\rho-1$ fois infinie, de courbes adjointes d'ordre $2m - q - 3$.

Donnons quelques exemples :

Les sextiques passant par six points singuliers situés dans un même plan se projettent suivant des courbes du sixième ordre qui ont six points doubles situés sur une conique.

Les courbes du huitième ordre ne passant par aucun point singulier se projettent suivant des courbes du même ordre, à douze points doubles : ces douze points sont sur une cubique, et sur une infinité triple de quartiques.

---

(1) Il est clair que si la courbe considérée est sur h surfaces d'ordre q, linéairement distinctes, la multiplicité et, par suite, l'indice du système doivent être diminués de h.

Les courbes du huitième ordre passant par huit points singuliers se projettent suivant des courbes du même ordre, à quatorze points doubles situés sur une infinité simple de quartiques.

90. Étudions maintenant les points mobiles communs à C_0 et aux courbes de la même série, d'ordre $2m+4q$.

Ces courbes coupent C_0, comme on le voit de suite, en $2(p-1)+2mq$ points mobiles; les groupes de points ainsi déterminés appartiennent évidemment à un même système, qui n'est pas spécial, puisque chaque groupe comprend plus de $2(p-1)$ points. La multiplicité de ce système est donc $p+2mq-2$; pour qu'il ne comprenne pas d'autres groupes que ceux qu'on vient de définir, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un de ces groupes comprenant $p+2mq-2$ points arbitraires de la courbe C_0.

Or les courbes d'ordre $2m+4q$, passant par $2s$ points singuliers de la surface de Kummer, dépendent linéairement (n° **80**) de $1+\frac{1}{2}(m+2q)^2-\frac{s}{2}$ paramètres; parmi ces courbes figurent celles qui ont pour équation

$$0=\Theta_0(\lambda_1\theta_1+\lambda_2\theta_2+\ldots),$$

Θ_0 étant toujours le premier membre de l'équation de C_0, et θ_1, θ_2, ... désignant les fonctions, linéairement distinctes, paires, d'ordre $2q$, de caractéristique nulle. Ces fonctions étant (n° 4) en nombre égal à $2q^2+2$, on pourra, parmi les points communs à C_0 et à une courbe de la même série, d'ordre $2m+4q$, en choisir arbitrairement un nombre égal à

$$1+\frac{1}{2}(m+2q)^2-\frac{s}{2}-2q^2-2,$$

c'est-à-dire, puisque $p=1+\frac{1}{2}(m^2-s)$, égal à

$$p+2qm-2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi les groupes déterminés sur C_0 par les courbes de la même série, d'ordre $2m+4q$, appartiennent à un système qui ne contient pas d'autres groupes; il est clair d'ailleurs qu'on obtient un groupe particulier du système en combinant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ avec le groupe de $2mq$ points de C_0 situés sur une surface d'ordre q.

Voyons maintenant ce que donnent ces propriétés pour la courbe C'_0, projection de C_0.

Au système de groupes considéré correspondra, sur C'_0, un système de groupes, renfermant chacun $2mq + 2(p-1)$ points, et parmi lesquels figurent les groupes obtenus en combinant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ avec celui que forment les $2mq$ points de C'_0 situés sur une courbe d'ordre q. Or une courbe d'ordre $2m-3$ adjointe à C'_0 et une courbe d'ordre q forment une courbe adjointe d'ordre $2m+q-3$: donc, d'après les propriétés connues des courbes adjointes, tous les groupes du système seront découpés sur C'_0 par les courbes adjointes d'ordre $2m+q-3$ et réciproquement. Ainsi :

Soient C_0 *une courbe d'ordre* $2m$, *sans point multiple, de la surface de Kummer, et* C'_0 *la courbe du même ordre suivant laquelle elle se projette sur un plan quelconque : les courbes de la surface de Kummer de la même série que* C_0, *d'ordre* $2m+4q$, *découpent sur cette courbe des groupes de points mobiles, qui ont pour projections les groupes déterminés sur la courbe* C'_0 *par les courbes adjointes d'ordre* $2m+q-3$ *et réciproquement* (¹).

Ce théorème permet d'étendre à une courbe de la surface de Kummer les propositions si nombreuses que l'on connaît sur les groupes de points communs à une courbe plane et à ses adjointes d'un ordre donné.

Sans insister ici sur ces applications bien faciles, nous aborderons l'étude de courbes intéressantes et très générales situées sur la surface de Kummer; nous les appellerons *courbes univoques*, en raison d'une de leurs propriétés fondamentales.

(¹) Si C_0 a des points doubles, le théorème s'applique aux courbes de la même série, d'ordre $2m+4q$, qui lui sont adjointes (nº 83).

CHAPITRE X.

Courbes univoques.

91. Soit $\theta_0(u, v)$ une fonction thêta quelconque : *si cette fonction n'est ni paire, ni impaire*, et si elle ne le devient pas quand on la multiplie par $e^{-\frac{p}{2}u-\frac{q}{2}v}$ (n° **10**), la courbe $\theta(u, v) = 0$, sur la surface de Kummer, doit être en réalité considérée comme donnée par l'équation $\theta_0(u, v)\,\theta_0(-u, -v) = 0$; elle a été comprise dans les recherches que nous avons faites jusqu'ici (n° **14**), mais elle jouit de propriétés particulières qui rappellent celles des sections de la surface par ses plans tangents : ces sections appartiennent d'ailleurs à la catégorie de courbes dont il s'agit (n° **59**).

La fonction $\theta_0(u, v)$ peut, comme nous le savons (n° **2**), se mettre sous la forme

$$\theta_0(u, v) = \Theta_0(u - \lambda, v - \mu),$$

où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta à caractéristique nulle.

Nous retrouvons ainsi les courbes dont nous avons dit un mot au n° **61**.

Elles jouissent de cette propriété fondamentale que, pour chaque point de l'une d'elles, on peut séparer les deux couples d'arguments u, v et $-u, -v$ qui correspondent à un point de la surface de Kummer, car si la fonction $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)$ n'est ni paire, ni impaire, elle ne s'annule que pour un seul des systèmes d'arguments u, v et $-u, -v$ qui appartiennent à un point de la courbe

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0 \qquad (\text{n° } \mathbf{60}).$$

Si la fonction $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)$ était paire ou impaire, on retomberait sur les courbes générales étudiées jusqu'ici, car on a vu (n° **14**) que toute fonction thêta, paire ou impaire, est nécessairement une fonction normale.

Ce cas étant exclu, il ne correspond, à un point de la courbe $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$, qu'un seul système de valeurs des paramètres

u et v, aux multiples près des périodes : pour rappeler cette propriété, nous donnerons aux courbes dont il s'agit le nom de *courbes univoques*.

Si $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta d'ordre m, la courbe

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$$

est, d'après le théorème de M. Poincaré, *d'ordre* $4m$; *elle a* (nº **61**) m^2 *points doubles,* donnés par les deux équations

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)=0.$$

Enfin, la fonction $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)$ étant une fonction thêta normale d'ordre $2m$, de caractéristique nulle et paire, la courbe précédente est (nº **16**) *l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m, touchant la première en m^2 points.*

La réciproque de cette dernière proposition n'est pas vraie; nous verrons, en effet, plus loin de quelles propriétés spéciales jouissent les surfaces d'ordre m qui passent par les courbes univoques d'ordre $4m$.

Les courbes représentées par l'équation

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

quand on fait varier λ et μ, en laissant Θ_0 invariable, se correspondent en général point par point (nº **61**); enfin (nº **62**), le long de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$, *$du$ et dv sont des différentielles abéliennes de première espèce.*

Le *genre* de cette courbe se détermine par la formule du nº **87**, où l'on fait $s=0$ et $d=m^2$; on trouve ainsi

$$p=1+\tfrac{1}{2}(4m^2)-m^2=m^2+1.$$

92. Soit $\Theta(u, v)$ une fonction normale quelconque, d'ordre m, à caractéristique nulle; l'intégrale

$$(1)\qquad \int \frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\left(\dfrac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}\,du$$

est une intégrale abélienne de première espèce appartenant à la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$. Elle est abélienne, car si x, y, z désignent les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface de Kummer, exprimées en fonction quadruplement périodiques de u et v, la fonction

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)} \frac{du}{dx}$$

peut s'écrire, le long de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$ (n° **81**).

$$\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta(u-\lambda, v-\mu)} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}}.$$

Le dénominateur de cette expression est évidemment une fonction uniforme, quadruplement périodique de u, v : or, à un point de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)$, ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul système de valeurs de u, v (n° **91**) et, par suite, qu'une seule valeur de la fonction $\varphi(u, v)$: celle-ci est donc exprimable rationnellement en fonction des coordonnées du point (u, v) de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$. En d'autres termes, l'intégrale considérée est abélienne.

Elle est de première espèce, car il est manifeste qu'elle ne devient infinie en aucun point de la courbe $\Theta_0 = 0$, à moins que celle-ci n'ait, en dehors des m^2 points indiqués plus haut, d'autres points doubles vérifiant les relations

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial v} = 0.$$

Nous écarterons, sauf avis contraire, ce cas spécial.

On trouve ainsi un nombre d'intégrales de première espèce égal à m^2-1, puisqu'il y a m^2 fonctions Θ linéairement distinctes parmi lesquelles figure Θ_0 ; ces intégrales, jointes aux intégrales $\int du$ et $\int dv$, donnent le nombre total m^2+1, ou p, des intégrales distinctes de première espèce.

93. Cela posé, nous appellerons *courbes univoques* d'un même ordre et d'une même famille celles qui sont représentées par une équation de la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction de caractéristique nulle, d'un ordre *donné*, et où λ et μ sont *fixes :* une famille de courbes univoques est donc définie par l'ordre de la fonction $\Theta(u, v)$ et par les valeurs de λ et μ.

Il est à observer que la famille de courbes univoques définie par des valeurs λ et μ des deux paramètres est la même que celle définie par les valeurs $-\lambda$ et $-\mu$: en effet, $\Theta(u, v)$ étant une fonction normale à caractéristique nulle, la fonction $\Theta(-u, -v)$ est une fonction de même ordre et de même caractéristique, $\Theta'(u, v)$, en sorte que la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, qui est, sur la surface de Kummer, la même que la courbe $\Theta(-u-\lambda, -v-\mu)=0$, est aussi la même que la courbe $\Theta'(u+\lambda, v+\mu)=0$.

94. *Remarque.* — Deux courbes univoques d'ordres $4m$ et $4n$ se coupent en $4mn$ points; on peut observer que ces points se répartissent en deux groupes distincts de $2mn$ points chacun. En effet, les deux courbes

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0,$$

où les Θ sont des fonctions d'ordre marqué par l'indice, se coupent aux $2mn$ points dont les coordonnées u, v vérifient les deux équations précédentes; la première pouvant aussi s'écrire

$$\Theta_m(-u-\lambda, -v-\mu)=0;$$

les $2mn$ solutions communes à cette équation et à l'équation

$$\Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0$$

donnent $2mn$ *nouveaux* points d'intersection des deux courbes.

Si les deux courbes sont du même ordre et de la même famille caractérisée par les valeurs λ, μ, on peut, d'une seule façon, mettre leurs équations sous la forme

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta'_m(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

les $2m^2$ points communs aux deux courbes, et dont les arguments vérifient ces deux équations, jouent un rôle plus important que les $2m^2$ autres points d'intersection. Aussi leur réservons-nous le nom de *points communs* aux deux courbes.

D'après ce qui précède, *deux courbes univoques d'un même ordre, $4m$, et d'une même famille, ont $2m^2$ points communs, formant sur chacune d'elles un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$*; mais tous les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, sur une courbe univoque, ne sont pas obtenus de la même manière, à cause de l'existence des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, qui ne rentrent pas dans le type (1).

Il serait aisé de démontrer des propositions analogues à celles des nos 88 et 90, relativement aux groupes de points découpés, sur une courbe univoque, par les courbes univoques d'ordre inférieur ou supérieur : nous ne développerons pas ici ces considérations, sur lesquelles nous aurons à revenir à propos des surfaces hyperelliptiques générales; nous nous bornerons, dans ce qui suit, à établir quelques propriétés spéciales à la surface de Kummer.

93. Soient $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$, $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ deux courbes univoques de la même famille et d'ordre $4m$; les fonctions Θ_0 et Θ sont d'ordre m. La fonction

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(u,v) = {}& \Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\Theta(-u-\lambda, -v-\mu)\\ &+\Theta(u-\lambda, v-\mu)\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)\end{aligned}\right.$$

est évidemment, puisque $\Theta_0(u,v)$ et $\Theta(u,v)$ sont des fonctions de caractéristique nulle, une fonction thêta normale, paire, d'ordre $2m$, de caractéristique nulle. La courbe $\varphi(u,v)=0$ est donc l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $2m$. Cette courbe, d'après la forme $\varphi(u,v)$, passe :

1° Par les points qui annulent

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \quad \text{et} \quad \Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu),$$

c'est-à-dire (nº **91**) par les points doubles de la courbe

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

2° Par les points doubles de la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$;

3° Par les $2m^2$ *points communs* aux deux courbes univoques proposées. Donc :

Les $2m^2$ points communs à deux courbes univoques, d'ordre $4m$, de la même famille, et les m^2 points doubles de chacune d'elles sont sur une même surface d'ordre m ([1]).

De même, la fonction

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi_1(u,v)= \;& \Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\Theta(-u-\lambda, -v-\mu) \\ & -\Theta(u-\lambda, v-\mu)\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) \end{aligned}\right.$$

est une fonction thêta, normale, impaire, d'ordre $2m$, de caractéristique nulle; la courbe $\varphi_1(u,v)=0$ est donc une courbe d'ordre $4m$ de la famille singulière, et, par suite,

Les points communs à deux courbes univoques, d'ordre $4m$, de la même famille, et les m^2 points doubles de chacune d'elles sont sur une même courbe, d'ordre $4m$, de la famille singulière.

96. Une courbe univoque d'ordre $4m$, d'une famille donnée, peut se décomposer en m courbes du quatrième ordre. Soit, en effet, $\mathfrak{S}_0(u,v)$ la fonction thêta normale d'ordre 1, de caractéristique nulle:

([1]) Cette proposition constitue bien un théorème. En effet, sur une surface du quatrième degré, comme la surface de Kummer, le nombre des points arbitraires par lesquels on peut faire passer une surface d'ordre m (ne comprenant pas la surface proposée) est au plus égal à

$$\tfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)-\tfrac{1}{6}(m-3)(m-2)(m-1)-1,$$

c'est-à-dire à $2m^2+1$. Or, dans la proposition ci-dessus, on établit qu'une surface d'ordre m passe par $4m^2$ points de la surface de Kummer : c'est donc bien un théorème. Une observation analogue s'applique aux propositions qui suivent.

désignons par α_1, β_1; α_2, β_2; ...; α_m, β_m des constantes : la fonction

$$\theta(u, v) = \mathfrak{S}_0(u - \alpha_1, v - \beta_1) \ldots \mathfrak{S}_0(u - \alpha_m, v - \beta_m)$$

peut (n° **2**) être mise sous la forme $\Theta(u - \lambda, v - \mu)$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction normale, d'ordre m, de caractéristique nulle; les quantités λ et μ sont, par exemple, données par les équations

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m - m\lambda = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m - m\mu = 0.$$

La courbe *univoque* $\Theta(u - \lambda, v - \mu) = 0$ se décompose ainsi en m courbes d'ordre 4, sections de la surface de Kummer par m plans tangents (n° **59**); et l'on peut appliquer à ce système de m courbes les théorèmes généraux qui précèdent.

Rappelons-nous, à cet effet, que les $4m$ points communs à la courbe $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$ et à la courbe plane $\mathfrak{S}_0(u - \alpha, v - \beta) = 0$ se répartissent (n° **94**) en deux groupes de $2m$ points; l'un de ces groupes est défini par les équations

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \mathfrak{S}_0(u - \alpha, v - \beta) = 0,$$

et l'autre par

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \mathfrak{S}_0(u + \alpha, v + \beta) = 0;$$

rien ne les distingue l'un de l'autre si l'on se borne à se donner *géométriquement* le plan tangent qui coupe la surface suivant la courbe $\mathfrak{S}_0(u - \alpha, v - \beta) = 0$. Observons enfin que les points doubles de la courbe $\theta(u, v) = 0$, décomposée en m sections de la surface par des plans tangents, sont : 1° les points de contact de ces m plans; 2° $\frac{1}{2}m(m-1)$ couples de points communs à deux de ces plans et donnés (n° **91**) par des équations de la forme

$$\mathfrak{S}_0(u - \alpha_i, v - \beta_i) = 0, \qquad \mathfrak{S}_0(-u - \alpha_j, -v - \beta_j) = 0.$$

Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant, conséquence de ceux du n° **95** :

Soit C *une courbe univoque tracée sur la surface de Kummer et* *d'ordre* $4m$. *On prend à volonté* $m-1$ *plans tangents de la surface, dont chacun détermine sur* C *deux groupes de* $2m$ *points, et l'on choisit arbitrairement un de ces groupes; les points des* $m-1$ *groupes ainsi obtenus sont situés, avec les* m^2 *points doubles de* C, *sur une surface* S, *d'ordre* m, *qui coupe en outre* C *en* $2m$ *points, situés dans un nouveau plan tangent de la surface de Kummer.*

La surface S *passe également par les points de contact des* m *plans tangents précédents avec la surface de Kummer, et par* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *couples de points, communs à cette surface et aux* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *droites d'intersection des* m *plans, pris deux à deux.*

Tous les points dont il vient d'être parlé, par lesquels passe la surface S, *sont également situés sur une même courbe de la surface de Kummer, d'ordre* $4m$, *appartenant à la famille singulière.*

Voici une application de ce théorème :

Nous savons (nº **94**) que les sections de la surface de Kummer par deux plans tangents se coupent en quatre points, qui se répartissent en deux couples, comme M. Klein l'a d'ailleurs montré par une autre voie ([1]); à un couple de plans tangents correspondent ainsi deux couples de points, situés sur la surface de Kummer et sur l'arête du couple de plans : chacun de ces couples de points sera dit *conjugué* du couple de plans.

Cela posé, la courbe C du théorème précédent peut elle-même se décomposer en m sections de la surface de Kummer par des plans tangents, d'où cette proposition très générale, et qui se prête à de nombreuses applications :

Il existe des configurations remarquables *formées par* $2m$ *plans tangents de la surface de Kummer et par* $m(2m-1)$ *couples de points de cette surface :*

1º *Les* $m(2m-1)$ *couples de points sont situés respectivement sur les arêtes des* $m(2m-1)$ *couples de plans obtenus en associant deux à deux les* $2m$ *plans tangents de la configuration; sur chaque arête, le couple de points est conjugué du couple de plans;*

([1]) Klein, *Math. Annalen*, t. XXVII, p. 107.

2° *Les* $m(2m-1)$ *couples de points et les* $2m$ *points de contact des plans sont sur une même surface d'ordre* m, S;

3° *Ils sont également sur une même courbe d'ordre* $4m$, *de la famille singulière, tracée sur la surface de Kummer,* C_{4m};

4° *Le long de la courbe* C_{4m}, *on peut inscrire à la surface de Kummer une surface d'ordre* $2m$, *qui touche chacun des* m *plans de la configuration suivant une courbe d'ordre* m; *ces* m *courbes de contact sont sur la surface* S (¹).

Le dernier paragraphe (4°) de ce théorème résultera de nos recherches ultérieures (**97**).

De plus : *parmi les* $2m$ *plans tangents d'une configuration,* $2m-1$ *sont arbitraires.*

Exemple. — Il existe des *tétraèdres* formés par quatre plans tangents de la surface de Kummer, jouissant des propriétés suivantes : *Une même quadrique,* S, *coupe chaque arête du tétraèdre en deux des points où cette arête perce la surface de Kummer, et passe en outre par les points de contact des quatre faces du tétraèdre avec la surface. Les douze points où* S *coupe les arêtes du tétraèdre et les quatre points de contact des faces sont sur une même courbe* C_8, *d'ordre* 8, *de la famille singulière; une des surfaces de Kummer inscrites à la surface de Kummer proposée le long de* C_8 *touche chaque face du tétraèdre le long de la conique suivant laquelle cette face est coupée par la quadrique* S.

En d'autres termes, les tétraèdres considérés sont des tétraèdres Göpel pour les surfaces de Kummer inscrites à la proposée.

(¹) D'après cela, l'équation de la surface inscrite d'ordre $2m$ dont il s'agit est de la forme

$$S_m^2 - P_1 P_2 \ldots P_{2m} = 0;$$

$S_m = 0$ étant celle de S, et $P_i = 0$ celle d'un des $2m$ plans de la configuration.

97. Reprenons les deux fonctions φ et φ_1 du n° **95**; on a la relation

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi^2 - \varphi_1^2 = 4\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \\ \qquad \times\, \Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)\Theta(u-\lambda, v-\mu)\Theta(-u-\lambda, -v-\mu), \end{cases}$$

qui peut être interprétée géométriquement comme il suit :

Soient

$$S_m(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation d'une quelconque des surfaces d'ordre m qui coupent la surface de Kummer suivant la courbe $\varphi(u, v) = 0$ (n° **95**);

$$S_{2m} = 0$$

celle d'une des surfaces d'ordre $2m$ qui touchent la surface de Kummer le long de la courbe $\varphi_1(u, v) = 0$, qui est d'ordre $4m$ et de la famille singulière;

$$A_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad A = 0$$

les équations de deux surfaces d'ordre m, coupant respectivement la surface de Kummer suivant les courbes univoques $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$ et $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$ (n° **91**).

L'identité (4) peut s'écrire, en désignant par $S_m(u, v)$, ..., $A(u, v)$ ce que deviennent les polynômes S_m, ..., A lorsqu'on y remplace les coordonnées x_1, ..., x_4 par leurs valeurs hyperelliptiques correspondant à un point u, v de la surface de Kummer,

$$S_{2m}(u, v) = S_m^2(u, v) - 4A_0(u, v)A(u, v),$$

d'où l'on conclut, pour un point *quelconque* de l'espace, l'identité nouvelle

$$\begin{aligned} S_{2m}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= S_m^2(x_1, \ldots, x_4) \\ &\quad - 4A_0(x_1, \ldots, x_4)A(x_1, \ldots, x_4) + KG(x_1, \ldots, x_4), \end{aligned}$$

$K(x_1, \ldots, x_4)$ étant toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer, et G désignant un polynôme d'ordre $2m - 4$.

Si l'on pose

$$(5)\qquad \Sigma_{2m} = S_{2m} - KG,$$

il vient

$$(6)\qquad \Sigma_{2m} = S_m^2 - 4A_0A.$$

La surface $\Sigma_{2m} = 0$ est, d'après (5), une surface d'ordre $2m$ touchant la surface de Kummer le long de la courbe $\varphi_1(u, v) = 0$.

L'identité (6) montre que les surfaces d'ordre m représentées par l'équation

$$(7)\qquad \omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0,$$

où ω est un paramètre variable, ont pour *enveloppe* la surface $\Sigma_{2m} = 0$. D'ailleurs, observons que la surface $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$ coupe la surface de Kummer suivant une courbe ayant pour équation hyperelliptique

$$\begin{aligned} 0 = {} & \omega^2 \Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) + \omega\varphi(u, v) \\ & + \Theta(u-\lambda, v-\mu)\,\Theta(-u-\lambda, -v-\mu), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, en remplaçant $\varphi(u, v)$ par sa valeur (2),

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} & [\omega\,\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) + \Theta(u-\lambda, v-\mu)] \\ & \times [\omega\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) + \Theta(-u-\lambda, -v-\mu)] = 0. \end{aligned} \right.$$

La courbe ainsi définie est donc une *courbe univoque*, du même *ordre* et de la même *famille* que les deux courbes primitivement considérées et passant par les *points communs* à celles-ci.

Si nous remarquons enfin que, parmi les surfaces

$$\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0,$$

figurent les surfaces $A_0 = 0$ et $A = 0$, nous pouvons dire que :

Toute surface d'ordre m, passant par une courbe univoque *d'ordre $4m$, est inscrite* [1] *à une surface d'ordre $2m$ qui touche la surface de Kummer suivant une courbe de la famille singulière.*

De plus : *Étant données deux surfaces d'ordre m, passant respectivement par deux courbes univoques d'ordre $4m$ et de la même famille, on peut toujours trouver une surface d'ordre $2m$, Σ, inscrite aux deux précédentes et touchant la surface de Kummer le long d'une courbe (d'ordre $4m$) de la famille singulière.*

Les courbes de contact de la surface d'ordre $2m$ avec les deux surfaces d'ordre m primitives sont sur une troisième surface d'ordre m.

Enfin, *la surface d'ordre $2m$, Σ, admet un système de surfaces inscrites d'ordre m, parmi lesquelles figurent les deux surfaces primitives, et qui coupent toutes la surface de Kummer suivant des courbes univoques d'ordre $4m$, d'une même famille, ayant $2m^2$ points communs* [2].

On peut ajouter que le lieu des points doubles de ces courbes univoques est la courbe d'ordre $4m$ de la famille singulière considérée plus haut.

La propriété (4°) des configurations signalées au n° **96** est une application immédiate du théorème précédent.

La *réciproque* de ce théorème est vraie, et s'énonce ainsi :

Si une surface d'ordre $2m$, inscrite à la surface de Kummer le long d'une courbe (d'ordre $4m$) de la famille singulière, est l'enveloppe de surfaces d'ordre m, dont l'équation renferme au second degré un paramètre variable, celles-ci coupent la surface de Kum-

---

(1) Nous dirons, comme toujours, que deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre lorsqu'elles se touchent tout le long de leur intersection.

(2) L'identité $\Sigma_{2m} = S_m^2 - 4A_0A$ montre que les points communs aux surfaces $S_m = 0$, $A_0 = 0$, $A = 0$ sont des points doubles de Σ_{2m}; or, parmi ces points figurent (n° 95) les *points communs* aux courbes univoques $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$ et $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$. Donc :

La surface Σ a m^3 points doubles, parmi lesquels figurent les $2m^2$ points communs aux courbes univoques primitives.

mer proposée suivant des courbes univoques, appartenant à la même famille, et passant toutes par les points communs *à deux d'entre elles.*

Soit, en effet, la surface d'ordre $2m$, $\Sigma_{2m}=0$,

$$\Sigma_{2m}=S_m^2-4A_0A, \tag{9}$$

enveloppe des surfaces d'ordre m, $\omega^2 A_0+\omega S_m+A=0$.

Si elle est inscrite, le long d'une courbe de la famille singulière, à la surface de Kummer, en chaque point de celle-ci, on aura

$$\Sigma_{2m}(x_1, \ldots, x_4)=\varphi_1^2(u, v),$$

$\varphi_1(u, v)$ étant une fonction thêta *impaire*, d'ordre $2m$ et de caractéristique nulle. On a, d'ailleurs, en chaque point de la surface de Kummer,

$$S_m(x_1, \ldots, x_4)=\varphi(u, v),$$

φ étant une fonction d'ordre $2m$, de caractéristique, nulle et *paire*.

L'expression (9) de Σ_{2m} donne ainsi, sur la surface de Kummer, la relation

$$4A_0A=\varphi^2-\varphi_1^2=(\varphi-\varphi_1)(\varphi+\varphi_1). \tag{10}$$

Or, sur la surface de Kummer, A_0 et A sont égaux à deux fonctions thêta, $\theta_0(u, v)$ et $\theta(u, v)$, paires, d'ordre $2m$ et de caractéristique nulle; d'après cela, $\theta_0(u, v)$ ne peut être égal à aucune des fonctions d'ordre $2m$, $\varphi-\varphi_1$ et $\varphi+\varphi_1$, qui ne sont pas paires, et de même pour $\theta(u, v)$. On en conclut nécessairement que $\theta_0(u, v)$ et $\theta(u, v)$ se décomposent chacun en un produit de deux fonctions thêta, d'ordre inférieur à $2m$

$$\theta_0(u, v)=\theta'_0\theta''_0, \qquad \theta(u, v)=\theta'\theta''$$

et que l'on a

$$2\theta'_0\theta''=\varphi-\varphi_1, \qquad 2\theta''_0\theta'=\varphi+\varphi_1. \tag{11}$$

Mais si l'on change u, v en $-u$, $-v$, θ_0 et θ ne changent pas, $\varphi - \varphi_1$ et $\varphi + \varphi_1$ sont permutés l'un dans l'autre : il en résulte bien facilement que θ'_0 et θ''_0, de même que θ' et θ'' se permutent quand on change les signes de u, v; c'est-à-dire que θ_0 et θ sont de la forme

$$\theta_0(u, v) = \theta'_0(u, v)\,\theta'_0(-u, -v); \qquad \theta(u, v) = \theta'(u, v)\,\theta'(-u, -v),$$

θ'_0 et θ' étant des fonctions thêta d'ordre m.

On en conclut, d'après (11),

$$\varphi(u, v) = \theta'_0(u, v)\,\theta'(-u, -v) + \theta'_0(-u, -v)\,\theta'(u, v),$$

et pour que $\varphi(u, v)$ soit une fonction de caractéristique nulle, il faut que les fonctions θ'_0 et θ' aient les mêmes multiplicateurs (n° 1), c'est-à-dire qu'on puisse les mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \theta'_0(u, v) &= \Theta_0(u - \lambda, v - \mu), \\ \theta\,(u, v) &= \Theta\,(u - \lambda, v - \mu), \end{aligned}$$

λ et μ étant deux constantes et $\Theta_0(u, v)$, $\Theta(u, v)$ désignant deux fonctions thêta d'ordre m à caractéristique nulle.

Dès lors, la surface $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$ coupe la surface de Kummer suivant la courbe

$$\begin{aligned} 0 = \omega^2\,\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \omega\,\varphi(u, v) \\ + \Theta(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta(-u - \lambda, -v - \mu), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 = [\omega\,\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) + \Theta(u - \lambda, v - \mu)] \\ \times [\omega\,\Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \Theta(-u - \lambda, -v - \mu); \end{aligned}$$

ce qui démontre la réciproque à établir.

98. Les propositions qu'on vient de faire connaître donnent une *définition géométrique des courbes univoques*, et rendent à peu près évidentes celles du n° 95. On voit que les courbes univoques sont découpées, sur la surface de Kummer, par des surfaces inscrites à celles qui touchent la surface de Kummer le long de courbes de la famille singulière.

Par exemple, les plus simples des courbes univoques après les sections par les plans tangents, c'est-à-dire *les courbes univoques de huitième ordre, sont découpées par les quadriques inscrites aux surfaces de Kummer qui touchent la proposée le long des courbes* C_8 *de la famille singulière.*

99. On peut, suivant une marche analogue à celle du n° 95, arriver à d'autres propriétés des courbes univoques.

Soit, en effet, $\Im_0(u, v)$ la fonction normale, d'ordre un, de caractéristique nulle; la fonction

$$\begin{aligned} f(u, v) = {} & \Im_0(-u-\lambda', -v-\mu')\,\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \\ & + \Im_0(u-\lambda', v-\mu')\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu), \end{aligned}$$

où λ' et μ' sont des constantes, est évidemment *paire*; elle sera une fonction thêta normale (d'ordre $m+1$), et de caractéristique nulle, si l'on a

$$\lambda' = m\lambda, \qquad \mu' = m\mu.$$

En ce cas, la fonction

$$\begin{aligned} f_1(u, v) = {} & \Im_0(-u-\lambda', -v-\mu')\,\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \\ & - \Im_0(u-\lambda', v-\mu')\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) \end{aligned}$$

sera une fonction thêta, d'ordre $m+1$, de caractéristique nulle, et *impaire*.

On peut maintenant reproduire avec les fonctions f et f_1, les raisonnements faits plus haut avec φ et φ_1; on arrive ainsi, sans difficulté, aux résultats suivants :

I. *Soit une courbe univoque quelconque d'ordre* $8m'+4$. *Par ses* $(2m'+1)^2$ *points doubles on peut mener une surface d'ordre* $m'+1$, *la coupant en outre en* $4m'+2$ *points, qui sont situés dans un même plan tangent de la surface de Kummer. Ce plan tangent* *reste fixe pour toutes les courbes univoques d'un même ordre et d'une même famille; son point de contact est également situé sur la surface d'ordre* $m'+1$.

Les $(2m'+1)^2$ *points doubles, les* $4m'+2$ *points simples précédents sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une courbe d'ordre* $4(m'+1)$ *de la famille singulière tracée sur la surface de Kummer.*

Toute surface d'ordre $2m'+1$, *qui passe par une courbe univoque d'ordre* $8m'+4$, *est inscrite à une surface d'ordre* $2m'+2$ *qui touche elle-même la surface de Kummer le long d'une courbe de la famille singulière.*

Exemple. — Les *courbes univoques d'ordre douze* sont découpées sur la surface de Kummer par les surfaces cubiques (sans point double) inscrites à une des surfaces de Kummer qui touchent la proposée le long des courbes C_8 de la famille singulière, et réciproquement.

II. *Soit une courbe univoque quelconque d'ordre* $8m'$. *Par ses* $4m'^2$ *points doubles et par une quelconque des coniques de la surface de Kummer on peut mener une surface d'ordre* $m'+1$, *coupant en outre la courbe proposée en* $4m'$ *points (non situés sur la conique choisie), qui sont dans un même plan tangent de la surface de Kummer. Ce plan tangent reste le même pour toutes les courbes univoques d'un même ordre et d'une même famille; son point de contact est également sur la surface d'ordre* $m'+1$.

Les $4m'^2$ *points doubles, les* $4m'$ *points simples précédents sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une surface d'ordre* $m'+2$, *passant par trois coniques de la surface de Kummer qui forment, avec celle primitivement choisie, un groupe de Rosenhain.*

Si l'on choisit successivement les seize coniques de la surface de Kummer, les seize plans tangents qui figurent dans l'énoncé précédent se déduisent de l'un quelconque d'entre eux en augmentant u et v de demi-périodes; ils forment donc, ainsi que leurs points de contact, une configuration remarquable, étudiée par MM. Rohn et Klein, et sur laquelle nous n'insisterons pas.

100. Les deux propositions I et II sont également applicables aux courbes univoques décomposées en sections de la surface par des plans tangents; signalons, par exemple, comme conséquence de II, ce théorème :

Soit un couple de plans tangents de la surface de Kummer, et, sur l'arête de ce couple, un quelconque des deux couples de points conjugués du couple de plans : par les deux points du couple choisi et les points de contact des deux plans, on peut mener une sextique, passant par les dix points doubles de la surface de Kummer qui ne sont pas situés dans un même plan singulier, quelconque d'ailleurs.

En transformant ce résultat par réciprocité (n° **78**), ou à l'aide d'une démonstration directe facile, on arrive à cette nouvelle proposition, qui nous sera utile plus tard :

Les points de contact d'un couple de plans tangents de la surface de Kummer et les deux points d'un des couples conjugués sont sur une même courbe d'ordre huit, de la famille singulière, ayant un point triple en un des seize points singuliers (arbitraire d'ailleurs) de la surface de Kummer.

Il serait aisé d'étendre encore les théorèmes qui précèdent en remplaçant la fonction $\mathfrak{S}_0(u, v)$ introduite au commencement du n° **99**, par une fonction normale, à caractéristique nulle, d'ordre quelconque; ces applications de la méthode générale n'offrent aucune difficulté. *(A suivre.)*