JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉMILE PICARD

Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 8 (1892), p. 217-232.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1892_4_8__217_0>

Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles généralisant les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe;

PAR M. ÉMILE PICARD.

La théorie des fonctions d'une variable complexe n'est autre chose que l'étude des fonctions réelles P et Q des deux variables réelles x et y satisfaisant aux équations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Le problème de généraliser ces équations est évidemment indéterminé, et l'on peut tenter cette généralisation dans bien des directions différentes. Attachons-nous particulièrement à la propriété suivante de ce système : si (P, Q) d'une part et (P_1, Q_1) d'autre part sont deux solutions quelconques, P_1 et Q_1 considérées comme fonction de P et Q satisferont aux mêmes équations, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial P_1}{\partial P} = \frac{\partial Q_1}{\partial Q},$$
$$\frac{\partial P_1}{\partial Q} = -\frac{\partial Q_1}{\partial P}.$$

C'est cette propriété que nous voulons prendre comme propriété fondamentale des systèmes que nous allons nous proposer de former.

Nous pouvons formuler le problème suivant :

Trouver un système de m équations ($m \geqq n$) *contenant uniquement les dérivées partielles du premier ordre de n fonctions* P_1, $P_2, \ldots, P_n$ *dépendant de n variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial x_n}, \frac{\partial P_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et telles que, si l'on considère un second système également arbitraire de solutions $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, *les fonctions* P *considérées comme fonctions des* Q *satisfassent aux mêmes équations, c'est-à-dire que*

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial Q_1}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial Q_n}, \frac{\partial P_2}{\partial Q_n}, \ldots, \frac{\partial P_n}{\partial Q_n}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous allons montrer d'abord comment on peut former tous les systèmes jouissant de cette propriété. Pour simplifier, j'ai supposé que les équations ne renfermaient que les dérivées partielles du premier ordre; on peut supposer d'une manière plus générale que *les dérivées partielles d'ordre quelconque figurent dans les équations;* la formation des équations pourra se déduire des mêmes principes, comme nous le verrons après avoir étudié le cas simple que nous venons d'abord d'indiquer.

J'ai voulu traiter complètement le cas de *deux* et de *trois* variables et former tous les systèmes de la forme précédente, où figurent les dérivées partielles du premier ordre. Le nombre de ces systèmes pour $n = 3$ est assez considérable et il ne paraît pas qu'il y en ait parmi eux de réellement important, je veux dire qu'il ne me semble pas que pour aucun d'eux on puisse développer une théorie plus ou moins analogue à celle des fonctions d'une variable complexe. Je ne crois pas inutile cependant de développer rapidement la solution du problème que j'ai posé et d'indiquer quelques exemples. D'après quelques essais, il me paraît probable que le cas de $n = 4$ pourra conduire à des résultats plus intéressants, mais je dois avouer que le courage m'a manqué pour entreprendre les énormes calculs que nécessiterait l'étude complète de ce cas.

I. — Formation des équations du premier ordre.

1. La formation des équations du premier ordre jouissant de la propriété d'invariance qui est notre point de départ se ramène facilement à la théorie des groupes linéaires de transformation. Nous allons seulement, pour simplifier, faire l'hypothèse que les équations sont vérifiées pour

$$P_1 = x_1, \qquad P_2 = x_2, \qquad \ldots, \qquad P_n = x_n,$$

hypothèse qui ne diminue d'ailleurs en rien la généralité de notre recherche. Une première conséquence de cette hypothèse est que, si l'on prend une solution arbitraire

$$Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

les équations

$$\begin{gathered} Q_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_1, \\ Q_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Q_n \end{gathered}$$

définissent des fonctions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. satisfaisant au système d'équations différentielles.

Ceci posé, partons des relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} dP_1 &= \sum \frac{\partial P_1}{\partial x_i}\, dx_i, \\ dP_2 &= \sum \frac{\partial P_2}{\partial x_i}\, dx_i, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dP_n &= \sum \frac{\partial P_n}{\partial x_i}\, dx_i; \end{aligned} \right.$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} dx_1 = \sum \dfrac{\partial x_1}{\partial Q_i}\, dQ_i, \\ dx_2 = \sum \dfrac{\partial x_2}{\partial Q_i}\, dQ_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dx_n = \sum \dfrac{\partial x_n}{\partial Q_i}\, dQ_i. \end{cases}$$

Les dérivées $\frac{\partial P_k}{\partial x_i}$ d'une part, et les dérivées $\frac{\partial x_k}{\partial Q_i}$ d'autre part satisfont aux mêmes relations $f = 0$ d'après ce que nous venons de dire. En considérant d'autre part les P comme fonctions des Q,

$$(3)\qquad \begin{cases} dP_1 = \sum \dfrac{\partial P_1}{\partial Q_i}\, dQ_i, \\ dP_2 = \sum \dfrac{\partial P_2}{\partial Q_i}\, dQ_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dP_n = \sum \dfrac{\partial P_n}{\partial Q_i}\, dQ_i \end{cases}$$

et les dérivées $\frac{\partial P_k}{\partial Q_i}$ satisfont aux mêmes relations $f = 0$. Or on obtient les relations (3) en portant dans les équations (1) les valeurs des dx données par les équations (2). On peut donc dire que les relations (1) définissent *un groupe de substitutions linéaires* relatives à dx_1, $dx_2, \ldots, dx_n$, car le produit des deux substitutions (1) et (2) pour lesquelles les coefficients des indéterminées satisfont aux relations $f = 0$ donne une nouvelle substitution, la substitution (3) satisfaisant aux mêmes conditions. Il résulte immédiatement des résultats précédents que les équations $f = 0$ pourront être obtenues comme il suit : *On prend un groupe quelconque de substitutions linéaires à n variables contenant la substitution unité*

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ X_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ X_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned}$$

les a dépendant d'un certain nombre p de paramètres ($p < n^2$); on pose

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_i} = a_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

L'élimination des p paramètres, dont dépendent les a, entre ces n^2 équations conduira à $n^2 - p$ équations entre les dérivées partielles du premier ordre de $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Ce sont les relations cherchées [1].

2. On voit que la formation des équations $f = 0$ se ramène à la recherche des groupes linéaires et homogènes; c'est là un problème classique dans les travaux de M. Lie. Il y aura donc tout au moins à partir de $n = 3$ un très grand nombre de types d'équations; nous allons tout à l'heure en indiquer un certain nombre. Pour $n = 2$, un groupe s'offre immédiatement

$$\begin{aligned} X &= ax + by, \\ Y &= -bx + ay, \end{aligned}$$

avec les deux paramètres a et b. On devra poser, d'après la règle

$$\frac{\partial P}{\partial x} = a, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = b, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = -b, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = a.$$

L'élimination de a et b donne les équations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ce sont les équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

II. — Formation des équations d'ordre supérieur.

3. La méthode que nous venons de suivre n'est pas limitée aux équations où les dérivées partielles du premier ordre figurent seules

---

(1) J'ai énoncé pour la première fois ce résultat dans une Note des *Comptes rendus* (juin 1891).

dans les équations. L'extension sera suffisamment indiquée, en nous bornant aux équations du second ordre et aux cas de deux variables indépendantes. Appelons P et Q les deux fonctions, x et y les deux variables indépendantes; on suppose toujours les équations vérifiées pour $P = x$, $Q = y$.

On a, sans spécifier les variables,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} dP &= \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy,\\ dQ &= \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy,\\ d^2P &= \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}dx\,dy\\ &\quad + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial P}{\partial x}d^2x + \frac{\partial P}{\partial y}d^2y,\\ d^2Q &= \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}dx\,dy\\ &\quad + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial Q}{\partial x}d^2x + \frac{\partial Q}{\partial y}d^2y. \end{aligned}\right.$$

et les quatre équations analogues relatives à une autre solution (P_1, Q_1); d'ailleurs, d'après la remarque faite plus haut, x et y considérées comme fonction de P_1 et Q_1 forment une solution du système que nous cherchons. Écrivons les relations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial x}{\partial Q_1}dQ_1,\\ dy &= \frac{\partial y}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial y}{\partial Q_1}dQ_1,\\ d^2x &= \frac{\partial^2 x}{\partial P_1^2}dP_1^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial P_1\,\partial Q_1}dP_1\,dQ_1\\ &\quad + \frac{\partial^2 x}{\partial Q_1^2}dQ_1^2 + \frac{\partial x}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial x}{\partial Q_1}dQ_1,\\ d^2y &= \frac{\partial^2 y}{\partial P_1^2}dP_1^2 + 2\frac{\partial^2 y}{\partial P_1\,\partial Q_1}dP_1\,dQ_1\\ &\quad + \frac{\partial^2 y}{\partial Q_1^2}dQ_1^2 + \frac{\partial y}{\partial P_1}dP_1 + \frac{\partial y}{\partial Q_1}dQ_1. \end{aligned}\right.$$

Or, en considérant P et Q comme fonctions de P_1 et Q_1, on a

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
Pd &= \frac{\partial P}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial P}{\partial Q_1}\,dQ_1,\\
dQ &= \frac{\partial Q}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial Q}{\partial Q_1}\,dQ_1,\\
d^2P &= \frac{\partial^2 P}{\partial P_1^2}\,dP_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 P}{\partial P_1\,\partial Q_1}\,dP_1\,dQ_1\\
&\quad + \frac{\partial^2 P}{\partial Q_1^2}\,dQ_1^2 + \frac{\partial P}{\partial P_1}\,d^2P_1 + \frac{\partial P}{\partial Q_1}\,d^2Q_1,\\
d^2Q &= \frac{\partial^2 Q}{\partial P_1^2}\,dP_1^2 + 2\,\frac{\partial^2 Q}{\partial P_1\,\partial Q_1}\,dP_1\,dQ_1\\
&\quad + \frac{\partial^2 Q}{\partial Q_1^2}\,dQ_1^2 + \frac{\partial Q}{\partial P_1}\,d^2P_1 + \frac{\partial Q}{\partial Q_1}\,d^2Q_1.
\end{aligned}
\right.
$$

Les coefficients des différentielles dans les équations (4), (5), (6) satisfont aux mêmes relations; or les équations (6) peuvent être considérées comme provenant de la multiplication des substitutions (4) et (5) effectuées sur les différentielles dP, dQ, d^2P, d^2Q et dP_1, dQ_1, d^2P_1, d^2Q_1. Nous voyons donc que l'on aura un système d'équations cherchées en procédant de la manière suivante :

On prend un groupe de transformations, relatives à x, y, z et t de la forme suivante

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
X &= ax + by,\\
Y &= cx + dy,\\
Z &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + az + bt,\\
T &= Dx^2 + 2Exy + Fy^2 + cz + dt,
\end{aligned}
\right.
$$

et contenant la substitution unité. Soit p le nombre des paramètres de ce groupe ($p < 10$); on posera

$$
\frac{\partial P}{\partial x} = a,\qquad \frac{\partial P}{\partial y} = b,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = c,\qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = d,
$$

$$
\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = A,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} = B,\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = C,
$$

$$
\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = D,\qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y} = E,\qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = F.
$$

L'élimination des paramètres entre ces *dix* équations nous donnera un système de $10-p$ équations, qui seront les équations cherchées.

4. Les groupes de la forme (7) n'ont, je crois, fait l'objet d'aucune étude spéciale, nous voudrions seulement indiquer un exemple. On obtiendra un groupe de la forme (7) en cherchant les substitutions qui transforment en elle-même à un coefficient près une forme donnée

$$\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta z+\varepsilon t.$$

On aura donc

$$\alpha X^2+2\beta XY+\gamma Y^2+\delta Z+\varepsilon T=\lambda(\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2+\delta z+\varepsilon t).$$

On peut encore dire que les fonctions P et Q correspondant à ce groupe sont telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned}&\alpha\, dP^2+2\beta\, dP\, dQ+\gamma\, dQ^2+\delta\, d^2P+\varepsilon\, d^2Q\\&=\lambda(\alpha\, dx^2+2\beta\, dx\, dy+\gamma\, dy^2+\delta\, d^2x+\varepsilon\, d^2y).\end{aligned}$$

Effectuons les calculs en supposant que la forme se réduise à

$$dP^2+dQ^2+\delta(d^2P+d^2Q),$$

ce que l'on peut toujours supposer, en faisant préalablement sur P et Q une substitution linéaire convenable. On aura, en supposant δ différent de zéro,

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial x}=\lambda,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}=\lambda,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2+\delta\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)=\lambda,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2+\delta\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)=\lambda,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}+\delta\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial y}\right)=0.$$

En éliminant λ on aura *quatre équations*.

Ces quatre équations n'ont malheureusement, en dehors de P et Q constants, d'autres solutions que

$$P = x, \qquad Q = y.$$

III. — Équations du premier ordre à deux variables.

5. Un système de deux équations du premier ordre à deux variables s'obtiendra en partant du groupe linéaire à deux variables et à deux paramètres. Prenons le groupe sous sa forme la plus simple, mais en ayant soin de n'introduire aucun élément imaginaire.

On peut d'abord prendre les deux transformations infinitésimales du groupe sous la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} A(f) = ax\dfrac{\partial f}{\partial x} + (cx + dy)\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ B(f) = (\alpha x + \beta y)\dfrac{\partial f}{\partial x} + (\gamma x + \delta y)\dfrac{\partial f}{\partial y}. \end{cases}$$

Le cas de $\beta = 0$ n'offre aucun intérêt. Supposons donc $\beta \neq 0$, nous pouvons admettre, en faisant une combinaison linéaire de A et de B, que $\alpha = 0$.

Nous partons donc de

$$A(f) = ax\frac{\partial f}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$B(f) = \beta y\frac{\partial f}{\partial x} + (\gamma x + \delta y)\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On doit avoir

$$(9)\qquad A[B(f)] - B[A(f)] = \lambda B(f) + \mu A(f).$$

Si λ et μ sont nuls, c'est-à-dire si les deux substitutions infinitésimales du groupe sont permutables, on a

$$c\beta = 0,$$
$$(d - a)\beta = 0,$$
$$(a - d)\gamma + c(\delta - \alpha) = 0,$$
$$-c\beta = 0.$$

On a donc $d = a$, $c = 0$, et l'on voit de suite que le groupe correspondant se ramène à celui qui conduit aux équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

6. Le seul cas nouveau est celui où les deux substitutions ne sont pas permutables. Reprenons les formes (8). Si λ n'est pas nul, en remplaçant $B(f)$ par $B(f) - \frac{\mu}{\lambda} A(f)$, on n'aura plus de terme en $A(f)$ dans le second membre de (9). On peut donc partir des deux transformations (8) en supposant que

$$A[B(f)] - B[A(f)] = \lambda B(f).$$

On aura ainsi les relations

$$\begin{gathered} c\beta = \lambda\alpha, \\ (d-a)\beta = \lambda\beta, \\ \alpha\gamma + c(\delta - \alpha) - d\gamma = \lambda\gamma, \\ -c\beta = \lambda\delta, \end{gathered}$$

que l'on peut encore écrire

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\lambda = d - a, \\ &\alpha + \delta = 0, \\ &(d-a)\gamma = c\delta, \\ &(d-a)\alpha = c\beta. \end{aligned} \right.$$

Cherchons maintenant les équations finies du groupe. On doit considérer les équations linéaires

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a\lambda_1 x + \lambda_2(\alpha x + \beta y), \\ \frac{dy}{dt} &= \lambda_1(cx + dy) + \lambda_2(\gamma x + \delta y). \end{aligned} \right.$$

En posant $x = Ae^{\mu t}$, $y = Be^{\mu t}$, on a

$$\begin{gathered} A[\mu - (a\lambda_1 + \alpha\lambda_2)] - \lambda_2\beta B = 0, \\ -A(c\lambda_1 + \gamma\lambda_2) + B[\mu - (d\lambda_1 + \delta\lambda_2)] = 0. \end{gathered}$$

On a donc pour μ l'équation

$$\mu^2 - \mu(a+d)\lambda_1 + (a\lambda_1 + \alpha\lambda_2)(d\lambda_1 + \delta\lambda_2) - \beta\lambda_2(c\lambda_1 + \gamma\lambda_2) = 0.$$

En tenant compte des équations (10), on voit que les racines de cette équation sont

$$\mu = a\lambda_1, \qquad \mu = d\lambda_1,$$

L'intégrale générale du système (11) est alors

$$x = P\beta e^{a\lambda_1 t} + Q\beta e^{d\lambda_1 t},$$
$$y = -P\alpha e^{a\lambda_1 t} + Q[(d-a)h - \alpha]e^{d\lambda_1 t}, \qquad h = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

P et Q étant des constantes. On les détermine de façon que, pour $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$.

On obtient ainsi, en posant $e^{\lambda_1 t} = \theta$, et remplaçant $(d-a)h - \alpha$ par h,

$$x = \frac{\beta x_0(h\theta^a + \alpha\theta^d) + \beta y_0(-\beta\theta^a + \beta\theta^d)}{\beta(h+\alpha)},$$
$$y = \frac{\alpha x_0 h(\theta^a - \theta^d) + \beta y_0(h\theta^d + \alpha\theta^a)}{\beta(h+\alpha)}.$$

On aura donc

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{h\theta^a + \alpha\theta^d}{h+\alpha},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\beta(\theta^d - \theta^a)}{h+\alpha},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\alpha h(\theta^a - \theta^d)}{\beta(h+\alpha)},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{h\theta^d + \alpha\theta^a}{h+\alpha}.$$

Entre ces équations il faut éliminer θ et h. En divisant la troisième par la seconde, on a

$$h = -\frac{\beta^2}{\alpha}\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial P}{\partial y}}.$$

En substituant dans les deux premières équations, il vient

$$\theta^d = \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\theta^a = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y},$$

puis, en substituant dans les deux dernières, on a

$$\theta^a = \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\theta^d = \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y},$$

et ces quatre équations reviennent à trois. On en tire

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x}\right)^a = \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial P}{\partial y}\right)^d.$$

Donc, en posant $\frac{d}{a} = k$, $\frac{\alpha}{\beta} = \lambda$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\lambda\frac{\partial P}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda\frac{\partial P}{\partial y}\right)^k,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = -\lambda\frac{\partial P}{\partial y} + \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \lambda\frac{\partial P}{\partial y}\right)^k.$$

Tel est le système des deux équations auxquelles nous sommes conduit.

L'équation à laquelle satisfait P est extrêmement simple; on trouve, en effet, de suite

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - 2\lambda\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial y} + \lambda^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0.$$

Donc $P(x, y)$ est de la forme

$$P(x, y) = x\varphi(y + \lambda x) + \psi(y + \lambda x),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

Équations du premier ordre à trois variables.

7. Le nombre des groupes linéaires distincts à trois variables est très considérable. Il a été complètement formé par M. Sophus Lie. J'ai calculé, pour tous ces groupes, le système d'équations différentielles du premier ordre qui leur correspondent par ma méthode. Je ne les transcrirai pas tous ici, car il en est un certain nombre pour lesquels je n'ai pu encore décider du degré de généralité des fonctions qui y satisfont. Nous allons seulement indiquer quelques exemples simples, et, en particulier, obtenir tous les systèmes formés de *trois* équations.

8. Si nous ne voulons avoir que trois équations, nous devons prendre un groupe linéaire à trois variables et à *six* paramètres.

Un premier exemple d'un tel groupe sera obtenu, en adoptant les notations de M. Lie, au moyen des six transformations infinitésimales

$$zp, \quad zq, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp, \quad xp + yq + \alpha U,$$

où

$$U = xp + yq + zr,$$

α désignant une constante.

Les équations à adjoindre seront

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_1 z + \lambda_4 x + \lambda_5 y + \lambda_6 x(1 + \alpha),$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_2 z + \lambda_3 x - \lambda_4 y + \lambda_6 y(1 + \alpha),$$

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_6 \alpha z.$$

En posant

$$x = Ae^{\lambda t}, \qquad y = Be^{\lambda t}, \qquad z = Ce^{\lambda t},$$

on obtiendra, pour déterminer λ, une équation du troisième degré, dont les racines sont

$$\lambda = \lambda_6 \alpha, \qquad \lambda = \lambda_6(1+\alpha) \pm \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_3\lambda_5}.$$

Pour chacune de ces trois racines, on a des quantités proportionnelles à A, B, C. Il est inutile d'écrire ces quantités pour la première racine; nous les désignerons par A_1, B_1, C_1. Pour la seconde, on peut prendre

$$A = \lambda_5, \qquad B = \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_3\lambda_5} - \lambda_4, \qquad C = 0$$

correspondant à

$$\lambda = \lambda_6(1+\alpha) + \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_3\lambda_5}.$$

On a donc pour l'intégrale générale du système précédent

$$\begin{aligned}
x &= M\lambda_5 e^{t\left[\lambda_6(1+\alpha)+\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_3\lambda_5}\right]} + N\lambda_5 e^{t\left[\lambda_6(1+\alpha)-\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_3\lambda_5}\right]} + PA_1 e^{\lambda_6 \alpha t}, \\
y &= M\left(\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_3\lambda_5} - \lambda_4\right) e^{t\left[\lambda_6(1+\alpha)+\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_3\lambda_5}\right]} \\
&\quad + N\left(-\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_3\lambda_5} - \lambda_4\right) e^{t\left[\lambda_6(1+\alpha)-\sqrt{\lambda_4^2+\lambda_3\lambda_5}\right]} + PB_1 e^{\lambda_6 \alpha t}, \\
z &= PC_1 e^{\lambda_6 \alpha t},
\end{aligned}$$

M, N, P désignant des constantes.

On doit choisir ces constantes de telle sorte que, pour $t = 0$, on ait $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. On a de suite

$$PC_1 = z_0.$$

Quant à M et N, ce sont des fonctions linéaires de x_0, y_0, z_0. Cherchons les expressions de M et N en x_0, y_0 et z_0; nous aurons

$$\begin{aligned}
x_0 &= M\lambda_5 + N\lambda_5 + PA_1, \\
y_0 &= M(D - \lambda_4) + N(-D - \lambda_4) + PB_1, \qquad \left(D = \sqrt{\lambda_4^2 + \lambda_3\lambda_5}\right),
\end{aligned}$$

en substituant les valeurs de M, N et P dans les expressions de x, y et z; on obtient alors comme coefficients de x_0, y_0, z_0 les quantités que nous allons égaler aux dérivées partielles de P, Q, R.

On trouve ainsi de suite

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial z} = e^{\lambda_4 \alpha t},$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{\lambda_4 t(1+\alpha)} \left[\left(1 + \frac{\lambda_4}{D}\right) e^{Dt} + \left(1 - \frac{\lambda_4}{D}\right) e^{-Dt} \right],$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{\lambda_4 t(1+\alpha)} \left[\frac{\lambda_5}{D} e^{Dt} - \frac{\lambda_5}{D} e^{-Dt} \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{\lambda_4 t(1+\alpha)} \left[\frac{D^2 - \lambda_4^2}{D\lambda_5} e^{Dt} - \frac{D^2 - \lambda_4^2}{D\lambda_5} e^{-Dt} \right],$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{\lambda_4 t(1+\alpha)} \left[\frac{D - \lambda_4}{D} e^{Dt} + \frac{-D - \lambda_4}{-D} e^{-Dt} \right].$$

L'élimination des quantités λ entre ces équations conduit aux trois relations *qui forment le système cherché*

$$(S) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial x}\dfrac{\partial Q}{\partial y} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \left(\dfrac{dR}{dz}\right)^{\mu}, \end{cases}$$

en posant $\mu = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha}$.

9. Nous avons un second exemple d'un groupe à six paramètres, en prenant le groupe dont les transformations infinitésimales sont représentées par

$$zp, \quad zq, \quad xq, \quad xr, \quad xp - zr, \quad xp + yq + \alpha U,$$

U ayant la même signification que plus haut.

Une série de calculs analogues à ceux que nous venons d'indiquer rapidement montre que le système d'équations différentielles correspondant se réduit à

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial P}{\partial z}\dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial x}\dfrac{\partial R}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)^{\mu}, \end{cases}$$

μ ayant la même signification que plus haut.

10. Il existe deux autres groupes à trois variables et à six paramètres; mais ils peuvent se déduire des précédents en faisant $\alpha = \infty$; on a donc des équations différentielles rentrant dans le même type, puisqu'alors $\mu = 2$.

Nous pouvons donc dire que les systèmes (S) *et* (Σ) *forment les seuls systèmes de trois équations jouissant de la propriété demandée.* Bien entendu, nous ne considérons pas comme distincts des systèmes qui peuvent se réduire les uns aux autres par un changement de variables et de fonctions.

11. Les groupes à trois variables et dépendant de moins de six paramètres sont très nombreux. Il me paraît inutile de les énumérer tous et de transcrire ici les équations correspondantes que j'ai toutes formées. J'indiquerai seulement un exemple. Considérons le groupe à cinq paramètres représenté par

$$zp, \quad zq, \quad xq, \quad xr, \quad xp - zr.$$

Le système des quatre équations correspondantes est alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= 1, \\ \frac{\partial W}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x} &= 1. \end{aligned}$$

L'énumération complète des autres groupes présenterait, je crois, peu d'intérêt.