JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Remarques sur les intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 69-99.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__69_0>

Remarques sur les intégrales définies;

PAR M. CAMILLE JORDAN.

L'intégrale définie (simple ou multiple) d'une fonction f dans un champ E s'obtient, comme on sait (lorsque le champ et les valeurs de la fonction sont bornés), de la manière suivante :

On décompose le champ en éléments infiniment petits dans tous les sens; on multiplie l'étendue $d\sigma$ de chacun de ces éléments par la valeur de f en un point choisi à volonté dans l'élément; et l'on cherche la limite de la somme $\sum f\,d\sigma$ ainsi formée.

On sait en effet que cette limite a une valeur bien déterminée lorsque la fonction f est continue. Cette propriété subsiste même pour une classe de fonctions plus générale, définies d'une manière précise par un théorème bien connu de Riemann.

Enfin, M. Darboux a fait voir que, quelle que soit la fonction bornée f, les deux sommes $\sum \mathrm{M}\,d\sigma$, $\sum m\,d\sigma$, où M et m représentent le maximum et le minimum de f dans l'élément $d\sigma$, ont toujours une limite parfaitement déterminée.

Ces résultats sont très nets et éclaircissent complètement le rôle que joue la fonction dans l'intégrale.

L'influence de la nature du champ ne paraît pas avoir été étudiée avec le même soin. Toutes les démonstrations reposent sur ce double postulatum, que chaque champ E a une étendue déterminée; et que, si on le décompose en plusieurs parties E_1, E_2, ..., la somme des étendues de ces parties est égale à l'étendue totale de E. Or ces propositions sont loin d'être évidentes si on laisse à la conception du champ toute sa généralité.

Nous nous proposons de montrer dans les pages suivantes qu'à un champ E quelconque correspondent deux nombres déterminés E′ et E″ qu'on peut appeler son *étendue intérieure* et son *étendue extérieure*.

Si ces deux nombres coïncident, nous dirons que E est mesurable et a pour étendue le nombre $E'' = E'$. Pour que cette circonstance se présente, il faut et il suffit que la frontière de E ait une étendue nulle.

Une fonction f, qui reste bornée dans tout l'intérieur de E, admet dans cette région une intégrale par excès et une intégrale par défaut.

Si ces deux intégrales coïncident, elles représentent l'intégrale proprement dite de la fonction f dans le champ E.

La détermination d'une intégrale proprement dite multiple se ramène à celle d'une suite d'intégrales simples, pourvu que le champ soit mesurable.

Si la valeur de la fonction $f(x,y)$ ne reste plus bornée lorsque le point (x,y) se rapproche indéfiniment de la frontière du champ d'intégration E, supposé encore borné, il sera nécessaire et suffisant, pour que l'intégrale (par excès ou par défaut) ait une valeur finie et déterminée, que la valeur de l'intégrale, prise dans un domaine mesurable et parfait D intérieur à E, tende vers zéro en même temps que l'aire de D, quelle que soit la situation de ce domaine dans le champ.

Si le champ E est infini, il faudra en outre que l'intégrale prise dans D tende vers zéro, lorsque D varie d'une manière quelconque, mais de telle sorte que sa plus courte distance à l'origine des coordonnées tende vers ∞.

Si les intégrales de $f(x,y)$ par excès et par défaut, dans le champ E sont toutes deux finies et déterminées, il en sera de même de l'intégrale par excès de la fonction mod f. Cette condition est suffisante.

Pour exposer, sans faire de restriction inutile, la théorie du changement de variables dans les intégrales multiples, il semble qu'on doive renoncer à s'appuyer, comme on le fait communément, sur la réduction à une suite d'intégrales simples, celle-ci n'étant établie que pour les intégrales proprement dites prises dans un champ mesurable. La méthode géométrique, employée pour les intégrales doubles ou triples, et dans laquelle on change simultanément toutes les variables, est préférable à ce point de vue et s'étend aisément au cas de n variables. Elle exige toutefois quelques développements pour être rendue tout à fait rigoureuse. Cette étude nous conduit au résultat suivant :

Soient x, y et u, v deux couples de variables liées par les relations

$$x=\varphi(u,v), \qquad y=\varphi_1(u,v)$$

de telle sorte que, lorsque (u, v) décrit un certain domaine E, (x, y) décrira un domaine correspondant E'.

Supposons : 1° qu'à chaque point de E corresponde un seul point de E' et réciproquement; 2° qu'en tout point intérieur à E' (sauf en des points exceptionnels formant un ensemble d'étendue nulle) les fonctions φ, φ_1 admettent des dérivées continues, dont le jacobien J ne soit pas nul.

Cela posé, soit $f(x, y)$ une fonction quelconque, telle que l'intégrale

$$S_{E'} f(x,y)\,dx\,dy$$

(calculée par excès ou par défaut) soit finie et déterminée. Sa valeur sera égale à celle de l'intégrale

$$S_E f(\varphi, \varphi_1) \bmod J\, du\, dv$$

(calculée de la même manière).

I. — Notions générales sur les ensembles.

1. Soient $x, y, \ldots, n$ variables indépendantes. Tout système de valeurs $a, b, \ldots$ attribué à ces variables constituera un point d'un espace à n dimensions.

L'*écart* pp' de deux points $p=(a, b, \ldots)$ et $p'=(a', b', \ldots)$ sera défini par la relation

$$pp'=|a'-a|+|b'-b|+\ldots.$$

Nous appellerons avec M. Cantor :

1° *Ensemble* toute collection de points;

2° *Point limite* d'un ensemble E tout point π tel, qu'on puisse, quel que soit ε, déterminer dans E un point p différent de π, et dont l'écart à π soit $< \varepsilon$;

3° *Dérivé* de E l'ensemble E' formé par les points limites de E;

4° *Ensemble parfait* tout ensemble qui contient son dérivé.

Un ensemble E', *dérivé d'un autre ensemble* E, *est nécessairement parfait.* — Soit en effet π un de ses points limites; E' contiendra un point p' tel que $p'\pi$ soit $< \frac{\varepsilon}{2}$; mais, p' étant un point limite de E, on pourra déterminer dans E un point p tel que pp' soit $< \frac{\varepsilon}{2}$; on aura donc

$$p\pi \overline{\overline{<}} pp' + p'\pi < \varepsilon;$$

donc π est un point limite de E, et appartient à E'.

2. Si l'ensemble E ne contient pas tous les points possibles, les points qui ne lui appartiennent pas forment un ensemble *complémentaire* E_1.

Soient respectivement E', E'_1 les ensembles dérivés de E, E_1. Les points du plan pourront être répartis en trois classes:

1° Les points *intérieurs* à E. Ce sont ceux qui appartiennent à E sans appartenir à E'_1. Pour chacun d'eux p on pourra assigner une quantité ε telle que tout point dont l'écart à p est $< \varepsilon$ appartient à E et non à E_1.

2° Les points *extérieurs*, qui appartiennent à E_1 sans appartenir à E'.

3° Les *points frontières*, qui appartiennent à la fois à l'un des ensembles E, E_1 et au dérivé de l'autre.

On peut aisément concevoir des ensembles pour lesquels les points intérieurs ou les points extérieurs, ou tous les deux à la fois, viennent à manquer. Mais *il existe toujours des points frontières.*

Soient en effet $p = (a, b)$ et $\pi = (\alpha, \beta)$ deux points quelconques choisis respectivement dans E et dans E_1.

Partageons la droite $p\pi$ en 2^n segments égaux. Soit p_n le dernier des points de division qui appartienne à E, π_n le suivant. Il est clair que, si l'on fait croître n, les deux points p_n et π_n se rapprocheront constamment l'un de l'autre, et tendront vers un même point limite q. Si n est assez grand, on aura

$$p_n q < \varepsilon, \qquad \pi_n q < \varepsilon.$$

Le point q appartiendra donc à la fois à E' et à E'_1 et comme il appartient en outre à E ou à E_1, ce sera un point frontière.

Il pourrait arriver qu'à partir d'une certaine valeur ν de n, l'un des points p_n, π_n, le premier par exemple, cessât de se déplacer, mais la conséquence serait la même. En effet, le point $q = p_\nu$ appartiendrait à E; d'ailleurs c'est la limite des points π_n, qui appartiennent à E_1: donc il appartient à E'_1; c'est donc encore un point frontière.

L'ensemble F *des points frontières est parfait.* — Soit, en effet, q un point limite de F; F contiendra une infinité de points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ convergeant vers q. Si parmi eux il en est une infinité qui soient communs à E et à E'_1, leur point limite q appartiendra aux dérivés de ces ensembles; or E a pour dérivé E' et E'_1 contient son dérivé. Donc q est commun à E' et à E'_1; mais il appartient en outre à E ou à E_1 : c'est donc un point frontière.

Si parmi les points $q_1, \ldots, q_n, \ldots$, il n'en existe qu'un nombre borné communs à E et à E'_1, les autres, en nombre infini, seront communs à E_1 et à E', et un raisonnement analogue au précédent conduira à la même conséquence.

3. Un ensemble de points (x, y) sera dit *borné* si les coordonnées de tous ces points restent comprises entre des nombres fixes M et m.

Théorème de Weierstrass. — *Tout ensemble borné qui contient une infinité de points admet au moins un point limite.*

En effet, partageons l'intervalle de m à M en n parties égales. Les deux coordonnées x, y d'un point quelconque de E tomberont chacune dans l'un de ces intervalles. Groupons en un ensemble partiel tous ceux des points de E où x d'une part et y d'autre part tombent dans le même intervalle.

Nous obtiendrons ainsi n^2 ensembles partiels, dont la réunion constitue E. L'un au moins E_1 de ces nouveaux ensembles contiendra une infinité de points; et l'écart

$$|x'-x|+|y'-y|$$

de deux de ces points ne pourra surpasser $2\frac{M-m}{n}$.

Opérons sur E_1 comme sur E; nous le décomposerons en n^2 ensembles partiels, dont l'un au moins E_2 contiendra une infinité de points, dont les écarts mutuels ne pourront surpasser $2\frac{M-m}{n^2}$. On pourra encore opérer sur E_2 comme sur E_1, et ainsi de suite.

Cela posé, soient p_1 un point choisi à volonté dans E_1; p_2 un autre point, choisi à volonté dans E_2, etc. Ces points $p_1, p_2, \ldots$ tendront évidemment vers un point limite π.

4. Soient E, E' deux ensembles n'ayant aucun point commun. Les écarts des divers points p de E aux divers points de p' de E' forment un ensemble de nombres non négatifs. D'après un théorème bien connu, il existe donc un *minimum* Δ, positif ou nul, tel : 1° qu'aucun des écarts pp' ne soit $<\Delta$; 2° qu'il en existe un moindre que $\Delta+\varepsilon$, quelle que soit la quantité positive ε.

Ce minimum Δ s'appellera l'*écart* des ensembles E, E'. S'il est >0, nous dirons que ces ensembles sont *séparés*.

Deux ensembles bornés et parfaits E, E', *qui n'ont aucun point commun, sont nécessairement séparés; et, si leur écart est* Δ, *ils contiendront au moins un couple de points dont l'écart mutuel soit précisément* Δ.

Soient en effet $p=(x,y), \ldots$ les points de E; $p'=(x',y'), \ldots$ ceux de E'. Associons-les deux à deux de toutes les manières possibles de manière à former de nouveaux points $(pp')=(x,y,x',y')$ dans l'espace à quatre dimensions. L'ensemble EE' de tous ces nouveaux points sera évidemment borné et parfait.

Cela posé, si E et E' ne contenaient aucun couple de points dont l'écart fût Δ, ils contiendraient tout au moins un couple de points p_1, p'_1 dont l'écart serait moindre que $\Delta+\varepsilon_1$, ε_1 étant pris à volonté.

Soient d_1 l'écart de p_1 à p'_1, ε_2 un nombre $< d_1$ et $< \frac{\varepsilon_1}{2}$; on pourra déterminer un nouveau couple de points p_2, p'_2 dont l'écart d_2 soit $< \Delta + \varepsilon_2$. Continuant ainsi nous obtiendrons une suite infinie de couples p_1, p'_1; p_2, p'_2; ... où les écarts convergent vers Δ; les points composés $(p_1 p'_1)$, $(p_2 p'_2)$, ... de l'ensemble EE' admettent au moins un point limite (pp'), où les deux points composants auront pour écart Δ. Or p est une limite de l'ensemble des points $p_1, p_2, \ldots$ qui appartiennent à E; c'est donc un point limite de E, et comme cet ensemble est parfait, il contient p. On voit de même que E' contient p'.

D'ailleurs Δ ne peut être nul; car alors, les points p, p' se confondant, E et E' auraient un point commun, contre l'hypothèse.

5. Nous dirons qu'un ensemble E borné et parfait est d'*un seul tenant* s'il ne peut être décomposé en plusieurs ensembles parfaits séparés.

Le caractère distinctif d'un pareil ensemble est le suivant:

Entre deux quelconques de ses points p, p', on peut toujours, quel que soit ε, intercaler une chaîne de points intermédiaires, appartenant à l'ensemble donné, et telle que l'écart de deux points consécutifs soit $< \varepsilon$.

1° Cette condition est nécessaire. En effet, supposons que pour un nombre donné ε elle ne soit pas satisfaite. Associons au point p d'abord tous ceux de E dont l'écart à p est $< \varepsilon$, puis ceux dont l'écart à l'un de ceux-ci est $< \varepsilon$ et ainsi de suite. Les points ainsi obtenus forment un ensemble E_1. Les autres points de E forment un ensemble E_2, contenant au moins un point, à savoir p', et dont l'écart à E_1 est $\geqq \varepsilon$. D'ailleurs chacun des ensembles E_1, E_2 est parfait. Soit en effet l_1 un point limite de E_1. Il appartient à E, qui est supposé parfait. Donc il appartient à E_1 ou à E_2. D'ailleurs il existe des points de E_1 dont il est écarté de moins de ε. Donc il appartient à E_1 et non à E_2.

Soit d'autre part l_2 un point limite de E_2. Il appartient à E, et comme il existe des points de E_2 dont il est écarté de moins de ε, il ne peut appartenir à E_1; donc il appartient à E_2.

2° Réciproquement, cette condition est suffisante. En effet, supposons E décomposable en deux ensembles parfaits séparés E_1 et E_2; soient δ leur écart, p_1 et p_2 deux points pris respectivement dans E_1 et E_2. Si on les relie par une chaîne quelconque de points intermédiaires, cette chaîne contiendra nécessairement deux points consécutifs appartenant, l'un à E_1, l'autre à E_2. Leur écart sera donc $\overline{\overline{>}} \delta$; et la condition de l'énoncé ne sera pas remplie pour les valeurs de ε moindres que δ.

La proposition ci-dessus entraîne cette conséquence :

Un ensemble E *formé par la réunion de plusieurs ensembles d'un seul tenant* $E_1, E_2, \ldots$, *dont chacun a au moins un point commun avec l'un des précédents, est lui-même d'un seul tenant.*

6. *Un ensemble* E *d'un seul tenant se confond avec son dérivé* E' (s'il ne se compose pas d'un seul point).

En effet, E contient E', par définition. Mais, d'autre part, il y est contenu. Soient, en effet, p, p' deux points arbitrairement choisis dans E. On peut intercaler entre eux une chaîne de points $p_1, p_2, \ldots$, tels que l'écart de deux points consécutifs quelconques, et notamment celui de p à p_1, soit $< \varepsilon$. On peut donc, quel que soit ε, déterminer dans E un point p_1 dont l'écart à p soit $< \varepsilon$. Donc p est un point limite de E et appartient à E'.

7. Soit E un ensemble borné, formé des points $p, p_1, \ldots$; les écarts de ces points pris deux à deux forment un ensemble de nombres positifs qui est borné. Il admet donc un maximum d, que nous appellerons le *diamètre* de l'ensemble E.

8. Cherchons, d'autre part, à préciser la notion de l'*étendue* de cet ensemble.

Cette étendue sera une longueur, une aire, un volume, etc., suivant que le nombre des dimensions de l'ensemble sera $1, 2, 3, \ldots$. Nous supposerons, pour fixer les idées, que ce nombre soit égal à 2. Chaque point (u, v) de E pourra être représenté géométriquement sur un plan par le point dont u, v sont les coordonnées rectangles.

Décomposons ce plan par des parallèles aux axes en carrés de côté r. L'ensemble de ceux de ces carrés dont tous les points sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E; l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à E ou qui contiennent un point de sa frontière forment un nouveau domaine $S+S'$, auquel E est intérieur. Ces domaines, étant formés par la réunion de carrés, ont des aires déterminées, qu'on peut également représenter par S et $S+S'$.

Faisons varier la décomposition en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro : *les aires* S *et* $S+S'$ *tendront vers des limites fixes.*

1° En effet, considérons, par exemple, celles des aires S pour lesquelles r ne surpasse pas un nombre fixe; elles forment un système de nombres positifs, évidemment borné, et admettant un maximum A. On pourra trouver une décomposition déterminée, pour laquelle cette aire prenne une valeur S_1 plus grande que $A-\varepsilon$. La frontière F de E et celle du domaine intérieur S_1 forment deux ensembles parfaits, ayant un écart δ différent de zéro.

Considérons maintenant une nouvelle décomposition quelconque en carrés de côté moindre que $\frac{\delta}{2}$. L'écart maximum entre deux points d'un même carré y sera $<\delta$. Donc tous ceux de ces carrés dont un point appartient à S_1 seront en entier dans l'intérieur de E. Donc le domaine S contiendra S_1, et son aire sera $\overline{\gtrless} A-\varepsilon$; mais, d'autre part, elle ne surpasse pas A. Les aires S admettent donc une limite égale à A.

2° Considérons, d'autre part, les aires $S+S'$. Elles forment un ensemble de nombres positifs admettant un minimum a. Il existera une décomposition déterminée pour laquelle $S+S'$ prendra une valeur $S_1+S'_1$ moindre que $a+\varepsilon$. Soit δ l'écart de la frontière de E à celle du domaine $S_1+S'_1$. Considérons une autre décomposition quelconque où r soit $<\frac{\delta}{2}$. Tous les carrés dont un point appartient à E ou à sa frontière seront intérieurs à $S_1+S'_1$. On aura donc

$$S+S' \overline{\gtrless} S_1+S'_1 \lessgtr a+\varepsilon.$$

Mais, d'autre part, $S+S' \overline{\gtrless} a$. Donc a est la limite des sommes $S+S'$.

Comme on a toujours

$$S + S' \gtreqless S,$$

a sera au moins égal à A.

Nous appellerons A l'*aire intérieure* de E, a son *aire extérieure*. Si S' a pour limite zéro, nous dirons que E est *quarrable*, et a pour *aire* la quantité $a = A$.

9. Soit E' un nouvel ensemble intérieur à E. Son aire extérieure, et, *a fortiori*, son aire intérieure, seront moindres que l'aire intérieure de E. Soit, en effet, δ l'écart des frontières de E et de E'. Si l'on décompose le plan en carrés de côtés $< \frac{\delta}{4}$, il est clair que tous les carrés non extérieurs à E', et aussi les carrés adjacents, seront intérieurs à E. L'aire intérieure de E surpasse donc l'aire extérieure de E' d'une quantité au moins égale à la somme des aires de ces derniers carrés.

10. Supposons E formé par la réunion de plusieurs ensembles partiels $E_1, E_2, \ldots$, et considérons une décomposition quelconque du plan en carrés. Soient respectivement $S, S_1, S_2, \ldots$ les sommes des carrés intérieurs à $E, E_1, E_2, \ldots$; $S', S'_1, S'_2, \ldots$ celles des carrés qui rencontrent leurs frontières. Tout carré intérieur à l'un des ensembles E_1, $E_2, \ldots$ l'est à E, et, d'autre part, tout carré non extérieur à E est non extérieur à l'un au moins des ensembles $E_1, E_2, \ldots$; on aura donc

$$S \gtreqless S_1 + S_2 + \ldots, \qquad S + S' \lesseqgtr S_1 + S'_1 + S_2 + S'_2 + \ldots,$$

et à la limite

$$A \gtreqless A_1 + A_2 + \ldots, \qquad a \lesseqgtr a_1 + a_2 + \ldots.$$

$A, A_1, A_2, \ldots$ et $a, a_1, a_2, \ldots$ représentant les aires intérieures et extérieures des ensembles $E, E_1, E_2, \ldots$. Ces inégalités se changent, d'ailleurs, en égalités, si les ensembles sont quarrables.

11. On peut concevoir une infinité de décompositions du plan en régions élémentaires quarrables $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$, dont le diamètre ne surpasse pas un nombre donné ρ. Considérons une suite quelconque de décompositions de ce genre, où ρ tende vers zéro. La somme $\Sigma\Delta\sigma$, étendue aux éléments intérieurs à E, aura pour limite l'aire intérieure A.

Nous pouvons, en effet, déterminer une décomposition en carrés, telle que la somme S des aires des carrés intérieurs soit $> A - \varepsilon$; soit δ l'écart des frontières de E et de S. Dès que ρ sera devenu $< \delta$, tout élément $\Delta\sigma$ qui a un de ses points dans S sera tout entier intérieur à E. L'aire $\Sigma\Delta\sigma$ contiendra donc l'aire S et sera $> A - \varepsilon$. Mais, d'autre part, elle ne peut surpasser A. En effet, soit δ' l'écart de sa frontière à celle de E. Considérons une autre décomposition en carrés, de côté $< \frac{\delta'}{2}\cdot$ Tous ceux de ces carrés qui ont un point commun avec l'aire $\Sigma\Delta\sigma$ seront intérieurs à E. La somme S′ des carrés intérieurs est donc $\geq \Sigma\Delta\sigma$; mais elle ne surpasse pas A.

Donc A est bien la limite des sommes $\Sigma\Delta\sigma$.

On voit de même que la somme $\Sigma\Delta\sigma$, étendue non seulement aux éléments intérieurs à E, mais aussi à ceux qui rencontrent sa frontière, a pour limite l'aire extérieure a.

La somme $\Sigma\Delta\sigma$, bornée aux éléments frontières, sera donc nulle si E est quarrable.

12. Les considérations précédentes sont évidemment applicables aux ensembles d'un nombre quelconque de dimensions. On pourra déterminer pour chacun d'eux une *étendue intérieure* et une *étendue extérieure*. Si elles coïncident, l'ensemble sera *mesurable*.

13. Nous terminerons ces remarques en établissant le théorème suivant :

Soient $u, v, \ldots$ des fonctions des variables indépendantes $x, y, \ldots$ qui restent continues lorsque $x, y, \ldots$ se meuvent dans un certain ensemble E; *soit* F *l'ensemble des points $(u, v, \ldots)$ correspondant aux divers points $(x, y, \ldots)$ de* E.

1° *Si* E *est borné et parfait,* F *le sera également;*

2° *Si* E *est d'un seul tenant,* F *le sera également.*

Supposons, en effet, que E soit borné et parfait. Si F n'était pas borné, on pourrait y déterminer un point q_0 où la somme

$$|u|+|v|+\ldots$$

fût plus grande qu'un nombre donné quelconque L; puis un autre point q_1, où cette somme de modules fût $> 2L$; un autre point q_2, où elle fût $> 4L$, ...; un nouveau point q_n, où elle fût $> 2^n L$, ... Soient p, p_1, ..., p_n, ... les points correspondants de E. Ils sont tous différents, car u, v, ... n'ont qu'un seul système de valeurs en chaque point de E. Leur nombre étant infini, ils admettent au moins un point limite π, qui appartiendra à E. La suite $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ contiendra : 1° un point p_{α_0} tel que l'écart $p_{\alpha_0}\pi$ soit moindre qu'un nombre fixe quelconque ε; un point p_{α_1} tel que l'écart $p_{\alpha_1}\pi$ soit moindre que $p_0\pi$, $p_1\pi, \ldots, p_{\alpha_0}\pi$ et moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$; un point p_{α_2} tel que $p_{\alpha_2}\pi$ soit moindre que $p_0\pi, \ldots, p_{\alpha_1}\pi$ et que $\frac{\varepsilon}{L}$, ... Les points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ convergent vers π; d'ailleurs, les indices $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ vont en croissant; donc $\alpha_n \geq n$ et la somme

$$|u|+|v|+\ldots,$$

au point q_{α_n}, sera au moins égale à $2^n L$. Il existera donc dans E des points aussi rapprochés qu'on voudra du point π, et pour lesquels $|u|+|v|+\ldots$ sera plus grand que tout nombre assignable. Ce résultat est absurde; soient, en effet, U, V, ... les valeurs de u, v, ... au point π. On pourra, en vertu de la continuité admise pour ces fonctions, trouver un nombre η tel que, pour tout point de E dont l'écart à π est $< \eta$, u, v, ... diffèrent de U, V, ..., de moins de ε: d'où l'on déduit

$$|u|+|v|+\ldots < |U|+\varepsilon+|V|+\varepsilon+\ldots.$$

Il reste à prouver que F est parfait, c'est-à-dire contient son dérivé F′. Soit q' un point de F′, vers lequel converge une suite infinie $q_1, \ldots, q_n, \ldots$ de points de F. Soient $p_1, \ldots, p_n, \ldots$ les points correspondants de E. Ils admettent au moins un point limite π, appartenant à E. Dans la suite $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, on peut trouver, comme on l'a vu, une suite de points $p_{\alpha_0}, p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}, \ldots$ qui convergent vers π, et où les indices α_0, α_1, ... aillent en croissant. Les points $q_{\alpha_0}, \ldots, q_{\alpha_n}, \ldots$ convergeront vers le point q'. Mais, en vertu de la continuité, ils doivent converger vers le point de F qui correspond à π. Donc q' appartient bien à F et correspondra au point π.

Supposons enfin que E soit d'un seul tenant, et montrons qu'il en est de même de F.

Soient $q=(u, v, \ldots)$ et $Q=(U, V, \ldots)$ deux points quelconques de F; $p=(x, y, \ldots)$ et $P=(X, Y, \ldots)$ les points correspondants de E. On peut les relier par une chaîne de points intermédiaires p_1, p_2, ... tels que l'écart

$$|x_{k+1}-x_k|+|y_{k+1}-y_k|+\ldots$$

de deux points consécutifs

$$p_k=(x_k, y_k, \ldots), \qquad p_{k+1}=(x_{k+1}, y_{k+1}, \ldots),$$

et *a fortiori* chacun des modules

$$|x_{k+1}-x_k|, \qquad |y_{k+1}-y_k|, \qquad \ldots$$

soit inférieur à un nombre donné quelconque η.

Soient u_k, v_k, ... les valeurs des fonctions u, v, ... aux points x_k, y_k, ... La continuité étant uniforme, comme l'a montré M. Lüroth, dans tout domaine borné et parfait tel que E, on peut choisir η assez petit pour que, pour toute valeur de k, les modules

$$|u_{k+1}-u_k|, \qquad |v_{k+1}-v_k|, \qquad \ldots,$$

et par suite leur somme, soient moindres qu'une quantité ε arbitrairement choisie. Or cette somme représente l'écart des deux points

$$q_k=(u_k, v_k, \ldots) \qquad \text{et} \qquad q_{k+1}=(u_{k+1}, v_{k+1}, \ldots).$$

Les points q, q_1, ..., Q forment ainsi une chaîne où l'écart de deux points consécutifs est $<\varepsilon$. Notre proposition est donc établie.

II. — Intégrales définies.

14. Soit $f(x, y, \ldots)$ une fonction qui conserve une valeur bornée dans l'intérieur d'un domaine E, supposé mesurable.

Décomposons E en domaines élémentaires mesurables e_1, e_2, ...

Désignons par M, m le maximum et le minimum de la fonction f dans E; par M_k, m_k son maximum et son minimum dans e_k, et formons les sommes

$$S = \sum M_k e_k, \qquad s = \sum m_k e_k.$$

Comme on a évidemment

$$m \overline{\overline{<}} m_k \overline{\overline{<}} M_k \overline{\overline{<}} M,$$

S et s seront comprises entre

$$M \sum e_k = ME \qquad \text{et} \qquad m \sum e_k = mE,$$

et leurs modules seront, au plus, égaux à LE, L désignant le plus grand des deux modules $|M|$ et $|m|$ (ou le maximum de $|f|$ dans le domaine E).

M. Darboux a montré que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que les diamètres des éléments tendent vers zéro, S et s tendront vers des limites fixes.

En effet, considérons, par exemple, les sommes S. Leurs valeurs forment un ensemble borné, lequel admet un minimum T; et l'on pourra déterminer une décomposition particulière Δ_1 telle que la somme correspondante S_1 soit comprise entre T et $T + \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Soient $e_1, \ldots, e_n$ les éléments de cette décomposition, n leur nombre; on aura

$$E = \sum_1^n e_k, \qquad S_1 = \sum M_k e_k.$$

Soit Δ une autre décomposition quelconque; nous y distinguerons deux sortes d'éléments : 1° ceux qui sont contenus en entier dans l'un des éléments $e_1, e_n, \ldots$, tel que e_k; nous les désignerons par $e_{k1}, \ldots, e_{ki}, \ldots$; 2° ceux qui empiètent sur plusieurs des éléments $e_1, e_2, \ldots$; désignons-les par $e'_1, \ldots, e'_l, \ldots$. Soient enfin M_{ki}, M'_l les maxima de f

dans e_{ki}, e'_l; on aura évidemment

$$M_k \overset{=}{>} m, \qquad M_{ki} \overset{=}{<} M_k, \qquad M'_l \overset{=}{<} M,$$

$$E = \sum_{k,i} e_{ki} + \sum_l e'_l = \sum_k e_k,$$

et enfin, pour la somme S correspondante à la décomposition Δ,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i,k} M_{ki} e_{ki} + \sum_l M'_l e'_l, \\ &\overset{=}{<} \sum_k M_k \sum_i e_{ki} + M \sum_l e'_l, \\ &\overset{=}{<} S_1 - \sum_k M_k \Big(e_k - \sum_i e_{ki} \Big) + M \sum_l e'_l, \\ &\overset{=}{<} T + \frac{\varepsilon}{2} + (M - m) \sum_k \Big(e_k - \sum_i e_{ki} \Big). \end{aligned}$$

D'autre part, T étant le minimum des sommes S, on aura

$$S \overset{=}{>} T.$$

De ces deux inégalités résulte immédiatement la preuve que, si le diamètre des éléments tend vers zéro, S tend vers T. En effet, les domaines $e_1, \ldots, e_n$ étant mesurables, la différence entre e_k et la somme $\sum e_{ki}$ des nouveaux éléments qui lui sont intérieurs tend vers zéro avec le diamètre de ces éléments. On pourra donc, après avoir choisi ε à volonté, ce qui fixera le nombre n, assigner un nombre δ tel que, si tous les éléments ont un diamètre $< \delta$, chacune des n sommes

$$e_k - \sum_i e_{ki}$$

devienne moindre que

$$\frac{\varepsilon}{2n(M - m)}.$$

Dès lors, S sera compris entre T et $T + \varepsilon$.

Ce nombre fixe $T = \lim S$ se nomme l'*intégrale par excès* de la fonction $f(x, y, \ldots)$ dans l'intérieur de E.

On démontre de même que les sommes s tendent vers leur maximum t, qui sera l'*intégrale par défaut* de $f(x, y, \ldots)$.

On a évidemment $T \gtreqless t$. Si $T = t$, la fonction sera *intégrable*, et $T = t$ sera son intégrale, laquelle pourra être représentée par la notation $S_E f(x, y, \ldots) de$.

15. Si l'on partage E en plusieurs domaines mesurables $E_1, E_2, \ldots$, l'intégrale, soit par excès, soit par défaut, prise dans E, sera évidemment la somme des intégrales prises dans ces domaines partiels.

Nous avons vu, d'ailleurs, qu'on peut déterminer une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ dont chacun soit intérieur au suivant et à E, et dont les étendues aient pour limite l'étendue de E. L'intégrale (par excès ou par défaut) prise dans E sera la limite vers laquelle tend, pour $n = \infty$, l'intégrale prise dans E_n; car la différence des deux intégrales est égale à l'intégrale prise dans le domaine $E - E_n$, et son module, ne pouvant surpasser $L(E - E_n)$, tend vers zéro quand n tend vers ∞.

16. Nous avons admis, jusqu'à présent, que le domaine E est mesurable. Nous pouvons maintenant supprimer cette restriction. On peut, en effet, le considérer comme limite d'une suite de domaines mesurables $E_1, \ldots, E_n, \ldots$ dont les étendues convergent vers une limite qui, par définition, est l'étendue intérieure de E. L'intégrale (par excès ou par défaut) prise dans E_n tend vers une limite; car la différence entre les intégrales prises dans E_n et E_{n+p} a son module au plus égal à

$$L(E_{n+p} - E_n) < L(E - E_n),$$

et tend vers zéro pour $n = \infty$. Nous considérerons cette limite de l'intégrale prise dans E_n comme représentant la valeur de l'intégrale dans E.

17. *Si une fonction $f(x, y, \ldots)$ de n variables est intégrable dans un domaine* E, *d'étendue mesurable, le calcul de l'intégrale multiple*

$$I = S_E f(x, y, \ldots) de$$

se ramènera à celui de n intégrales simples successives.

Pour plus de simplicité, nous supposerons $n = 2$ dans la démonstration. Le champ E sera représenté géométriquement par un ensemble de points (x, y) situés dans un plan.

Les valeurs de y, auxquelles correspondent des points de E, forment un ensemble borné F. Soit η l'une d'elles; les valeurs de x qui, associées à η, donnent des points de E, forment un ensemble borné G_η. Nous ne pouvons pas affirmer que G_η ait une longueur mesurable, ni que la fonction $f(x, \eta)$ y soit intégrable; mais cette fonction étant bornée, on pourra toujours déterminer dans l'intérieur de G_η son intégrale par excès et son intégrale par défaut. Ce seront des fonctions de η, que nous pourrons désigner par $J(\eta)$ et $j(\eta)$, et qui sont bornées dans le domaine F. Nous pourrons donc déterminer dans l'intérieur de F : 1° l'intégrale par excès de $J(\eta)$, que nous désignerons par K; 2° l'intégrale par défaut de $j(\eta)$, que nous désignerons par k. Comme on a évidemment $J(\eta) \gtrless j(\eta)$, k sera au plus égal à l'intégrale par défaut de $J(\eta)$ et *a fortiori* au plus égal à K.

Nous allons montrer, d'autre part, que K est au plus égal à l'intégrale double I. Pour cela, décomposons le plan en rectangles infiniment petits par des parallèles aux axes. Celui de ces rectangles qui est limité par les droites $x = x_i$, $x = x_i + dx_i$, $y = y_k$, $y = y_k + dy_k$ a pour aire $dx_i\, dy_k$; nous le désignerons par e_{ik}, s'il est tout entier intérieur à E, par e'_{ik} s'il contient un point de la frontière de E. Dans chacun des rectangles e_{ik}, la fonction $f(x, y)$ admettra un certain maximum M_{ik}, et dans la portion des rectangles e'_{ik} qui appartient à E elle ne pourra surpasser un nombre fixe M, égal au maximum de $f(x, y)$ dans le domaine E.

L'ensemble G_η est formé par les points communs à E et à la droite $y = \eta$. Les parallèles aux x que nous avons tracées décomposent cette droite en segments et l'intégrale $J(\eta)$ est égale à la somme des intégrales partielles prises dans l'intérieur des portions communes à ces divers segments et à E.

Supposons η compris entre y_k et $y_k + dy_k$, k ayant une valeur déterminée. Soit e_{ik} l'un des rectangles intérieurs à E compris entre les droites $y = y_k$ et $y = y_k + dy_k$. Le segment de la droite $y = \eta$ contenu dans ce rectangle a pour longueur dx_i et se trouve en entier dans E; d'ailleurs, la fonction $f(x,y)$ en chaque point de ce segment a une valeur au plus égale à M_{ik}. La valeur de l'intégrale correspondante ne peut donc surpasser $M_{ik}\,dx_i$.

Soit, d'autre part, e'_{ik} un des rectangles compris entre $y=y_k$ et $y=y_k+dy_k$ qui rencontrent la frontière de E. La longueur (intérieure) de la portion de la droite $y=\eta$ commune à ce segment et à E ne peut surpasser dx_i; la valeur de la fonction $f(x,y)$ en chacun de ses points ne peut surpasser M; la valeur de l'intégrale correspondante ne peut surpasser $M\,dx_i$.

Donc la valeur de $J(\eta)$ ne pourra surpasser la quantité

$$\mu_k = \sum_i M_{ik}\,dx_i + M\sum_i dx_i,$$

la première somme s'étendant à ceux des rectangles e_{ik}, et la seconde à ceux des rectangles e'_{ik}, où k a la valeur constante que nous avons supposée.

Si donc nous désignons par I_k la valeur de l'intégrale par excès de $J(\eta)$ dans l'intervalle de $\eta=y_k$ à $\eta=y_k+dy_k$, on aura

$$I_k \overline{\overline{<}}\, \mu_k\,dy_k \overline{\overline{<}} \sum_i M_{ik}e_{ik} + M\sum_i e'_{ik}.$$

Chacun des éléments dy_k intérieurs à F donne une relation de ce genre. Sommant les inégalités obtenues, il viendra

$$\sum I_k \overline{\overline{<}} \sum_{i,k} M_{ik}e_{ik} + M\sum_{i,k} e'_{ik}.$$

On remarquera que dans la première somme du second membre figurent tous les rectangles e_{ik} intérieurs à E, car toute parallèle aux x qui coupe un de ces rectangles ou passe à une distance de son contour inférieure à l'écart de ce contour à la frontière de E a nécessairement des points communs avec ce domaine. Au contraire, quelques-uns des rectangles frontières e'_{ik} pourront manquer dans la seconde somme.

Passons maintenant à la limite, en supposant que les dimensions des rectangles décroissent indéfiniment. Le premier membre aura évidemment pour limite l'intégrale K. La première somme du second membre aura pour limite l'intégrale double $S_E f(x,y)\,de$, prise par excès. La seconde a pour limite zéro, si E est mesurable, comme nous l'avons supposé; car la somme totale des aires des rectangles frontières tend vers zéro, et, à plus forte raison, la somme $\sum\limits_{i,k} e'_{ik}$, si celle-ci ne s'étend qu'à une partie de ces rectangles.

Nous voyons ainsi que l'intégrale K est au plus égale à l'intégrale double $S_E f(x,y)\,de$, prise par excès.

On démontrerait, par un raisonnement tout semblable, que l'intégrale k est au moins égale à cette même intégrale double prise par défaut.

Jusqu'à présent nous n'avons fait aucun usage de l'hypothèse que la fonction $f(x,y)$ est intégrable. S'il en est ainsi, les deux intégrales doubles, par excès et par défaut, coïncident entre elles, et, par suite, avec les intégrales K et k. Or chacune de celles-ci peut se calculer par deux intégrations simples, effectuées successivement [1].

18. Soit $f(x,y)$ une fonction définie dans tout l'intérieur d'un domaine E et qui reste bornée dans tout domaine D mesurable et parfait contenu dans cet intérieur, sans toutefois jouir de cette propriété dans tout l'intérieur de E. Cette fonction admettra dans D une intégrale par excès et une intégrale par défaut, que nous représenterons respectivement par $S_D^1 f\,de$ et $S_D^2 f\,de$, ou, plus simplement, par S_D^1, S_D^2.

Considérons, par exemple, l'intégrale par excès S_D^1. Si nous faisons varier le domaine D d'une manière quelconque, mais de telle sorte

---

[1] La démonstration ci-dessus suppose que le domaine E est mesurable. S'il ne l'était pas, la proposition à établir pourrait se trouver en défaut. Supposons, par exemple, que E soit constitué par les points où $y \geqq 0 \leqq 1$ et $x \geqq 0 \leqq 1$, si y est rationnel ou $x \leqq 0 \geqq -1$, si y est irrationnel, et prenons pour fonction à intégrer une constante c. L'intégrale double $S_E c\,dx\,dy$ sera nulle, car l'aire intérieure de E est évidemment nulle. Mais, d'autre part, les domaines G_{r_1} et F ayant une longueur égale à 1, on aura

$$\int_F dr_1 \int_{G_{r_1}} c\,dx = \int_F c\,dr_1 = c.$$

que son aire ait pour limite l'aire intérieure de E, il pourra arriver que l'intégrale S_D^f tende vers une limite déterminée. Nous dirons dans ce cas que cette limite est l'intégrale par excès de f dans le domaine E, et nous la représenterons par S_E^f.

La condition nécessaire et suffisante pour que cette limite existe est que l'intégrale S_D^f tende vers zéro lorsque D varie d'une manière quelconque de telle sorte que son aire tende vers zéro : autrement dit qu'à tout nombre positif ε on puisse faire correspondre un autre nombre δ tel, que pour tout domaine D (borné, parfait et intérieur à E) d'aire moindre que δ, on ait

$$|S_D^f| < \varepsilon.$$

En effet, supposons cette dernière condition satisfaite et considérons deux domaines quelconques D et D′ (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que leurs aires D et D′ diffèrent de l'aire intérieure de E d'une quantité moindre que δ. Soit d l'ensemble des points de D qui n'appartiennent pas à D′; d' celui des points de D′ qui n'appartiennent pas à D; on aura évidemment

$$d < E - D' < \delta, \qquad d' < E - D < \delta,$$

$$D - D' = d - d'$$

et, par suite,

$$S_D^f - S_{D'}^f = S_d^f - S_{d'}^f,$$

$$|S_D^f - S_{D'}^f| \overline{\gtrless} |S_d^f| + |S_{d'}^f| < 2\varepsilon,$$

ce qui prouve l'existence de la limite S_E^f.

Réciproquement, supposons la condition non satisfaite. Il existera une quantité ε pour laquelle on pourra déterminer un domaine d, d'aire inférieure à une quantité quelconque δ et tel que l'intégrale S_d^f ait son module $\overline{>} \varepsilon$.

Soit D un domaine mesurable et parfait contenant d, intérieur à E et tel que E − D soit moindre que δ. Si nous enlevons du domaine D les points intérieurs à d, nous obtiendrons un nouveau domaine $D' = D - d$ dont l'aire D′ sera $> E - 2\delta$. Les deux aires D et D′ tendront toutes deux vers E si l'on fait décroître δ; mais la différence des intégrales correspondantes

$$S_D^f - S_{D'}^f = S_d^f$$

aura son module au moins égal à ε. Donc la limite S_E^1 n'existera pas.

Des considérations toutes semblables s'appliquent à l'intégrale par défaut S_D^2. Lorsque D tend vers E, elle pourra tendre vers une limite fixe S_E^2; et la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait

$$\lim S_D^2 = 0,$$

lorsque l'aire D tend vers zéro.

19. Les deux intégrales

$$S_D^1 f\,de, \qquad S_D^2 f\,de$$

sont, par définition, les limites des sommes

$$\sum_D M_k\,de_k, \qquad \sum_D m_k\,de_k,$$

où M_k, m_k sont le maximum et le minimum de f dans l'élément infiniment petit de_k. Le maximum L_k du module de f dans cet élément sera la plus grande des deux quantités $|M_k|$, $|m_k|$; on aura donc

$$|\Sigma M_k\,de_k| \leqq \Sigma L_k\,de_k,$$
$$|\Sigma m_k\,de_k| \leqq \Sigma L_k\,de_k,$$

et en passant à la limite

$$|S_D^1| \leqq S_D^1 |f|\,de, \qquad |S_D^2| \leqq S_D^1 |f|\,de.$$

Si donc, lorsque D tend vers zéro, on a

$$(1) \qquad \lim S_D^1 |f|\,de = 0,$$

on aura *a fortiori*

$$(2) \qquad \lim S_D^1 = 0, \qquad \lim S_D^2 = 0,$$

et les deux limites S_E^1, S_E^2 seront déterminées.

20. Nous allons voir que, réciproquement, les conditions (2) entraînent comme conséquence nécessaire la relation (1).

Soit en effet f_1 une fonction égale à f quand f est positif, et à zéro quand f est nul ou négatif; on aura par hypothèse, pour tout champ D d'aire inférieure à un certain nombre δ,

$$|S_{D_1}^1 f\,de| < \varepsilon$$

et cette relation devra subsister pour tout champ D_1 contenu dans D. On en conclut aisément que l'intégrale

$$S_D^1 f_1\,de$$

ne peut surpasser ε.

Décomposons en effet le champ D en éléments de_k infiniment petits; soient M_k le maximum de f, M_{1k} celui de f_1 dans l'élément de_k.

On peut prendre les éléments assez petits pour que la différence entre les sommes

$$\Sigma M_k\,de_k, \quad \Sigma M_{1k}\,de_k$$

et leurs minima

$$S_{D'}^1 f\,de, \quad S_{D'}^1 f_1\,de$$

soit moindre qu'un nombre arbitraire η.

Il en sera ainsi *a fortiori* si les sommes et les intégrales ci-dessus sont restreintes à une portion des éléments de_k.

Or M_{1k} est égal à M_k dans tout élément où f prend des valeurs positives, égal à zéro dans les autres; on aura donc, en désignant par D_1 l'ensemble des éléments de la première sorte,

$$S_D^1 f_1\,de \mathrel{\overline{\overline{<}}} \sum_{D} M_{1k}\,de_k \mathrel{\overline{\overline{<}}} \sum_{D_1} M_k\,de_k \mathrel{\overline{\overline{<}}} S_{D_1}^1 f\,de + \eta \mathrel{\overline{\overline{<}}} \varepsilon + \eta$$

et, en faisant tendre η vers zéro,

$$S_D^1 f_1\,de \mathrel{\overline{\overline{<}}} \varepsilon.$$

Remarquons en second lieu que, le maximum de f dans un ensemble quelconque étant égal et de signe contraire au minimum de f, on a

$$S_D^2 f\,de = - S_D^1(-f)\,de.$$

Par hypothèse, le premier membre tend vers zéro en même temps que l'aire de D : il en est donc de même du second; et si f_2 désigne une fonction égale à $-f$ lorsque $-f$ est positif, à zéro dans le cas contraire, on aura, d'après ce qui précède,

$$S_D^1 f_2\,de \leqq \varepsilon.$$

Cela posé, on a évidemment

$$|f| = f_1 + f_2.$$

Le maximum de $|f|$ dans un ensemble quelconque est donc au plus égal à la somme des maxima de f_1 et de f_2; on a, par suite,

$$S_D^1 |f|\,de \leqq S_D^1 f_1\,de + S_D^1 f_2\,de \leqq 2\varepsilon.$$

Donc si D tend vers zéro, on aura

$$\lim S_D^1 |f|\,de = 0.$$

Nous obtenons donc le théorème suivant :

Pour que les intégrales, par excès et par défaut, de la fonction f dans le domaine E soient déterminées toutes deux, il faut et il suffit que l'intégrale par excès de $|f|$ dans ce même domaine soit déterminée.

On remarquera que dans ce cas l'intégrale par défaut de $|f|$ dans E est également déterminée. En effet, l'intégrale par défaut

$$S_D^2 |f|\,de$$

a tous ses éléments positifs ou nuls et au plus égaux à ceux de l'intégrale par excès $S_D^1 |f|\,de$; elle tendra donc vers zéro en même temps que cette dernière, si D tend vers zéro.

21. Soient $D_1, D_2, \ldots, D_n$ une série déterminée, mais susceptible d'être choisie à volonté, de domaines successifs (mesurables, parfaits et intérieurs à E) tels que chacun d'eux contienne le précédent et que l'écart maximum des points de la frontière de D_n à la frontière de E tende vers zéro, quand n tend vers ∞; l'intégrale

$$\mathrm{S}'_{D_n}|f|\,de,$$

sera positive et croîtra avec n. Si elle tend vers ∞ en même temps que n, l'intégrale $\mathrm{S}'_{E}|f|\,de$ ne pourra être finie et déterminée. Dans le cas contraire, elle tendra vers une limite finie A, qui sera la valeur de l'intégrale $\mathrm{S}'_{E}|f|\,de$.

En effet, soit D un domaine quelconque (mesurable, parfait et intérieur à E), dont l'aire soit $> E - \delta$. Il existe dans la suite $D_1, \ldots, D_n, \ldots$ un domaine D_m contenant en entier D, et l'on aura

$$\mathrm{S}'_{D}|f|\,de \leqq \mathrm{S}'_{D_m}|f|\,de \leqq A.$$

Posons, d'autre part,

$$\mathrm{S}'_{D_n}|f|\,de = A - \varepsilon_n$$

et désignons par μ_n le maximum de $|f|$ dans D_n.

Désignons par d l'ensemble des points de D_n qui n'appartiennent pas à D; l'aire de cet ensemble sera moindre que $E - D$ et *a fortiori* moindre que δ. Cela posé, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{S}'_{D}|f|\,de &\geqq \mathrm{S}'_{D_n}|f|\,de - \mathrm{S}'_{d}|f|\,de \\ &> A - \varepsilon_n - \mu_n\delta.\end{aligned}$$

En prenant n suffisamment grand, puis δ suffisamment petit, nous pourrons rendre plus petits que toute quantité donnée, d'abord ε_n, puis $\mu_n\delta$. On aura donc

$$\lim_{\delta=0} \mathrm{S}'_{D}|f|\,de = A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

22. Soient enfin E un domaine qui ne soit pas borné; $f(x, y)$ une fonction définie dans ce domaine, laquelle admette, dans tout domaine Δ borné et intérieur à E, une intégrale par excès S_Δ^1, ou une intégrale par défaut S_Δ^2.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est qu'on ait

$$\lim_{D=0} S_D^1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lim_{D=0} S_D^2 = 0$$

pour tout domaine infiniment petit D intérieur à Δ. Et si ces deux conditions sont satisfaites à la fois, elles équivaudront à celle-ci :

$$\lim_{D=0} S_D^1 |f| \, de = 0.$$

Soit R l'écart minimum des points de E non contenus dans Δ à un point fixe, l'origine des coordonnées, si l'on veut. Faisons varier Δ, de telle sorte que R tende vers ∞; si l'intégrale $S_\Delta^1 f \, de$, par exemple, tend vers une limite fixe, cette limite se nommera l'*intégrale par excès* de f dans le domaine E, et se représentera par $S_E^1 f \, de$.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que l'intégrale

$$S_\Delta^1 f \, de$$

tende vers zéro, si l'on fait varier Δ de telle sorte que son écart à l'origine tende vers ∞.

En effet, supposons cette condition remplie. Soient Δ et Δ' deux domaines quelconques contenant tous les points de E dont l'écart à l'origine est $< R$; soient d l'ensemble des points de Δ qui n'appartiennent pas à Δ'; d' celui des points de Δ' qui n'appartiennent pas à Δ; on aura évidemment

$$S_\Delta^1 - S_{\Delta'}^1 = S_d^1 - S_{d'}^1,$$

et les deux termes du second membre tendent vers zéro pour $R = \infty$.

Supposons, au contraire, que cette condition ne soit pas remplie.

On pourra déterminer un nombre ε tel qu'il existe un domaine d, mesurable, borné et parfait dont l'écart à l'origine soit plus grand que toute quantité donnée, et pour lequel l'intégrale $S_d^1 f de$ ait son module $> \varepsilon$.

Cela posé, soient

Δ un domaine quelconque;
R l'écart minimum des points de E qui n'appartiennent pas à Δ à l'origine;
ρ l'écart maximum des points de Δ à cette même origine.

On peut, quels que soient R et ρ, déterminer d de telle sorte que son écart à l'origine surpasse ρ. Cela posé, les intégrales prises dans les deux domaines Δ et $\Delta + d$ différeront de plus de ε, bien que chacun d'eux contienne tous les points de E dont l'écart à l'origine est $<$ R. L'intégrale S_Δ^1 ne peut donc tendre vers une limite déterminée pour $R = \infty$.

Les mêmes raisonnements s'appliquent aux intégrales par défaut.

On peut enfin s'assurer, par des considérations toutes semblables à celles des nos **19** à **21**, que, pour que les intégrales par excès et par défaut soient toutes les deux déterminées, il faut et il suffit que l'intégrale par excès du module de f soit finie.

III. — Changements de variables.

23. Soient x, y et u, v deux couples de variables, liées par les relations

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \varphi_1(u, v).$$

Nous supposerons que pour tous les points (u, v) d'un domaine E : 1° les dérivées partielles de φ, φ_1 restent continues; 2° leur jacobien J reste différent de zéro; 3° à deux points (u, v) distincts correspondent toujours deux points (x, y) également distincts.

A l'ensemble E des points (u, v) correspondra pour les points

(x, y) un ensemble E'; et si (u, v) décrit un ensemble parfait E_1 d'étendue mesurable, et intérieur à E, (x, y) décrira un ensemble parfait E'_1, intérieur à E'.

Soient maintenant (u, v) un point de E_1; $(u+du, v+dv)=(U, V)$ un point infiniment voisin; (x, y) et $(x+\Delta x, y+\Delta y)=(X, Y)$ les points correspondants; on aura

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + R\,du + R_1\,dv\\ &= dx + R\,du + R_1\,dv,\\ \Delta y &= \frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv + R_2\,du + R_3\,dv\\ &= dy + R_2\,du + R_3\,dv,\end{aligned}$$

R, R_1, R_2, R_3 tendant uniformément vers zéro avec du, dv dans tout le domaine E_1. Si donc $|du|$ et $|dv|$ restent au-dessous d'un nombre fixe r convenablement choisi,

$$|R\,du + R_1\,dv| \quad \text{et} \quad |R_2\,du + R_3\,dv|$$

seront moindres que $\varepsilon[|du| + |dv|]$.

Posons

$$ds^2 = du^2 + dv^2, \qquad \Delta\sigma^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \qquad d\sigma^2 = dx^2 + dy^2;$$

$\frac{d\sigma}{ds}$ sera dans E_1 une fonction continue de u, v, du, dv, homogène et de degré zéro par rapport à ces dernières quantités et toujours positive. Elle admettra donc un maximum M et un minimum m tous deux positifs.

D'autre part, $\Delta\sigma - d\sigma$ est au plus égal à la distance des points $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ et $(x+dx, y+dy)$ laquelle est elle-même au plus égale à la somme de ses projections $|R\,du + R_1\,dv|$ et $|R_2\,du + R_3\,dv|$, quantité $< 2\varepsilon[|du| + |dv|] \overline{\overline{<}} 4\varepsilon\,ds$.

Le rapport $\frac{\Delta\sigma}{ds} = \frac{d\sigma}{ds} + \frac{\Delta\sigma - d\sigma}{ds}$ sera donc toujours compris entre les deux nombres fixes $M + 4\varepsilon$ et $m - 4\varepsilon$.

Cela posé, admettons que le point (U, V) décrive un carré Q de côté infiniment petit ρ contenant le point (u, v). Le point

$$(x + dx, y + dy)$$

décrira, comme on sait, un parallélogramme P d'aire $|J|\rho^2$ et dont le périmètre p sera moindre que $(M + 4\varepsilon)4\rho$. Quant au point

$$(X, Y) = (x + \Delta x, y + \Delta y),$$

sa distance au précédent ne pourra surpasser $2\varepsilon[|du| + |dv|]$, quantité dont le maximum est $4\varepsilon\rho$.

Si donc on construit deux nouveaux parallélogrammes P' et P'', l'un intérieur, l'autre extérieur à P et dont les côtés soient distants de ceux de P de la quantité $4\varepsilon\rho$, la région R décrite par le point (X, Y) contiendra P', mais sera contenue dans P''. Or la différence des aires de P' et de P'' est évidemment égale à $2.4\varepsilon\rho.p$ et par suite moindre que $(M + 4\varepsilon)32\varepsilon\rho^2$. Donc l'aire [extérieure ou intérieure (1)] de R est égale à $[|J| + \varepsilon']\rho^2$, ε' étant un infiniment petit, moindre que

$$(M + 4\varepsilon)32\varepsilon.$$

Il résulte de là que le domaine E'_1 décrit par (X, Y) lorsque (U, V) décrit le domaine E_1 est quarrable. En effet, E_1 l'étant, par hypothèse, la somme des aires des carrés Q de côté infiniment petit ρ qui rencontrent sa frontière F sera infiniment petite. A chacun d'eux correspond un parallélogramme P'', d'aire $[|J| + \varepsilon']\rho^2 = [|J| + \varepsilon']Q$. L'ensemble de ces parallélogrammes P'' formera un domaine parfait enveloppant la frontière F' de E'_1 et dont l'aire sera au plus égale à la somme des aires des parallélogrammes P'' (ceux-ci peuvent empiéter les uns sur les autres). En désignant donc par μ le maximum de $|J|$ dans E_1, on

(1) Ces deux aires sont égales, mais nous ne l'avons pas encore établi.

aura évidemment

$$\sum P'' \overline{\gtrless} [\mu + (M + 4\varepsilon) 32\varepsilon] \sum Q,$$

quantité qui tend vers zéro en même temps que $\sum Q$.

24. Soit maintenant $f(x, y)$ une fonction de x, y, bornée dans le domaine E'_1. Posons $f(\varphi, \varphi_1) = F(u, v)$. L'intégrale, soit par excès, soit par défaut, de $f(x, y)$ dans le domaine E'_1 sera égale à l'intégrale correspondante de $F(u, v)|J|$ dans le domaine E_1.

En effet, décomposons le plan des u, v en carrés de côté ρ infiniment petits; soient Q_k l'un de ces carrés intérieur à E_1, R_k l'élément correspondant de E'_1 et considérons, par exemple, les intégrales par excès. Soient M_k le maximum de $F(u, v)|J|$ dans Q_k; M'_k celui de $f(x, y)$ dans R_k. Il nous faut montrer que les deux sommes

$$\sum M_k Q_k, \quad \sum M'_k R_k$$

ont même limite.

Or, soit J_k la valeur de J en un point (u_k, v_k) choisi arbitrairement dans le carré Q_k, on aura, comme nous l'avons vu plus haut,

$$R_k = [\,|J_k| + \varepsilon'_k]Q_k,$$

ε'_k étant moindre que $(M + 4\varepsilon) 32\varepsilon$.

D'autre part, le maximum de $F(u, v) = f(x, y)$ dans Q_k est évidemment M'_k; et celui de $F(u, v)|J|$ est égal à $M'_k \nu_k$, ν étant une quantité intermédiaire entre le maximum N_k et le minimum n_k de $|J|$ dans Q_k. D'ailleurs $|J|$ étant continu dans E_1, on pourra choisir ρ assez petit pour que la différence des quantités N_k, n_k, et *a fortiori* celle des quantités ν_k et $|J_k|$, soit moindre qu'une quantité arbitraire ε''.

Cela posé, on aura

$$\sum M'_k R_k - \sum M_k Q_k,$$

$$\sum [\,|J_k| + \varepsilon'_k]M'_k Q_k - \sum \nu_k M'_k Q_k,$$

$$\sum [\,|J_k| + \varepsilon'_k - \nu_k]M'_k Q_k.$$

Or, si ρ tend vers zéro, $|J_k| - \nu_k$ et ε'_k tendent uniformément vers zéro, $|M'_k|$ reste au-dessous d'une limite fixe; enfin $\sum Q_k$ a pour limite l'aire de E_1. Donc la différence tend bien vers zéro.

Nous avons admis jusqu'à présent que, dans tout l'intérieur de E, les dérivées partielles de φ, φ_1 restent continues, et que leur jacobien n'est pas nul. Supposons maintenant que ces conditions cessent d'être satisfaites en certains points de E, mais que l'ensemble des points de E' qui correspondent à ces points d'exception ait une aire nulle. On pourra, quel que soit δ, déterminer un domaine F' d'aire moindre que δ, et renfermant à son intérieur tous les points de ce dernier ensemble.

Soit G'_1 le domaine obtenu en ôtant de E'_1 tous les points intérieurs à F'. Le théorème sera applicable au domaine G'_1; on aura donc, en désignant par G_1 le domaine décrit par (u, v), lorsque (x, y) décrit G'_1,

$$S_{G'_1} f(x, y)\,dx\,dy = S_{G_1} F(u, v)\,|J|\,du\,dv.$$

Supposons que l'on fasse décroître indéfiniment le domaine F; G_1 et G'_1 tendront respectivement vers E_1 et E'_1; et, si la fonction f est bornée, comme on l'a supposé, dans le domaine E'_1, lui-même borné, le premier membre tendra vers la limite fixe $S_{E'_1} f\,dx\,dy$. Le second membre tendra donc vers la même limite, et l'on aura

$$S_{E'_1} f(x, y)\,dx\,dy = S_{E_1} F(u, v)\,|J|\,du\,dv.$$

Faisons enfin tendre E'_1 vers E_1. Si le premier membre de cette égalité tend vers une limite fixe, qui sera, par définition, $S_{E'} f(x, y)\,dx\,dy$, le second membre tendra de même vers une limite fixe, et l'on aura

$$S_{E'} f(x, y)\,dx\,dy = S_E F(u, v)\,|J|\,du\,dv.$$

En résumé, pour que cette formule de transformation soit applicable, il suffit, comme on le voit :

1° Qu'à chaque point (x, y) corresponde un seul point (u, v), et réciproquement;

2° Que les dérivées de φ, φ_1 soient généralement continues et le jacobien J généralement différent de zéro, l'ensemble des points de E′ qui pourraient faire exception à cette règle ayant une aire nulle;

3° Que l'intégrale à transformer $S_E f(x, y)\,dx\,dy$ ait une valeur finie et déterminée.