JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 9 (1893), p. 273-291.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1893_4_9__273_0>

De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans un Mémoire antérieur (*Journal de Mathématiques;* 1890), j'ai montré que les problèmes fondamentaux relatifs à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pouvaient être posés et résolus pour un grand nombre d'équations linéaires et non linéaires. En particulier, je me suis arrêté assez longuement sur l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u \qquad (k > 0),$$

où k désigne une constante positive, équation qui se présente, comme on sait, dans plusieurs questions d'Analyse et de Géométrie. On peut supposer que le point (x, y), au lieu de rester sur un plan simple, se déplace sur une surface de Riemann. Les résultats auxquels je suis arrivé sont complets si la surface de Riemann est *ouverte*, c'est-à-dire si elle a un *bord*. J'avais cru pouvoir traiter aussi le cas d'une surface de Riemann *fermée*, sans insister, d'ailleurs, beaucoup sur ce problème spécial; mais, comme je l'ai indiqué ensuite (¹), ce point de la

(¹) *Voir* la rectification de la page 231 (*Journal de Mathématiques*, 1890).

théorie demandait à être repris. C'est l'étude de ce cas qui fait l'objet des pages qu'on va lire. Le théorème fondamental que je me propose d'établir peut être ainsi formulé :

Étant donnée une surface de Riemann à m feuillets, il existe une intégrale et une seule de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue sur la surface, sauf en des points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et aux m points à l'infini sur chacun des feuillets. On suppose que l'on ait dans le voisinage de O_i

$$u = \beta_i \log r_i + v_i,$$

v_i étant continue en O_i, et r_i désignant la distance de (x, y) à O_i. Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang k, imaginons qu'on le ramène à distance finie par une inversion ; en l'appelant alors O'_k, on aura

$$u = \alpha_k \log r'_k + V_k,$$

V_k étant continue en O'_k, et r'_k désignant la distance du transformé de (x, y) au point O'_k.

Les constantes α et β sont données, et l'on suppose que

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha_k > 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

La démonstration de ce théorème est assez délicate. J'ai recours au procédé alterné employé avec tant de succès par M. Schwarz dans ses belles études sur l'équation de Laplace, mais les conditions d'application de cette méthode sont notablement différentes et des difficultés sérieuses se présentaient qui m'ont longtemps arrêté. Le point fondamental de la démonstration qui suit consiste dans cette idée que l'étude de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

est relativement facile au point de vue de l'application des méthodes d'approximations successives quand on considère seulement les intégrales qui restent supérieures (en valeur relative) à une certaine quantité fixe; l'important était alors de montrer qu'on pouvait s'arranger de manière à réaliser cette condition ([1]).

Je commence par considérer le cas où la surface de Riemann se réduit à un plan simple; l'examen du cas général ne présente plus ensuite aucune difficulté.

Le théorème énoncé plus haut est d'un grand intérêt pour la théorie des fonctions de M. Poincaré (fonctions fuchsiennes), mais c'est un sujet sur lequel je ne veux pas insister en ce moment, et pour lequel je renverrai seulement aux quelques indications que j'ai données dans mon Mémoire cité (Chap. IV, n° 7).

I. — Cas du plan simple.

1. Nous commencerons par démontrer deux lemmes fondamentaux. Le premier seul exigera une démonstration un peu délicate. Soient u et v deux intégrales de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

continues à l'intérieur d'un cercle C de rayon R ayant l'origine pour centre. En posant

$$u - v = h,$$

on a la relation

$$\Delta h = ke^v(e^h - 1).$$

Portons donc notre attention sur les équations de la forme

$$\Delta h = A(x, y)[e^h - 1], \tag{1}$$

$A(x, y)$ étant une fonction positive dans C, et supposons qu'on ait

---

([1]) J'ai communiqué à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 6 mars 1893) les points principaux du présent travail.

toujours dans ce domaine

$$A(x,y) > k_0,$$

k_0 étant une constante. Une intégrale de l'équation (1) continue dans C est déterminée par ses valeurs sur C; ceci revient à dire qu'une intégrale continue de l'équation (1) s'annulant sur la courbe C est identiquement nulle à l'intérieur, proposition dont la démonstration est bien facile. Ceci posé, supposons que la valeur absolue de notre intégrale h sur C soit au plus égale à un nombre M; nous voulons trouver une limite de la valeur absolue de h à l'intérieur de C pour un point situé à une distance R′ de l'origine ($R' < R$).

Si nous désignons par H l'intégrale de (1) prenant sur C la valeur M, la fonction H sera positive dans C et l'on aura pour tout point de l'aire

$$h < H.$$

Soit de même H′ l'intégrale de (1) prenant sur C la valeur $-M$, la fonction H′ sera négative dans C, et l'on aura pour tout point de l'aire

$$h > H'.$$

Si nous trouvons une limite supérieure de H et de $|H'|$, nous aurons une limite de $|h|$, comme nous le désirons.

Dans cette recherche, nous pouvons substituer à l'équation (1) l'équation

$$\Delta h = k_0(e^h - 1). \tag{2}$$

Si H_1 désigne l'intégrale de (1) prenant la valeur $+M$ sur C, et si H_2 désigne l'intégrale de (2) prenant la même valeur sur C, on aura

$$H_1 < H_2.$$

Pour démontrer ce point essentiel, il suffit de remarquer que, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait se placer (en fractionnant, s'il est nécessaire, l'aire en plusieurs autres) dans l'hypothèse

$$H_1 > H_2 \qquad \text{(à l'intérieur d'une courbe } \Gamma\text{)},$$

H_1 et H_2 prenant les mêmes valeurs sur Γ. Supposant, uniquement pour simplifier, que Γ coïncide avec la circonférence C, on aurait

$$H_1(x, y) = M - \int_C\int A(\xi, \eta)(e^{H_1(\xi,\eta)} - 1)G(\xi, \eta, x, y)\,d\xi\,d\eta,$$

$$H_2(x, y) = M - \int_C\int k_0(e^{H_2(\xi,\eta)} - 1)G(\xi, \eta, x, y)\,d\xi\,d\eta,$$

et ces deux égalités sont contradictoires avec

$$H_1 > H_2,$$

puisque on a, par hypothèse, $A(\xi, \eta) > k_0$.

2. Ces diverses remarques faites, nous avons donc à considérer l'équation

$$\Delta h = k_0(e^h - 1)$$

et à étudier l'intégrale de cette équation prenant sur C la valeur positive M. Nous sommes ramené ici à une équation à une seule variable, puisque dans l'équation et dans les données tout est symétrique autour de l'origine. En posant

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r,$$

on a l'équation

$$(3) \qquad r\frac{d^2h}{dr^2} = -\frac{dh}{dr} + k_0 r(e^h - 1).$$

Il existe une intégrale de cette équation prenant pour $r = R$ et pour $r = -R$ la valeur M, et continue de $-R$ à $+R$. Cette intégrale se présente sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de r^2. Désignons par M_0 la valeur de notre intégrale pour $r = 0$; on pourra calculer de proche en proche les coefficients du développement. Ce développement sera de la forme

$$h = M_0 + \frac{k_0}{4}r^2(e^{M_0} - 1) + \alpha_4 r^4 + \ldots + \alpha_{2n} r^{2n} + \ldots,$$

les α étant des polynômes en e^{M_0} et $e^{M_0}-1$ à coefficients positifs, contenant en facteur $e^{M_0}-1$. Pour une valeur donnée de k_0 (différente de zéro), le domaine de convergence de cette série dépendra de la quantité positive M_0. Il ne pourra que diminuer quand M_0 augmente; il est, d'ailleurs, facile de voir que la série ne convergera pas pour toute valeur de r. On s'en convaincra en comparant l'équation (3) à l'équation

$$(4)\quad \frac{d^2h}{dr^2}=\mu k_0(e^h-1)\qquad \left(\mu \text{ étant une constante inférieure à } \frac{1}{2}\right)$$

et en cherchant l'intégrale de cette équation telle que

$$h_0=M_0,\qquad \left(\frac{dh}{dr}\right)_0=0\qquad (\text{pour } r=0).$$

Les coefficients dans ce second développement sont moindres que dans le premier, comme on le reconnaît de suite. D'ailleurs, le développement provenant de (4) ne converge pas pour toute valeur de r; il en est donc de même pour celui qui nous intéresse.

Revenons maintenant au développement de h, en y faisant successivement $r=R$ et $r=R'$ $(R'<R)$. En appelant M et M' les valeurs correspondantes de h, on aura

$$M=M_0+\frac{k_0}{4}R^2(e^{M_0}-1)+\alpha_4R^4+\ldots,$$

$$M'=M_0+\frac{k_0}{4}R'^2(e^{M_0}-1)+\alpha_4R'^4+\ldots.$$

Il est visible, comme nous le savions déjà, que

$$M'<M,$$

mais on peut aller plus loin, et *c'est pour nous un point capital.* Je dis qu'on pourra trouver un nombre q inférieur à *un*, tel que

$$M'<Mq.$$

En effet, d'après ce que nous venons de dire, M_0 ne devra pas dépasser une certaine valeur finie et qui est précisément celle pour laquelle la série qui représente M commence à diverger. Pour cette valeur limite de M_0 il n'y a pour notre inégalité aucune difficulté, puisque alors M est infini, tandis que M' est fini. C'est la valeur limite $M_0 = 0$ qui seule pourrait donner naissance à une difficulté, car alors $M = M' = 0$; mais il suffit de regarder les développements de M et M'. Dans chaque terme M_0 est en facteur, et, ce facteur supprimé, il apparaît sans doute possible que le quotient

$$\frac{M'}{M}$$

est, même pour $M_0 = 0$, inférieur à un nombre moindre que l'unité. Tout ceci suppose, bien entendu,

$$k_0 \neq 0.$$

Le nombre q, plus petit que *un*, dépend de k_0 et tend nécessairement vers *un*, quand k_0 tend vers zéro.

3. On étudiera de la même manière l'intégrale de l'équation (2) prenant sur C la valeur $-$ M, ou, ce qui revient au même, l'intégrale de l'équation

$$\Delta h = k_0(1 - e^{-h}),$$

prenant sur C la valeur + M. Sur le cercle C' de rayon R', cette intégrale prend une valeur M', et l'on a

$$M' < Mq_1,$$

q_1 étant un nombre fixe inférieur à l'unité.

4. Les considérations que nous venons de développer nous permettent d'énoncer le premier lemme que nous avons en vue. Reprenons les deux intégrales u et v du n° **1**, telles que

$$|u - v| < M \qquad \text{(sur la circonférence C)}.$$

Supposons de plus que *u et v restent, à l'intérieur de l'aire, supérieurs (en valeur relative) à un nombre fixe* G. Dans l'équation le coefficient

$$A(x, y) \qquad \text{ou} \qquad ke^v$$

restera alors certainement supérieur à une constante fixe k_0. Tous les raisonnements faits plus haut trouveront donc leur application. On est ainsi conduit à l'énoncé suivant, qui suppose essentiellement $k \neq 0$:

Étant donné une constante G, *on peut trouver un nombre q plus petit que l'unité, tel que l'on ait l'inégalité*

$$|u - v| < Mq. \qquad \text{(sur la circonférence C')},$$

C' *étant une circonférence de rayon* $R' < R$, *concentrique à* C.

Telle est l'inégalité fondamentale pour notre objet, reliant les maxima de $|u - v|$ sur C et sur C'. On ne doit pas oublier que cet énoncé ne vise que les intégrales u et v telles que

$$u > G, \qquad v > G,$$

ces inégalités étant prises en valeur relative. Nous avons supposé que ces inégalités ont lieu à l'intérieur de l'aire limitée par C; on peut supposer dans l'énoncé qu'elles ont lieu seulement sur la circonférence, car alors il y aura un nombre $G' < G$ au-dessous duquel les intégrales ne descendront pas dans l'aire, et, par suite, on peut faire correspondre à G un nombre $q < 1$.

5. On peut, sans introduire aucune idée nouvelle, étendre ce théorème à des intégrales de l'équation

$$\Delta u = ke^u,$$

ayant à l'origine un point singulier logarithmique. Supposons que, dans le voisinage de l'origine O, la fonction u puisse se mettre sous la forme

$$\beta \log r + v, \qquad \beta > -2,$$

la fonction v étant continue en O. Nous aurons pour v l'équation

$$\Delta v = k r^\beta e^v,$$

et, comme je l'ai montré (*loc. cit.*), on peut étudier cette équation avec la même facilité que l'équation initiale, pourvu que $\beta > -2$.

Tous les raisonnements faits plus haut pourront se répéter ici, avec peu de modifications, et les conclusions ne seront pas modifiées. Au lieu de l'équation (2), nous aurons à considérer ici une équation de la forme

$$\Delta h = k_0 r^\beta (e^h - 1),$$

k_0 étant toujours une constante, et, au lieu de l'équation (3), nous aurons

$$r \frac{d^2 h}{dr^2} = -\frac{dh}{dr} + k_0 r^{\beta+1}(e^h - 1).$$

Les intégrales de cette équation, continues pour $r = 0$, auront un développement de la forme

$$\sum A_{\lambda,\mu} r^{\lambda\beta+\mu},$$

λ et μ étant des entiers positifs, et tous les exposants $\lambda\beta + \mu$ étant positifs ([1]). Il n'y a rien à changer alors à la marche des raisonnements faits ci-dessus, et *nous avons encore ici le lemme fondamental énoncé au numéro précédent*. Il est relatif aux intégrales u ayant en O l'infini logarithmique correspondant au coefficient β, et prenant sur la circonférence C des valeurs supérieures à G, en désignant par G une constante donnée.

6. Passons au second lemme qui est immédiat. Considérant un contour fermé quelconque C, ayant à son intérieur les points O_1,

---

([1]) *Voir* pour ce point mes Notes : *Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII; 1878).

$O_2, \ldots, O_n$, j'envisage l'équation

$$\Delta v = k r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} e^v.$$

en désignant par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les distances du point (x, y) aux points $O_1, O_2, \ldots, O_n$.

Les constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont supposées satisfaire aux inégalités

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit ε un nombre positif fixe aussi petit qu'on voudra. Si les valeurs d'une intégrale v continue à l'intérieur de C sont, sur ce contour, inférieures à un nombre convenable H, *on aura, à l'intérieur de l'aire,*

$$v = v' - \eta,$$

v' désignant la fonction harmonique qui prend sur C les mêmes valeurs que v, et η désignant une fonction positive qui est inférieure à ε.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de poser

$$v = v' + \lambda.$$

On aura

$$(5) \qquad \Delta \lambda = k r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} e^{v'} e^{\lambda}.$$

La fonction λ est nulle sur C; elle est donc négative à l'intérieur de l'aire que limite C. Si, d'autre part, v' est moindre que H sur C, il en sera de même pour l'intérieur de l'aire; on peut donc prendre H suffisamment petit (en valeur relative) pour que $e^{v'}$ soit aussi petit qu'on voudra dans l'aire. La fonction λ qui satisfait à l'équation (5), et qui s'annule sur le contour, sera donc elle-même aussi petite qu'on voudra, et l'on aura bien, H étant pris convenablement,

$$-\lambda < \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive donnée à l'avance.

7. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème fondamental. On veut démontrer l'existence d'une solution de l'équation

$$\Delta u = ke^u,$$

fonction bien déterminée de x et y, et en général continue, sauf en certains points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et au point à l'infini. On suppose que dans le voisinage de O_i la fonction puisse se mettre sous la forme

$$\beta_i \log r_i + v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

β_i étant une constante donnée, r_i désignant la distance du point (x, y) au point O_i et la fonction v_i étant continue en O_i.

Pour le point à l'infini, on suppose que, en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la fonction se mette sous la forme

$$-\alpha \log r + V,$$

V étant continue à l'infini et α désignant une constante donnée. Nous faisons les hypothèses

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha > 2$$

et, de plus,

$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

8. Nous prenons deux cercles concentriques C et C' de rayons R et R' ($R > R'$), contenant à leur intérieur les points $O_1, O_2, \ldots, O_n$.

Toutes les fonctions u et v que nous allons considérer satisfont à l'équation

$$\Delta u = ke^u.$$

Indiquons d'abord la marche générale de la démonstration. Nous allons partir d'une première fonction u_1, définie dans C, ayant les singularités données en $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et prenant sur C des valeurs comprises entre deux constantes G et H ($H < G$). Cette fonction u_1 prend certaines valeurs sur C'; on forme une fonction v_1 définie à l'extérieur de C', ayant la singularité donnée à l'infini et prenant sur

C' les mêmes valeurs que u_1. Cette fonction v_1 prend certaines valeurs sur C; on forme alors une fonction u_2, définie dans C, ayant aux points O les singularités données et prenant sur C les valeurs de v_1. On continue ainsi indéfiniment, ce qui donne les deux suites

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_n,\quad \ldots,$$
$$v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_n,\quad \ldots.$$

Nous allons établir que u_n et v_n tendent respectivement vers des limites u et v. A l'aide de ces deux limites, l'existence de la fonction cherchée se trouvera établie. En posant

$$u_1 = \beta_1 \log r_1 + \beta_2 \log r_2 + \ldots + \beta_n \log r_n + U_1,$$

la fonction U_1 satisfait à l'équation

$$\Delta U_1 = k r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} e^{U_1}.$$

Elle prend sur C des valeurs comprises entre

$$G - \beta_1 \log r_1 - \ldots - \beta_n \log r_n \quad \text{et} \quad H - \beta_1 \log r_1 - \ldots - \beta_n \log r_n.$$

D'après le second lemme, en désignant par V_1 la fonction harmonique continue dans C, prenant sur C les valeurs données au début (comprises entre G et H), et en désignant par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les fonctions harmoniques continues dans C prenant respectivement sur cette courbe les valeurs $\log r_1, \log r_2, \ldots, \log r_n$, on aura

$$U_1 = V_1 - \beta_1 \rho_1 - \beta_2 \rho_2 - \ldots - \beta_n \rho_n - \eta_1,$$

la fonction positive η_1 étant moindre qu'un nombre ε donné à l'avance, si G et par suite H ont été pris assez petits. Il est facile d'avoir explicitement des expressions de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. En désignant par a_1 la distance de O_1 à l'origine, et en appelant O'_1 le conjugué de O_1 par rapport au cercle C, on a, pour un point arbitraire M, la fonction

$$\rho_1 = \log \frac{a_1 . MO'_1}{R}.$$

Avec cette expression, on voit de suite que la fonction u_1, *sur la circonférence* C′, aura les valeurs

$$V'_1 + \beta_1 \log \frac{R'}{R} + \beta_2 \log \frac{R'}{R} + \ldots + \beta_n \log \frac{R'}{R} - \eta' + \delta,$$

V'_1 et η' désignant les valeurs de V_1 et η sur la circonférence C′ ; quant à δ, elle représente une fonction dont la valeur absolue est moindre que tel nombre que l'on voudra *si le rayon* R *est assez grand et si le rapport* $\frac{R'}{R}$ *est suffisamment voisin de l'unité.*

On a maintenant à considérer la fonction v_1 définie à l'extérieur de C′, devenant infinie au point à l'infini, comme

$$-\alpha \log r,$$

et prenant sur C′ les mêmes valeurs que u_1. Pour obtenir la fonction v_1, on n'a qu'à faire une inversion qui ramènera à distance finie le point à l'infini. En appliquant une nouvelle fois le même lemme, on démontre sans aucune peine que la fonction v_1 *sur la circonférence* C est de la forme

$$(E) \qquad V''_1 + (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + \lambda,$$

λ désignant une expression dont la valeur *absolue* est inférieure à un nombre aussi petit qu'on voudra donné à l'avance, si l'on a pris G et H suffisamment petits en valeur relative ($G > H$), et si, d'ailleurs, comme il a été dit plus haut, R et R′ sont suffisamment grands, $\frac{R'}{R}$ étant assez voisin de l'unité. La fonction V''_1 reste comprise entre G et H.

Puisque

$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0$$

et que $\frac{R'}{R} < 1$, on conclut de l'expression (E) que la fonction u_2 sur la circonférence C est supérieure à H. Ceci est évident puisque

$$V''_1 > H$$

et que

$$(\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} > 0,$$

tandis que λ se trouve être aussi petit qu'on veut. Ainsi, on a

$$u_2 > H \qquad \text{(sur la circonférence C)}.$$

9. Nous venons de voir que u_2 sur la circonférence C est supérieure à H; elle pourra soit rester entre H et G, soit dépasser G. Si u_2 reste compris entre H et G, on pourra refaire, en partant de u_2 sur C, tous les raisonnements précédents et l'on arrivera à

$$u_3 > H.$$

Si u_2 ne reste pas toujours inférieur à G, la même conclusion subsiste *a fortiori;* la raison en est que, si l'on a deux intégrales continues u et v de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

satisfaisant *sur* C à l'inégalité $u > v$, elles satisferont à la même inégalité à l'*intérieur de* C.

Nous concluons de tout ce qui vient d'être dit que

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

sont supérieures à H *sur la circonférence* C.

Ce point acquis, il en résulte qu'on peut fixer une certaine constante H' à laquelle les v resteront toujours supérieures sur la circonférence C'; à ce nombre H' on peut faire correspondre un nombre q plus petit que l'unité (d'après le premier lemme). Il est facile maintenant de démontrer l'existence d'une limite pour les u et les v. On a

$$|u_3 - u_2| \text{ sur C} < q \times \{ |v_2 - v_1| \text{ sur C}' \},$$

d'après le premier lemme. Il est, d'ailleurs, immédiatement visible que

$$|v_2 - v_1| \text{ sur C}' < |u_2 - u_1| \text{ sur C}.$$

On aura donc

$$|u_3 - u_2| \text{ sur } C < q \times \{|u_2 - u_1| \text{ sur } C\}.$$

En désignant donc par g le maximum de

$$|u_2 - u_1| \text{ sur } C,$$

on aura

$$|u_3 - u_2| \text{ sur } C < g \cdot q,$$

et, par suite, de proche en proche,

$$|u_{n+1} - u_n| \text{ sur } C < g \cdot q^{n-1};$$

la convergence des u vers une limite et, par suite, celle des v résultent de suite de ces inégalités.

Nous avons donc une limite u définie dans C, et une limite v définie à l'extérieur de C'. Ces fonctions satisfont à l'équation proposée, et elles ont les singularités demandées. D'ailleurs

$$u = v \qquad \text{sur C et sur C'}.$$

Les deux fonctions coïncident alors dans la couronne comprise entre C et C'. *Avec ces deux fonctions, nous obtenons donc l'intégrale de l'équation*

$$\Delta u = ke^u$$

satisfaisant aux conditions énoncées dans le n° **7**.

II. — Cas d'une surface de Riemann.

10. Nous avons fait, dans ce qui précède, l'étude de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

sur le plan simple de Cauchy. Il n'y a aucune difficulté à étendre nos conclusions au cas d'une surface de Riemann à m feuillets. Le problème est alors le suivant :

Trouver l'intégrale de cette équation uniforme et continue sur la surface, sauf en des points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et aux m points à l'infini sur chacun des feuillets.

On suppose que l'on ait dans le voisinage de O_i

$$u = \beta_i \log r_i + v_i,$$

v_i étant continue en O_i et r_i désignant la distance (x, y) à O_i. Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang k, imaginons qu'on le ramène à distance finie par une inversion; en l'appelant alors O'_k, on aura

$$u = \alpha_k \log r'_k + V_k,$$

V_k étant continue en O'_k, et r'_k représentant la distance du transformé de (x, y) au point O'_k.

Les constantes α et β sont données, et l'on suppose que

$$\begin{aligned} \beta_i &> -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \alpha_k &> 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m), \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m &+ \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0. \end{aligned}$$

11. La démonstration se fera, pour ainsi dire, sans modification. On aura seulement à tracer d'abord m grandes circonférences C_1, $C_2, \ldots, C_m$ isolant les points à l'infini sur chacun des m feuillets. On commencera alors par déterminer une intégrale prenant des valeurs données sur $C_2, \ldots, C_m$ et devenant infinie de la manière indiquée en $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et au point à l'infini sur le *premier* feuillet. Nos deux lemmes trouvent encore leur application; il faut seulement modifier un peu l'énoncé du second lemme (n° **6**). Désignons par φ une fonction harmonique uniforme sur la surface de Riemann, et ayant seulement des infinis logarithmiques en $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et au point à l'infini sur le premier feuillet; les coefficients correspondants à $O_1, O_2, \ldots, O_n$

sont $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et celui qui correspond au point à l'infini est par cela même déterminé. Au lieu de l'équation du n° **6**, c'est à l'équation

$$\Delta v = ke^f . e^v$$

que l'on appliquera le lemme mentionné. On passera de proche en proche aux différents feuillets en faisant disparaître successivement les bords $C_1, C_2, \ldots, C_m$ et l'on arrivera finalement à la fonction cherchée. Notre démonstration est alors complètement effectuée.

12. L'existence d'une intégrale de l'équation

$$\Delta u = ke^u \tag{6}$$

satisfaisant aux conditions du n° **10** est complètement établie par l'analyse qui précède. *Nous voulons montrer que cette intégrale est unique.*

Soient donc u et v deux intégrales continues pour tout point (x, y), sauf aux points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et aux points à l'infini sur les feuillets, où elles deviennent infinies de la manière indiquée. En posant

$$u - v = h,$$

nous avons

$$\Delta h = ke^v(e^h - 1). \tag{7}$$

Je vais, en premier lieu, montrer qu'il est impossible que l'on ait sur toute la surface de Riemann

$$h \geqq 0.$$

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Soit u une intégrale de l'équation (6), se mettant dans le voisinage de l'origine sous la forme

$$u = \beta \log r + U \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

U étant continue en O, et la constante β étant supérieure à -2. On aura

$$\Delta U = kr^\beta . e^U.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ pourront n'être pas continues en O, mais il résulte aisément de leurs expressions sous forme d'intégrales doubles, qu'elles pourront, dans le voisinage de l'origine, se mettre sous la forme

$$M . r^{\beta+1},$$

M restant fini quand r tend vers zéro.

Ceci posé, décrivons autour de $O_1, O_2, \ldots, O_n$ des cercles de petit rayon et considérons, d'autre part, des circonférences de très grand rayon isolant les points à l'infini sur les feuillets. On aura, d'après l'équation (7),

$$(8) \qquad \int\int \Delta h \, dx \, dy = k \int\int e^{v}(e^{h} - 1) \, dx \, dy,$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire limitée par les circonférences précédentes; mais

$$\int\int \Delta h \, dx \, dy = -\int \frac{dh}{dn} \, ds,$$

l'intégrale curviligne dans le second membre étant une somme d'intégrales prises le long des différentes circonférences. Or, si l'on considère le cercle de rayon O_1, et qu'on appelle ρ son rayon, on aura, d'après la remarque faite plus haut,

$$\frac{dh}{dn} \, ds = M \rho^{\beta+2} \, d\theta.$$

M restant finie; l'intégrale curviligne tendra donc vers zéro avec ρ, puisque $\beta + 2 > 0$. On reconnaît pareillement qu'il en est de même pour les cercles de rayon grandissant indéfiniment, et l'équation (8) devient ainsi

$$\int\int e^{v}(e^{h} - 1) \, dx \, dy = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface de Riemann tout entière. Mais cette égalité est impossible si l'on suppose, comme nous l'avons dit, que l'on ait sur toute la surface

$$h \geqq 0,$$

à moins que h ne soit identiquement nulle.

Il résulte de là que la différence $u - v$ doit changer de signe. La surface se trouve donc partagée en plusieurs régions (deux au moins) par la courbe

$$u - v = 0.$$

Soit R une des régions où la différence h soit, par exemple, positive. La fonction h s'annulera sur la courbe limitant R, et l'équation (7) donne alors

$$h(x, y) = -\int\int ke^{v(\xi,\eta)}(e^{h(\xi,\eta)} - 1)G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

G étant la fonction de Green, relative au point (x, y), et l'intégrale double étant étendue à la région R. Cette relation est impossible, puisque le premier membre est positif, tandis que le second membre est visiblement négatif. Cette contradiction achève la démonstration du théorème.