JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

GUSTAF KOBB

Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 385-419.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__385_0>

Sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables;

PAR M. GUSTAF KOBB, A STOCKHOLM.

Dans son célèbre Mémoire *Recherches sur les fonctions algébriques* (¹), Puiseux a le premier étudié les points singuliers des courbes algébriques. Plus tard, M. Weierstrass, dans ses *Leçons sur la théorie des fonctions algébriques et des fonctions abéliennes*, a donné une nouvelle théorie des fonctions algébriques d'une seule variable, qui est extrêmement élégante.

L'objet de ce Mémoire sera, en suivant une méthode analogue à celle de M. Weierstrass, d'étudier les points singuliers des fonctions algébriques de deux variables et, en particulier, de donner la représentation analytique de la fonction dans le voisinage de ces points.

Soit

$$f(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une surface algébrique; nous nous proposons de représenter toutes les valeurs de x, y, z qui sont situées dans le voisinage d'un point arbitraire (a, b, c) de la surface par des séries, procédant suivant des puissances entières et positives de deux variables auxiliaires.

(¹) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, t. XV.

Posons d'abord

$$x = u + a, \qquad y = v + b, \qquad z = w + c,$$

on aura

$$f(x, y, z) = Au + Bv + Cw + (u, v, w)_2 + \ldots.$$

où

$$(u, v, w)_\mu$$

contient les termes d'ordre μ. Si tous les coefficients A, B, C ne sont pas nuls, nous pouvons choisir deux fonctions linéaires et homogènes de u, v, w

$$s = \alpha\, u + \beta\, v + \gamma\, w,$$
$$t = \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w,$$

telles que le déterminant

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Considérons alors le système

$$\begin{aligned} 0 &= Au + Bv + Cw + (u, v, w)_2 + \ldots, \\ s &= \alpha u + \beta v + \gamma w, \\ t &= \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w. \end{aligned}$$

Le déterminant des termes linéaires de ce système n'étant pas zéro, toutes les valeurs de u, v, w dans le voisinage du point (0, 0, 0) sont données par les formules

$$\begin{aligned} u &= p_1(s, t), \\ v &= p_2(s, t), \\ w &= p_3(s, t), \end{aligned}$$

où $p_1(s, t)$, $p_2(s, t)$, $p_3(s, t)$ sont des séries entières de s et t qui s'annulent en même temps que les variables elles-mêmes ([1]).

([1]) Nous entendons toujours, dans la suite, par $p(\sigma, \tau)$ une série de cette forme.

En revenant aux variables x, y, z, nous aurons, par conséquent, toutes les valeurs de x, y, z dans le voisinage du point (a, b, c) de la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

par le système

$$x = a + p_1(s, t), \qquad y = b + p_2(s, t), \qquad z = c + p_3(s, t).$$

La question est beaucoup plus difficile si les trois coefficients A, B, C s'annulent, c'est-à-dire, si le point (a, b, c) est un point multiple de la surface.

Soit

$$f(x, y, z) = F(u, v, w) = (u, v, w)_m + (u, v, w)_{m+1} + \ldots.$$

L'équation $F(u, v, w) = 0$ commence par des termes d'ordre m,

$$m \geqq 2.$$

Posons ensuite

$$(3) \qquad \begin{cases} u = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta, \\ v = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \\ w = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{cases}$$

où les coefficients α, β, γ sont seulement assujettis à la condition de ne pas annuler le déterminant

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Alors

$$F(u, v, w) = \Phi(\xi, \eta, \zeta),$$
$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = (\xi, \eta, \zeta)_m + (\xi, \eta, \zeta)_{m+1} + \ldots.$$

Les deux surfaces $F(u, v, w) = 0$ et $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ se correspondent point par point. A un point de la surface $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ ne correspond qu'un seul point de la surface $F(u, v, w) = 0$ et *vice versa*. Au lieu de considérer la surface $F(u, v, w) = 0$ au voisinage du point $(0, 0, 0)$, nous pouvons considérer la surface $\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ au voisinage du même point.

Substituons maintenant

$$(5) \qquad \xi = \tau\zeta, \qquad \eta = \sigma\zeta,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \zeta^m[(\tau, \sigma, 1)_m + \zeta(\tau, \sigma, 1)_{m+1} + \ldots] \\ &= \zeta^m[\varphi(\tau, \sigma) + \zeta\chi(\tau, \sigma) + \ldots],\end{aligned}$$

où

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

est une courbe algébrique d'ordre m. Supposons d'abord qu'elle soit irréductible, et soit $(\overline{a}, \overline{b})$ un point régulier de la courbe. Posons

$$\tau = \tau_1 + \overline{a}, \qquad \sigma = \sigma_1 + \overline{b}.$$

Alors

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \zeta^m\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = \zeta^m\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0,$$

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = A\tau_1 + B\sigma_1 + C\zeta + (\tau_1, \sigma_1, \zeta)_2 + \ldots,$$

$$A \gtrless 0;$$

d'où suit

$$(6) \qquad \tau_1 = p(\sigma_1, \zeta).$$

Cette série nous donne tout le domaine du point $(0, 0, 0)$ de la surface algébrique

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0,$$

et, par conséquent, d'après (5) et (3), au moins une partie du domaine du point $(0, 0, 0)$ de la surface

$$F(u, v, w) = 0,$$

ou du point (a, b, c) de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

En prenant un autre point régulier $(\overline{a}_1, \overline{b}_1)$ de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

nous obtenons une autre série de la forme (6), qui nous donne une autre partie du domaine du point (0, 0, 0) de la surface

$$F(u, v, w) = 0.$$

Il faut, maintenant, chercher les rayons de convergence de la série (6)

$$\tau_1 = p(\sigma_1, \zeta).$$

Supposons qu'elle converge pour

$$|\sigma_1| < \delta_1, \qquad |\zeta| < \delta,$$

et choisissons une valeur $\overline{b}_1$ telle que

$$|\overline{b}_1 - \overline{b}| < \delta_1.$$

Alors le point

$$\sigma_1 = \overline{b}_1 - \overline{b}, \qquad \zeta = 0$$

appartient au domaine de convergence de la série (6). D'autre part, si $\overline{b}_1$ a été choisi de telle sorte que l'équation

$$\varphi(\tau, \overline{b}_1) = 0$$

a m racines distinctes $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_m$, nous aurons

$$\Phi(\tau - \overline{a}_\lambda, \sigma - \overline{b}_1, \zeta) = A_\lambda(\tau - \overline{a}_\lambda) + B_\lambda(\sigma - \overline{b}_1) + C_\lambda\zeta + (\ldots)_2 + \ldots,$$
$$A_\lambda \gtrless 0,$$

et, par conséquent,

$$(7) \qquad \tau - \overline{a}_\lambda = p_\lambda(\sigma - \overline{b}_1, \zeta)$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous pouvons, évidemment, toujours supposer que l'équation

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

contienne les termes τ^m et σ^m, car dans l'autre cas il suffirait d'introduire de nouvelles variables par une substitution linéaire et homogène, c'est-à-dire, faire un nouveau choix de coefficients de la substitution (3).

Les séries (7) nous donnent toutes les valeurs de τ au voisinage de

$$\sigma = \bar{b}_1, \qquad \zeta = 0,$$

mais une partie de ses valeurs sont aussi données par la série (6)

$$\tau_1 = p(\sigma_1, \zeta) = p(\sigma - \bar{b}, \zeta).$$

Par conséquent, une des séries (7) doit être identique avec la série (6) pour tous les points de leur domaine de convergence commun. Mais alors, d'après la terminologie de M. Weierstrass, cette série est la continuation analytique de la série (6) au point

$$\sigma = \bar{b}_1, \qquad \zeta = 0.$$

Ainsi, pour chaque point $(\bar{b}_1, 0)$,

$$|\bar{b}_1 - \bar{b}| \leqq \delta_1,$$

où l'on n'a pas en même temps

$$(8) \qquad \varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0,$$

il existe une continuation analytique. Il s'ensuit que, pour des valeurs assez petites de ζ, la série (6) converge, si δ_1 est au plus égal à la distance du point $\bar{b}$ au point le plus prochain, pour lequel les équations (8) sont satisfaites. Mais alors δ_1 est égal au rayon de convergence de la série

$$\tau - \bar{a} = \bar{p}(\sigma - \bar{b}),$$

qui représente le domaine du point $(\bar{a}, \bar{b})$ de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0.$$

Cette valeur de δ_1 n'est pourtant qu'une limite supérieure, et il peut se présenter que le rayon de convergence correspondant en ζ tende vers zéro. Mais, évidemment, nous n'avons pas besoin de prendre pour δ_1 la valeur extrême et alors nous sommes toujours certain d'obtenir un rayon de convergence, en ζ, qui n'est pas nul.

Supposons, maintenant, que $(\overline{a}_1, \overline{b}_1)$ soit un point critique de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

pour lequel on a

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}\varphi(\tau, \sigma) &= (\tau - \overline{a}_1, \sigma - \overline{b}_1)_\mu + (\tau - \overline{a}_1, \sigma - \overline{b}_1)_{\mu+1} + \ldots \\ &= (\tau_1, \sigma_1)_\mu + (\tau_1, \sigma_1)_{\mu+1} + \ldots,\end{aligned}$$

en posant

$$\tau - \overline{a}_1 = \tau_1, \qquad \sigma - \overline{b}_1 = \sigma_1.$$

La courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

étant irréductible, on a, certainement,

$$\mu < m.$$

On peut supposer que

$$(\tau_1, \sigma_1)_\mu$$

contient le terme τ_1^μ.

Ensuite, on aura

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = \zeta^m \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = \zeta^m \overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta),$$

$$(10) \qquad \overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = (\tau_1, \sigma_1, \zeta)_{\mu_1} + (\tau_1, \sigma_1, \zeta)_{\mu_1+1} + \ldots$$

où

$$\mu_1 \leqq \mu < m.$$

Ainsi, nous avons ramené l'étude du point multiple $(0, 0, 0)$ d'ordre m de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

à l'étude du point multiple (o, o, o) de la surface

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0,$$

mais, dans la dernière, le point multiple est d'un ordre moins élevé.

A chaque point du domaine du point (o, o, o) de la dernière surface correspond un seul point du domaine du point (o, o, o) de la première, mais pas inversement. En effet, d'après le théorème fondamental de M. Weierstrass, on a

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = [\tau_1^\mu + \overline{p}_1(\sigma_1, \zeta)\tau_1^{\mu-1} + \dots \\ + \overline{p}_{\mu-1}(\sigma_1, \zeta)\tau_1 + \overline{p}_\mu(\sigma_1, \zeta)]\overline{G}(\tau_1, \sigma_1, \zeta) \end{aligned} \right.$$

où

$$\overline{G}(0, 0, 0) \lessgtr 0;$$

mais

$$(12)\quad \Phi(\xi, \eta, \zeta) = [\xi^m + p_1(\eta, \zeta)\xi^{m-1} + \dots + p_m(\eta, \zeta)]G(\xi, \eta, \zeta)$$

$$G(0, 0, 0) \gtrless 0.$$

A un système de σ_1 et ζ correspond un seul système de η et ζ, mais le dernier nous donne m valeurs de ξ et le premier seulement μ valeurs de τ_1, dont chacune correspond à une seule valeur de ξ. Ainsi le domaine du point (o, o, o) de la surface

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = 0$$

ne nous donne, par conséquent, qu'une partie du domaine du point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Pour trouver le domaine de convergence des séries

$$\overline{p}_1(\sigma_1, \zeta), \quad \overline{p}_2(\sigma_1, \zeta), \quad \dots, \quad \overline{p}_\mu(\sigma_1, \zeta)$$

de la formule (11), nous procédons d'une manière analogue qu'auparavant. Elles convergent pour

$$|\sigma_1| < \delta_1, \qquad |\zeta| < \delta.$$

Soit $\bar{b}_2$ une valeur de σ, telle que

$$|\bar{b}_2 - \bar{b}_1| < \delta_1,$$

et que l'équation

$$\varphi(\tau, \bar{b}_2) = 0,$$

ait m racines distinctes

$$a_2^{(1)}, \quad a_2^{(2)}, \quad a_2^{(m)}.$$

Alors on a

$$\bar{\Phi}(\tau - a_2^{(\lambda)}, \sigma - \bar{b}_2, \zeta) = A_\lambda(\tau - a_2^{(\lambda)}) + B_\lambda(\sigma - \bar{b}_2) + \ldots$$

et

$$\tau - a_2^{(\lambda)} = p_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots m),$$

ou

$$\tau = \tau_1 + \bar{a}_2,$$

$$\tau_1 = a_2^\lambda - \bar{a}_2 + p_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta) \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(13) \qquad \tau_1 = P_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta).$$

Ces séries nous donnent toutes les valeurs de τ_1 au voisinage du point

$$\sigma = \bar{b}_2, \qquad \zeta = 0;$$

mais μ de ses valeurs sont aussi données par la formule (11),

$$(14) \quad \tau_1^\mu + \bar{p}_1(\sigma_1, \zeta)\tau_1^{\mu-1} + \ldots + \bar{p}_{\mu-1}(\sigma_1, \zeta)\tau_1 + \bar{p}_\mu(\sigma_1, \zeta) = 0.$$

Supposons que

$$\tau_1 = P_\lambda(\sigma - \bar{b}_2, \zeta); \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \mu)$$

soient ces valeurs et formons le produit

$$(15) \left\{ \begin{aligned} &\prod_{\nu=1}^{\mu} [\tau_1 - P_\nu(\sigma - \bar{b}_2, \zeta)] \\ &\qquad = \tau_1^\mu + \bar{P}_1(\sigma - \bar{b}_2, \zeta)\tau_1^{\mu-1} + \ldots + \bar{P}_\mu(\sigma - \bar{b}_2, \zeta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les équations (14) et (15) ayant les mêmes racines, leurs coefficients doivent être identiques; ainsi

$$\bar{p}_\nu(\sigma_1, \zeta) = \bar{P}_\nu(\sigma - \bar{b}_2, \zeta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots \mu)$$

pour leur domaine de convergence commun. Par conséquent,

$$\bar{P}_\nu(\sigma - \bar{b}_2, \zeta)$$

est la continuation analytique de la série

$$\bar{p}_\nu(\sigma_1 \zeta) \qquad \sigma = \sigma_1 + \bar{b}_1$$

au point

$$\sigma = \bar{b}_2, \qquad \zeta = 0.$$

Il s'ensuit que, pour des valeurs assez petites de ζ, les séries

$$\bar{p}_\nu(\sigma_1, \zeta)$$

convergent, si δ_1 est au plus égal à la distance du point $\bar{b}_1$ au point le plus prochain, où les deux équations

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0$$

sont satisfaites. Mais c'est justement le rayon de convergence des séries qui forment les coefficients de l'équation

$$\tau_1^\mu + p_1(\sigma_1)\tau_1^{\mu-1} + \ldots + p_{\mu-1}(\sigma_1)\tau_1 + p_\mu(\sigma_1) = 0$$

qui nous donne les μ valeurs de τ de l'équation

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

qui se confondent pour

$$\sigma = \bar{b}_1 \qquad \text{ou} \qquad \sigma_1 = 0.$$

Il nous reste à étudier les points de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

qui sont situés à une distance infinie. Nous pouvons toujours supposer que tous ces points soient de la forme

$$(\infty, \infty),$$

et, de plus, que le quotient

$$\lim_{\sigma=\infty}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)$$

tend vers m valeurs finies distinctes

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_m.$$

En effet, si la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

n'a pas cette propriété, il suffit de faire une transformation homographique; mais cela revient à faire un nouveau choix de coefficients dans la substitution (3).

Nous avons

$$\begin{aligned}\zeta^{-m}\Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \varphi(\tau, \sigma)_m + \zeta\chi_1(\tau, \sigma)_{m+1} + \zeta^2\chi_2(\tau, \sigma)_{m+2} + \ldots \\ &= \sigma^m\left[\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)_m + \zeta\sigma\chi_1\left(\frac{\tau}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)_{m+1} + (\zeta, \sigma)^2\chi_2\left(\frac{\tau}{\sigma}, \frac{1}{\sigma}\right)_{m+2} + \ldots\right.\end{aligned}$$

ou, en posant,

$$\frac{\tau}{\sigma} = \tau_1; \qquad \frac{1}{\sigma} = \sigma_1; \qquad \zeta\sigma = \eta;$$

le second membre devient

$$\sigma^m\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \eta) = 0.$$

Mais le point

$$\sigma_1 = 0, \qquad \tau_1 = c_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

est un point régulier; ainsi

$$\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta) = A_\lambda(\tau_1 - c_\lambda) + B_\lambda\sigma_1 + C_\lambda\eta + \ldots,$$
$$A_\lambda \gtrless 0$$

et

(16) $$\tau_1 - c_\lambda = p_\lambda(\sigma_1, \eta) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m).$$

Par conséquent, le domaine du point

$$(\infty, \infty, 0)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

est représenté par m séries distinctes.

Quant à la valeur du rayon de convergence en σ_1 des séries (16), il est facile de voir qu'elles convergent pour des valeurs assez petites de η, si

$$|\sigma_1| < \frac{1}{\delta_1}$$

ou

$$|\sigma| > \delta_1,$$

où δ_1 est la valeur absolue la plus grande de σ, qui correspond à un point critique de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

où deux ou plusieurs valeurs de τ se confondent.

Ainsi nous avons vu que, si nous choisissons un point arbitraire $(\overline{a}, \overline{b})$ de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

nous obtenons une partie du domaine du point multiple $(0, 0, 0)$ de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Nous allons montrer qu'il suffit de choisir un nombre fini de points $(\overline{a}, \overline{b})$ pour représenter tout le domaine du point multiple en question. En effet, dans la théorie des courbes algébriques, on démontre qu'il suffit de choisir un nombre fini de points

$$(17) \qquad a_1 b_1, \quad a_2 b_2, \quad \ldots, \quad a_r b_r$$

de la courbe algébrique

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

pour que les séries qui représentent les domaines de ces points représentent aussi, prises ensemble, toute la courbe algébrique.

Les points $a_1 b_1, \ldots, a_r b_r$ peuvent être choisis d'une infinité de manières, mais la suite contient toujours ou bien tous les points communs aux équations

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = 0,$$

ou bien aux équations

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = 0,$$

et ensuite un certain nombre de points réguliers. Nous choisissons les points $a_1 b_1, \ldots, a_r b_r$ de la première manière. Puis, nous aurons pour chaque point (a_λ, b_λ) de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

ou bien

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = A_\lambda(\tau - a_\lambda) + B_\lambda(\sigma - b_\lambda) + C_\lambda\zeta + \ldots,$$

(18) $$A_\lambda \gtrless 0,$$

si (a_λ, b_λ) est un point régulier, ou bien

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = (\tau - a_\lambda, \sigma - b_\lambda, \zeta)_{\mu'_\lambda} + (\tau - a_\lambda, \sigma - b_\lambda, \zeta)_{\mu'_\lambda - 1} + \ldots$$

$$\mu'_\lambda \leqq \mu_\lambda < m,$$

si μ_λ est le nombre de valeurs de τ de l'équation

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

qui se confondent pour $\sigma = b_\lambda$.

Dans le premier cas, toutes les valeurs de τ, σ, ζ dans le voisinage du point $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

sont données par la série

(19) $$\tau - a_\lambda = p_\lambda(\sigma - b_\lambda, \zeta),$$

à laquelle correspond, pour la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

la série

$$(20) \qquad \tau - a_\lambda = \bar{p}_\lambda(\sigma - b_\lambda).$$

Dans le second cas, toutes les valeurs de τ, σ, ζ dans le voisinage du point multiple $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ sont données par l'équation

$$(21) \quad (\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda} + p_1(\sigma - b_\lambda, \zeta)(\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda - 1} + \ldots + p_{\mu_\lambda}(\sigma - b_\lambda, \zeta) = 0,$$

à laquelle correspond, pour la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

l'équation

$$(22) \quad (\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda} + \bar{p}_1(\sigma - b_\lambda)(\tau - a_\lambda)^{\mu_\lambda - 1} + \ldots + \bar{p}_{\mu_\lambda}(\sigma - b_\lambda) = 0.$$

Les séries

$$p_\lambda(\sigma - b_\lambda, \zeta) \quad \text{et} \quad p_\lambda(\sigma - b_\lambda)$$

des formules (19) et (20) ont le même rayon de convergence en $(\sigma - b_\lambda)$. Les séries

$$p_\nu(\sigma - b_\lambda, \zeta) \quad \text{et} \quad \bar{p}_\nu(\sigma - b_\lambda) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \mu_\lambda),$$

qui sont les coefficients des équations (21) et (22), ont aussi le même rayon de convergence en $(\sigma - b_\lambda)$.

La courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

étant d'ordre m, les formules (20) et (22) donnent, exactement, m valeurs de τ pour chaque valeur de σ; par conséquent, les formules (19) et (21) nous donnent aussi m valeurs de τ pour chaque système de valeurs de σ et ζ. Il suit de là que les domaines des points

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r),$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

pris ensemble, représentent tout le domaine du point multiple $(0, 0, 0)$ de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

En effet, d'après (12), tout le domaine du point $(0, 0, 0)$ de cette surface est donné par l'équation

$$(23) \quad \xi^m + p_1(\eta, \zeta)\xi^{m-1} + \ldots + p_{m-1}(\eta, \zeta)\xi + p_m(\eta, \zeta) = 0.$$

Ainsi, pour

$$|\eta| < \delta, \qquad |\zeta| < \delta.$$

nous aurons m valeurs de ξ; mais, d'autre part, on a

$$\sigma = \frac{\eta}{\zeta}.$$

Supposons que δ ait été choisi si petit, que les séries (19) et (21) convergent. Nous avons vu que, pour chaque système de valeurs de σ et ζ,

$$|\zeta| < \delta,$$

les formules (19) et (21) nous donnent, exactement, m valeurs de τ et, comme nous avons

$$\xi = \tau\zeta,$$

aussi m valeurs de ξ, ou, justement, le même nombre, qui est fourni par l'équation (23).

Ainsi, quelle que soit la valeur du rapport

$$\frac{\eta}{\zeta},$$

les formules (19) et (21) nous donnent, exactement, les m valeurs de ξ que nous devons obtenir d'après l'équation (23). Alors ces deux systèmes de valeurs doivent être identiques, et, par conséquent, tout le domaine du point multiple (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = o$$

est représenté par l'ensemble des domaines des points $(a_\lambda, b_\lambda, o)$ de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = o.$$

Les points $(a_\lambda, b_\lambda, o)$ sont ou bien réguliers, ou bien des points multiples, mais d'un ordre *moins* élevé que l'ordre du point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = o.$$

Jusqu'ici nous avons considéré le cas où la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = o$$

est irréductible. Supposons, maintenant, qu'elle soit réductible

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_1(\tau, \sigma)\varphi_2(\tau, \sigma)\ldots\varphi_s(\tau, \sigma) = o$$

et soient

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_s$$

ses facteurs irréductibles. Supposons d'abord que tous les facteurs soient inégaux. Alors il n'y a pas grand'chose à ajouter à ce que nous avons fait dans le cas où la courbe est irréductible. Quels sont les points critiques qu'il faut considérer? Ce sont les points communs aux équations

$$(24) \qquad \varphi(\tau, \sigma) = o, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = o.$$

mais

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_s.$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau}\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_s + \varphi_1\frac{\partial}{\partial \tau}(\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_s).$$

Ainsi, les points communs aux équations (24) sont les points communs aux équations

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \tau} = 0 \qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

et les points communs aux équations

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0, \qquad \varphi_\mu(\tau, \sigma) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \ldots, s, \\ \mu = 1, 2, \ldots, s, \\ \quad \mu \gtrless \nu. \end{array} \right.$$

Puis, en prenant un point arbitraire (a_ν, b_ν) de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

nous obtenons, ou bien un développement de la forme

$$\tau - a_\nu = p(\sigma - b_\nu, \zeta), \tag{25}$$

ou bien une équation

$$(\tau - a_\nu)^\lambda + p_1(\sigma - b_\nu, \zeta)(\tau - a_\nu)^{\lambda-1} + \ldots + p_\lambda(\sigma - b_\nu, \zeta) = 0,$$
$$\lambda < m,$$

et nous démontrons facilement que tous ces développements convergent en $(\sigma - b_\nu)$ jusqu'au point critique le plus prochain de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0.$$

Ensuite, chacune des courbes

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0 \qquad\qquad (\nu = 1, \ldots, s)$$

peut être représentée par les séries qui représentent les domaines d'un certain nombre de points de la courbe. Ainsi nous formons une suite de la forme (17) de ces points, en ajoutant pourtant les points communs aux équations

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0, \qquad \varphi_\mu(\tau, \sigma) = 0 \left\{ \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \ldots, s, \\ \mu = 1, 2, \ldots, s, \\ \quad \mu \gtrless \nu. \end{array} \right.$$

Enfin, nous pouvons démontrer, en suivant la même marche qu'auparavant, que l'ensemble des domaines de ces points

$$(a_\nu, b_\nu, 0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

nous donne tout le domaine du point multiple $(0, 0, 0)$ de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Si un point $(a_\nu, b_\nu, 0)$ est un point multiple, il l'est, certainement, d'un ordre *moins* élevé que l'ordre du point multiple primitif.

Il y a, cependant, un cas d'exception, c'est le cas où les courbes

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_r(\tau, \sigma) = 0$$

se réduisent toutes à des droites qui ont un point commun

$$(a_\mu, b_\mu).$$

Alors il peut se présenter que le point

$$(a_\mu, b_\mu, 0)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

soit un point multiple du même ordre que le point $(0, 0, 0)$ de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Laissons ce cas pour le moment; il sera traité en même temps que le cas où toutes les courbes $\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0$ se réduisent à une seule droite.

Supposons, maintenant, que deux ou plusieurs des courbes

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0,$$

se confondent; ainsi

$$\varphi(\tau, \sigma) = \varphi_1(\tau, \sigma)^{\lambda_1} \varphi_2(\tau, \sigma)^{\lambda_2} \ldots \varphi_r(\tau, \sigma)^{\lambda_r}.$$

Soit

$$\lambda_1 > 1.$$

Alors un point quelconque de la courbe

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0$$

peut correspondre à un point multiple de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0.$$

En effet, on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \varphi_1^{\lambda_1 - 1} \varphi_2^{\lambda_2} \cdots \varphi_s^{\lambda_s} + \varphi_1^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \tau}(\varphi_2^{\lambda_2}, \ldots, \varphi_s^{\lambda_s}),$$

et, par conséquent,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0,$$

pour chaque point de la courbe

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0.$$

Soit (a_ν, b_ν) un point régulier de cette courbe qui n'appartient pas aux autres courbes

$$\varphi_2(\tau, \sigma) = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_s(\tau, \sigma) = 0,$$

nous aurons

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = [(\tau - a_\nu)^{\lambda_1} + p_1(\sigma - b_\nu, \zeta)(\tau - a_\nu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots \\ + p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta)]. \\ G(\tau - a_\nu, \sigma - b_\nu, \zeta). \end{aligned} \right.$$

Il est facile de voir que les séries

$$(27) \qquad p_1(\sigma - b_\nu, \zeta), \quad p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta)$$

convergent pour

$$|\sigma - b_\nu| < \delta_1,$$

où δ_1 est la distance de b_ν jusqu'à la valeur la plus prochaine $\bar{b}_\nu$, où l'on a

$$\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2} = \ldots = \frac{\partial^{\lambda_1}\varphi}{\partial\tau^{\lambda_1}} = 0.$$

Par conséquent, $\bar{b}_\nu$ est, ou bien une valeur pour laquelle on a

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = 0,$$

ou bien une valeur pour laquelle on a

$$\varphi_1(\tau, \sigma) = 0, \qquad \varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0 \qquad (\nu = 2, \ldots, s).$$

En effet, soit b_μ une valeur qui appartient au domaine de convergence des séries (27) et qui ne coïncide pas avec une valeur $\bar{b}_\nu$, on aura

$$(28)\quad \begin{cases} \bar{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = [(\tau - a_\mu)^{\lambda_1} + \bar{p}_1(\sigma - b_\mu, \zeta)(\tau - a_\mu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots \\ \qquad\qquad + \bar{p}_{\lambda_1}(\sigma - b_\mu, \zeta)]. \\ \qquad\qquad \bar{G}(\tau - a_\mu, \sigma - b_\mu, \zeta), \end{cases}$$

où a_μ est une racine de l'équation

$$(29)\qquad \varphi_1(\tau, b_\mu) = 0.$$

Mais, pour une valeur de a_μ racine de l'équation (29), les deux équations

$$(\tau - a_\nu)^{\lambda_1} + p_1(\sigma - b_\nu, \zeta)(\tau - a_\nu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots + p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta) = 0,$$
$$(\tau - a_\mu)^{\lambda_1} + \bar{p}_1(\sigma - b_\mu, \zeta)(\tau - a_\mu)^{\lambda_1 - 1} + \ldots + \bar{p}_{\lambda_1}(\sigma - b_\mu, \zeta) = 0$$

donnent des valeurs identiques de τ, d'où suit qu'il existe des continuations analytiques des séries

$$p_1(\sigma - b_\nu, \zeta), \quad \ldots, \quad p_{\lambda_1}(\sigma - b_\nu, \zeta)$$

au point $(b_\mu, 0)$. C'est seulement si b_μ coïncide avec un point $\bar{b}_\nu$, qu'il n'existe pas de continuation analytique. Mais alors le rayon de convergence en $(\sigma - b_\nu)$ est au plus égal à

$$|\overline{b}_\nu - b_\nu|.$$

On peut procéder de la même manière si (a_ν, b_ν) appartient aux points critiques.

Enfin on peut choisir une suite de la forme (17)

$$a_1 b_1, \quad \ldots, \quad a_r b_r,$$

qui nous donne toute la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

et l'on démontre que tout le domaine du point multiple (0, 0, 0) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

est représenté par les domaines des points

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0.$$

Ici il se présente aussi le cas exceptionnel où le point multiple $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ est du même ordre que le point (0, 0, 0) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Cela peut arriver pour un point particulier si les courbes

$$\varphi_\nu(\tau, \sigma) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

se réduisent à des droites ayant un point commun, et pour tous les points de la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

si elle est composée de m droites coïncidentes.

En résumé, nous avons vu que, quelle que soit la courbe

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0,$$

nous pouvons toujours représenter le domaine du point multiple $(0, 0, 0)$ de la surface algébrique

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

par l'ensemble des domaines d'un certain nombre de points

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

d'une nouvelle surface algébrique

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

où

$$\xi = \tau\zeta, \qquad \eta = \sigma\zeta,$$

et que les points $(a_\lambda, b_\lambda, 0)$ sont ou bien des points simples, ou bien des points multiples qui, sauf dans un cas d'exception, sont d'un ordre *moins* élevé que celui du point primitif. Puis après nous pouvons traiter chaque point multiple

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0)$$

de la même manière, représenter son domaine par les domaines d'un certain nombre de points

$$(a'_\lambda, b'_\lambda, 0)$$

d'une nouvelle surface

$$\overline{\Phi}_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) = 0,$$

et ainsi de suite. Généralement l'ordre des points multiples sera diminué par chaque transformation; mais, comme nous avons vu que, dans un cas d'exception, le point

$$(a_\lambda, b_\lambda, 0)$$

de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

peut être du même ordre que le point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

il nous faut démontrer que cela ne peut pas se présenter pour chaque transformation successive, mais qu'après un certain nombre de transformations l'ordre du point multiple sera certainement diminué.

Nous allons suivre exactement la même marche que M. Weierstrass dans le cas correspondant de la théorie des fonctions algébriques d'une seule variable.

Supposons ainsi qu'au point (o, o, o) de la surface

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

ou

$$F(u, v, w) = 0$$

corresponde un point multiple de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

qui soit également d'ordre m. Nous avons

$$F(u, v, w) = \zeta^m \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta),$$

et, d'après (3) et (5),

$$(30) \qquad \begin{cases} u = (\alpha_1\tau + \beta_1\sigma + \gamma_1)\zeta, \\ v = (\alpha_2\tau + \beta_2\sigma + \gamma_2)\zeta, \\ w = (\alpha_3\tau + \beta_3\sigma + \gamma_3)\zeta. \end{cases}$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} F(u, v, w) &= (u, v, w)_m + (u, v, w)_{m+1} + \ldots \\ &= \zeta_m[(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_m + (\tau, \sigma, \zeta)_\lambda + (\tau, \sigma, \zeta)_{\lambda+1} + \ldots]. \end{aligned}$$

On ne diminue rien de la généralité, en supposant que le point multiple d'ordre m de la surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0$$

soit le point (o, o, o), car cela revient à supposer

$$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)_m = 0.$$

L'équation

$$(u, v, w)_m = 0,$$

qui représente, en général, un cône d'ordre m, se décompose dans le cas actuel en m facteurs du premier degré. Dans tous les cas, on peut supposer que deux des quantités $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, par exemple γ_2 et γ_3, soient différentes de zéro. En effet, une de ces quantités est toujours différente de zéro; si les deux autres sont égales à zéro, nous faisons une transformation linéaire et homogène

$$\begin{aligned}
u &= \bar{\alpha}_1 u' + \bar{\beta}_1 v' + \bar{\gamma}_1 w', \\
v &= \bar{\alpha}_2 u' + \bar{\beta}_2 v' + \bar{\gamma}_2 w', \\
w &= \bar{\alpha}_3 u' + \bar{\beta}_3 v' + \bar{\gamma}_3 w',
\end{aligned}$$

et nous considérons la nouvelle surface

$$\overline{\mathrm{F}}(u', v', w') = 0,$$

où le point (o, o, o), également, est un point multiple d'ordre m.

Ensuite, nous posons

$$\begin{aligned}
\tau &= (\alpha'_1 \tau_1 + \beta'_1 \sigma_1 + \gamma'_1)\zeta_1, \\
\sigma &= (\alpha'_2 \tau_1 + \beta'_2 \sigma_1 + \gamma'_2)\zeta_1, \\
\zeta &= (\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\zeta_1.
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, nous aurons

$$\bar{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = (\tau, \sigma, \zeta)_m + (\tau, \sigma, \zeta)_{m+1} + \ldots,$$

et ainsi

$$\bar{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = \zeta_1^m \Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) = \zeta_1^m [(\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3)_m + (\tau_1, \sigma_1, \zeta_1)_{\lambda_1} + \ldots.$$

Ici on peut toujours supposer

$$\gamma'_3 \gtrless 0.$$

En effet, pour que l'équation de la surface

$$\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) = 0$$

commence par des termes d'ordre m, il faut que nous ayons

$$(\tau, \sigma, \zeta)_m = \prod_{\lambda=1}^{m} (A_\lambda \tau + B_\lambda \sigma + C_\lambda \zeta),$$

où

$$A_\lambda \gtrless 0, \qquad B_\lambda \gtrless 0,$$

et que $\gamma'_1, \gamma'_2, \gamma'_3$ annulent tous les facteurs. S'ils sont tous égaux, nous pouvons, évidemment, toujours poser

$$\gamma'_3 \gtrless 0.$$

Dans l'autre cas, pour

$$\gamma'_3 = 0,$$

il faut que

$$A_\lambda = A, \qquad B_\lambda = B \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m),$$

et, comme

$$(\tau, \sigma, 0)_m = \varphi(\tau, \sigma) = (u, v, w)_m,$$

que tous les facteurs de $(u, v, w)_m$, soient égaux. Ainsi pour que nous ayons

$$\gamma'_3 = 0,$$

il faut nécessairement que tous les facteurs de $(u, v, w)_m$, soient égaux.

Posons ensuite

$$\sigma = \tau\left(\bar{\sigma} - \frac{A}{B}\right), \qquad \zeta = \tau\bar{\zeta},$$

nous aurons

$$\Phi(\tau, \sigma, \zeta) = \tau^m \Psi(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}),$$

$$\Psi(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}) = \Psi(\bar{\sigma}, \bar{\zeta}) + \tau \overline{\Psi}(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}),$$

où

$$\Psi(\bar{\sigma}, \bar{\zeta}) = \prod_{\lambda=1}^{m} (B\bar{\sigma} + C_\lambda \bar{\zeta}).$$

Enfin, nous prenons la surface

$$\Psi(\tau, \bar{\sigma}, \bar{\zeta}) = 0$$

comme point de départ et posons

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} &= (\alpha'_1 \tau_1 + \beta'_1 \sigma_1 + \gamma'_1)\zeta_1, \\
\bar{\zeta} &= (\alpha'_2 \tau_1 + \beta'_2 \sigma_1 + \gamma'_2)\zeta_1, \\
\tau &= (\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\zeta_1,
\end{aligned}$$

et nous sommes certains que

$$\gamma'_3 \gtrless 0.$$

Ensuite, comme les facteurs de

$$\Psi(\bar{\sigma}, \bar{\zeta})$$

sont différents, nous aurons

$$\gamma''_3 \gtrless 0,$$

et ainsi de suite.

Supposons, maintenant, qu'une suite de transformations nous ait conduit aux surfaces

$$\begin{aligned}
\bar{\Phi}(\tau, \ \sigma, \ \zeta) &= 0, \\
\Phi_1(\tau_1, \sigma_1, \zeta_1) &= 0, \\
\Phi_2(\tau_2, \sigma_2, \zeta_2) &= 0, \\
\cdots\cdots&\cdots\cdots, \\
\Phi_r(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r) &= 0,
\end{aligned}$$

où les points multiples correspondants sont tous d'ordre m. Nous allons donner une limite supérieure de r. Exprimons d'abord les variables u, v, w en les variables τ_r, σ_r, ζ_r : on a

$$(31) \quad \left\{\begin{aligned}
u &= (\alpha_1 \tau + \beta_1 \sigma + \gamma_1)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\ldots(\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)})\zeta_r, \\
v &= (\alpha_2 \tau + \beta_2 \sigma + \gamma_2)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\ldots(\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)})\zeta_r, \\
w &= (\alpha_3 \tau + \beta_3 \sigma + \gamma_3)(\alpha'_3 \tau_1 + \beta'_3 \sigma_1 + \gamma'_3)\ldots(\alpha_3^{(r)} \tau_r + \beta_3^{(r)} \sigma_r + \gamma_3^{(r)})\zeta_r
\end{aligned}\right.$$

ou

$$(32)\quad \begin{cases} u = [\gamma_1\gamma'_3\gamma''_3\cdots\gamma_3^{(r)} + (\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)]\zeta_r = [\Gamma_1 + (\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)]\zeta_r, \\ v = [\gamma_2\gamma'_3\gamma''_3\cdots\gamma_3^{(r)} + (\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)]\zeta_r = [\Gamma_2 + (\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)]\zeta_r, \\ w = [\gamma_3\gamma'_3\gamma''_3\cdots\gamma_3^{(r)} + (\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)]\zeta_r = [\Gamma_3 + (\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)]\zeta_r. \end{cases}$$

D'après ce que nous avons dit, les deux produits

$$\Gamma_2 = \gamma_2\cdots\gamma_3^{(r)} \qquad \text{et} \qquad \Gamma_3 = \gamma_3\cdots\gamma_3^{(r)}$$

sont différents de zéro.

Ensuite,

$$F(u, v, w) = \zeta^m \overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta).$$

En différentiant par rapport à τ, σ et ζ,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial u}\alpha_1\zeta + \frac{\partial F}{\partial v}\alpha_2\zeta + \frac{\partial F}{\partial w}\alpha_3\zeta = \zeta^m \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \tau}, \\ &\frac{\partial F}{\partial u}\beta_1\zeta + \frac{\partial F}{\partial v}\beta_2\zeta + \frac{\partial F}{\partial w}\beta_3\zeta = \zeta^m \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \sigma}, \\ &\frac{\partial F}{\partial u}\gamma_1 \quad + \frac{\partial F}{\partial v}\gamma_2 \quad + \frac{\partial F}{\partial w}\gamma_3 \quad = \zeta^m \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \zeta} + m\zeta^{m-1}\overline{\Phi}, \end{aligned}$$

d'où résulte

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u} = \zeta^{m-1}\chi_1, \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \zeta^{m-1}\chi_2, \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} = \zeta^{m-1}\chi_3, \end{cases}$$

où χ_1, χ_2 et χ_3 sont des fonctions linéaires et homogènes de $\overline{\Phi}$, $\dfrac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \tau}$, $\dfrac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \sigma}$ et $\dfrac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \zeta}$.

En procédant de la même manière, on obtient enfin

$$(34)\quad \begin{cases} F = \zeta^m \zeta_1^m \ldots \zeta_r^m \, \Phi_r(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} = \zeta^{m-1}\zeta_1^{m-1} \ldots \zeta_r^{m-1} \chi_1^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \zeta^{m-1}\zeta_1^{m-1} \ldots \zeta_r^{m-1} \chi_2^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} = \zeta^{m-1}\zeta_1^{m-1} \ldots \zeta_r^{m-1} \chi_3^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \end{cases}$$

ou, d'après les relations qui existent entre les variables $\zeta, \zeta_1, \ldots, \zeta_r$,

$$(35)\quad \begin{cases} F = \zeta_r^{m(r+1)} f(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\Phi_r(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} = \zeta_r^{(m-1)(r+1)} f_1(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\chi_1^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial v} = \zeta_r^{(m-1)(r+1)} f_2(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\chi_2^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r), \\ \dfrac{\partial F}{\partial w} = \zeta_r^{(m-1)(r+1)} f_3(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r)\chi_3^{(r)}(\tau_r, \sigma_r, \zeta_r). \end{cases}$$

Nous allons nous appuyer sur le théorème suivant :

Soient $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ deux fonctions entières et rationnelles de u qui n'ont pas de facteur commun, on peut trouver deux autres fonctions entières et rationnelles de u,

$$L(u) \quad et \quad M(u),$$

de sorte que

$$L(u)\varphi(u) + M(u)\psi(u) = 1.$$

Les coefficients de $L(u)$ et de $M(u)$ sont des fonctions rationnelles des coefficients de $\varphi(u)$ et $\psi(u)$.

Appliquons ce théorème aux fonctions

$$F(u, v, w) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial u}[F(u, v, w)],$$

qui, considérées comme des fonctions de u, remplissent, évidemment, les conditions exigées.

Ainsi

$$(36)\quad L(u, v, w)\,F(u, v, w) + M(u, v, w)\,\frac{\partial}{\partial u}\,[F(u, v, w)] = 1.$$

Les fonctions $L(u, v, w)$ et $M(u, v, w)$ sont des fonctions rationnelles de v et w. Soit

$$\chi(v, w)$$

leur dénominateur commun qui, du reste, n'est autre chose que le discriminant de l'équation

$$F(u, v, w) = 0,$$

considérée comme une équation en u. Multiplions les deux membres de l'équation (36) par $\chi(v, w)$, de sorte que le premier membre devienne une fonction entière. On aura donc

$$(37)\quad \overline{L}(u, v, w)\,F(u, v, w) + \overline{M}(u, v, w)\,\frac{\partial}{\partial u}\,[F(u, v, w)] = \chi(v, w).$$

Soit

$$\chi(v, w) = (v, w)_\lambda + (v, w)_{\lambda+1} + \ldots + (v, w)_n.$$

En substituant dans l'équation (37) les valeurs de u, v, w exprimées en τ_r, σ_r, ζ_r, le premier membre contient comme facteur au moins

$$\zeta_r^{(r+1)(m-1)},$$

d'après (35), mais le second membre n'en contient que

$$\zeta_r^{\lambda_1}, \qquad n > \lambda_1 > \lambda;$$

car on peut toujours supposer que

$$\chi(\Gamma_2, \Gamma_3) \gtrless 0,$$

$\chi(v, w)$ n'étant pas réductible. Alors

$$(r+1)(m-1) \leqq \lambda_1.$$

Par conséquent, nous avons obtenu une limite supérieure de r ou du nombre de transformations successives qui puissent nous donner un point multiple du même ordre que le point $(0, 0, 0)$ de la surface

$$F(u, v, w) = 0.$$

Il est évident que le même raisonnement s'applique à une surface quelconque de la suite des surfaces transformées.

Ainsi nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Soit

$$(0, 0, 0)$$

un point multiple d'ordre m de la surface algébrique

$$F(u, v, w) = 0.$$

Par une substitution de la forme

$$\begin{aligned} u &= (\alpha_1\tau + \beta_1\sigma + \gamma_1)\zeta, \\ v &= (\alpha_2\tau + \beta_2\sigma + \gamma_2)\zeta, \\ w &= (\alpha_3\tau + \beta_3\sigma + \gamma_3)\zeta, \end{aligned}$$

nous faisons correspondre à ce point un certain nombre de points

$$(a_\nu, b_\nu, 0), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

d'une nouvelle surface

$$\overline{\Phi}(\tau, \sigma, \zeta) = 0,$$

de sorte que l'ensemble des domaines des points $(a_\nu, b_\nu, 0)$ représente tout le domaine du point $(0, 0, 0)$ de la surface

$$F(u, v, w) = 0.$$

Ensuite, nous traitons de la même manière chaque point multiple de la suite

$$(a_\nu, b_\nu, 0), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

et nous parviendrons enfin à un nombre fini de points simples

$$(a_\mu^{(\lambda)}, b_\mu^{(\lambda)}, 0), \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r_\lambda)$$

dans un nombre fini de surfaces

$$\Phi_\lambda(\tau_\lambda, \sigma_\lambda, \zeta_\lambda) = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, s)$$

dont les domaines, pris ensemble, représentent tout le domaine du point multiple (o, o, o) de la surface

$$F(u, v, w) = 0,$$

ou du point (a, b, c) de la surface

$$f(x, y, z) = 0.$$

Le domaine de chacun de ces points est représenté par une seule série et, par conséquent, tout le domaine du point multiple d'ordre m est représenté par un nombre fini de séries de deux variables auxiliaires.

Ici, le nombre de séries qui sont nécessaires pour représenter le domaine du point multiple d'ordre m de la surface algébrique

$$F(u, v, w) = 0$$

n'est pas fixé, comme dans le cas d'un point multiple d'une courbe algébrique. Nous n'obtenons qu'une limite inférieure. Cela dépend du fait qu'on peut représenter toute la courbe algébrique

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

d'une infinité de manières par un nombre fini de séries.

Jusqu'ici nous avons supposé que le point considéré (a, b, c) de la surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

fût un point à distance finie. Le cas où les variables deviennent infinies se ramène facilement au cas considéré. Soit

$$c = \infty,$$

on n'a qu'à poser

$$z = \frac{1}{z_1},$$

et l'on étudie le point $(a, b, 0)$ de la surface transformée

$$f_1(x, y, z_1) = 0.$$

Ainsi nous avons vu que le domaine d'un point quelconque de la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0$$

peut être représenté par un nombre fini de séries de deux variables auxiliaires.

Maintenant nous allons démontrer que toute la surface algébrique peut être représentée par un nombre fini de telles séries. Considérons les deux équations

$$(38)\qquad \begin{cases} f(x, y, z)] = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}[f(x, y, z)] = 0. \end{cases}$$

En éliminant x entre ces deux équations nous obtenons une certaine courbe algébrique

$$(39)\qquad \psi(y, z) = 0.$$

Pour chaque système de valeurs de y et z,

$$y = b, \qquad z = c,$$

qui n'appartient pas à la courbe (39), on a

$$0 = f(x, y, z) = A_\lambda(x - a_\lambda) + B_\lambda(y - b) + C_2(z - c) + \ldots.$$

où

$$A_\lambda \gtrless 0,$$

et, par conséquent, il existe un développement

$$(40)\qquad x - a_\lambda = p_\lambda(y - b, z - c),$$

qui représente tout le domaine du point

$$(a_\lambda, b, c),$$

et qui converge pour

$$|y-b|<\delta_1, \qquad |z-c|<\delta.$$

Les rayons de convergence δ_1 et δ ne sont, certainement, pas nuls au même temps, c'est-à-dire, δ n'est pas égal à zéro, si δ_1 a été choisi assez petit et *vice versa*.

Fixons ensuite la valeur

$$z=c.$$

A cette valeur $z=c$ correspond un nombre fini de racines de l'équation (39)

$$\psi(y,z)=0,$$

$$b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_r$$

qui sont telles que, pour le système

$$y=b_\lambda, \qquad z=c,$$

il n'existe pas de développements de la forme (40). Ces valeurs correspondent, par conséquent, à des points critiques de la surface

$$f(x,y,z)=0,$$

mais non pas nécessairement à des points multiples. Soit z une valeur dans le voisinage de c

$$|z-c|<\delta,$$

les valeurs correspondantes des racines de l'équation

$$\psi(y,z)=0,$$

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_\lambda, \quad \ldots, \quad y_r$$

sont toutes situées dans le voisinage des valeurs

$$b_1. \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_\lambda, \quad \ldots, \quad b_r$$

de sorte qu'on a

$$|y_\lambda-b_\lambda|<\delta_1 \qquad (\lambda=1,2,\ldots,r),$$

où δ_1 tend vers zéro au même temps que δ. Mais, si δ a été choisi assez petit, nous avons vu que le domaine du point critique

$$(a_\lambda^{(\nu)}, b_\lambda, c) \begin{cases} \nu = 1, 2, \ldots, m_\lambda, \\ \lambda = 1, 2, \ldots, r \end{cases}$$

est représenté par un nombre fini de séries. Ensuite, soit

$$\bar{\delta} < \delta,$$

et soit $\bar{\delta}_1$ la valeur correspondante de δ_1, on a

$$\bar{\delta}_1 < \delta_1.$$

Appelons C_λ et $\bar{C}_\lambda$ les cercles qu'on décrit autour du point b_λ comme centre avec les rayons δ_1 et $\bar{\delta}_1$. Pour chaque valeur

$$y = b,$$

au dehors des cercles C_λ, il existe un développement

$$x - a_\lambda = p_\lambda(y - b, z - c)$$

qui converge pour

$$|z - c| < \bar{\delta}$$

et dont le cercle de convergence des y soit A. D'après ce que nous avons dit, le cercle A est au moins tangent au cercle $\bar{C}_\lambda$ le plus prochain. Les cercles $\bar{C}_\lambda$ étant situés dans l'intérieur des cercles C_λ, il s'ensuit qu'on peut couvrir tout le plan des y par les cercles C_λ et un nombre *fini* des cercles A. Les valeurs infinies de y appartiennent ou bien au domaine d'un point critique, ou bien au domaine de convergence d'une série de la forme (40).

Ainsi tous les points de la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

pour lesquels

$$|z - c| < \bar{\delta}$$

sont donnés par un nombre *fini* de séries. Ensuite, il suffit de choisir un nombre *fini* de points c du plan des z, pour que leurs domaines δ couvrent tout le plan des z. En effet, toutes les valeurs de z au dehors d'un certain cercle de rayon,

$$R = \frac{1}{\delta},$$

appartiennent au domaine du point $z = \infty$. Alors il ne reste qu'une partie finie du plan à couvrir de cercles, dont les rayons sont différents de zéro. Il est évident qu'il suffit d'un nombre fini.

Enfin, à chaque point c correspond un nombre fini de séries et, comme le nombre des points c est fini, un nombre *fini* de séries de deux variables auxiliaires nous donnent toute la surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0.$$

Les considérations précédentes reposent sur le fait qu'une courbe algébrique quelconque

$$\varphi(\tau, \sigma) = 0$$

peut être représentée, entièrement, par un nombre *fini* de séries d'une variable auxiliaire.

Ayant obtenu un résultat analogue pour une surface algébrique quelconque, nous pouvons l'employer pour démontrer le même théorème pour une hypersurface algébrique

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

et ainsi de suite. Nous pouvons donc énoncer le théorème général :

Une hypersurface algébrique quelconque de ($n + 1$) *variables*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = 0$$

peut toujours être représentée par un nombre fini *de séries de n variables auxiliaires.*