JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 5-24.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées;

PAR M. ÉMILE PICARD.

On sait que, dans ses belles et profondes recherches sur les fonctions de plusieurs variables (*Monatsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin*, 1869 et 1878), M. Kronecker s'est occupé de la recherche du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées contenues dans un domaine Δ. Désignons ces n équations par

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0.
\end{gathered}
$$

M. Kronecker a trouvé une intégrale multiple d'ordre $(n-1)$, étendue à la *surface* du domaine, dont la signification est extrêmement remarquable. Cette intégrale représente l'excès du nombre des racines, contenues dans le domaine, pour lesquelles le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est positif, sur le nombre des racines pour lesquelles ce déterminant est négatif.

Le problème de la recherche du nombre *exact* des racines ne semble donc pas résolu par la formule de M. Kronecker (¹). Je me propose de montrer qu'en s'appuyant sur le résultat de l'illustre géomètre, on peut arriver à représenter par une intégrale multiple d'ordre n le nombre cherché des racines; c'est l'objet des pages qu'on va lire. Après avoir rappelé rapidement la formule de M. Kronecker, j'expose le principe général de la méthode que j'applique particulièrement, en développant les calculs, au cas de deux équations.

1. La formule de M. Kronecker se déduit immédiatement d'une propriété élémentaire des fonctions V, continues dans un certain do-

(¹) A la suite des deux Notes que j'ai publiées sur cette question (*Comptes rendus*, 7 septembre et 16 novembre 1891), M. Kronecker m'a fait l'honneur de m'écrire une lettre où il me représente qu'on trouve dans son Mémoire de 1878 la solution de la question. Je ne puis partager l'opinion de l'illustre auteur; il me semble que, dans ce problème, on doit chercher à exprimer le nombre des racines par une formule dont l'application ne nécessite aucune discussion spéciale relative au système particulier des équations $f = 0$ et que les intégrales à effectuer doivent dépendre uniquement, au point de vue des limites, du domaine Δ : c'est ce qui n'a pas lieu dans l'analyse de M. Kronecker, qui partage le domaine Δ en plusieurs autres dépendant des équations particulières que l'on a à étudier. (*Voir* sur ce point une Communication de M. Kronecker, *Comptes rendus*, 28 décembre 1891, et les remarques que j'ai faites à ce sujet.)

maine et satisfaisant à l'équation de Laplace; nous la présenterons de la manière suivante, en prenant d'abord le cas de trois variables. Si la fonction $V(X, Y, Z)$ est uniforme et continue dans un espace limité par une surface S et satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = 0,$$

on a

$$(1) \qquad \int\int \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0,$$

l'intégrale étant étendue à la surface S.

Appliquons cette formule à la fonction

$$V = \frac{1}{r} \qquad (r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}),$$

et transformons-la en faisant le changement de variables

$$\begin{aligned} X &= f(x, y, z), \\ Y &= \varphi(x, y, z), \\ Z &= \psi(x, y, z). \end{aligned}$$

L'intégrale (1) peut s'écrire

$$\int\int \frac{X\, dY\, dZ + Y\, dZ\, dX + Z\, dX\, dY}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour trouver l'élément de l'intégrale transformée, concevons que x, y, z aient été exprimés en fonction de deux paramètres u et v. L'élément $dY\, dZ$ devra être remplacé par

$$\left[\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \frac{D(x, y)}{D(u, v)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(y, z)} \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(z, x)} \frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right] du\, dv,$$

et on a des expressions analogues pour $dZ\, dX$ et $dX\, dY$. En substituant dans l'intégrale, on trouve alors de suite la nouvelle intégrale

$$\iint A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy, \tag{2}$$

où

$$A = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \psi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad B = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad C = \frac{\begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}}{(f^2+\varphi^2+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'après l'égalité (1), l'intégrale (2), étendue à une surface fermée S, sera nulle si, à l'intérieur de S, il n'y a pas de points (x, y, z) pour lesquels f, φ et ψ s'annulent à la fois.

Si, au contraire, les fonctions f, φ, ψ s'annulent à l'intérieur de S, l'intégrale (2) ne sera pas nulle en général. En supposant que les racines du système d'équations

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = 0,$$
$$\psi(x, y, z) = 0$$

soient simples, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul pour les racines considérées, on établit [1] que l'intégrale (2) est égale à

$$4\pi m,$$

[1] On en trouvera la démonstration dans les Mémoires de M. Kronecker; j'en ai donné une démonstration toute différente dans le Tome I de mon *Traité d'Analyse*, p. 123.

m désignant la différence entre le nombre des racines contenues dans S, pour lesquelles le déterminant fonctionnel D est positif et celles pour lesquelles il est négatif.

2. Le résultat précédent se généralise facilement et l'on peut donner la forme suivante au théorème de M. Kronecker pour le cas de n équations. Soient les n équations

$$(3)\qquad \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Formons l'intégrale multiple d'ordre $n-1$,

$$I = \int\int\cdots\int \frac{\Sigma A_i\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n}{(f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2)^{\frac{n}{2}}},$$

étendue à l'extérieur de la *surface* limitant un certain domaine Δ, de l'espace à n dimensions, en posant

$$A_i = \begin{vmatrix} f_1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ f_2 & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{i+1}} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

si n est pair, tandis que A_i est égal au déterminant précédent multiplié par $(-1)^{i-1}$ si n est impair.

Si l'on désigne par S la surface de l'hypersphère de rayon *un* dans l'espace à n dimensions, on aura

$$I = S.m,$$

m représentant la différence entre le nombre des racines du système (3) contenues dans Δ, pour lesquelles le déterminant fonctionnel

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

est positif et celles pour lesquelles il est négatif.

La valeur de S est donnée par la formule

$$S = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 2\frac{2}{3} \cdot \frac{1.3}{2.4}\pi \cdot 2\frac{2.4}{3.5} \cdots$$

En particulier, pour $n = 4$, on aura

$$S = 2\pi^2.$$

5. Tel est le résultat fondamental dû à M. Kronecker. Comme je l'ai dit plus haut, il ne permet pas de trouver le nombre exact des racines du système (3), contenues dans le domaine Δ, puisque le nombre m représente seulement une différence. C'est cette lacune que je me propose de combler, en montrant qu'*on peut représenter par une intégrale définie convenable le nombre exact des racines.*

Considérons, à cet effet, le système des $n+1$ équations

$$(4) \qquad \begin{cases} f_1 = 0, \\ f_2 = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ f_n = 0, \\ zD = 0, \end{cases}$$

aux $n+1$ inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n, z$, en représentant toujours par D le déterminant fonctionnel écrit plus haut.

J'envisage dans l'espace à $n+1$ dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ l'ensemble des valeurs de ces variables correspondant à des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ contenus dans Δ et à des valeurs de z comprises entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ (ε désignant une constante positive arbitraire). Cet ensemble définit un domaine Δ', et le nombre des racines du système (4) correspondant à des points de ce domaine sera précisément le nombre des racines du système (3) contenues dans Δ (nous supposons que toutes les racines considérées sont simples, c'est-à-dire que D ne s'annule pas pour ces racines). Or le déterminant fonctionnel des $n+1$ fonctions formant les premiers membres des équations (4) se réduit à la quantité essentiellement positive

$$D^2.$$

La difficulté relative au signe du déterminant fonctionnel a donc disparu, et l'on pourra, par suite, *représenter par une intégrale multiple d'ordre n le nombre des racines communes aux équations* (3) *contenues dans* Δ.

4. Le principe de la solution étant ainsi indiqué, appliquons-le d'abord au cas d'une seule équation

$$f(x) = 0,$$

dont on veut avoir le nombre des racines comprises entre a et b.

Nous formons les deux équations

$$f(x) = 0,$$
$$yf'(x) = 0,$$

et nous avons à chercher le nombre des racines, communes à ces deux équations, contenues dans le rectangle formé par les droites

$$x = a, \qquad x = b, \qquad y = +\varepsilon, \qquad y = -\varepsilon.$$

Or le nombre des racines communes aux deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad \varphi(x, y) = 0,$$

contenues dans un contour C, est représenté par l'intégrale curviligne

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{f\,d\varphi - \varphi\,df}{f^2 + \varphi^2},$$

prise positivement le long du contour, quand on est assuré que le déterminant fonctionnel ne change pas de signe. Appliquons ici cette formule, on aura de suite, en intégrant le long du rectangle, pour le nombre n des racines

$$n = -\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varepsilon(ff'' - f'^2)}{f^2 + \varepsilon^2 f'^2}\,dx + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'(b)}{f(b)} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'(a)}{f(a)},$$

les *arc tang* étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

L'intégrale qui figure dans le second membre pourrait être calculée: du moins, on a de suite l'intégrale indéfinie qui est

$$\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{\varepsilon f'(x)}{f(x)}\right]$$

et alors on voit bien, *a priori*, que le second membre représente le nombre des racines. Il faut donc garder l'intégrale, telle qu'elle est écrite, et cette formule ne pourrait être intéressante qu'au point de vue pratique : elle permet, en calculant par approximation le second membre, d'avoir la valeur exacte de n.

5. Prenons maintenant le cas de deux équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0;$$

nous aurons à considérer le système des trois équations

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$
$$z\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

Nous allons chercher le nombre des racines de ce système, comprises dans le volume limité par le cylindre ayant pour section droite la courbe C et les deux plans

$$z = -\varepsilon, \qquad z = +\varepsilon.$$

Calculons d'abord la partie de l'intégrale relative à la surface latérale du cylindre. En prenant les notations du n° **1**, elle se réduira à l'intégrale

$$\int\int A\,dy\,dz + B\,dz\,dx.$$

D'une manière générale, on a

$$dy\,dz = d\sigma\cos\alpha, \qquad dz\,dx = d\sigma\cos\beta,$$

$d\sigma$ désignant l'élément positif de la surface, α et β les angles que fait avec les axes la normale extérieure à la surface. Ici nous pouvons prendre pour α et β les angles que fait la normale extérieure à la courbe C avec les axes Ox et Oy et

$$d\sigma = ds.dz,$$

ds étant l'élément d'arc de C, et dz étant positif. Nous aurons donc, pour l'intégrale précédente,

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\int(A\cos\alpha + B\cos\beta)\,ds\,dz;$$

mais, sur la courbe C,

$$dx = -\,ds\cos\beta,$$
$$dy = +\,ds\cos\alpha.$$

Nous pouvons, par suite, écrire l'intégrale sous la forme

$$\int_{\varepsilon}^{+\varepsilon}\int(A\,dy - B\,dx)\,dz;$$

or on a

$$A = \frac{\left(f\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)D}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left(D = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right),$$
$$B = -\frac{\left(f\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)D}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

Il en résulte que, dans l'évaluation du nombre des racines, la portion de l'intégrale double provenant de la surface latérale du cylindre se réduit à l'intégrale curviligne, prise positivement le long du contour C

$$(\alpha) \qquad \int P\,dx + Q\,dy,$$

où

$$P = \frac{1}{4\pi}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial f}{\partial x}\right)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{D\,dz}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$Q = \frac{1}{4\pi}\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial f}{\partial y}\right)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{D\,dz}{(f^2+\varphi^2+D^2z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale qui figure dans P et Q peut s'obtenir immédiatement; on trouve ainsi

$$P = \frac{1}{2\pi}\,\frac{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}}{f^2+\varphi^2}\,\frac{D\varepsilon}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Q = \frac{1}{2\pi}\,\frac{f\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\dfrac{\partial f}{\partial y}}{f^2+\varphi^2}\,\frac{D\varepsilon}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Passons à la portion de l'intégrale rélative aux deux premiers plans de base du cylindre. Ils donneront l'intégrale double étendue à l'aire limitée par le contour C

$$(\beta) \qquad \frac{\varepsilon}{2\pi}\int\int\frac{R\,dx\,dy}{(f^2+\varphi^2+D^2\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}},$$

en écrivant

$$R = \begin{vmatrix} f & \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \varphi & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ D & \dfrac{\partial D}{\partial x} & \dfrac{\partial D}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

La somme des intégrales (α) *et* (β) *donne le nombre cherché des* *racines communes aux deux équations*

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$

contenues dans le contour C.

On voit que le champ d'intégration dans ces deux intégrales ne dépend que du contour C.

6. Le résultat précédent dépend en apparence du nombre ε. Les deux cas limites $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = \infty$ appellent nécessairement l'attention.

Faisons tendre d'abord ε vers zéro, l'intégrale (α) tendra vers zéro. Quant à l'intégrale (β), elle se présente sous une forme indéterminée qui rappelle entièrement ce que nous avons trouvé pour le cas d'une seule équation (n° **4**); nous pouvons dire que le nombre cherché est la limite de l'expression

$$\frac{1}{2\pi} \int \int \frac{\varepsilon R \, dx \, dy}{(f^2 + \varphi^2 + D^2 \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$$

quand ε tend vers zéro. Il est clair que pour $\varepsilon = 0$ tous les éléments de l'intégrale sont nuls, sauf celui qui correspond à une racine commune aux deux équations $f = 0$, $\varphi = 0$, et c'est de là que provient la forme indéterminée. Nous chercherons tout à l'heure comment on pourrait calculer cette limite pour quelques contours particuliers et en supposant que f et φ soient des polynômes.

Faisons maintenant augmenter indéfiniment ε dans les intégrales (α) et (β). On voit immédiatement que la première tend vers

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{D}{|D|} \frac{f \, d\varphi - \varphi \, df}{f^2 + \varphi^2},$$

$|D|$ désignant la valeur absolue de D.

Cette intégrale est à rapprocher de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f \, d\varphi - d\varphi f}{f^2 + \varphi^2},$$

faisant connaître la différence entre le nombre des racines contenues dans C, pour lesquelles le déterminant fonctionnel D est positif, et celles pour lesquelles il est négatif. Les éléments de ces deux intégrales ne peuvent que différer par le signe sur certaines parties du contour.

Quant à l'intégrale (β), elle se réduit, en posant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\eta_1}}$, à

$$\frac{1}{4\pi}\int\int\frac{\eta_1 \mathrm{R}\, dx\, dy}{[\mathrm{D}^2+\eta_1(f^2+\varphi^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

dont on doit chercher la limite pour $\eta_1 = 0$. Il y aura ici, pour $\eta_1 = 0$, une suite d'éléments indéterminés correspondant aux valeurs de x et y, pour lesquelles

$$\mathrm{D} = 0.$$

Si D ne s'annule pas à l'intérieur de C, cette limite est nulle et l'on n'a qu'à prendre l'intégrale curviligne, ce qui est d'accord avec le résultat dont nous avons fait usage au n° **4**.

7. Appliquons les considérations précédentes au cas où le contour considéré se réduit à un carré dont les côtés peuvent être supposés parallèles aux axes et où les deux fonctions $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ sont des polynômes. On peut, dans ce cas, écrire les deux équations simultanées

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0$$

sous la forme

$$f(x) = 0,$$
$$y - \mathrm{F}(x) = 0,$$

$f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ représentant deux polynômes, puisqu'on suppose qu'il n'y a que des racines simples. Le polynôme $f(x)$ n'aura aussi que des racines simples.

Il s'agit de trouver le nombre des racines (x, y) communes à ces deux équations, pour lesquelles

$$a < x < b,$$
$$c < y < d.$$

On suppose qu'aucune des racines des deux équations ne se trouve sur une des droites limites.

Le déterminant fonctionnel D se réduit ici à $f'(x)$, et l'on a

$$R = f'^2 - ff''.$$

Nous devons donc considérer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\varepsilon(f'^2-ff'')\,dx\,dy}{[(y-F)^2+f^2+\varepsilon^2 f'^2]^{\frac{3}{2}}},$$

étendue à l'aire du rectangle, et faire tendre ε vers zéro.

En effectuant l'intégration par rapport à y, cette intégrale devient

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\int_a^b\frac{\varepsilon(d-F)(f'^2-ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)[(d-F)^2+f^2+\varepsilon^2 f'^2]^{\frac{1}{2}}}-\int_a^b\frac{\varepsilon(c-F)(f'^2-ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)[(c-F)^2+f^2+\varepsilon^2 f'^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Quand ε tend vers zéro, les seuls éléments de l'intégrale

$$\int_a^b\frac{\varepsilon(d-F)(f'^2-ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)[(d-F)^2+f^2+\varepsilon^2 f'^2]^{\frac{1}{2}}}$$

ne tendant pas vers zéro sont ceux qui correspondent aux valeurs de x racines de $f(x)$. Au lieu de l'intégrale précédente, nous pouvons donc nous borner à la suivante $\left(\text{en développant } \frac{1}{\sqrt{(d-F)^2+f^2+\varepsilon^2 f'^2}} \text{ par la formule de Taylor}\right)$,

$$\int_a^b\frac{d-F}{|d-F|}\,\frac{\varepsilon(f'^2-ff'')\,dx}{(f^2+\varepsilon^2 f'^2)},$$

ce qui nous conduit, pour $\varepsilon = 0$, à

$$-\pi I_a^b\frac{(d-F)f'}{f},$$

I_a^b désignant l'indice entre a et b, au sens de Cauchy ([1]), de la fonction

([1]) L'indice $I_a^b F(x)$ d'une fonction rationnelle $F(x)$ est l'excès du nombre de fois que $F(x)$ passe de $+\infty$ à $-\infty$ sur le nombre de fois qu'elle passe de $-\infty$ à $+\infty$, quand x varie d'une manière continue de a à b. On sait que Cauchy a donné un procédé régulier de calcul pour trouver ce nombre, procédé basé sur une série d'opérations analogues à celles du théorème de Sturm.

rationnelle $\frac{(d-\mathrm{F})f'}{f}$; et l'on aura, par conséquent, pour le nombre des racines,

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_a^b\frac{(c-\mathrm{F})f'}{f}-\mathrm{I}_a^b\frac{(d-\mathrm{F})f'}{f}\right],$$

Ce résultat est facile à vérifier directement. Quand x, en croissant, passe par une racine de $f(x)$, le quotient

$$\frac{(c-\mathrm{F})f'}{f}$$

passe de $+\infty$ à $-\infty$ si $c-\mathrm{F}$ est négatif, c'est-à-dire si le point (x, y) est au-dessus de la droite $y=c$. De même, ce quotient passera de $-\infty$ à $+\infty$ si le point correspondant (x, y) est au-dessous de la droite $y=c$. En désignant donc par n et n' le nombre des racines de nos deux équations (comprises entre les droites $x=a$, $x=b$), situées respectivement au-dessus et au-dessous de la droite $y=c$, on a

$$\mathrm{I}_a^b\frac{(c-\mathrm{F})f'}{f}=n-n';$$

en remplaçant c par d et désignant par N et N' les nombres correspondants, on a

$$\mathrm{I}_a^b\frac{(d-\mathrm{F})f'}{f}=\mathrm{N}-\mathrm{N}'.$$

Or, si nous désignons par ν le nombre des racines comprises dans le rectangle, on a

$$n=\nu+\mathrm{N},$$

$$\mathrm{N}'=\nu+n';$$

donc

$$n-n'-(\mathrm{N}-\mathrm{N}')=2\nu.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_a^b\frac{(c-\mathrm{F})f'}{f}-\mathrm{I}_a^b\frac{(d-\mathrm{F})f'}{f}\right]=\nu;$$

c'est le résultat que nous voulions vérifier [1].

---

[1] Le cas du rectangle avait été déjà traité, sous une tout autre forme, par M. Hermite dans une Communication faite à l'Académie [*Remarques sur le théorème de M. Sturm* (*Comptes rendus*, t. XXXVI, p. 294)].

8. D'une manière plus générale on peut indiquer une marche régulière de calcul pour trouver la limite de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int\int\frac{\varepsilon(f'^2-ff'')\,dx\,dy}{[(y-F)^2+f^2+\varepsilon^2f'^2]^{\frac{3}{2}}},$$

quand le contour est formé de segments de courbes unicursales. Cette intégrale double est, en effet, égale à l'intégrale curviligne

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C\frac{\varepsilon(f'^2-ff'')(y-F)\,dx}{(f^2+\varepsilon^2f'^2)[(y-F)^2+f^2+\varepsilon^2f'^2]^{\frac{1}{2}}},$$

prise dans le sens positif le long du contour C.

Partageons cette intégrale en différentes parties correspondant aux différents segments de courbes unicursales qui, par hypothèse, forment le contour C. Soit l'un d'eux correspondant aux valeurs t_0 et t_1 du paramètre t dont sont fonctions rationnelles x et y. La valeur correspondante de l'intégrale sera, pour $\varepsilon = 0$, en raisonnant comme au numéro précédent,

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{I}_{t_0}^{t_1}\frac{(y-F)f'}{f}.$$

Le quotient $\frac{(y-F)f'}{f}$ sera une fonction rationnelle de t, et l'on n'aura qu'à en prendre l'indice de t_0 à t_1. En additionnant tous les résultats ainsi obtenus, on aura le nombre cherché.

9. Passons maintenant au cas de trois équations. Quand on a les quatre équations

$$f(x, y, z, t) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z, t) = 0,$$
$$\psi(x, y, z, t) = 0,$$
$$\chi(x, y, z, t) = 0$$

et que le déterminant fonctionnel relatif à ces quatre fonctions ne change pas de signe à l'intérieur du domaine, le nombre des racines est donné par l'intégrale

$$u = \frac{1}{2\pi^2}\int\int\int \frac{A\,dy\,dz\,dt + B\,dz\,dt\,dx + C\,dt\,dx\,dy + D\,dx\,dy\,dz}{(f^2+\varphi^2+\psi^2+\chi^2)^2},$$

où

$$A = \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial t} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} & \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ \chi & \frac{\partial \chi}{\partial y} & \frac{\partial \chi}{\partial z} & \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{vmatrix},$$

B, C, D s'en déduisant par une permutation circulaire de x, y, z, t.

Ceci posé, nous avons ici les quatre équations

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 0, \\ \varphi(x, y, z) &= 0, \\ \psi(x, y, z) &= 0, \\ t\mathrm{D} &= 0. \end{aligned} \qquad \mathrm{D} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Nous pourrions donner, comme pour le cas de deux variables, la formule générale avec le nombre arbitraire ε; mais, les formules étant un peu longues à écrire, bornons-nous au terme qui ne tendra pas vers zéro avec ε. Ce sera

$$\frac{1}{\pi^2}\int\int\int \frac{\varepsilon \mathrm{R}\,dx\,dy\,dz}{(f^2+\varphi^2+\psi^2+\varepsilon^2\mathrm{D}^2)^2},$$

en posant

$$\mathrm{R} = \begin{vmatrix} f & \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \varphi & \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \psi & \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} & \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \mathrm{D} & \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial y} & \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Développons les calculs dans le cas où le volume se réduira à un parallélépipède parallèle aux axes, c'est-à-dire où le domaine Δ est défini par les inégalités

$$\begin{gathered} a < x < b, \\ a' < y < b', \\ a'' < z < b'' \end{gathered}$$

et en supposant que f, φ, ψ se réduisent à des polynômes.

On admet qu'aucune des racines des trois équations ne se trouve sur un des plans limites.

On peut mettre les trois équations sous la forme

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ y - \mathrm{F}(x) &= 0, \\ z - \Phi(x) &= 0, \end{aligned}$$

f, F et Φ désignant des polynômes en x.

On a

$$\mathrm{D} = f', \qquad \mathrm{R} = ff'' - f'^2.$$

Il faut donc calculer l'intégrale triple

$$\frac{1}{\pi^2}\int_a^b\int_{a'}^{b'}\int_{a''}^{b''}\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)\,dx\,dy\,dz}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2+(z-\Phi)^2]^2}.$$

En intégrant d'abord par rapport à z et laissant de côté $\frac{1}{\pi^2}$, on a

$$(\gamma)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2]} \\ &\times\left\{\frac{b''-\Phi}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2+(b''-\Phi)^2]}-\frac{a''-\Phi}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2+(a''-\Phi)^2]}\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$(\delta)\quad \left\{\begin{aligned} &+\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &\times\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{b''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2}}-\operatorname{arc\,tang}\frac{a''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2}}\right]. \end{aligned}\right.$$

Il faut effectuer l'intégration par rapport à y; on a alors deux types différents d'intégrales.

Prenant dans la ligne (γ) l'expression

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)(b''-\Phi)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2][f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2+(b''-\Phi)^2]},$$

nous aurons, en la décomposant, deux termes. Le seul qui soit à discuter, quand on fera $\varepsilon = 0$, est le terme

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(b''-\Phi)[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-\mathrm{F})^2]}$$

qui, intégré entre a' et b', par rapport à y, donne

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(b''-\Phi)(f^2+\varepsilon^2 f'^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{b'-\mathrm{F}}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}}-\operatorname{arc\,tang}\frac{a'-\mathrm{F}}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}}\right].$$

Nous avons maintenant à intégrer cette expression par rapport à x, en nous bornant, d'ailleurs, à des petits intervalles autour de chaque racine de $f(x)=0$ (on remarquera que, d'après l'hypothèse faite, $b''-\Phi$ n'est pas nul pour ces racines); pour tout autre intervalle l'intégrale est évidemment nulle quand on fait $\varepsilon = 0$.

Or l'élément précédent peut s'écrire

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}}\,\mathrm{A}(x),$$

A étant une fonction de x qui reste finie pour $x=\alpha$ [α étant une racine de $f(x)$], et pour $\varepsilon = 0$. Écrivons l'intégrale à effectuer sous la forme

$$\int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta}\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{f^2+\varepsilon^2 f'^2}\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2}\,\mathrm{A}\,dx;$$

le premier facteur est

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'}{f}\right),$$

et il est négatif de $\alpha-\eta$ à $\alpha+\eta$; on peut donc écrire, en appliquant le théorème de la moyenne, l'intégrale sous la forme

$$\sqrt{f^2(\xi)+\varepsilon^2 f'^2(\xi)}\,A(\xi)\int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} d\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'}{f}\right),$$

ξ étant compris entre $\alpha-\eta$ et $\alpha+\eta$, c'est-à-dire

$$\sqrt{f^2(\xi)+\varepsilon^2 f'^2(\xi)}\,A(\xi)\left[-\pi+\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'(\alpha+\eta)}{f(\alpha+\eta)}-\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'(\alpha-\eta)}{f(\alpha-\eta)}\right];$$

par suite, pour $\varepsilon=0$, l'intégrale sera très petite, et, comme on peut prendre η aussi petit qu'on veut, la limite de l'intégrale correspondant à la ligne γ sera nulle.

Nous n'avons donc qu'à considérer la seconde ligne; prenons le terme

$$\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2]^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{b''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2}}.$$

Il faut d'abord effectuer l'intégration, par rapport à y, entre a' et b'. En intégrant par parties, on aura comme premier terme

$$(5)\qquad \frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(f^2+\varepsilon^2 f'^2)}\left[\frac{y-F}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2]^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arc\,tang}\frac{b''-\Phi}{[f^2+\varepsilon^2 f'^2+(y-F)^2]^{\frac{1}{2}}}\right]_{a'}^{b'},$$

et le second terme sera, en se bornant à écrire les termes qui ne se réduiront pas à zéro à la limite,

$$(6)\qquad \frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(f^2+\varepsilon^2 f'^2)}\,\frac{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}{b''-\Phi}\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{y-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}\right]_{a'}^{b'},$$

Nous devons maintenant faire la somme des expressions (5) et (6), intégrer par rapport à x entre a et b, et chercher la limite pour $\varepsilon=0$.

Les termes correspondants à $y=b'$ donneront

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon(ff''-f'^2)}{2(f^2+\varepsilon^2 f'^2)}\Bigg[&\frac{b'-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b'-F)^2}}\operatorname{arc\,tang}\frac{b''-\Phi}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b'-F)^2}}\\ &+\frac{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}{b''-\Phi}\operatorname{arc\,tang}\frac{b'-F}{\sqrt{f^2+\varepsilon^2 f'^2+(b''-\Phi)^2}}\Bigg].\end{aligned}$$

Or, pour $\varepsilon = 0$ et une valeur de x' annulant $f(x)$, la quantité entre crochets est égale à $+\frac{\pi}{2}$ si le produit

$$(b' - F)(b'' - \Phi)$$

est positif pour cette valeur de x, et à $-\frac{\pi}{2}$ si ce produit est négatif. On en conclut de suite que l'expression précédente, intégrée entre a et b, donnera pour $\varepsilon = 0$,

$$\frac{\pi^2}{2}\int_a^b \frac{(b' - F)(b'' - \Phi)f'}{f},$$

et le terme correspondant dans l'intégrale qui donne le nombre cherché des racines sera, par suite,

$$\frac{1}{2}\int_a^b \frac{(b' - F)(b'' - F)f'}{f}.$$

On aura des expressions analogues provenant des autres termes de l'intégrale, et, par conséquent, nous pouvons ici, comme dans le cas de deux variables, trouver le nombre des racines en effectuant simplement des recherches d'indices.