JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALBERT RIBAUCOUR

Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 7 (1891), p. 5-108.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1891_4_7__5_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes;

PAR M. ALBERT RIBAUCOUR,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Draguignan, 30 mai 1876.

INTRODUCTION.

1. *Origine de la théorie des surfaces.* — La théorie des surfaces étend de jour en jour son domaine; on l'applique aujourd'hui avec succès à des questions qu'aux débuts l'on n'eût pas cru accessibles par ses procédés; elle a pris naissance dans les travaux de Monge, mais c'est surtout dans les recherches de Gauss qu'on la voit se préciser; elle s'y révèle avec les propriétés à la surface, les notions de courbure totale, de représentation sphérique. L'étude des lignes géodésiques, des lignes de courbure, des asymptotiques fait alors l'objet d'importants travaux qui tous ont pour but l'étude individuelle des surfaces.

L'un des Chapitres les plus importants de la nouvelle théorie, celui de la déformation, conduit, à l'aide des notions de courbure géodésique et de courbure proprement dite, à des résultats d'une extrême élégance. A propos de la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée, M. Codazzi découvre les formules analytiques qui lient entre eux les éléments indéformables et ceux qui définissent la forme. Avant lui l'abbé Aoust avait, sous forme de relations géométriques, trouvé les mêmes résultats. M. Bonnet vient ensuite établir l'importance capitale de ces formules en les appliquant à la détermination complète de surfaces définies par des considérations différentielles. On entrevoit seulement le champ à parcourir dans cet ordre d'idées, en même temps qu'on est arrêté par les difficultés analytiques du sujet.

2. *Familles de surfaces.* — D'autre part, des recherches de Géométrie pure conduisaient M. Dupin à l'importante découverte des systèmes triplement orthogonaux; M. Lamé les introduit systématiquement en Mécanique; il établit à ce propos la théorie des coordonnées curvilignes. Remarquons qu'ici l'on ne se contente plus de ce qui se passe sur une surface; on en sort, pour ainsi dire, et, se tenant d'abord à des distances infiniment petites, on arrive consécutivement et par intégration à opérer des constructions dans l'espace. Les familles de surfaces, comme les surfaces, méritent une classification: MM. Lamé, Bertrand, Bonnet élucident complètement la belle question des surfaces triplement isothermes et orthogonales. Dans le même ordre de recherches, M. Darboux prouve que le système triplement orthogonal, isotherme par surfaces individuelles, se réduit aux anallagmatiques homofocales du quatrième ordre. Cette branche de la théorie des surfaces, subordonnée à l'intégration de nombreuses équations différentielles, demandera encore bien des efforts avant de pouvoir être appliquée avec généralité.

3. *Géométrie autour de la surface de référence.* — Il importe, pensons-nous, si l'on veut employer la théorie des surfaces efficacement, de pouvoir opérer dans l'espace par des constructions *tout intégrées,* de fonder, si je puis m'exprimer ainsi, une sorte de Géométrie analytique permettant d'étudier, sans l'introduction d'éléments inutiles, tout ce qui est relatif aux propriétés infinitésimales d'une figure donnée, qu'elle varie ou non à chaque instant. Il faut opérer autour d'une surface et avec la plus grande généralité, comme on opère habituellement autour d'un point; encore convient-il de s'affranchir absolument des éléments qui tiennent à l'orientation et que l'on traîne sans aucune utilité dans les calculs, au préjudice de la simplicité et de l'évidence des résultats. Depuis plusieurs années, j'ai donné de nombreuses applications de cette Géométrie autour des surfaces qui fera l'objet exclusif du Mémoire que je soumets aujourd'hui à l'Académie.

4. *Méthode suivie dans cette Géométrie.* — Dans les problèmes que j'ai en vue, j'introduis en général des constructions finies qui font dépendre les éléments successifs d'une figure des éléments correspondants d'une surface dite *de référence*. Traçons, par exemple, sur une surface un réseau (u, v); soient OX, OY les tangentes en O (u, v) à (v) et (u), OZ la normale à la surface. Faisons à chaque instant correspondre un point M de l'espace à O, et, dans ce but, donnons-nous les coordonnées instantanées ξ, η, ζ par rapport aux axes OX, OY, OZ; à toute position de O′ infiniment voisine de O va correspondre une position de M′ voisine de M; la position de O′ est définie par les accroissements du et dv, celle de M′ l'est par les quantités $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ considérées comme fonctions de u et v. Désignons par Δx, Δy, Δz les projections de MM′ sur OX, OY, OZ; on pourra les calculer en fonction de du, dv à l'aide des $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, par conséquent on connaîtra le déplacement réel de M en M′. Opérant de la même façon pour tous les points d'une figure, on voit comment elle se déplace en se déformant lorsque u et v s'accroissent de du et dv.

Plus généralement, si l'on se donne à chaque instant une relation $F(\xi, \eta, \zeta, u, v) = 0$ définissant une surface correspondant à chaque point $O(u, v)$ de la surface de référence, on peut trouver comment elle se déplace en se déformant lorsque u et v croissent de du et dv, sans définir chaque point individuellement. Il suffit, en effet, de calculer en fonction des coordonnées X, Y, Z d'un point par rapport à OX, OY, OZ les coordonnées ξ, η, ζ de ce point par rapport à O′X′, O′Y′, O′Z′; substituant ces valeurs dans l'équation donnée, on aura par rapport aux premiers axes l'équation de la surface déformée.

De ceci résulte que, moyennant l'usage de ces formules de transformation de coordonnées, établies une fois pour toutes, on pourra, autour d'une surface, effectuer toutes les opérations de Géométrie analytique comme avec les coordonnées cartésiennes.

5. *Cas d'un réseau* (u, v) *non orthogonal.* — Il n'est pas nécessaire que les axes OX, OY soient tangents aux lignes (v) et (u), pourvu que leur direction soit déterminée en fonction de u et v. Dans cet ordre d'idées, on arrive à prendre pour le réseau (u), (v) un système de courbes même non orthogonales, en conservant trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. De cette façon l'on peut mettre en évidence les éléments du réseau qui s'approprie le mieux à la question, tout en faisant disparaître la complication résultant de l'emploi de coordonnées obliques dans les opérations de Géométrie analytique autour de la surface. Cette remarque, on le verra, a une grande importance.

6. *Correspondance de deux espaces.* — Au lieu d'une surface de référence unique et de deux paramètres u et v, on peut prendre un système triple de surfaces dépendant de trois paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 et faire correspondre entre eux deux espaces différents par certaines constructions géométriques. M. Liouville a traité un remarquable exemple de correspondance qu'il a pu intégrer complètement. Nous donnerons des formules pour le cas des systèmes triplement orthogonaux ; elles nous permettront d'établir deux transformations géométriques des systèmes triplement orthogonaux, dont l'une avait été découverte analytiquement par M. Combescure.

7. *Étude d'une même question à l'aide de diverses surfaces de référence.* — L'un des plus grands avantages de la méthode générale que nous employons consiste dans la facilité avec laquelle on peut attaquer des problèmes de façons différentes, suivant le choix que l'on fait de la surface de référence. En général, les questions relatives à la théorie des surfaces dépendent de l'intégration d'équations aux différentielles partielles du second ordre. Il importe, au point de vue géométrique, pour la simplicité des résultats, au point de vue analytique, pour les difficultés d'intégration, de ramener le problème aux formes irréductibles, canoniques, pour ainsi dire, et celles-ci sont souvent bien différentes suivant les éléments que l'on suppose connus et ceux que l'on veut déterminer.

Quand on cherche, par exemple, à établir la théorie des faisceaux de cercles normaux à des surfaces, si l'on prend pour surface de référence l'une des surfaces trajectoires, on réduit le problème à l'intégration de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 Z}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dZ}{d\rho}\frac{1}{H}\frac{dH}{d\rho_1} + \frac{dZ}{d\rho_1}\frac{1}{H_1}\frac{dH_1}{d\rho},$$

dont la forme se prête aux intégrations explicites, ainsi que l'a fait voir M. Moutard; il est donc facile de construire un très grand nombre de solutions. Si, au contraire, on choisit comme surface de référence la surface enveloppe des plans des cercles, on trouve une équation tout à fait analogue à celle des surfaces applicables sur une surface donnée, par conséquent beaucoup moins maniable que la précédente. Seulement cette nouvelle équation met en évidence ce fait remarquable que les cercles admettent une famille de surfaces trajectoires, quelle que soit la forme de la surface enveloppe de leurs plans. Il en résulte que l'équation relativement compliquée est, au fond, la plus simple, puisque, à elle seule, elle régit tout le problème, tandis que l'équation (1) suppose l'intégration préalable des équations de Codazzi sur la surface de référence.

Citons encore l'exemple des surfaces applicables l'une sur l'autre : on sait que l'équation des surfaces applicables sur une surface donnée présente de très grandes difficultés d'intégration; mais le problème devient des plus simples lorsqu'on se propose de déterminer tous les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre; l'équation caractéristique prend la forme

$$\frac{d^2 Z}{du\, dv} = \lambda Z,$$

la seule qui puisse avec (1) être, dans certains cas, intégrée explicitement. Dans le premier cas, la surface de référence est une des surfaces applicables; dans le second, c'est la surface lieu des milieux des cordes qui joignent les points correspondants. Il est remarquable que dans ce problème, où les positions respectives des surfaces semblent *a priori* être indifférentes, c'est par la considération même de ces positions que le problème se simplifie d'une façon inattendue et conduit à d'élégants résultats.

Au fond, ces simplifications tiennent toujours à ce fait que, d'une part, une seule équation différentielle régit le problème et que, de l'autre, puisque l'on se donne la surface de référence et sa position dans l'espace, on suppose intégrées les trois équations de Codazzi, relatives à cette surface. Aussi, dès que dans l'étude d'une question auxiliaire les éléments de forme de la surface doivent être les résultats, le problème se complique à nouveau.

Dans le cas où le choix des surfaces de référence n'est pas naturellement indiqué, c'est en cherchant à réduire le nombre des inconnues qu'on arrive à découvrir le système le plus avantageux; la même remarque s'applique au choix du réseau (u, v) sur la surface de référence.

8. *Indication de la division du Mémoire.* — Le premier Chapitre du Mémoire est consacré à l'établissement des formules fondamentales dans le cas où le réseau (u, v) est orthogonal, ainsi qu'à la recherche directe du sens géométrique des coefficients introduits. Le deuxième Chapitre comprend la même étude, mais dans le cas où le réseau (u, v) n'est pas orthogonal. Le troisième Chapitre est consacré à l'établissement des formules fondamentales relatives à la correspondance de deux espaces en prenant pour réseau de référence une famille triple orthogonale de surfaces; il a paru convenable d'établir préalablement et par les procédés de la *Géométrie autour des surfaces,* la théorie des systèmes triplement orthogonaux. Ces trois premiers Chapitres constituent la première Partie de notre travail; la seconde comprendra une série d'applications relatives aux faisceaux de droites, aux développées, à l'étude des couples de surfaces applicables l'une sur l'autre, à la correspondance de deux surfaces par orthogonalité des éléments, aux systèmes cycliques, au mouvement le plus général d'un corps assujetti à quatre conditions. Nous examinerons ensuite les propriétés des faisceaux de courbes planes normales à des surfaces.

Comme suite à cette dernière application, nous entreprendrons l'examen des propriétés des sections planes d'une surface par les plans tangents d'une autre surface; en particulier, l'étude des sections des surfaces par leurs plans tangents; ceci nous amènera à rechercher de nouvelles propriétés des surfaces, et à généraliser le théorème de Beltrami.

Enfin nous terminerons par l'étude de la correspondance des systèmes triplement orthogonaux.

CHAPITRE I.

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES FONDAMENTALES, (u, v) ÉTANT ORTHOGONAL.

9. *Définition du réseau coordonné; formules donnant les coordonnées d'un même point par rapport à deux trièdres successifs.* — Nous considérerons, pour établir les formules, une surface concave de haut en bas par rapport à la normale, afin de supprimer, par cette hypothèse, toute ambiguïté sur les signes; les formules sont d'ailleurs absolument générales et les signes attribués par le calcul aux quantités géométriques qui y figurent indiquent précisément dans chaque cas particulier comment doit être envisagée la courbure de la surface de référence (O).

Soit O un point de (O) défini par les paramètres u, v de deux courbes (u) et (v) orthogonales, tracées sur (O) et qui le contiennent. Prenons pour axes instantanés OX, OY, OZ les tangentes en O aux courbes (v), (u) et la normale à (O). Nous compterons les longueurs positives et négatives comme d'habitude.

Une surface (M) correspond point par point à (O). On définit à chaque instant M par rapport à O en fixant ses coordonnées ξ, η, ζ par rapport à OX, OY, OZ. Si l'on donne aux paramètres u et v les accroissements du et dv, on passe de O en O′ et de M en M′; les coordonnées de M′ par rapport aux axes O′X′, O′Y′, O′Z′ sont $\xi + \Delta\xi$,

$\eta+\Delta\eta$, $\zeta+\Delta\zeta$; par rapport aux axes OX, OY, OZ, elles sont $\xi+\Delta X$, $\eta+\Delta Y$, $\zeta+\Delta Z$. On remarquera que ΔX, ΔY, ΔZ sont les projections de MM′ sur les axes OX, OY, OZ; il s'agit de les déterminer. Pour y arriver, menons par le point O′ des parallèles $O'X_1$, $O'Y_1$, $O'Z_1$ aux droites OX, OY, OZ; désignons par X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées de M′ par rapport à ces nouveaux axes; on a

$$X_1=(\xi+\Delta\xi)\cos(X'X_1)+(\eta+\Delta\eta)\cos(Y'X_1)+(\zeta+\Delta\zeta)\cos(Z'X_1),$$
$$Y_1=(\xi+\Delta\xi)\cos(X'Y_1)+(\eta+\Delta\eta)\cos(Y'Y_1)+(\zeta+\Delta\zeta)\cos(Z'Y_1),$$
$$Z_1=(\xi+\Delta\xi)\cos(X'Z_1)+(\eta+\Delta\eta)\cos(Y'Z_1)+(\zeta+\Delta\zeta)\cos(Z'Z_1).$$

Cherchons la valeur des neuf cosinus.

10. *Forme nécessaire des équations de transformation des coordonnées instantanées.* — Menons par le centre d'une sphère de rayon égal à l'unité des parallèles aux droites OX, OY, OZ, et O′X′, O′Y′, O′Z′, qui rencontreront la surface de cette sphère aux points XYZ et X′Y′Z′; traçons les grands cercles ZY, YX, XZ et Z′Y′, Y′X′, X′Z′, puis prolongeons-les jusqu'à leurs rencontres mutuelles aux environs des trois sommets X, Y, Z. On obtient les quadrilatères $ZZ'ab$, $YY'dc$, $XX'ef$ qui, si l'on néglige les infiniment petits du second ordre, sont des rectangles. Dès lors, à cette approximation on peut écrire (et ceci définit la situation des points a, b, c, d, e, f)

$$ad=ZY,\qquad bc=ZX,\qquad de=X'Y',$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} dY' &= aZ' = cY = bZ,\\ eX' &= bZ' = fX = aZ,\\ dY &= eX = cY' = fX'. \end{aligned}$$

Évaluons à présent les neuf cosinus :

$\cos(X'X)$. — L'angle X′X étant infiniment petit du premier ordre, on pose

$$\cos(X'X)=1.$$

$\cos(Y'X)$. — On peut le remplacer par $\cos(Xd)$ parce que Xd ne diffère de l'arc de grand cercle passant par X et Y' que d'un infiniment petit du second ordre, mais Xd a pour valeur $\frac{\pi}{2} + Yd$: donc

$$\cos(Xd) = -\sin(Yd) = Yd,$$
$$\cos(Y'X) = Yd.$$

$\cos(Z'X)$. — On peut le remplacer par $\cos(aX)$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{2} - aZ\right)$: donc

$$\cos(Z'X) = aZ.$$

En opérant de même sur les six autres cosinus, on voit que

$$\begin{aligned}
\cos(X'Y) &= eX = dY,\\
\cos(Y'Y) &= 1,\\
\cos(Z'Y) &= aZ' = bZ,\\
\cos(X'Z) &= Xf = aZ,\\
\cos(Y'Z) &= Yc = -bZ,\\
\cos(Z'Z) &= 1.
\end{aligned}$$

Substituant dans les valeurs de X_1, Y_1, Z_1, il vient

$$\begin{aligned}
X_1 &= \xi + \Delta\xi - (\eta + \Delta\eta)\,Yd + (\zeta + \Delta\zeta)\,aZ,\\
Y_1 &= \eta + \Delta\eta + (\xi + \Delta\xi)\,Yd + (\zeta + \Delta\zeta)\,bZ,\\
Z_1 &= \zeta + \Delta\zeta - (\xi + \Delta\xi)\,aZ - (\eta + \Delta\eta)\,bZ,
\end{aligned}$$

et l'on remarquera qu'il n'y entre que trois éléments Yd, aZ, bX; ceux-ci sont infiniment petits du premier ordre et fonctions de du, dv; dès lors, on est assuré qu'ils sont de la forme

$$\begin{aligned}
Yd &= M\,du + N\,dv,\\
aZ &= P\,du + C\,dv,\\
bZ &= Q\,dv + C'\,du,
\end{aligned}$$

où M, N, P, Q, C, C′ représentent six nouveaux coefficients fonctions de u et v, dont la signification géométrique n'est pas encore connue, mais qu'il importe peu de rechercher pour le moment.

Substituons les valeurs qui précèdent à celles de $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ dans les valeurs de X_1, Y_1 et Z_1, puis remarquons que

$$\Delta X = X_1 - \xi + f\,du, \qquad \Delta Y = Y_1 - \eta + g\,dv, \qquad \Delta Z = Z_1 - \zeta,$$

si l'on pose

$$dS^2 = \overline{OO'}^2 = f^2 du^2 + g^2 dv^2,$$

et nous trouvons les formules fondamentales

$$\Delta X = du\left(f + \frac{d\xi}{du} - M\eta + P\zeta\right) + dv\left(\frac{d\xi}{dv} - N\eta + C\zeta\right),$$

$$\Delta Y = dv\left(g + \frac{d\eta}{dv} + N\xi + Q\zeta\right) + du\left(\frac{d\eta}{du} + M\xi + C'\zeta\right),$$

$$\Delta Z = du\left(\frac{d\zeta}{du} - P\xi - C'\eta\right) + dv\left(\frac{d\zeta}{dv} - Q\eta - C\xi\right).$$

11. *Relations liant entre eux les coefficients des valeurs des* Δ. — Avant d'aller plus loin, il importe de trouver quelles sont les relations qui lient entre eux les six coefficients et les quantités f et g. On y parvient sans sortir de la méthode même que nous étudions, c'est-à-dire sans recourir à des systèmes de coordonnées étrangers à la question.

Au lieu de chercher la surface lieu du point M, supposons-la connue et aussi simple que possible, c'est-à-dire réduite à un point; il est manifeste que les quantités ΔX, ΔY, ΔZ doivent être constamment nulles, dans cette hypothèse, et quels que soient les accroissements du, dv; on a donc

$$f + \frac{d\xi}{du} - M\eta + P\zeta = 0,$$

$$g + d\eta + N\xi + Q\zeta = 0$$

et

$$\frac{d\xi}{dv} - \mathrm{N}\eta + \mathrm{C}\zeta = 0,$$

$$\frac{d\eta}{du} + \mathrm{M}\xi + \mathrm{C}'\zeta = 0,$$

$$\frac{d\zeta}{du} - \mathrm{P}\xi - \mathrm{C}'\eta = 0,$$

$$\frac{d\zeta}{dv} - \mathrm{Q}\eta - \mathrm{C}\xi = 0.$$

Exprimons que les valeurs déduites de ces équations pour $\frac{d^2\xi}{du\,dv}$, $\frac{d^2\eta}{du\,dv}$, $\frac{d^2\zeta}{du\,dv}$ (qui peuvent être obtenues de deux manières) sont égales, il vient, après un calcul élémentaire,

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dv} + \mathrm{M}g + \eta\left(\mathrm{PQ} - \mathrm{CC}' - \frac{d\mathrm{M}}{dv} + \frac{d\mathrm{N}}{du}\right) \\
&\qquad\qquad + \zeta\left(\frac{d\mathrm{P}}{dv} - \mathrm{NC}' - \frac{d\mathrm{C}}{du} + \mathrm{MQ}\right) = 0, \\
&\frac{dg}{du} - \mathrm{N}f + \xi\left(\mathrm{PQ} - \mathrm{CC}' + \frac{d\mathrm{N}}{du} - \frac{d\mathrm{M}}{dv}\right) \\
&\qquad\qquad + \zeta\left(\frac{d\mathrm{Q}}{du} + \mathrm{MC} - \frac{d\mathrm{C}'}{dv} - \mathrm{NP}\right) = 0, \\
&-\mathrm{C}f + \mathrm{C}'g + \eta\left(-\mathrm{PN} - \frac{d\mathrm{C}'}{dv} + \mathrm{CM} + \frac{d\mathrm{Q}}{du}\right) \\
&\qquad\qquad - \xi\left(\frac{d\mathrm{P}}{dv} - \mathrm{NC}' - \frac{d\mathrm{C}}{du} + \mathrm{MQ}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ces nouvelles équations, si elles n'étaient identiques, conduiraient à un seul système de valeurs de ξ, η, ζ, c'est-à-dire qu'il n'y aurait qu'un seul point dans l'espace. Pour qu'il y en ait une infinité, on doit avoir

$$\mathrm{M} = -\frac{df}{g\,dv},$$

$$\mathrm{N} = \frac{dg}{f\,du},$$

$$\mathrm{C}f = \mathrm{C}'g.$$

et

$$PQ - CC' - \frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du} = 0,$$
$$\frac{dP}{dv} - NC' - \frac{dC}{du} + MQ = 0,$$
$$\frac{dQ}{du} + MC - \frac{dC'}{dv} - NP = 0.$$

Telles sont les relations qui lient entre eux les six coefficients. Je renvoie au travail de M. Bonnet pour démontrer que, si ces équations sont vérifiées, la surface existe et qu'elle est unique.

12. *Valeurs définitives des* Δ, *équations de condition.* — En tenant compte de ce qui précède, on voit que les formules fondamentales peuvent s'écrire définitivement

$$(\text{F})\quad \begin{cases} \Delta X = du\left(f + \dfrac{d\xi}{du} + \dfrac{df}{g\,dv}\eta + P\zeta\right) + dv\left(\dfrac{d\xi}{dv} - \dfrac{dg}{f\,du}\eta - gD\zeta\right), \\ \Delta Y = du\left(\dfrac{d\eta}{du} - \dfrac{df}{g\,dv}\xi - fD\zeta\right) + dv\left(g + \dfrac{d\eta}{dv} + \dfrac{dg}{f\,du}\xi + Q\zeta\right), \\ \Delta Z = du\left(\dfrac{d\zeta}{du} - P\xi + fD\eta\right) + dv\left(\dfrac{d\zeta}{dv} - Q\eta + gD\xi\right), \end{cases}$$

pourvu que l'on pose

$$Cf = C'g = fgD.$$

Indépendamment de f et g il n'y entre plus que trois fonctions P, Q, D qui satisfont aux équations de condition

$$(\varphi)\quad \begin{cases} PQ - fgD^2 + \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{df}{g\,dv}\right) + \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dg}{f\,du}\right) = 0. \\ \dfrac{dP}{dv} + g\dfrac{dD}{du} + 2\dfrac{dg}{du}D - \dfrac{df}{g\,dv}Q = 0, \\ \dfrac{dQ}{du} + f\dfrac{dD}{dv} + 2\dfrac{df}{dv}D - \dfrac{dg}{f\,du}P = 0; \end{cases}$$

ce sont les formules de Codazzi.

13. *Coordonnées d'un même point par rapport à deux trièdres successifs.* — Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, constamment il faut, connaissant les coordonnées d'un point par rapport aux axes O'X', O'Y', O'Z', les exprimer en fonction de ses coordonnées par rapport aux axes primitifs OX, OY, OZ.

Désignons par X', Y', Z' les coordonnées du point M par rapport aux axes O'X', O'Y', O'Z' et par X, Y, Z ses coordonnées par rapport à OX, OY, OZ; on obtiendra visiblement les relations cherchées en égalant à zéro ΔX, ΔY, ΔZ, dans les formules trouvées plus haut, remplaçant ξ, η, ζ par X, Y, Z, $\Delta\xi$ par $X'-X$, $\Delta\eta$ par $Y'-Y$, $\Delta\zeta$ par $Z'-Z$. Il vient ainsi

$$(\Phi)\quad\left\{\begin{aligned} X' &= -f\,du + X + Y\left(-\frac{df}{g\,dv}du + \frac{dg}{f\,du}dv\right) + Z(-P\,du + gD\,dv),\\ Y' &= -g\,dv + X\left(-\frac{dg}{f\,du}dv + \frac{df}{g\,dv}du\right) + Y + Z(-Q\,dv + fD\,du),\\ Z' &= X(P\,du - gD\,dv) + Y(Q\,dv - fD\,du) + Z.\end{aligned}\right.$$

Les trois systèmes de formules que nous venons d'établir forment les prémisses constamment invoquées de la *Géométrie autour des surfaces;* aussi, pour simplifier le langage, les désignons-nous par les lettres d'ordre (F), (φ), (Φ).

14. *Recherche par la Géométrie autour des surfaces et empiriquement des coefficients des valeurs des* Δ. — Il convient actuellement de rechercher la signification des coefficients P, Q, D; ceux-ci dépendent manifestement de la courbure des lignes (v) et (u) qui se croisent en O, et, comme ces courbures résultent immédiatement de la connaissance des droites polaires de (v) et (u), on est conduit à rechercher les équations de ces droites.

La polaire de la courbe (v) est, à la limite, l'intersection de deux plans normaux (infiniment voisins) à cette courbe.

L'équation du plan normal en O est

$$X = 0.$$

Celle du plan normal infiniment voisin quand on se déplace sur (v),

u variant seul, est

$$X' = -f\,du + X - Y\frac{df}{g\,dv}\,du - ZP\,du = 0.$$

De telle sorte que la seconde équation de la polaire comprise dans le plan normal à (v) est

$$f + Y\frac{df}{g\,dv} + ZP = 0.$$

Le point où cette droite perce le plan tangent [centre de courbure géodésique de (v)] est défini par les équations

$$X = 0, \qquad f + Y\frac{df}{g\,dv} = 0.$$

Le point où elle rencontre la normale à la surface de référence [centre de courbure de la section normale tangente à (v)] est déterminé par les équations

$$X = 0, \qquad f + ZP = 0.$$

On voit que $+\frac{f}{P}$ est le rayon de courbure de la section normale tangente à (v).

On objectera sans doute que nous faisons appel à des notions de Géométrie; mais, si l'on y voit quelque inconvénient, il est très facile d'y suppléer en cherchant directement, et d'après leur définition même, les courbures de la section normale et de la projection de (v) sur le plan tangent, par nos procédés. Il nous paraît inutile de rétablir ici des résultats tout à fait élémentaires, qu'on démontre avec une égale facilité, quel que soit le système de démonstration.

Nous donnerons pourtant la valeur du coefficient D, afin d'indiquer dès à présent comment on peut se servir des formules (F).

Portons sur les normales à (O) suivant (v) une longueur constante ζ; il vient, ξ et η étant nuls,

$$\Delta Y = -du\,f D\zeta;$$

mais $\frac{\Delta Y}{\zeta}$ est l'angle que la normale en O′ fait avec le plan ZOX; $f du$ est la distance OO′; — D est donc le quotient de ces deux quantités, ou le *paramètre de déviation* suivant (v) (Bertrand).

15. *Condition pour que deux directions suivies soient conjuguées.* — Nous terminerons ce Chapitre en établissant la condition pour que deux directions issues de O et définies par les accroissements du, dv, du', dv' soient conjuguées, condition dont nous nous servirons à chaque instant.

L'équation du plan tangent en O′ à la surface de référence est

$$Z' = X(P\,du - g\,D\,dv) + Y(Q\,dv - f\,D\,du) + Z = 0,$$

qui conduit pour les équations de la conjuguée de OO′ à

$$Z = 0, \qquad X(P\,du - g\,D\,dv) + Y(Q\,dv - f\,D\,du) = 0:$$

mais on a

$$\frac{X}{f\,du'} = \frac{Y}{g\,dv'};$$

il vient, après substitution,

$$(2) \qquad du\,du'\,f\,P - fg\,D(du'\,dv + du\,dv') + dv\,dv'\,g\,Q = 0,$$

qui est la relation cherchée.

CHAPITRE II.

ÉTABLISSEMENT DES FORMULES FONDAMENTALES, LORSQUE LE RÉSEAU (u, v) N'EST PAS ORTHOGONAL.

16. *Les valeurs des Δ ont la même forme que dans l'autre cas.* — Il est parfois très avantageux d'introduire dans les calculs un réseau non orthogonal (u, v) tracé sur la surface de référence, mais les formules de Géométrie à trois dimensions sont trop compliquées lorsqu'on prend des axes obliques; aussi, dans ce qui va suivre, exécuterons-nous les opérations géométriques par rapport à un trièdre trirectangle tel que OZ soit normale à la surface de référence et que OX, OY soient les bissectrices de l'angle que font entre elles les lignes (v) et (u).

Nous désignerons par θ le demi-angle dans lequel est compris l'axe des X. Lorsque les paramètres croissent de du et dv, le point O vient en O'; le dS^2 étant mis sous la forme

$$dS^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2 + 2fg\,du\,dv\cos 2\theta,$$

on a pour les distances dx, dy du point O' aux axes OY, OX

$$\begin{aligned} dx &= \cos\theta(f\,du + g\,dv),\\ dy &= \sin\theta(g\,dv - f\,du). \end{aligned}$$

Considérons maintenant un point M dont les coordonnées sont ξ, η, ζ par rapport aux axes instantanés OX, OY, OZ, les projections du déplacement MM' peuvent toujours s'écrire

$$\Delta X = dx + X_1 - \xi, \qquad \Delta Y = dy + Y_1 - \eta, \qquad \Delta Z = Z_1 - \zeta,$$

comme dans le Chapitre précédent. Rien ne s'oppose non plus à ce que l'on garde les valeurs de X_1, Y_1, Z_1 en fonction des six indéterminées M, N, P, Q, C, C'.

Il vient, après substitution,

$$(\mathrm{F'})\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta X &= du\left(f\cos\theta + \frac{d\xi}{du} - \eta M + \zeta P\right)\\ &\quad + dv\left(g\cos\theta + \frac{d\xi}{dv} - \eta N + \zeta C\right),\\ \Delta Y &= du\left(-f\sin\theta + \frac{d\eta}{du} + \xi M + \zeta C'\right)\\ &\quad + dv\left(g\sin\theta + \frac{d\eta}{dv} + \xi N + \zeta Q\right),\\ \Delta Z &= du\left(\frac{d\zeta}{du} - P\xi - C'\eta\right)\\ &\quad + dv\left(\frac{d\zeta}{dv} - Q\eta - C\xi\right), \end{aligned}\right.$$

équations qui diffèrent très peu de celles qui ont été trouvées plus haut. On les traitera de la même manière pour trouver les relations qui lient entre eux les coefficients.

17. *Relations entre les coefficients des* Δ. — Supposons donc que le point M soit immobile dans l'espace; ΔX, ΔY, ΔZ doivent être nuls, quels que soient du et dv. On a donc

$$f\cos\theta + \frac{d\xi}{du} - \eta M + \zeta P = 0,$$

$$g\cos\theta + \frac{d\xi}{dv} - \eta N + \zeta C = 0;$$

$$-f\sin\theta + \frac{d\eta}{du} + \xi M + \zeta C' = 0,$$

$$g\sin\theta + \frac{d\eta}{dv} + \xi N + \zeta Q = 0;$$

$$\frac{d\zeta}{du} - P\xi - C'\eta = 0,$$

$$\frac{d\zeta}{dv} - Q\eta - C\xi = 0.$$

On en déduit

$$\frac{d}{dv}(f\cos\theta) - \frac{d}{du}(g\cos\theta) + (Mg + Nf)\sin\theta + \eta$$
$$\times\left(-\frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du} + PQ - CC'\right) + \zeta\left(\frac{dP}{dv} - \frac{dC}{du} + MQ - C'N\right) = 0,$$

$$\frac{d}{du}(g\sin\theta) + \frac{d}{dv}(f\sin\theta) + (Mg - Nf)\cos\theta + \xi$$
$$\times\left(-\frac{dM}{dv} + \frac{dN}{du} + PQ - CC'\right) + \zeta\left(\frac{dQ}{du} - \frac{dC'}{dv} - NP + CM\right) = 0,$$

$$\sin\theta(gC' + fQ) + \cos\theta(Pg - Cf) - \xi$$
$$\times\left(\frac{dP}{dv} - \frac{dC}{du} + MQ - C'N\right) + \eta\left(\frac{dQ}{du} - \frac{dC'}{dv} - NP + CM\right) = 0;$$

et pour qu'il y ait une infinité de points dans l'espace, il faut que

$$(\varphi')\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{d}{dv}(f\cos\theta)-\frac{d}{du}(g\cos\theta)+(\mathrm{M}g+\mathrm{N}f)\sin\theta=0,\\&\frac{d}{du}(g\sin\theta)+\frac{d}{dv}(f\sin\theta)+(\mathrm{M}g-\mathrm{N}f)\cos\theta=0;\\&-\frac{d\mathrm{M}}{dv}+\frac{d\mathrm{N}}{du}+\mathrm{PQ}-\mathrm{CC}'=0,\\&\frac{d\mathrm{P}}{dv}-\frac{d\mathrm{C}}{du}+\mathrm{MQ}-\mathrm{C}'\mathrm{N}=0,\\&\frac{d\mathrm{Q}}{du}-\frac{d\mathrm{C}'}{dv}-\mathrm{NP}+\mathrm{CM}=0;\\&\sin\theta(g\mathrm{C}'+f\mathrm{Q})+\cos\theta(\mathrm{P}g-\mathrm{C}f)=0.\end{aligned}\right.$$

Telles sont les relations liant entre eux les six coefficients; il n'échappera pas que ceux-ci ne peuvent plus avoir le même sens géométrique que dans les formules du Chapitre précédent.

18. *Coordonnées d'un point par rapport à deux trièdres successifs.* — On trouve pour X'Y'Z' les valeurs

$$(\Phi')\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{X}'&=(f\,du+g\,dv)\cos\theta\\&\quad+\mathrm{Y}(\mathrm{M}\,du+\mathrm{N}\,dv)-\mathrm{Z}(\mathrm{P}\,du+\mathrm{C}\,dv)+\mathrm{X},\\\mathrm{Y}'&=(f\,du-g\,dv)\sin\theta\\&\quad-\mathrm{X}(\mathrm{M}\,du+\mathrm{N}\,dv)-\mathrm{Z}(\mathrm{Q}\,dv+\mathrm{C}'\,du)+\mathrm{Y},\\\mathrm{Z}'&=\mathrm{X}(\mathrm{P}\,du+\mathrm{C}\,dv)+\mathrm{Y}(\mathrm{Q}\,dv+\mathrm{C}'\,du)+\mathrm{Z}.\end{aligned}\right.$$

19. *Condition pour que deux directions soient conjuguées. Cas où le réseau (u, v) devient celui des asymptotiques de la surface de référence.* — Cherchons la condition pour que deux directions (du, dv) (du', dv') soient conjuguées.

Les équations de la droite conjuguée de OO' sont

$$\mathrm{Z}=\mathrm{Z}'=0,$$

$$\mathrm{X}(\mathrm{P}\,du+\mathrm{C}\,dv)+\mathrm{Y}(\mathrm{Q}\,dv+\mathrm{C}'\,du)=0:$$

mais, si l'on considère la direction conjuguée comme définie par les accroissements du', dv', il faut poser

$$\frac{X}{(f\,du' + g\,dv')\cos\theta} = \frac{Y}{(g\,dv' - f\,du')\sin\theta}.$$

D'où résulte la condition cherchée

$$\begin{aligned} &f(P\cos\theta - C'\sin\theta)\,du\,du' + g(Q\sin\theta + C\cos\theta)\,dv\,dv' \\ &\quad + g(P\cos\theta + C'\sin\theta)\,du\,dv' - f(Q\sin\theta - C\cos\theta)\,dv\,du' = 0. \end{aligned}$$

En particulier, l'équation des asymptotiques est donnée par la formule

$$\begin{aligned} &f(P\cos\theta - C'\sin\theta)\,du^2 + g(Q\sin\theta + C\cos\theta)\,dv^2 \\ &\quad + [g(P\cos\theta + C'\sin\theta) - f(Q\sin\theta - C\cos\theta)]\,du\,dv = 0. \end{aligned}$$

On exprimera que le réseau (u, v) est celui des asymptotiques de la surface de référence en posant

$$\begin{aligned} P\cos\theta - C'\sin\theta &= 0, \\ Q\sin\theta + C\cos\theta &= 0; \end{aligned}$$

mais la dernière des équations (φ') pouvant s'écrire

$$f(Q\sin\theta - C\cos\theta) + g(P\cos\theta + C'\sin\theta) = 0,$$

on voit que l'on peut poser

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} C &= g\sin\theta.H^2, \\ C' &= f\cos\theta.H^2, \\ P &= f\sin\theta.H^2, \\ Q &= -g\cos\theta.H^2. \end{aligned} \right.$$

20. *Ce que deviennent les équations de condition.* — Dans ce cas particulier les formules (φ') se simplifient; déjà la dernière a disparu. Si l'on remplace C, C′, P et Q par leurs nouvelles valeurs, tenant compte des deux premières, on peut substituer aux deux suivantes ces formules remarquables

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{df}{f\,dv} + \frac{dH}{H\,dv} + \frac{g}{f}\frac{dH}{H\,du}\cos 2\theta = 0,\\ &\frac{dg}{g\,du} + \frac{dH}{H\,du} + \frac{f}{g}\frac{dH}{H\,dv}\cos 2\theta = 0. \end{aligned}$$

M et N sont déterminés individuellement comme il suit :

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &g\sin 2\theta\left(\mathrm{M} + \frac{d\theta}{du}\right) + \frac{df}{dv} - \frac{dg}{du}\cos 2\theta = 0,\\ &f\sin 2\theta\left(-\mathrm{N} + \frac{d\theta}{dv}\right) + \frac{dg}{du} - \frac{df}{dv}\cos 2\theta = 0. \end{aligned} \right.$$

Il en résulte pour la troisième des équations (φ'), en remplaçant 2θ par ω,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2\omega}{du\,dv} - \frac{d^2\log fg}{du\,dv}\cos\omega\\ &\quad + \left[\frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du}\right)\right]\frac{1}{\sin\omega} - fg\mathrm{H}^2\sin\omega\\ &\quad + \frac{1}{\sin^2\omega}\frac{d\omega}{dv}\left(-\frac{df}{g\,dv}\cos\omega + \frac{dg}{g\,du}\right)\\ &\quad + \frac{1}{\sin^2\omega}\frac{d\omega}{du}\left(-\frac{dg}{f\,du}\cos\omega + \frac{df}{g\,dv}\right) = 0; \end{aligned} \right.$$

on remarquera que

$$\frac{dH}{H\,du} + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(-\frac{df}{g\,dv}\cos\omega + \frac{dg}{g\,du}\right) = 0.$$

$$\frac{dH}{H\,dv} + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(-\frac{dg}{f\,du}\cos\omega + \frac{df}{f\,dv}\right) = 0.$$

21. *Ce que signifient les coefficients des valeurs des* Δ. *Recherche par la Géométrie autour des surfaces. Théorème sur les lignes asymptotiques des surfaces applicables sur la sphère.* — Il nous reste à trouver, dans l'hypothèse particulière où nous nous plaçons, quelles sont les valeurs des éléments qui définissent la courbure de la surface de référence.

Il est facile de trouver les rayons de courbure principaux; en effet, la courbe tangente à OX est une ligne de courbure; son équation est

$$dy = g\,dv - f\,du = 0.$$

On sait que le centre de courbure principal correspondant est l'intersection de OZ avec le plan normal à cette ligne de courbure et infiniment voisin de O; il faut donc écrire

$$X = Y = X' = 0,$$

c'est-à-dire

$$+(f\,du + g\,dv)\cos\theta + Z(P\,du + Q\,dv) = 0,$$

d'où l'on déduit pour le Z du centre de courbure principal

$$Z_1 = -\frac{\cot\theta}{H^2}.$$

On trouve de la même façon pour le second centre de courbure principal

$$Z_2 = \frac{\tang\theta}{H^2}.$$

La fonction H a donc un sens géométrique très précis, car

$$-Z_1 Z_2 = \frac{1}{H^4}.$$

H^4 *changé de signe représente la courbure de la surface de référence en* O, dans le sens admis par Gauss (¹).

(¹) Les asymptotiques des surfaces à courbure constante jouissent d'une propriété remarquable qui résulte immédiatement des formules établies ci-dessus. Pour ces surfaces, H est constant : on a donc

$$\frac{df}{dv} = \frac{dg}{du} = 0.$$

D'où résulte qu'en choisissant convenablement les paramètres u et v, on peut

Dans la théorie qui nous occupe, les courbures des lignes asymptotiques jouent un rôle important : aussi convient-il de les calculer.

Si l'on considère l'asymptotique $dv = 0$, l'équation de son plan normal est, en O,

$$X \cos\theta - Y \sin\theta = 0;$$

pour trouver son centre de courbure, il suffira de chercher l'intersection de sa polaire avec le plan tangent en O; or, la polaire est l'inter-

---

prendre l'unité pour f et g; le ds^2 est donc

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos\omega.$$

On en déduit sans peine que :

Si l'on forme, avec quatre lignes asymptotiques sur une surface à courbure constante, un quadrilatère, les côtés opposés ont toujours des longueurs égales.

Pour trouver les surfaces dont il est question, il faudrait intégrer

$$\frac{d^2\omega}{du\,dv} = H^4 \sin\omega.$$

Le plan correspond à un cas limite, dans lequel le problème se résout, car, H étant nul, on a

$$\frac{d^2\omega}{du\,dv} = 0,$$

par conséquent

$$\omega = F(u) + \Phi(v),$$

où F et Φ sont deux fonctions arbitraires.

Le ds^2 du plan prend la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\,du\,dv \cos[F(u) + \Phi(v)].$$

Cette intégrale donne la solution du problème :

Trouver sur le plan tous les réseaux de courbes telles que, si l'on forme un quadrilatère avec deux courbes de chaque famille, les côtés opposés soient égaux.

On vérifie facilement que, tout le long d'une des courbes de cette espèce, les rayons de courbure de toutes les courbes de la seconde famille sont égaux.

section du plan normal en O avec le plan infiniment voisin qui a pour équation

$$X'\left(\cos\theta - \sin\theta\frac{d\theta}{du}du\right) - Y'\left(\sin\theta + \cos\theta\frac{d\theta}{du}du\right) = 0.$$

Revenant aux premiers axes et ne conservant que les infiniment petits du premier ordre, il vient

$$\left(M - \frac{d\theta}{du}\right)(X\sin\theta + Y\cos\theta) - f = 0,$$

d'où résulte, en désignant par ρ_v le rayon de courbure,

$$M - \frac{d\theta}{du} = \frac{f}{\rho_v}.$$

De même, en désignant par ρ_u le rayon de courbure de la seconde asymptotique, on trouve

$$N + \frac{d\theta}{dv} = \frac{g}{\rho_u}.$$

CHAPITRE III.

RECHERCHE DES SYSTÈMES TRIPLEMENT ORTHOGONAUX. FORMULES FONDAMENTALES POUR LA CORRESPONDANCE DE DEUX ESPACES.

22. *Trouver les surfaces telles qu'un réseau conjugué, tracé sur elles, se projette suivant le réseau des lignes de courbure de la surface de référence.* — Avant d'aborder la théorie générale des systèmes triplement orthogonaux, il nous faut résoudre le problème suivant :

Trouver les surfaces (S) *telles que les développables lieux de normales à la surface de référence* (O) *les découpent suivant des réseaux conjugués.*

Prenons pour réseau (u, v) celui des lignes de courbure de (O) et désignons par l la longueur du segment de la normale compté à partir de O jusqu'à la rencontre de (S) en S; il s'agit de trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait l.

Les coordonnées instantanées du point S sont

$$\xi = \eta = 0, \qquad \zeta = l,$$

D est nul; on a donc pour les formules (F) le système

$$\Delta X = du(f + Pl),$$
$$\Delta Y = dv(g + Ql),$$
$$\Delta Z = du\frac{dl}{du} + dv\frac{dl}{dv}.$$

L'équation du plan tangent à (S) en S est dès lors

$$Z - l = \frac{\frac{dl}{du}}{f + Pl}X + \frac{\frac{dl}{dv}}{g + Ql}Y.$$

Il faut exprimer que sa caractéristique dans l'hypothèse $dv = 0$ coïncide avec le segment décrit par S dans l'hypothèse $du = 0$. Il suffit, évidemment, de considérer la parallèle à la caractéristique menée par l'origine : on supprimera donc les termes indépendants de X, Y, Z dans l'équation de la seconde position du plan tangent à (S). On écrira

$$Z' = \left[\frac{\frac{dl}{du}}{f + Pl} + \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dl}{du}}{f + Pv}\right)du\right]X'$$
$$+ \left[\frac{\frac{dl}{dv}}{g + Ql} + \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dl}{dv}}{g + Ql}\right)du\right]Y'.$$

Substituant les valeurs de Z', X', Y',

$$Z' = P\,du\,X + Z,$$
$$X' = -f\,du + X - \frac{df}{g\,dv}du\,Y - P\,du\,Z$$
$$Y' = \frac{df}{g\,dv}du\,X + Y.$$

et réduisant, comme il a été dit, on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{P}X = & -\frac{\frac{dl}{du}}{f+\mathrm{P}l}\left(\frac{df}{g\,dv}Y + \mathrm{P}Z\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dl}{du}}{f+\mathrm{P}l}\right)X \\ & + \frac{\frac{dl}{dv}}{g+\mathrm{Q}l}\left(\frac{df}{g\,dv}\right)X + \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dl}{dv}}{g+\mathrm{Q}l}\right)Y.\end{aligned}$$

Cette équation doit être satisfaite par les valeurs

$$X = \Delta X = 0, \qquad Y = \Delta Y = dv(g+\mathrm{Q}l), \qquad Z = \Delta Z = dv\frac{dl}{dv},$$

qui correspondent au déplacement de S dans l'hypothèse $du = 0$.

De telle sorte qu'il reste

$$-\frac{\frac{dl}{du}}{f+\mathrm{P}l}\left[\frac{df}{g\,dv}(g+\mathrm{Q}l) + \mathrm{P}\frac{dl}{dv}\right] + \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{dl}{dv}}{g+\mathrm{Q}l}\right)(g+\mathrm{Q}l) = 0.$$

Développant et tenant compte de la condition exprimée par l'une des formules (9),

$$\frac{df}{g\,dv}\mathrm{Q} = \frac{d\mathrm{P}}{dv},$$

on trouve l'équation définitive

$$(7) \qquad \frac{d^2 l}{du\,dv} = \frac{dl}{dv}\frac{d}{du}\log(g+\mathrm{Q}l) + \frac{dl}{du}\frac{d}{dv}\log(f+\mathrm{P}l).$$

On voit avec quelle simplicité se traite le problème; il suffit de cet exemple déjà compliqué pour faire voir tout l'avantage d'une méthode qui supprime les difficultés de signes et rend inutiles tous les efforts géométriques directs qui n'ont pas trait au fond même de la question. D'un autre côté, l'emploi d'une méthode uniforme de recherche rend infiniment plus sûres et plus rapides les investigations; il permet d'exposer les résultats obtenus, sans efforts.

On peut vérifier l'équation (7) par quelques exemples évidents: ainsi les surfaces parallèles à (O) et les deux nappes de la développée de (O) sont évidemment des surfaces (S); on voit, en effet, que l'équation est vérifiée pour

$$l = \text{const.},\qquad g + Ql = 0,\qquad f + Pl = 0.$$

23. *Cas où la surface est infiniment voisine de la surface de référence.* — Nous reviendrons plus loin sur le problème en question; pour le moment nous considérerons seulement le cas où la surface (S) est infiniment voisine de la surface de référence. On peut, dans ce cas, poser

$$l = \mathrm{H}\,d\rho,$$

où $d\rho$ désigne un infiniment petit du premier ordre constant; ce sera, si l'on veut, l'accroissement d'un paramètre donnant consécutivement les surfaces (O) et (S) comme faisant partie d'une même famille.

Si l'on substitue la valeur de l dans (7) en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier, il vient

$$(8)\qquad \frac{d^2\mathrm{H}}{du\,dv} = \frac{d\mathrm{H}}{du}\,\frac{df}{f\,dv} + \frac{d\mathrm{H}}{dv}\,\frac{dg}{g\,du},$$

équation linéaire par rapport à H.

24. *Définition particulière des systèmes triplement orthogonaux. Variation du $d\mathrm{S}^2$ en passant d'une surface à la surface infiniment voisine. Théorème de M. Dupin.* — Abordons maintenant l'étude des systèmes triplement orthogonaux.

Considérons trois familles de surfaces telles qu'une surface quelconque d'entre elles coupe toutes les autres à angle droit et désignons par [A], [B], [C] les familles; soit (O) l'une des surfaces de [A]; les traces des surfaces [B] et [C] sur (O) constituent un réseau orthogonal que nous prendrons pour réseau (u, v).

Pour que le système existe, il faut que, si l'on prend la surface (S) infiniment voisine de (O) et appartenant à [A], les normalies menées le long des courbes du réseau (u, v) découpent sur (S) un réseau orthogonal.

De même, il faudra pouvoir passer de (S) dans les mêmes conditions à une seconde surface infiniment voisine et appartenant à [A].

Si les opérations réussissent consécutivement sur toutes les surfaces de [A], il est clair que le système triple orthogonal existe.

Pour obtenir la surface (S) portons sur les normales à (O) une longueur $H\,d\rho$ fonction de u et v, $d\rho$ désignant l'accroissement du paramètre des surfaces [A] quand on passe de (O) en (S).

Calculons le dS^2 de la surface (S); on a pour les formules (F) dans l'espèce

$$\begin{aligned}
\Delta X &= du(f + PH\,d\rho) - dv\,g\,DH\,d\rho,\\
\Delta Y &= du\,f\,DH\,d\rho + dv(g + QH\,d\rho),\\
\Delta Z &= du\,\frac{dH}{du}\,d\rho + dv\,\frac{dH}{dv}\,d\rho.
\end{aligned}$$

D'où résulte facilement le dS^2; mais nous n'avons qu'à considérer le terme en $du\,dv$ de cette expression : il est

$$2\,du\,dv\left\{-2fg\,DH\,d\rho + H^2\,d\rho^2\left[\frac{dH}{H\,du}\,\frac{dH}{H\,dv} - D(Pg + Qf)\right]\right\}.$$

On remarquera que nous avons fait le calcul comme si $H\,d\rho$ était une quantité de grandeur finie, c'est-à-dire comme si (S) n'était pas infiniment voisine de (O). Pour que l'image du réseau (u, v) sur (S) soit un réseau orthogonal, il faut et il suffit que le terme en $du\,dv$ soit nul et, si nous supposons encore $H\,d\rho$ fini, que

$$-2fgD + HD\rho\left[\frac{dH}{H\,du}\,\frac{dH}{H\,dv} - D(Pg + Qf)\right] = 0.$$

Il est clair que le premier membre de cette équation représente le coefficient de $du\,dv$ dans l'expression

$$\Delta\,\frac{dS^2}{H\,d\rho}.$$

Or ce coefficient doit tendre vers zéro en même temps que $d\rho$, ce qui n'est possible qu'autant que

$$D = 0.$$

Ainsi, *pour qu'il existe un système triplement orthogonal de* *surfaces, il faut que toutes les surfaces de deux familles coupent une surface quelconque de l'autre famille suivant ses lignes de courbure.*

C'est le théorème de M. Ch. Dupin.

25. *Équations définissant un système triplement orthogonal.* — Nous venons d'établir, en somme, qu'étant données deux surfaces infiniment voisines (S) et (O), si l'on mène à (O) les normalies principales, elles découpent (S) suivant un réseau que l'on peut considérer comme orthogonal, aux quantités du second ordre près.

Mais, pour que le système triple orthogonal existe, il faut que l'on puisse partir de (S) comme de (O), c'est-à-dire que l'image du réseau (u, v) sur (S) constitue le réseau des lignes de courbure de cette surface. Or ce réseau est déjà rectangulaire : il suffit donc d'exprimer qu'il est conjugué.

Il résulte du problème étudié au commencement de ce Chapitre que cette condition est exprimée par l'équation

$$\frac{d^2 H}{du\,dv} = \frac{dH}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{dH}{dv}\frac{dg}{g\,du}.$$

Les formules de Codazzi deviennent ici

$$PQ + \frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du}\right) = 0,$$

$$\frac{dP}{Q\,dv} - \frac{df}{g\,dv} = 0,$$

$$\frac{dQ}{P\,du} - \frac{dg}{f\,du} = 0.$$

On voit que, si ces quatre dernières équations se vérifient en tous les points des surfaces (A), le système triple orthogonal existe.

26. *Établissement des formules de Lamé. Quatre seulement sont nécessaires.* — Considérons maintenant le dS^2 de l'espace rapporté au système des trois familles et mis sous la forme

$$dS^2 = H^2\,d\rho^2 + H_1^2\,d\rho_1^2 + H_2^2\,d\rho_2^2;$$

en posant

$$\rho_1 = u, \qquad \rho_2 = v, \qquad H_1 = f, \qquad H_2 = g,$$

la première équation de condition devient

$$\frac{d^2 H}{d\rho_1\, d\rho_2} = \frac{dH}{d\rho_1}\frac{dH_1}{H_1\, d\rho_2} + \frac{dH}{d\rho_2}\frac{dH_2}{H_2\, d\rho_1};$$

mais il faut connaître les valeurs de P et Q en H, H_1, H_2 pour transformer les suivantes. Nous pourrions faire remarquer que le rayon de courbure géodésique sur (ρ_2) de la ligne de courbure tangente à OX est aussi le rayon de courbure de la section normale à (ρ) tangente à OX; mais cet artifice géométrique peut laisser les signes incertains; on trouvera sans doute plus satisfaisant le procédé que voici :

Quand on passe de (O) à (S), on a, pour l'accroissement du dS^2, l'expression

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\, dS^2}{H\, d\rho} = {} & du^2\left\{2fP + \left[\frac{1}{H}\left(\frac{dH}{du}\right)^2 + P^2 H\right] d\rho\right\}\\ & + dv^2\left\{2gQ + \left[\frac{1}{H}\left(\frac{dH}{dv}\right)^2 + Q^2 H\right] d\rho\right\},\end{aligned}$$

qui s'obtient en ajoutant les carrés de ΔX, ΔY, ΔZ. On peut la réduire à

$$\frac{\Delta}{2H\, d\rho}(dS^2) = du^2 fP + dv^2 gQ = d\rho_1^2 H_1 P + d\rho_2^2 H_2 Q;$$

mais, le dS^2 des surfaces (A) étant mis sous la forme

$$dS^2 = H_1^2\, d\rho_1^2 + H_2^2\, d\rho_2^2,$$

on trouve immédiatement

$$\frac{\Delta}{2H\, d\rho}(dS^2) = d\rho_1^2 \frac{H_1}{H}\frac{dH_1}{d\rho} + d\rho_2^2 \frac{-H_2}{H}\frac{dH_2}{d\rho}.$$

D'où résulte que l'on a

$$P = \frac{dH_1}{H\, d\rho},$$

$$Q = \frac{dH_2}{H\, d\rho}.$$

Substituons dans les formules de Codazzi et réunissons les quatre équations de condition nécessaires et suffisantes

$$
(\varphi'')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d^2 H}{d\rho_1\, d\rho_2} = \frac{dH}{d\rho_1}\,\frac{dH_1}{H_1\, d\rho_2} + \frac{dH}{d\rho_2}\,\frac{dH_2}{H_2\, d\rho_1},\\
&\frac{d^2 H_1}{d\rho_2\, d\rho} = \frac{dH_1}{d\rho_2}\,\frac{dH_2}{H_2\, d\rho} + \frac{dH_1}{d\rho}\,\frac{dH}{H\, d\rho_2},\\
&\frac{d^2 H_2}{d\rho\, d\rho_1} = \frac{dH_2}{d\rho}\,\frac{dH}{H\, d\rho_1} + \frac{dH_2}{d\rho_1}\,\frac{dH_1}{H_1\, d\rho},\\
&\frac{dH_1}{H\, d\rho}\,\frac{dH_2}{H\, d\rho} + \frac{d}{d\rho_1}\left(\frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\right) + \frac{d}{d\rho_2}\left(\frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\right) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Il est clair que, si l'on permute la dernière équation, on en obtiendra deux autres également vraies, mais on est assuré qu'elles se déduisent du système précédent, qui à lui seul définit les familles triples orthogonales.

27. *Établissement des Δ à trois variables.* — Il nous reste à trouver les formules fondamentales qui permettent d'établir la correspondance de deux espaces.

Un point M du second espace correspond au point O du premier: on se donne à chaque instant les coordonnées ξ, η, ζ de M par rapport au trièdre OX, OY, OZ tangent à trois surfaces orthogonales se coupant en O. Il s'agit de calculer les ΔX, ΔY, ΔZ, projections de MM' sur les trois axes, lorsque les paramètres ρ, ρ_1, ρ_2 s'accroissent de $d\rho$, $d\rho_1$, $d\rho_2$.

Supposons que, $d\rho$ et $d\rho_1$ restant nuls, ρ_2 croisse seul; on déduit immédiatement des formules (F),

$$
\begin{aligned}
\Delta X_2 &= d\rho_2\left(\frac{d\xi}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\,\eta\right),\\
\Delta Y_2 &= d\rho_2\left(H_2 + \frac{d\eta}{d\rho_1} + \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\,\xi + \frac{dH_2}{H\, d\rho}\,\zeta\right),\\
\Delta Z_2 &= d\rho_2\left(\frac{d\xi}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H\, d\rho}\,\eta\right);
\end{aligned}
$$

permutant deux fois consécutivement, il vient

$$\Delta Y = d\rho\left(\frac{d\eta}{d\rho} - \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\xi\right),$$
$$\Delta Z = d\rho\left(H + \frac{d\zeta}{d\rho_2} + \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\eta + \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\xi\right),$$
$$\Delta X = d\rho\left(\frac{d\xi}{d\rho} - \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\zeta\right),$$

puis

$$\Delta Z_1 = d\rho_1\left(\frac{d\zeta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H\, d\rho}\eta\right),$$
$$\Delta X_1 = d\rho_1\left(H_1 + \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{dH_1}{H\, d\rho}\zeta + \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\eta\right),$$
$$\Delta Y_1 = d\rho_1\left(\frac{d\eta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\xi\right).$$

Si les trois paramètres croissent en même temps, les Δ définitifs sont la somme des Δ partiels, de telle sorte que les formules fondamentales peuvent s'écrire

$$(\mathrm{F}'')\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta X &= d\rho\left(\frac{d\xi}{d\rho} - \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho_1\left(H_1 + \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{dH_1}{H\, d\rho}\zeta + \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\eta\right)\\
&\quad + d\rho_2\left(\frac{d\xi}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\eta\right),\\
\Delta Y &= d\rho\left(\frac{d\eta}{d\rho} - \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho_2\left(H_2 + \frac{d\eta}{d\rho_1} + \frac{dH_2}{H_1\, d\rho_1}\xi + \frac{dH_2}{H\, d\rho}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho_1\left(\frac{d\eta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H_2\, d\rho_2}\zeta\right),\\
\Delta Z &= d\rho_1\left(\frac{d\zeta}{d\rho_1} - \frac{dH_1}{H\, d\rho}\zeta\right)\\
&\quad + d\rho\left(H + \frac{d\zeta}{d\rho_2} + \frac{dH}{H_2\, d\rho_2}\eta + \frac{dH}{H_1\, d\rho_1}\xi\right)\\
&\quad + d\rho_2\left(\frac{d\zeta}{d\rho_2} - \frac{dH_2}{H\, d\rho}\eta\right).
\end{aligned}\right.$$

28. *Transformation de coordonnées en passant d'un trièdre au trièdre infiniment voisin.* — Nous déduirons ultérieurement les conséquences. Il suffira seulement de tirer de ce qui précède les formules de transformation pour terminer l'établissement des prémisses de notre travail.

$$\begin{aligned}
\Delta X &= 0, & \Delta\xi &= X' - X, & \xi &= X,\\
\Delta Y &= 0, & \Delta\eta &= Y' - Y, & \eta &= Y,\\
\Delta Z &= 0, & \Delta\zeta &= Z' - Z, & \zeta &= Z;
\end{aligned}$$

on trouve, tout calcul fait,

$$(\Phi'')\quad \left\{\begin{aligned}
X' &= X - H_1\,d\rho_1 - Y\left|\frac{dH_1}{H_2\,d\rho_2}\,d\rho_1 - \frac{dH_2}{H_1\,d\rho_1}\,d\rho_2\right|\\
&\qquad + Z\left|\frac{dH}{H_1\,d\rho_1}\,d\rho - \frac{dH_1}{H\,d\rho}\,d\rho_1\right|,\\
Y' &= Y - H_2\,d\rho_2 - Z\left|\frac{dH_2}{H\,d\rho}\,d\rho_2 - \frac{dH}{H_2\,d\rho_2}\,d\rho\right|\\
&\qquad + X\left|\frac{dH_1}{H_2\,d\rho_2}\,d\rho_1 - \frac{dH_2}{H_1\,d\rho_1}\,d\rho_2\right|,\\
Z' &= Z - H\,d\rho - X\left|\frac{dH}{H_1\,d\rho_1}\,d\rho - \frac{dH_1}{H\,d\rho}\,d\rho_1\right|\\
&\qquad + Y\left|\frac{dH_2}{H\,d\rho}\,d\rho_2 - \frac{dH}{H_2\,d\rho_2}\,d\rho\right|.
\end{aligned}\right.$$

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DES FAISCEAUX DE DROITES PARALLÈLES AUX NORMALES DE LA SURFACE DE RÉFÉRENCE.

29. *Équation de la variation du plan tangent à une surface élémentaire du faisceau.* — Nous étudierons tout d'abord les faisceaux de droites individuellement parallèles aux normales de la surface de référence (O).

Le réseau (u, v) sera orthogonal.

Lorsqu'on suit un chemin sur (O), les droites du faisceau forment une surface gauche élémentaire correspondant à la normalie qui a pour base la courbe suivant laquelle se déplace O.

Le plan tangent à cette surface gauche est fonction de la position du point de contact sur la droite ainsi que des paramètres du et dv. Désignons par θ l'angle qu'il fait avec le plan ZOX; soient ξ et η les coordonnées du point où la droite perce le plan XOY et ζ la hauteur du point de contact au-dessus de ce plan. Quelle que soit la variation de ζ, il est visible que

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X},$$

où ΔY et ΔX ont les valeurs habituelles; donc

$$(9)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{du\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\zeta\right) + dv\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right)}{du\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta + \mathrm{P}\zeta\right) + dv\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta - g\mathrm{D}\zeta\right)},$$

Telle est l'équation de la surface élémentaire; elle remplit analytiquement l'office de la droite auxiliaire dans les théories géométriques de M. Mannheim.

30. *Équation des distances focales.* — Nous désignerons la droite par (N), par M son point d'intersection avec le plan tangent en O; toutes les droites (N) constituent un faisceau qui enveloppe deux surfaces focales (A) et (B). Soient A et B les foyers situés sur (N). En ces points, les plans tangents aux surfaces élémentaires restent invariables, quels que soient les accroissements du et dv; on doit donc avoir

$$(10)\qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\dfrac{d\eta}{du} - \dfrac{df}{g\,dv}\xi - fD\zeta}{f + \dfrac{d\xi}{du} + \dfrac{df}{g\,dv}\eta + P\zeta} = \frac{g + \dfrac{d\eta}{dv} + \dfrac{dg}{f\,du}\xi + Q\zeta}{\dfrac{d\xi}{dv} - \dfrac{dg}{f\,du}\eta - gD\zeta};$$

remplaçant ζ par Z et ordonnant, il vient

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &Z^2(fgD^2 - PQ)\\ &\quad - Z\Big[fD\Big(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\Big) + gD\Big(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\Big)\\ &\qquad\quad + Pg + Qf + Q\Big(\frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\Big) + P\Big(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\Big)\Big]\\ &\quad + \Big(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\Big)\Big(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\Big)\\ &\qquad\quad - \Big(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\Big)\Big(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\Big) = 0. \end{aligned}\right.$$

31. *Équation des plans principaux.* — Si l'on suit certaines lignes sur (O), les droites (N) se rangent suivant des surfaces développables; le plan toujours tangent est le même tout le long de la génératrice, sauf à l'arête de rebroussement.

Il y a donc deux *plans tangents principaux,* tangents aux surfaces focales (A) et (B). On obtient leur équation en éliminant ζ entre les trois équations (10), ce qui donne

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\tang^2\theta\left[P\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) + gD\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\right]\\
&\quad + \tang\theta\left[-P\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right)\right.\\
&\qquad\qquad + Q\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\\
&\qquad\qquad \left. + fD\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) - gD\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\right]\\
&\qquad\qquad - Q\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) - fD\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

32. Nous appellerons ***images principales*** les courbes qu'il faut suivre sur (O) pour que les droites (N) se coupent consécutivement.

Si l'on suit l'une de ces courbes, la valeur de $\tang\theta$ doit être indépendante de ζ : donc,

$$
\tang\theta = \frac{du\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) + dv\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right)}{du\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right) + dv\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right)} = \frac{-fD\,du + Q\,dv}{P\,du - gD\,dv}.
$$

D'où résulte, en ordonnant,

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
&du^2\left[\left(P\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) + fD\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\right]\\
&\quad + du\,dv\left[P\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) - Q\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + fD\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) - gD\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\right]\\
&\quad - dv^2\left[Q\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) + gD\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right)\right] = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

33. *Condition pour que le faisceau soit formé des normales à une surface. Théorème sur la transformation des faisceaux.* — Cherchons dans quelles conditions les droites (N) peuvent être les normales d'une surface.

Pour que cela ait lieu, il faut que les plans principaux soient rectangulaires, c'est-à-dire que la somme des termes extrêmes de (12) doit être nulle. En remplaçant dans la condition $P \frac{dg}{f\,du}$, $Q \frac{df}{g\,dv}$ tirées des équations (φ), on trouve facilement

$$(14) \qquad \frac{d}{dv}(\xi P - f\eta D) = \frac{d}{du}(\eta Q - g\xi D);$$

d'où résulte

$$P\xi - f\eta D = \frac{dL}{du},$$

$$Q\eta - g\xi D = \frac{dL}{dv}.$$

On peut arriver plus directement : en effet, supposons que les droites (N) soient normales à des surfaces et soit Z le ζ du point où (N) perce l'une d'entre elles. Il est visible que le ΔZ de ce point est constamment nul, quels que soient par conséquent du et dv.

Les formules (F) conduisent immédiatement aux équations trouvées ci-dessus.

La condition (14) permet d'établir une propriété intéressante. Supposons, en effet, que le réseau coordonné soit celui des lignes de courbure de (O), la condition devient

$$\frac{d}{dv}(P\xi) = \frac{d}{du}(Q\eta).$$

Or P et Q ne dépendant que de l'image sphérique des lignes de courbure, il en résulte :

Si l'on considère toutes les surfaces ayant même image sphérique de leurs lignes de courbure et que l'on construise par rapport à leurs normales des droites (N) *avec les mêmes* ξ *et* η, *tous les faisceaux de droites ainsi obtenues sont normaux à des surfaces, si l'un d'entre eux jouit de cette propriété.*

34. *Surfaces ayant même image sphérique que la surface de référence.* — Il est logique de chercher comment on peut trouver toutes les surfaces ayant même image sphérique que la surface de référence.

Supposons donc (N) normale à l'une de ces surfaces et soit Z le ζ instantané de celle-ci. On a d'abord, par rapport aux lignes de courbure,

$$\xi = \frac{dZ}{P\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{Q\,dv};$$

mais, dans l'espèce, l'équation (13) doit se réduire à

$$du\,dv = 0.$$

On doit donc avoir

$$(15) \qquad \frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi = \frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta = 0.$$

Substituant les valeurs de ξ et η en tenant compte des équations (9), on trouve

$$(16) \qquad \frac{d^2Z}{du\,dv} = \frac{dZ}{du}\frac{dP}{P\,dv} + \frac{dZ}{dv}\frac{dQ}{Q\,du},$$

équation qui ne contient que les éléments de l'image sphérique. On peut donc supposer que (O) est la sphère; Z représentera alors la distance du centre de la sphère au plan tangent de la surface dérivée qui a pour image sphérique de ses lignes de courbure le réseau orthogonal (u, v).

On déduit sans peine de ce qui précède la propriété suivante :

Si l'on suppose divers mobiles de masses quelconques décrivant à la fois et parallèlement des trajectoires tracées sur des surfaces ayant même image sphérique de leurs lignes de courbure, le centre de gravité du système se déplace aussi sur une surface de même nature.

35. *Autre solution du même problème.* — Le même problème peut être abordé autrement; en effet, les équations (15) combinées donnent

$$\frac{d}{du}(g\eta) = \frac{d}{dv}(f\xi),$$

d'où résulte que l'on peut poser

$$\eta = -\frac{dA}{g\,dv}, \qquad \xi = -\frac{dA}{f\,du}.$$

Substituant dans l'une des équations (15), on trouve

$$(17) \qquad \frac{d^2A}{du\,dv} = \frac{dA}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{dA}{dv}\frac{dg}{g\,du}.$$

Il est facile de trouver le sens géométrique de la fonction A. Considérons une famille de sphères dont les centres soient sur (O) et dont les rayons R soient fonction de u et v; calculons les ξ et η de leur corde de contact (N), l'équation d'une sphère est

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2;$$

celle de la sphère infiniment voisine est

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 = R^2 + 2R\,\Delta R.$$

On déduit, après substitution des valeurs (Φ), l'équation

$$du\left(fX + \frac{R\,dR}{du}\right) + dv\left(gY + \frac{R\,dR}{dv}\right) = 0.$$

D'où résulte, pour définir (N),

$$\xi = -\frac{R\,dR}{f\,du}, \qquad \eta = -\frac{R\,dR}{g\,dv}.$$

On voit que l'on peut écrire

$$2A = R^2.$$

D'où cette proposition :

Étant données deux surfaces ayant même image sphérique, les normales de l'une peuvent être considérées comme les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur l'autre.

36. *Rapprochement avec la théorie des systèmes triplement orthogonaux. Systèmes orthogonaux dans lesquels toutes les surfaces d'une famille ont même image sphérique.* — On remarquera que l'équation (17) n'est autre que celle à l'aide de laquelle on obtient une surface (S) infiniment voisine de (O) et faisant avec elle partie d'un système triplement orthogonal. Cette connexité singulière entre deux théories si distinctes conduit à d'intéressants développements; mais pour le moment nous ne poursuivrons qu'un cas particulier, celui où la surface (S), infiniment voisine de (O), a aussi même image sphérique de ses lignes de courbure.

Désignant par $Z\,d\rho$ le ζ de la surface (S) considérée comme ayant même image que (O), cette fonction satisfait à l'équation (16); on exprimera que (S) fait partie avec (O) d'un système triple orthogonal en écrivant que le segment de la normale à (O) prolongée jusqu'à (S) satisfait à l'équation (17). Mais ce segment ne diffère de $Z\,d\rho$ que d'une quantité du second ordre; on doit donc vérifier à la fois (16) et (17) en y substituant Z (car $d\rho$ disparaît).

On obtient, en retranchant (16) et (17) et tenant compte des équations de Codazzi,

$$g\frac{dP}{dv}\frac{dZ}{du}=f\frac{dQ}{du}\frac{dZ}{dv}. \tag{19}$$

Il convient pour réduire la question d'exprimer f et g en fonction de Z, P et Q; or on a

$$\frac{df}{dv}=g\frac{dP}{Q\,dv},\qquad \frac{dg}{du}=f\frac{dQ}{P\,du}, \tag{20}$$

d'où résulte avec (19)

$$\frac{df}{f\,dv}=\frac{\dfrac{dQ}{Q\,du}\dfrac{dZ}{dv}}{\dfrac{dZ}{du}},$$

$$\frac{dg}{g\,du}=\frac{\dfrac{dP}{P\,dv}\dfrac{dZ}{du}}{\dfrac{dZ}{dv}};$$

mais, en vertu de (16), ceci peut s'écrire

$$\frac{df}{f\,dv} = \frac{d}{dv}\log\frac{dZ}{P\,du}, \qquad \frac{dg}{g\,du} = \frac{d}{du}\log\frac{dZ}{Q\,dv},$$

par conséquent

$$f = U\frac{dZ}{P\,du}, \qquad g = V\frac{dZ}{Q\,dv}.$$

Substituant dans les équations (20), Z s'élimine et il reste

$$\frac{d}{du}\frac{Q^2}{V} = \frac{d}{dv}\frac{P^2}{U}.$$

Il est clair qu'on peut particulariser les paramètres u et v de telle façon que U et V soient égaux à l'unité. On voit alors que la solution du problème est donnée par le système d'équations

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{du}Q^2 = \dfrac{d}{dv}P^2, \\ f = \dfrac{dZ}{P\,du}, \qquad g = \dfrac{dZ}{Q\,dv}, \\ \dfrac{d^2Z}{du\,dv} = \dfrac{dZ}{du}\dfrac{dP}{P\,dv} + \dfrac{dZ}{dv}\dfrac{dQ}{Q\,du}, \\ PQ + \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{dQ}{P\,du}\right) + \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{dP}{Q\,dv}\right) = 0. \end{cases}$$

La première de ces conditions peut s'écrire

$$P^2 = \frac{d\varphi}{du}, \qquad Q^2 = \frac{d\varphi}{dv}.$$

Ainsi l'image sphérique des lignes de courbure de (O) est telle que le dS^2 de la sphère prend la forme

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du}du^2 + \frac{d\varphi}{dv}dv^2.$$

Lorsqu'on connaîtra sur la sphère un réseau satisfaisant à cette condition, on cherchera l'intégrale de (16) et chaque valeur de Z donnera une surface (O) répondant à la question.

Au point de vue analytique, la solution a été simplifiée autant que possible, mais elle peut être éclaircie encore au point de vue géométrique.

37. *Toute surface sur laquelle le* $dS^2 = \frac{d\varphi}{du}du^2 + \frac{d\varphi}{dv}dv^2$ *répond à la question.* — Cherchons à quelles conditions géométriques doit satisfaire chacune des surfaces (O) d'une famille (A) pour que : 1° toutes aient même image sphérique; 2° que (A) fasse partie d'un système triplement orthogonal.

La première des équations (21) peut s'écrire

$$\frac{dQ}{P\,du} = \frac{dP}{Q\,dv};$$

mais, comme dans l'espèce on suppose connues les trois équations de Codazzi, cela revient à dire que

$$\frac{dg}{f\,du} = \frac{df}{g\,dv},$$

par conséquent f^2 et g^2 sont les dérivées partielles d'une même fonction.

Je dis maintenant qu'il résulte de cette condition et des équations de Codazzi que

$$\frac{d}{dv}(fP) = \frac{d}{du}(gQ).$$

Si l'on développe, en tenant compte de (20), il vient

$$\frac{dP}{Q\,dv}(Qf + Pg) = \frac{dQ}{P\,du}(Qf + Pg),$$

d'où résulte, en effet, la condition fondamentale. On peut donc poser légitimement la seconde et la troisième équation du système (21); la quatrième résulte immédiatement de la substitution des valeurs de f et g dans une des équations (20). Quant à la cinquième équation, elle est supposée vérifiée d'avance, puisqu'on se donne (O).

On peut résumer ainsi qu'il suit tout ce qui précède :

Si le réseau des lignes de courbure d'une surface (O) *est tel que les coefficients du* dS^2 *soient les dérivées partielles d'une même fonction, on peut déduire de la surface toute une famille* (A) *faisant partie d'un système triplement orthogonal; toutes les surfaces de cette famille ont même image sphérique : le* dS^2 *de la sphère est de même forme que celui de chacune des surfaces considérées.*

Dans sa thèse sur les coordonnées curvilignes, M. Darboux a considéré le système composé de trois familles telles que (A) se coupant mutuellement à angle droit; il a trouvé que toutes les surfaces d'une même famille sont identiques. Il serait très simple de vérifier ce résultat à l'aide des formules du Chapitre précédent, mais cela nous écarterait trop de notre sujet.

38. *Si les droites d'un faisceau ont pour images principales sur* (O) *un réseau conjugué, elles sont les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur* (O). — Revenons aux formules générales et cherchons dans quelles conditions les images principales sur (O) du faisceau de droites (N) forment un réseau conjugué.

Combinant les formules (2) et (13), il vient simplement

$$\left[f\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right) - g\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\right](PQ - fgD^2) = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{d}{dv}(f\xi) = \frac{d}{du}(g\eta),$$

comme au n° 35. Ainsi :

Lorsque les images principales d'un faisceau de droites (N) *forment un réseau conjugué sur la surface de référence* (O), *les droites peuvent être considérées comme les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur* (O).

39. *Relation entre les plans principaux du faisceau et les images principales.* — On peut faire encore une remarque qui complète le résultat précédent. Lorsqu'on suit une courbe de l'image principale, l'équation (9) est vraie, quelle que soit la valeur attribuée à ζ, puisque le plan tangent, tout le long de la génératrice, est le même; on peut donc écrire

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{-f\mathrm{D}\,du + \mathrm{Q}\,dv}{\mathrm{P}\,du - g\mathrm{D}\,dv},$$

mais la condition (2), qui exprime que les deux directions du, dv, du', dv' sont conjuguées, peut s'écrire

$$\frac{f\,du'}{g\,dv'} + \frac{-f\mathrm{D}\,du + \mathrm{Q}\,dv}{\mathrm{P}\,du - g\mathrm{D}\,dv} = 0.$$

On a donc la relation

$$\operatorname{tang}\theta + \frac{f\,du'}{g\,dv'} = 0,$$

qui s'exprime géométriquement ainsi :

Lorsqu'on suit sur (O) *une courbe de l'image principale du faisceau* (N) (*quel qu'il soit*), *le plan tangent à la génératrice* N *est perpendiculaire à la droite conjuguée de la direction suivie.*

Cette proposition coïncide avec cette autre bien connue : le plan central d'une normalie contient la direction conjuguée de la base.

Dans le cas particulier que nous considérons, celui où l'image principale de (N) est conjuguée, on voit que les tangentes aux deux courbes images sont les normales aux plans principaux du faisceau (N). Le théorème énoncé au n° **38** donne l'intégrale de ces faisceaux.

40. *Si les cordes de contact de sphères sont normales à des surfaces, celles-ci ont même image sphérique que la surface de référence. Les normales d'une surface arbitraire sont les cordes de contact des sphères ayant leurs centres sur une sphère.* — Si les cordes de contact d'une famille de sphères sont normales à des surfaces, l'image principale doit à la fois être conjuguée et orthogonale;

elle coïncide donc avec le réseau des lignes de courbure de la surface de référence (O); de plus, les surfaces normales à (N) ont même image sphérique que (O).

En prenant pour variable le quarré du rayon de la sphère ayant son centre en O, on obtient immédiatement l'équation différentielle des surfaces ayant même image sphérique que (O); c'est ce qui a été fait au n° **35**. On remarquera que l'emploi de cette variable (le rayon de la sphère) conduit à la détermination des droites N et qu'il faudrait encore faire une quadrature pour obtenir les surfaces normales à (N), tandis qu'en prenant pour variable le Z d'une surface normale à (N), tout se réduit à l'intégration de l'équation (16).

Il est facile de voir que (16) n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de (17). En effet, on peut considérer la sphère comme ayant même image sphérique que (O). Dès lors, si P^2 et Q^2 sont les coefficients du dS^2, rapporté à l'image sphérique de (O), on obtiendra toutes les surfaces ayant même image sphérique en intégrant l'équation

$$\frac{d^2A}{du\,dv} = \frac{dA}{du}\frac{dP}{P\,dv} + \frac{dA}{dv}\frac{dQ}{Q\,du}.$$

On voit qu'ici A et Z peuvent être substitués l'un à l'autre. Ceci tient à deux choses :

1° *Lorsque des sphères ont leurs centres sur une sphère, leurs cordes de contact sont toujours normales à des surfaces;* en effet, l'image principale du faisceau (N), étant conjuguée, est forcément orthogonale, puisque (O) est sphérique; dès lors les plans principaux de (N) sont rectangulaires.

2° Les coordonnées du pied de la droite N sont

$$\xi = -\frac{R\,dR}{P\,du}, \qquad \eta = -\frac{R\,dR}{Q\,dv}, \qquad (\text{n}^\circ\ 35)$$

si l'on prend pour variable le rayon de la sphère, et

$$\xi = \frac{dZ}{P\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{Q\,dv}, \qquad (\text{n}^\circ\ 34)$$

si l'on prend pour variable le Z d'une surface normale à (N); on voit donc que

$$\Delta Z + R\,\Delta R = 0,$$

d'où résulte

$$2Z + R^2 + C = 0;$$

mais on a supposé le rayon de la sphère égal à l'unité. Si on le désigne par a, on aura généralement

$$R^2 + 2aZ = 0,$$

où Z peut, si l'on veut, désigner la distance du centre de la sphère aux plans tangents d'une surface normale à (N) et R le rayon de la sphère dont N est la corde de contact.

41. *Examen de l'équation unique à laquelle se ramènent tous les problèmes précédents. Renvoi aux travaux de M. Moutard. Cas où le réseau des lignes de courbure est isométrique.* — On peut dire que la solution de tous les problèmes dont nous nous sommes occupé dans ce Chapitre et dans le précédent (recherche des surfaces ayant même image sphérique, des systèmes triplement orthogonaux, des sphères dont les cordes de contact sont normales à des surfaces) dépend de l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2 Z}{du\,dv} = A\frac{dZ}{du} + B\frac{dZ}{dv}.$$

Il y a donc un intérêt véritable à faire l'étude de cette équation. M. Moutard a démontré qu'elle rentrait dans l'une des deux formes susceptibles d'intégration explicite et il a donné la marche à suivre pour obtenir les intégrales quand on peut les exprimer. La solution est formée, dans ce cas, par la somme d'une série de termes contenant individuellement deux fonctions arbitraires U et V et leurs dérivées successives. Les coefficients A et B satisfont à une série d'équations de condition limitée par le nombre de dérivées que contient l'intégrale. La dernière condition est toujours l'équation différentielle du λ de la sphère, dont l'intégrale a été trouvée par M. Liouville; toutes les autres conditions se déduisent consécutivement et sous forme explicite de la dernière.

Il serait fort intéressant d'appliquer cette théorie à la recherche des réseaux sphériques orthogonaux pour lesquels l'équation (16) est susceptible d'intégration explicite; mais nous nous bornerons à considérer le cas où l'on a

$$dS^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 U + dv^2 V);$$

λ est une fonction de (u) et de (v), U et V sont certaines fonctions de u et v. L'équation (17) devient, dans ce cas particulier,

$$\frac{d^2 Z}{du\,dv} = \frac{d\lambda}{\lambda\,dv}\frac{dZ}{du} + \frac{dZ}{dv}\frac{d\lambda}{\lambda\,du};$$

mais si l'on pose

$$Z = MX,$$

on fera disparaître les dérivées premières de X en écrivant que M est égal à λ, alors

$$\frac{d^2 X}{X\,du\,dv} + \frac{d^2\lambda}{\lambda\,du\,dv} - \frac{2}{\lambda^2}\frac{d\lambda}{du}\frac{d\lambda}{dv} = 0.$$

Il vient enfin l'équation

$$(22) \qquad \frac{d^2 X}{X\,du\,dv} = \frac{d^2\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{\left(\frac{1}{\lambda}\right)du\,dv} = \Omega.$$

42. *Intégrale lorsque le réseau sphérique est composé de cercles.* — Le cas le plus simple est celui où

$$\frac{d^2}{du\,dv}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0,$$

par conséquent,

$$\lambda = \frac{1}{U_1 + V_1}.$$

On voit facilement que le réseau (u et v) est composé de cercles géodésiques et, comme on le suppose tracé sur la sphère, il en résulte que l'on a immédiatement l'intégrale des surfaces ayant pour image sphérique un réseau de cercles. Dans ce cas, l'intégrale est de la forme

$$X = U + V,$$

et l'on voit que les dérivées des fonctions arbitraires n'y figurent pas.

15. *Intégrale dans le cas où ne figurent dans son expression explicite que les dérivées premières des fonctions arbitraires.* — Le cas qu'il convient de considérer immédiatement après est celui où l'intégrale ne contient que les dérivées premières des fonctions arbitraires.

Posons donc, en supposant d'abord qu'il n'existe pas de fonction arbitraire de v,

$$X = AU + BU'.$$

Substituons dans (22), il vient

$$\left(\frac{d^2 A}{du\, dv} - \Omega A\right) U + \left(\frac{d^2 B}{du\, dv} - \Omega B + \frac{dA}{dv}\right) U' + \frac{dB}{dv} U'' = 0.$$

Mais cette équation doit être vérifiée quelles que soient U et ses dérivées : donc A et B doivent vérifier les équations

$$\frac{dB}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 B}{du\, dv} - \Omega B + \frac{dA}{dv} = 0,$$

$$\frac{d^2 A}{du\, dv} - \Omega A = 0,$$

qui se transforment de la manière suivante

$$B = U_1,$$

$$A = U_1 \frac{d\Omega}{\Omega\, du} + U_1',$$

$$(23) \qquad \frac{d^2 \log \Omega}{du\, dv} = \Omega.$$

C'est le moment de faire remarquer que l'équation (22) est absolument symétrique par rapport à X et $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, de telle sorte que la valeur la plus générale de λ est donnée par la formule

$$\frac{1}{\lambda} = \left(U_1 \frac{d\Omega}{\Omega\,du} + U'_1\right) U + U_1 U' + \left(V_1 \frac{d\Omega}{\Omega\,dv} + V'_1\right) V + V_1 V',$$

et, si l'on prend UU_1 et VV_1 comme fonctions arbitraires,

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d\Omega}{\Omega\,du} U + U' + \frac{d\Omega}{\Omega\,dv} V + V'.$$

L'équation (23) donne d'ailleurs

$$\Omega = \frac{2u'v'e^{u+v}}{(1-e^{u+v})^2},$$

où u et v ne coïncident pas avec les paramètres, obligatoirement; mais cette identification peut être toujours être faite, puisque l'on a supposé que les coefficients du dS^2 contenaient encore des fonctions de u et v mises en évidence. Au demeurant, la valeur la plus générale du λ devient

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{d}{u'du}(Uu') + \frac{d}{v'dv}(Vv') + (Uu' + Vv')\frac{1+e^{u+v}}{1-e^{u+v}}.$$

CHAPITRE V.

ÉTUDE DES SURFACES A L'AIDE DES COORDONNÉES SPHÉRIQUES IMAGINAIRES.

44. *Équation de la variation du plan tangent à une normalie, valeur du dS^2 d'une surface.* — Nous avons établi dans le Chapitre précédent que l'on pouvait exprimer à chaque instant les coordon-

nées ξ, η et ζ d'un point d'une surface (N) à l'aide des dérivées partielles d'une même fonction prises par rapport à deux paramètres u et v définissant sur la sphère de rayon unité l'image du point N de (N). On peut déduire de cette proposition une méthode fort simple pour l'étude des surfaces, elle a quelques points communs avec le procédé imaginé par M. Ossian Bonnet (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. V).

Choisissons d'abord sur la sphère un réseau orthogonal isométrique pour (u, v) tel que

$$dS^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2).$$

Désignons par p la distance du centre de la sphère au plan tangent en N à (N). Soient ξ et η les coordonnées habituelles de la droite (N), soit enfin l la distance d'un point quelconque M de la droite au plan mené par le centre de la sphère parallèlement à celui des XY; la formule (9), qui donne la variation du plan tangent à une surface élémentaire déterminée par du et dv, devient ici

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{du\left(\dfrac{d\eta}{du} - \dfrac{d\lambda}{\lambda\,dv}\,\xi\right) + dv\left(\lambda l + \dfrac{d\lambda}{\lambda\,du}\,\xi + \dfrac{d\eta}{dv}\right)}{du\left(\lambda l + \dfrac{d\xi}{du} + \dfrac{d\lambda}{\lambda\,dv}\,\eta\right) + dv\left(\dfrac{d\xi}{dv} - \dfrac{d\lambda}{\lambda\,du}\,\eta\right)}.$$

Nous avons étudié jusqu'à présent cette formule en particularisant le réseau (u, v) qui était généralement celui de l'image sphérique de (N); il importe actuellement de rejeter au contraire toute particularisation tenant à (N) et de prendre pour les coordonnées de l'image celles qui conduisent aux résultats les plus simples dans l'étude de la sphère elle-même.

Dans cet ordre d'idées, il était naturel de prendre les coordonnées symétriques imaginaires, qui, on le sait depuis longtemps, introduisent une grande symétrie dans les calculs.

Nous avons démontré que

$$\xi = \frac{dp}{\lambda\,du}, \qquad \eta = \frac{dp}{\lambda\,dv};$$

posons

$$u + iv = x, \qquad u - iv = y,$$

$$\frac{dp}{\lambda^2 dx} = a, \qquad \frac{dp}{\lambda^2 dy} = b, \qquad \frac{1}{\lambda^2}\,\frac{d^2 p}{dx\,dy} = c;$$

il vient, après transformation,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{i\,du\left(\frac{da}{dx} - \frac{db}{dy}\right) + dv\left(l + 2c - \frac{da}{dx} - \frac{db}{dy}\right)}{du\left(l + 2c + \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy}\right) + i\,dv\left(\frac{da}{dx} - \frac{db}{dy}\right)},$$

d'où résulte immédiatement

$$\frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{(l + 2c)(du + i\,dv) + 2\frac{db}{dy}(du - i\,dv)}{(l + 2c)(du - i\,dv) + 2\frac{da}{dx}(du + i\,dv)},$$

et, finalement,

$$e^{-2i\theta} = \frac{dx\frac{da}{dx} + dy\left(c + \frac{l}{2}\right)}{dx\left(c + \frac{l}{2}\right) + dy\frac{db}{dy}}.$$

Telle est la forme remarquable que prend l'équation de la normalie à (N) dans ce nouveau système de coordonnées.

Le dS^2 de (N) se calcule sans difficulté en additionnant les carrés des ΔX, ΔY, ΔZ; on trouve

$$\frac{dS^2}{\lambda^2} = (p + 2c)\left[2\frac{da}{dx}dx^2 + (p + 2c)dx\,dy + 2\frac{db}{dy}dy^2\right] + 4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}dx\,dy.$$

45. *Équation des lignes de courbure, des rayons de courbure principaux.* — Cherchons maintenant les éléments géométriques qui définissent la courbure de (N). Nous nous servirons encore de la formule de la normalie, qui à elle seule comprend tous ces résultats.

Si l'on suit une ligne de courbure de (N), l'angle θ doit rester le même, quelle que soit la hauteur l ou $c + \frac{l}{2}$: donc

$$(24) \qquad e^{-2i\theta} = \frac{dy}{dx} = \frac{dx\frac{da}{dx}}{dy\frac{db}{dy}} = \pm\sqrt{\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}} \quad (^1).$$

([1]) Soit Z la distance de chacun des points d'une surface (B) applicable sur

Pour trouver les rayons de courbure principaux, il faut exprimer que θ est, aux centres de courbure principaux, indépendant de $dx:dy$. On a donc

$$\frac{\frac{da}{dx}}{c+\frac{l}{2}} = \frac{c+\frac{l}{2}}{\frac{db}{dy}};$$

R, l'un des rayons de courbure, est égal à $p - l$, par conséquent

$$R^2 - 2R(2c+p) + (2c+p)^2 - 4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy} = 0.$$

Exprimons que deux directions déterminées par dx, dy et dx', dy' sont conjuguées; écrivons à cet effet que le plan tangent en N à la première normalie est le plan central de la seconde, soit

$$\frac{dx\frac{da}{dx} + dy\left(c+\frac{p}{2}\right)}{dx\left(c+\frac{p}{2}\right) + dy\frac{db}{dy}} + \frac{dy'}{dx'} = 0,$$

---

une sphère, comptée jusqu'à un plan fixe, x et y désignant toujours les coordonnées symétriques imaginaires; posant

$$a = \frac{dZ}{\lambda^2 dx}, \qquad b = \frac{dZ}{\lambda^2 dy},$$

on trouve pour l'équation des lignes de courbure de (B) en fonction de Z précisément la formule (24). Dès lors, on peut énoncer cette proposition :

Étant donnée une surface (B) *applicable sur une sphère, si l'on considère en chacun de ses points la distance à un plan fixe, qu'on déforme ensuite* (B) *de manière à la rendre sphérique, chaque point de* (B) *entraînant l'ordonnée correspondante, que celle-ci soit prise comme la distance du point de la sphère aux plans tangents d'une surface* (N), *l'image sphérique de* (N) *est formée par le réseau des lignes de courbure de* (B) *mise sous sa forme primitive.*

L'équation différentielle des surfaces telles que (N) n'est autre chose que la relation qui lie le Z d'une surface applicable sur la sphère aux éléments indéformables de celle-ci.

On arriverait à un théorème analogue au précédent si, au lieu de la distance à un plan, on considérait la distance à un point fixe.

d'où résulte, en développant,

$$\frac{da}{dx} dx\, dx' + \left(c + \frac{p}{2}\right)(dx\, dy' + dy\, dx') + \frac{db}{dy} dy\, dy' = 0.$$

On remarquera que dans toutes ces formules le λ de la sphère n'est nullement particularisé, qu'il peut figurer dans chaque question avec ses deux fonctions arbitraires ou sous sa forme la plus simple suivant qu'on le jugera plus avantageux.

Les équations de Codazzi se réduisent ici à la seule relation qui définit le λ, savoir

$$\lambda^2 + 2\frac{d^2}{dx\, dy}\log\lambda^2 = 0.$$

46. *Équation d'une sphère.* — Comme première application, cherchons l'équation d'une sphère considérée comme surface à rayons de courbure constants ou à lignes de courbure indéterminées; il est manifeste qu'on doit avoir à la fois

$$\frac{da}{dx} = 0, \qquad \frac{db}{dy} = 0,$$

ce qui conduit à

$$\frac{dp}{dx} = -Y_1\lambda^2 = 2Y_1\frac{d^2}{dx\, dy}\log\lambda^2,$$

partant

$$p = 2Y_1\frac{d\log\lambda^2}{dy} + Y_2.$$

De même, on doit avoir

$$p = 2X_1\frac{d\log\lambda^2}{dx} + X_2;$$

il faut remplacer λ^2 par sa valeur pour pouvoir identifier.

Posant

$$\lambda^2 = \frac{4X'Y'e^{X+Y}}{(1+e^{X+Y})^2},$$

nous en tirons

$$\frac{d\log\lambda^2}{dy} = \frac{Y''}{Y'} + Y'\frac{1-e^{X+Y}}{1+e^{X+Y}};$$

par conséquent, p devient

$$p = 2Y_1 \frac{Y''}{Y'} + Y_2 + 2Y_1 Y' \frac{1-e^{X+Y}}{1+e^{X+Y}}.$$

Cette équation devant être identique avec sa permutée en X, il vient pour p la valeur définitive

$$p = \frac{A + Be^X + Ce^Y + De^{X+Y}}{1+e^{X+Y}}.$$

Cette expression ne peut pas être transformée de façon à ne contenir que λ, puisque les dérivées X′ et Y′ n'y entrent pas.

47. *Surfaces à étendue minima.* — On obtiendra dans notre système de coordonnées l'équation différentielle des surfaces à étendue minima, en écrivant que le second terme de l'équation donnant les rayons de courbure principaux est nul, soit

$$\frac{2\,d^2p}{p\,dx\,dy} + \lambda^2 = 0.$$

Mais si l'on se reporte aux calculs des n^os **41** et **43**, on voit immédiatement que l'intégrale est

$$p = \mathcal{X}' + 2\mathcal{X}\frac{d\lambda}{\lambda\,dx} + \mathcal{Y}' + 2\mathcal{Y}\frac{d\lambda}{\lambda\,dy},$$

où $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ désignent les deux fonctions arbitraires, simples fonctions de x et de y seules. On vérifie que les asymptotiques de ces surfaces sont rectangulaires.

Le dS^2 des surfaces à étendue minima prend la forme

$$dS^2 = 4\lambda^2 \frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\,dx\,dy,$$

d'où résulte ce théorème qui appartient à M. O. Bonnet :

Les lignes de longueur nulle (ou isotropes) d'une surface à étendue minima ont pour images les lignes isotropes de la sphère.

Il est facile de voir que les surfaces à étendue minima seules jouissent de cette propriété : en effet, toute surface sur laquelle ceci a lieu doit donner naissance à un dS^2 où ne figurent que des termes en $dx\,dy$, c'est-à-dire que (d'après la valeur générale du nº **44**)

$$(p+2c)\frac{da}{dx}=(p+2c)\frac{db}{dy}=0.$$

Il est clair qu'il ne faut pas considérer la solution

$$\frac{da}{dx}=\frac{db}{dy}=0,$$

puisqu'elle donne simplement une sphère; l'autre facteur donne les surfaces à étendue minima.

Notre but étant principalement d'exposer une méthode générale d'investigation, nous supprimerons toute recherche particulière de surfaces à étendue minima, bien que la forme de l'intégrale se prête facilement aux calculs.

Il résulte de ce qui précède que l'image sphérique de tout réseau isométrique tracé sur une surface à étendue minima est aussi isométrique. En particulier, le réseau des lignes de courbure est isométrique. Tout ceci sera généralisé plus loin.

48. *Équation différentielle d'une famille de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.* — L'équation des lignes de courbure d'une surface quelconque est tellement simple dans notre système de représentation qu'il devient naturel de chercher à former l'équation différentielle des familles de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.

Soit

$$p=f(x,y,z)$$

l'équation d'une famille de surfaces dont z est le paramètre individuel; p désigne comme d'habitude la distance d'une origine fixe aux plans tangents, x et y sont les coordonnées imaginaires définissant la position de l'image sur la sphère.

Soient (N) et (N') deux surfaces infiniment voisines, N et N' les points correspondants situés sur une même trajectoire, soient enfin NT et N'T' les tangentes aux lignes de courbure de même système passant par N et N'. M. Maurice Lévy a fait voir qu'il suffisait d'établir que les droites NT et N'T' se rencontraient toujours (et seulement pour un système de lignes de courbure) pour trouver la condition cherchée.

Il ne serait pas difficile, dans notre système habituel, d'écrire que NT et N'T' se rencontrent, mais il est plus simple d'employer l'artifice suivant :

Le long de la trajectoire NN' les droites telles que NT forment une surface développable; dès lors, d'après la théorie des développées des courbes gauches, on voit que la variation de l'angle que fait NT avec le plan osculateur de la trajectoire NN' est, le long de cette ligne, égale à l'angle de deux plans osculateurs consécutifs.

Désignons par n' l'image sphérique de N'; on voit que le plan mené par le centre de la sphère et On' est parallèle au plan osculateur de la trajectoire; par conséquent, l'angle de deux plans osculateurs consécutifs mesure la courbure géodésique de On'; appelons-le $d\gamma$. Soient β l'angle de On' avec OX, θ l'angle de NT avec OX, $\beta - \theta$ est l'angle que fait NT avec le plan osculateur en N de la trajectoire; on a donc

$$d\beta - d\theta = d\gamma.$$

Si dx et dy sont les accroissements de x et de y lorsqu'on passe de N en N', on a, d'après Liouville,

$$d\gamma = d\beta - i\left(\frac{d\lambda}{\lambda\, dx}\, dx - \frac{d\lambda}{\lambda\, dy}\, dy\right).$$

On doit donc écrire

$$d\theta = i\left(\frac{d\lambda}{\lambda\, dx}\, dx - \frac{d\lambda}{\lambda\, dy}\, dy\right);$$

mais nous avons fait voir que l'on a pour une direction de ligne de courbure

$$e^{-2i\theta} = \pm\sqrt{\frac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}}.$$

Il en résulte immédiatement

$$-4i\,d\theta = \Delta \log \frac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}$$

et, par conséquent,

$$dx\frac{d}{dx}\log\left(\frac{\lambda^4\frac{db}{dy}}{\frac{da}{dx}}\right) - dy\frac{d}{dy}\log\left(\frac{\lambda^4\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}}\right) - dz\left(\frac{d}{dz}\log\frac{da}{dx} - \frac{d}{dz}\log\frac{db}{dy}\right) = 0.$$

Il faut maintenant exprimer dx, dy en fonction de dz, et nous y parviendrons en écrivant que les ΔX et ΔY du point X' sont nuls

$$\Delta X = \Delta\xi + \frac{dx+dy}{2}\lambda p - \left(dx\frac{d\lambda}{dx} - dy\frac{d\lambda}{dy}\right)(a-b);$$

d'un autre côté,

$$\begin{aligned}\Delta\xi = \Delta\lambda(a+b) = \left(\frac{d\lambda}{dx}dx + \frac{d\lambda}{dy}dy\right)(a+b) + \lambda\left(\frac{da}{dz} + \frac{db}{dz}\right)dz \\ + \lambda\left[\left(\frac{da}{dx} + c\frac{2\,d\lambda}{\lambda\,dx}b\right)dx + \left(\frac{db}{dy} + c\frac{2\,d\lambda}{\lambda\,dy}a\right)dy\right],\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{\Delta X}{\lambda} = \left(c + \frac{p}{2}\right)(dx+dy) + \frac{da}{dx}dx + \frac{db}{dy}dy + \left(\frac{da}{dz} + \frac{db}{dz}\right)dz = 0.$$

On trouve de même

$$\frac{\Delta Y}{i\lambda} = -\left(c + \frac{p}{2}\right)(dx+dy) + \frac{da}{dx}dx - \frac{db}{dy}dy + \left(\frac{da}{dz} - \frac{db}{dz}\right)dz = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{da}{dx}dx + \left(c + \frac{p}{2}\right)dy + \frac{da}{dz}dz = 0,$$
$$\left(c + \frac{p}{2}\right)dx + \frac{db}{dy}dy + \frac{db}{dz}dz = 0.$$

Éliminant dx, dy, dz, il vient l'équation symbolique

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d}{dx}\log\left(\dfrac{\lambda^4 \frac{db}{dy}}{\frac{da}{dx}}\right) & \dfrac{d}{dy}\log\left(\dfrac{\frac{db}{dy}}{\lambda^4\frac{da}{dx}}\right) & -\dfrac{d}{dz}\log\dfrac{\frac{da}{dx}}{\frac{db}{dy}} \\ \dfrac{da}{dx} & \left(c+\dfrac{p}{2}\right) & \dfrac{da}{dz} \\ \left(c+\dfrac{p}{2}\right) & \dfrac{db}{dy} & \dfrac{db}{dz} \end{vmatrix} = 0,$$

qui exprime la condition cherchée; on voit qu'elle est du troisième ordre, ainsi que l'avait établi M. Ossian Bonnet.

19. *Système triplement orthogonal dans lequel une famille de surfaces est formée de surfaces à étendue minima.* — Si l'on veut traiter des cas particuliers, il faut naturellement chercher à annuler le plus de termes qu'il sera possible du déterminant. Dans cet ordre d'idées, on est conduit à examiner le cas où

$$c + \frac{p}{2} = 0.$$

La famille de surfaces ne doit comprendre que des surfaces à étendue minima. Si l'on met le dS^2 de la sphère sous sa forme la plus simple

$$dS^2 = \frac{-4}{(x+y)^2}dx\,dy;$$

alors

$$p = X' + Y' - 2\frac{(X+Y)}{(x+y)},$$
$$-4\frac{da}{dx} = X'''(x+y)^2,$$
$$-4\frac{da}{dy} = Y'''(x+y)^2.$$

Désignant par X_p^n la dérivée de X prise n fois par rapport à x et p fois par rapport à z, l'équation de condition devient

$$\left[X_1'' - \frac{2X_1'}{x+y} + 2\,\frac{X_1+Y_1}{(x+y)^2}\right]\frac{1}{X'''}\left[\frac{4}{(x+y)} + \frac{X^{\text{IV}}}{X'''}\right]$$
$$-\left[Y_1'' - \frac{2Y_1'}{(x+y)} + 2\,\frac{X_1+Y_1}{(x+y)^2}\right]\frac{1}{Y'''}\left[\frac{4}{(x+y)} + \frac{Y^{\text{IV}}}{Y'''}\right] - \left(\frac{X_1'''}{X'''} - \frac{Y_1'''}{Y'''}\right) = 0,$$

qui doit être vérifiée quels que soient x et y.

30. *Retour à la théorie des surfaces sur lesquelles*

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du}\,du^2 + \frac{d\varphi}{dv}\,dv^2,$$

par rapport aux lignes de courbure. — On est aussi conduit à considérer le cas où

$$\frac{d}{dz}\log\frac{\dfrac{da}{dx}}{\dfrac{db}{dy}} = 0.$$

C'est celui que nous avons étudié au n° **56**, mais il n'y a pas intérêt à traiter la question de nouveau.

Remarquons, à propos de ces surfaces intéressantes, qu'il est un cas assez étendu où leur détermination devient plus simple; c'est celui où le dS^2 peut s'écrire à la fois

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du}\,du^2 + \frac{d\varphi}{dv}\,dv^2 = \lambda^2(du^2\,U + dv^2\,V).$$

Il en résulte

$$U\,\frac{d\lambda}{dv} = \frac{d\lambda}{du}\,V,$$

c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$\lambda = F\left(\int V\,dv + \int U\,du\right);$$

λ doit donc être fonction de la somme de deux fonctions de u et v seules.

Réciproquement, le λ étant sous la forme

$$dS^2 = F(U+V)(du^2 U_1 + dv^2 V_1),$$

on peut toujours le mettre sous la forme

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{dU_2}\overline{dU_2}^2 + \frac{d\varphi}{dV_2}\overline{dV_2}^2.$$

En effet, si l'on pose

$$F(U+V)U_1 = \frac{d\varphi}{du}U'_2,$$

$$F(U+V)V_1 = \frac{d\varphi}{dv}V'_2,$$

ces équations seront possibles, si l'on peut avoir

$$\frac{U'_2 U'}{U_1} = \frac{V'_2 V'}{V_1},$$

en choisissant convenablement U'_2 et V'_2, ce qui se vérifie.

On voit par cette remarque que les surfaces du second degré, celles dont les lignes de courbure sont des cercles géodésiques, peuvent faire partie d'un système triplement orthogonal où toutes les surfaces de la même famille ont même image sphérique.

On sait qu'à toute surface dont le réseau des lignes de courbure est isotherme correspond une autre surface jouissant de la même propriété, les λ des deux surfaces étant réciproques. Cette transformation, laissant toujours le λ fonction de $U+V$ quand il l'est tout d'abord, transforme les surfaces dont nous nous occupons en d'autres surfaces de la même espèce.

51. *Étant donné un réseau sphérique par rapport auquel*

$$dS^2 = \frac{d\varphi}{du}du^2 + \frac{d\varphi}{dv}dv^2,$$

on connaît deux surfaces l'admettant pour image sphérique. De toute surface qui l'admet pour image on déduit, à l'aide de quadratures, une autre surface jouissant de la même propriété. — Ajoutons enfin que l'équation des surfaces ayant même image sphérique qu'une de nos surfaces, pouvant s'écrire

$$2\frac{d^2 Z}{du\,dv} = \frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left(\frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{d\varphi}{du}} + \frac{\frac{dZ}{dv}}{\frac{d\varphi}{dv}}\right),$$

il suffit d'égaler Z à φ pour avoir une solution du problème; mais cette valeur de Z conduit à trouver une surface sur laquelle le dS^2 a la forme voulue; dès lors on doit trouver immédiatement une seconde solution du problème.

Ceci se vérifie d'une façon fort intéressante. Nous pouvons immédiatement former le dS^2 de la surface correspondant à la valeur $Z = \varphi$, car on a

$$\Delta X = du\left[PZ + \frac{d}{du}\left(\frac{\lambda Z}{P\,du}\right) + \frac{dP}{Q\,dv}\frac{dZ}{Q\,dv}\right]$$

$$= \frac{du}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{du}}}\frac{d}{du}\left(\varphi^2 + \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\varphi}{dv}\right) = \frac{du}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{du}}}\frac{dZ}{du},$$

$$\Delta Y = dv\left[QZ + \frac{d}{dv}\left(\frac{dZ}{Q\,dv}\right) + \frac{dQ}{P\,du}\frac{dZ}{P\,du}\right]$$

$$= \frac{dv}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{dv}}}\frac{d}{dv}\left(\varphi^2 + \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\varphi}{dv}\right) = \frac{dv}{2\sqrt{\frac{d\varphi}{dv}}}\frac{dZ}{dv},$$

puisque P^2 et Q^2 sont égaux à $\frac{d\varphi}{du}$ et $\frac{d\varphi}{dv}$, Z étant égal à φ. Mais, d'après la théorie même des surfaces en question, on sait que, si l'on pose

$$Z = \varphi^2 + \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\varphi}{dv},$$

Ψ désignant une nouvelle fonction de u et de v.

$$\frac{\left(\frac{dZ}{du}\right)^2}{4\frac{d\varphi}{du}} = \frac{d\Psi}{du}, \qquad \frac{\left(\frac{dZ}{dv}\right)^2}{4\frac{d\varphi}{dv}} = \frac{d\Psi}{dv}.$$

Égalant les deux valeurs qui en résultent pour $\frac{d^2\Psi}{du\,dv}$, il vient

$$2\frac{d^2 Z}{du\,dv}\left(\frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}-\frac{\frac{dZ}{dv}}{\frac{d\varphi}{dv}}\right)=\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left[\frac{\left(\frac{dZ}{du}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2}-\frac{\left(\frac{dZ}{dv}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dv}\right)^2}\right].$$

Or, si l'on supprime le facteur commun, qui ne peut être nul que dans le cas très particulier où

$$\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}=F(\varphi),$$

il reste

$$2\frac{d^2 Z}{du\,dv}=\frac{d^2\varphi}{du\,dv}\left(\frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}+\frac{\frac{dZ}{dv}}{\frac{d\varphi}{dv}}\right).$$

On voit que la quantité $\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}$ est aussi solution de l'équation (16). Remplaçant Z par cette valeur dans la formule précédente, on trouve l'équation différentielle qui détermine φ; elle coïncide d'ailleurs avec celle que l'on obtient directement en remplaçant P et Q par leurs valeurs en φ dans la première des équations de Codazzi.

Donc : *Toutes les fois qu'on a tracé sur la sphère un réseau orthogonal tel que les coefficients du dS^2 soient les différentielles partielles d'une même fonction, on a sans quadratures deux surfaces dont ce réseau est l'image.*

D'ailleurs, dans le cas général, si Z est solution de (16), le dS^2 de la surface correspondante peut s'écrire

$$\frac{du^2}{\frac{d\varphi}{du}}\left[\frac{d}{du}\left(Z\varphi+\frac{dZ}{du}+\frac{dZ}{dv}\right)-\frac{1}{2}\frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}\frac{d}{du}\left(\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}\right)\right]^2$$
$$+\frac{dv^2}{\frac{d\varphi}{dv}}\left[\frac{d}{dv}\left(Z\varphi+\frac{dZ}{du}+\frac{dZ}{dv}\right)-\frac{1}{2}\frac{\frac{dZ}{dv}}{\frac{d\varphi}{dv}}\frac{d}{dv}\left(\varphi^2+\frac{d\varphi}{du}+\frac{d\varphi}{dv}\right)\right]^2;$$

mais, d'après les résultats du n° **36**, on voit que, si ζ désigne en chaque point la distance de la surface à celle qui lui est infiniment voisine dans le système triplement orthogonal, on a

$$\frac{d\zeta}{du} = \frac{d}{du}\left(Z\varphi + \frac{dZ}{du} + \frac{dZ}{dv}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\frac{dZ}{du}}{\frac{d\varphi}{du}}\,\frac{d}{du}\left(\varphi^2 + \frac{d\varphi}{du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)$$

et l'équation symétrique; de telle sorte que par une simple quadrature on trouvera ζ.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DES DÉVELOPPÉES MOYENNES.

52. *Départ entre les propriétés indéformables et celles qui tiennent à la représentation sphérique.* — On voit par ce qui précède combien la notion de la représentation sphérique des surfaces est féconde; nous n'avons pas encore terminé la revue des propriétés générales des surfaces qui en dérivent, et l'on verra dans le courant de ce travail s'accentuer plus encore l'importance de l'idée de Gauss relative au départ entre les propriétés indéformables (si l'on peut ainsi désigner celles qui tiennent aux éléments indéformables) et celles de l'image sphérique. Ce Chapitre sera consacré à l'étude des *développées moyennes* des surfaces dont la notion se rattache directement à la représentation sphérique.

53. *Transformation des surfaces, les plans tangents restant parallèles, fonction géométrique invariante.* — Prenons pour réseau (u, v) celui des lignes de courbure de la surface de référence (O) et considérons encore un faisceau de droites (N) parallèles aux normales de (O). Soit Z la distance au plan tangent en O du point situé sur N à égale distance des foyers de cette droite, la formule (11) donne

$$-2Z = \frac{f}{P} + \frac{g}{Q} + \frac{1}{P}\left(\frac{d\xi}{du} + \frac{dP}{Q\,dv}\,\eta\right) + \frac{1}{Q}\left(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dQ}{P\,dv}\,\xi\right).$$

Considérons maintenant, d'une part le plan perpendiculaire à OZ et également distant des centres de courbure de (O), et d'autre part le plan moyen du faisceau des droites (N), que nous définirons le plan perpendiculaire à N et à égale distance des foyers de cette droite; soit ζ la distance de ces deux plans moyens : la formule précédente donne

$$(25) \qquad -2\zeta = \frac{1}{P}\left(\frac{d\xi}{du} + \frac{dP}{Q\,dv}\eta\right) + \frac{1}{Q}\left(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dQ}{P\,dv}\xi\right).$$

Or l'on remarquera que cette équation ne contient ni f ni g.

Faisons correspondre au faisceau (N) dérivé de (O) un faisceau (N') dérivé de la même manière de la sphère de rayon unité, c'est-à-dire construisons avec les mêmes ξ et η une droite N' dérivée de la normale à la sphère, en prenant pour réseau (u, v) l'image sphérique de celui des lignes de courbure de (O), et la droite N dérivée de la normale à (O), comme il a été dit plus haut. Il est clair, d'après la formule (25), que la valeur du ζ est la même dans les deux cas. Or les lignes de courbure et leur image sphérique n'entrent ici que pour la forme, car le ζ relatif au faisceau (N') est manifestement indépendant du réseau orthogonal particulier qui nous a permis de trouver sa valeur.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Soient deux surfaces (O) *et* (O') *que l'on fait correspondre par parallélisme de leurs plans tangents et deux faisceaux de droites* (N) *et* (N') *associés aux normales de* (O) *et de* (O') *de telle façon que chaque couple soit à chaque instant superposable et parallèle à l'autre couple : la distance des deux plans moyens de chaque couple est la même.*

La démonstration résulte de ce qui précède et si l'on prend comme intermédiaire à (O) et (O') la sphère de rayon unité.

54. *Cas de deux faisceaux symétriques par rapport aux points de la surface de référence.* — Supposons en particulier que (O) et (O') coïncident, mais que les droites (N) et (N'), au lieu de coïncider, soient symétriques par rapport à l'origine O; il faut dans ce cas changer les signes de ξ et η dans l'équation : donc les ζ sont égaux et de signes contraires, pour les deux faisceaux. On déduit sans peine de cette remarque la propriété suivante :

Si deux faisceaux de droites (N) *et* (N') *sont parallèles aux normales d'une surface* (O) *et symétriques par rapport à celles-ci, que l'on joigne entre eux les points milieux des segments focaux, la droite ainsi obtenue rencontre la normale de* (O) *en un point situé à égale distance des centres de courbure principaux.*

55. *Développée moyenne d'une surface et développante. Définitions. On connaît toutes les surfaces ayant même développée moyenne qu'une surface donnée.* — Les considérations précédentes nous amènent à faire l'étude de la surface (D) qui a pour plans tangents les plans moyens des normales d'une surface donnée (O). Nous dirons que (D) est la développée moyenne de (O) et, par abréviation, nous dirons que (O) est la développante de (D).

S'il y a quelque analogie entre le lieu des centres de courbure principaux d'une surface et la première développée d'une courbe plane, on accordera qu'elle ne se poursuit guère analytiquement. En revanche, il existe une similitude très étroite entre la seconde développée d'une courbe plane et ce que nous définissons la développée moyenne d'une surface.

Cherchons quelles sont les surfaces ayant même développée moyenne que la surface de référence. Il est clair qu'on a

$$\frac{1}{P}\left(\frac{d\xi}{du}+\frac{dP}{Q\,dv}\eta\right)+\frac{1}{Q}\left(\frac{d\eta}{dv}+\frac{dQ}{P\,dv}\xi\right)=0.$$

Mais il faut exprimer que les ξ et η correspondent aux normales d'une surface, c'est-à-dire que

$$\xi=\frac{dZ}{P\,du},\qquad \eta=\frac{dZ}{Q\,dv};$$

la condition devient

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{P}{Q}\frac{dZ}{dv}\right)+\frac{d}{du}\left(\frac{Q}{P}\frac{dZ}{du}\right)=0.$$

Or, si l'on cherchait quelles sont les surfaces ayant même développée moyenne que la sphère de rayon unité, en considérant comme réseau de ses lignes de courbure celui des (u), (v), on trouverait manifestement l'équation précédente. Donc la solution du problème général ne dépend que du cas relatif à la sphère ; mais dans ce cas le problème n'a aucun lien qui le rattache aux lignes de courbure : on peut donc supposer celles-ci isométriques, ce qui donne l'équation intégrable immédiatement

$$\frac{d^2 Z}{du^2} + \frac{d^2 Z}{dv^2} = 0.$$

De ceci résulte qu'*on peut construire toutes les surfaces ayant même développée moyenne qu'une surface donnée.*

56. *Intégrale à l'aide des coordonnées imaginaires sphériques des surfaces ayant même développée moyenne qu'une surface donnée.* — Le système des coordonnées sphériques étudié dans le Chapitre précédent prend ici une importance capitale. Si R_1 et R_2 désignent les rayons de courbure d'une surface dont l'équation est

$$p = f(x, y),$$

nous avons vu que

$$\frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\, dy} + p.$$

Si l'on désigne par l la distance de l'origine au plan moyen,

$$l = -\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\, dy}.$$

Veut-on exprimer que deux surfaces ont même développée moyenne, p et p_1 désignant les distances du centre de la sphère à leurs plans tangents, on doit avoir

$$\frac{2 d^2 p_1}{\lambda^2 dx\, dy} = \frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\, dy};$$

d'où résulte

$$p_1 = p + X + Y.$$

Telle est l'intégrale explicite du problème, dont l'existence avait été établie au numéro précédent.

57. *On obtient par deux quadratures les développantes d'une surface donnée.* — Cherchons maintenant les surfaces qui ont pour développée moyenne une surface donnée; soit p_1 la distance de l'origine aux plans tangents de la développante, il faut poser

$$\frac{d^2 p_1}{dx\,dy} + \frac{\lambda^2}{2} f(x, y) = 0.$$

Mais, λ étant une simple fonction de x et de y, l'équation précédente peut toujours s'intégrer. Ainsi :

On obtient les développantes d'une surface donnée par deux quadratures, lorsque l'équation de la surface est résolue par rapport à p, distance d'une origine fixe à ses plans tangents.

Ce théorème, d'une extrême simplicité, justifie ce que nous avons annoncé touchant l'analogie qui existe entre les développées moyennes des surfaces et les développées secondes des courbes planes. Quand on met l'équation d'une courbe plane sous la forme

$$p = f(\theta),$$

où θ est l'angle de la normale avec une direction fixe, on trouve pour l'équation de la développante du second ordre

$$\frac{d^2 p}{d\theta^2} + f(\theta) = 0,$$

dont l'intégrale s'obtient par deux quadratures.

58. *Développantes d'une sphère. Lignes de courbure.* — Passons en revue quelques surfaces dont les développées moyennes sont simples. Supposons le λ de la sphère pris sous la forme

$$\lambda = \frac{2i}{x+y}.$$

Cherchons la développante d'une sphère de rayon $\frac{K}{2}$. En prenant le centre de celle-ci pour origine, il vient pour l'équation du problème

$$\frac{d^2p}{dx\,dy} - \frac{K}{(x+y)^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$p = -K\log(x+y) + X + Y.$$

On peut profiter de l'indétermination de X et Y pour trouver certaines développantes dont les lignes de courbure s'intègrent. Formons $\frac{da}{dx}$ et $\frac{db}{dy}$ (nº **45**), il vient

$$-4\frac{da}{dx} = \left[\sqrt{X''}(x+y) + \frac{X'}{\sqrt{X''}}\right]^2 - K - \frac{X'^2}{X''},$$
$$-4\frac{db}{dy} = \left[\sqrt{Y''}(x+y) + \frac{Y'}{\sqrt{Y''}}\right]^2 - K - \frac{Y'^2}{Y''}.$$

Supposons d'abord

$$\frac{X'^2}{X''} + K = \frac{Y'^2}{Y''} + K = 0,$$

d'où résulte

$$\frac{1}{X'} = \frac{x+C}{K}, \qquad \frac{1}{Y'} = \frac{y+D}{K},$$

on trouve alors

$$+4\frac{da}{dx} = K\frac{(y-C)^2}{(x+C)^2}, \qquad 4\frac{db}{dy} = K\frac{(x-D)^2}{(y+D)^2},$$
$$p = -K\log\frac{(x+y)}{(x+C)(y+D)} + M.$$

L'équation des lignes de courbure devient

$$\frac{dy}{(y-C)(y+D)} \pm \frac{dx}{(x-D)(x+C)} = 0,$$

dont les intégrales sont

$$\frac{(y-C)(x-D)}{(y+D)(x+C)} = A, \qquad \frac{(y-C)(x+C)}{(y+D)(x-D)} = B.$$

On a pour les rayons de courbure principaux, en général,

$$R_1 + R_2 = 2(2c + p), \qquad (R_1 - R_2)^2 = 16\,\frac{da}{dx}\,\frac{db}{dy},$$

d'où résulte, dans l'espèce,

$$R_1 + R_2 = 2M - K - 2K \log \frac{x + y}{(x + C)(y + D)},$$

$$R_1 - R_2 = K\,\frac{(y - C)(x - D)}{(x + C)(y + D)}.$$

On voit que le long des lignes de courbure d'un même système la différence des rayons de courbure principaux est constante, mais comme la somme ne l'est pas, les surfaces trouvées ne sont pas de révolution.

59. *Développantes d'un point. Correspondance sur la sphère de deux points, les aires décrites étant égales.* — Comme second cas, plus particulier encore, supposons que K soit nul, c'est-à-dire cherchons les surfaces dont tous les plans moyens passent par un point fixe. On a

$$p = X + Y.$$

L'équation quadratique des lignes de courbure devient

$$dx^2[2X' + X''(x + y)] = dy^2[2Y' + Y''(x + y)],$$

et, si l'on suppose

$$X = -\frac{C}{x}, \qquad Y = -\frac{D}{y},$$

l'intégrale est

$$\sqrt{\frac{C}{x}} \pm \sqrt{\frac{D}{y}} = A.$$

La surface n'est pas non plus de révolution; ses normales jouissent d'une propriété géométrique simple. Si l'on décrit une sphère de rayon quelconque ayant pour centre l'origine, chacune des normales à la surface considérée rencontre la sphère en deux points; ceux-ci décrivent des contours conjugués qui, s'ils sont fermés, embrassent des aires sphériques égales.

60. *Développantes des surfaces à étendue minima. Lignes de courbure.* — Cherchons maintenant les développantes des surfaces à étendue minima; on a, pour ces dernières,

$$p = X' + Y' - 2\frac{X+Y}{(x+y)};$$

dès lors l'équation différentielle de la développante est

$$\frac{d^2 p}{dx\,dy} - \frac{2(X'+Y')}{(x+y)^2} + 4\frac{(X+Y)}{(x+y)^3} = 0,$$

et l'on trouve pour intégrale

$$\frac{p}{2} = -\frac{(X+Y)}{(x+y)} + X_1 + Y_1,$$

où X_1 et Y_1 sont les deux fonctions arbitraires de la développante.

L'équation des lignes de courbure est

$$dx^2[X'' - 2X'_1 - X''_1(x+y)] = dy^2[Y'' - 2Y'_1 - Y''_1(x+y)].$$

Première hypothèse :

$$X''_1 = Y''_1 = 0.$$

Les lignes de courbure sont données par la formule

$$\int dx\sqrt{X'' - 2A} \pm \int dy\sqrt{Y'' - 2B} = 0.$$

Deuxième hypothèse :

$$X'' - X'_1 - \frac{d}{dx}(X'_1 x) = 0,$$

$$Y'' - Y'_1 - \frac{d}{dy}(Y'_1 y) = 0.$$

On trouve les intégrales

$$X_1 = \frac{X + Ax + B}{x}, \qquad Y_1 = \frac{Y + Cy + D}{y},$$

$$\frac{p}{2} = -\frac{(X+Y)}{x+y} + \frac{X + Ax + B}{x} + \frac{Y + Cy + D}{y},$$

et, pour les lignes de courbure

$$\int dx \sqrt{\frac{X_1''}{x}} \pm \int dy \sqrt{\frac{Y_1''}{y}} = 0.$$

Supposons enfin

Troisième hypothèse :

$$X'' - 2X_1' = KX_1'',$$
$$Y'' - 2Y_1' = KY_1''.$$

Les lignes de courbure ont pour intégrale

$$\int dx \sqrt{X_1''} \pm \int dy \sqrt{Y_1''} = 0.$$

61. *Surfaces réciproques, l'une étant la développée moyenne de l'autre. Intégrale particulière.* — Nous dirons que deux surfaces sont réciproques si l'une est la développée moyenne de l'autre. L'équation différentielle de ces surfaces peut s'écrire

$$p = \frac{4}{\lambda^2} \frac{d^2}{dx\,dy}\left(\frac{1}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy}\right),$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2}{dx\,dy}\left(\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy} + p\right) - \left(\frac{2}{\lambda^2} \frac{d^2 p}{dx\,dy} + p\right) = 0.$$

et l'on voit clairement que les surfaces à étendue minima répondent à la question. De même, les surfaces définies par l'équation

$$\frac{2\,d^2 p}{\lambda^2\,dx\,dy} - p = 0$$

sont réciproques de leurs développées moyennes. L'équation générale étant du quatrième ordre et linéaire, si l'on avait l'intégrale de celle qui précède, il suffirait de l'ajouter à celle des surfaces à étendue minima pour avoir la solution complète. On obtient pourtant la réduction du problème au second ordre, soit directement, d'après cette remarque, soit en effectuant une première intégration, qui amène

$$\frac{2}{\lambda^2}\frac{d^2p}{dx\,dy} - p = X'_1 + Y'_1 + 2X_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dx} + 2Y_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dy},$$

puis posant

$$p = X - \tfrac{1}{2}(X'_1 + Y'_1) - X_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dx} - Y_1\frac{d\lambda}{\lambda\,dy},$$

il reste, comme il était annoncé,

$$\frac{2d^2X}{\lambda^2\,dx\,dy} - X = 0.$$

L'intégrale de cette équation n'est pas exprimable explicitement dans sa généralité, mais on peut en trouver une intégrale particulière avec des constantes arbitraires. Prenons, en effet, le λ sous sa forme la plus simple et posons

$$x + y = Z, \qquad x - y = t;$$

il vient alors

$$\frac{d^2X}{dx\,dy} - \frac{\lambda^2}{2}X = \frac{d^2X}{dZ^2} - \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{2X}{Z^2} = 0.$$

Cherchons les valeurs pour lesquelles $\frac{d^2X}{dt^2}$ est identiquement nul, c'est-à-dire de la forme

$$X = Z_1 t + Z_2,$$

où Z_1 et Z_2 représentent deux fonctions de Z seul, qui sont manifestement racines de l'équation

$$\frac{d^2X}{dZ^2} + \frac{2X}{Z^2} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$X = e^{\frac{1}{2}lZ}\left(M\cos\frac{\sqrt{7}}{2}lZ + N\sin\frac{\sqrt{7}}{2}lZ\right).$$

On déduit facilement de ce qui précède l'intégrale particulière suivante de l'équation des surfaces réciproques

$$p=\sqrt{(x+y)}\left\{\cos\frac{\sqrt{7}}{2}l(x+y)[A(x-y)+B]\right.$$
$$\left.+\sin\frac{\sqrt{7}}{2}l(x+y)[C(x-y)+D]\right\}-2\frac{(X+Y)}{(x+y)}+X'+Y',$$

et l'on sait qu'on ne peut écrire explicitement l'intégrale générale.

62. *Intégrale des surfaces identiques à leurs développées moyennes.* — On peut manifestement chercher, à propos des développées moyennes, des propriétés analogues à celles dont M. Puiseux s'est occupé relativement aux développées successives des courbes planes. Demandons-nous, par exemple, quelles sont les surfaces identiques à leurs développées moyennes.

Soient (N) et (D) deux de ces surfaces; si l'on choisit deux origines convenables O et O', il est clair que les distances respectives de ces points aux plans tangents à (N) et (D) doivent être toujours égales. Or le p d'une sphère réduite au point O' peut être supposé égal à

$$p=\frac{K}{(x+y)}.$$

De telle sorte que l'équation différentielle cherchée est

$$p+\frac{2\,d^2p}{\lambda^2\,dx\,dy}+\frac{K}{(x+y)}=0.$$

Il suffira de trouver une solution particulière pour ramener le problème à la recherche des surfaces à étendue minima. Cherchons les valeurs de p qui sont simplement fonction de $Z=(x+y)$; dans cette hypothèse,

$$p-\frac{Z^2}{2}\frac{d^2p}{dZ^2}+\frac{K}{Z}=0.$$

On satisfait à cette équation au moyen de l'expression

$$p=AZ^2+\frac{B}{Z},$$

où A et B sont des fonctions de Z déterminées par les équations

$$Z^2\frac{dA}{dZ}+\frac{1}{Z}\frac{dB}{dZ}=0,$$

$$-2Z\frac{dA}{dZ}+\frac{1}{Z^2}\frac{dB}{dZ}+\frac{2K}{Z^3}=0,$$

que l'on vérifiera en posant

$$A=-\frac{2}{9}\frac{K}{Z^3},$$

$$B=-\frac{2}{3}K\log Z.$$

On a donc la solution particulière

$$p=-\frac{2}{9}\frac{K}{(x+y)}-\frac{2}{3}\frac{K}{(x+y)}\log(x+y);$$

d'où se déduit l'intégrale générale

$$p=-\frac{2}{3}\frac{K}{(x+y)}\left[\frac{1}{3}+\log(x+y)\right]+X'+Y'-\frac{2(X+Y)}{(x+y)}.$$

On peut, par un simple transport de l'origine, réduire cette équation à la forme

$$p=-\frac{2K}{3(x+y)}\log(x+y)+X'+Y'-2\frac{(X+Y)}{(x+y)}.$$

On trouve pour l'équation des lignes de courbure

$$dx^2\left[\frac{K}{(x+y)^3}+\frac{3X'''}{2}\right]=dy^2\left[\frac{K}{(x+y)^3}+\frac{3Y'''}{2}\right],$$

qui s'intègre si X''' et Y''' sont nuls; dans ce cas on trouve aussi les asymptotiques, car leur équation est

$$dx^2\left[\frac{K}{(x+y)^3}+\frac{3X'''}{2}\right]+dx\,dy\,\frac{6K}{(x+y)^3}+dy^2\left[\frac{K}{(x+y)^3}+\frac{3Y'''}{2}\right]=0.$$

63. *La cyclide de Dupin et sa développée moyenne ont même image sphérique.* — Nous pourrions chercher aussi des exemples dans lesquels nous ferions entrer en ligne de compte la courbure des développées moyennes, mais pour ne pas allonger ce Chapitre nous nous bornerons à faire l'étude de la développée moyenne d'une *cyclide*.

Si l'on prend pour réseau coordonné celui des lignes de courbure, on a (O. BONNET, *Mémoires sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, p. 120)

$$f = \frac{U}{u - v}, \qquad g = \frac{V}{u - v},$$

$$P = \frac{vU}{u - v}, \qquad Q = \frac{uV}{u - v}.$$

Le ζ de la développée moyenne est donné par la formule

$$\xi = \frac{1}{2uvU} - \frac{1}{2u^2U},$$

$$\eta = -\frac{1}{2uvV} + \frac{1}{2v^2V}.$$

On en déduit immédiatement

$$\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta = \frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi = 0.$$

Donc *la développée moyenne d'une cyclide a même image sphérique qu'elle.*

CHAPITRE VII.

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE GAUSS CONCERNANT LE PRODUIT DES RAYONS DE COURBURE PRINCIPAUX.

64. *Exemple de propriété des faisceaux, persistant quelle que soit la forme de la surface de référence.* — Nous avons étudié dans les Chapitres précédents une série de propriétés se rapportant toutes à la transformation sphérique. Il convient à présent de mettre en évidence les propriétés du faisceau des droites parallèles aux normales de la surface de référence qui persistent, quelle que soit la forme de celle-ci.

Déjà nous avons trouvé l'une des propriétés en question au n° **38**. L'équation de condition qui exprime que les *images principales* du faisceau (N) sont conjuguées sur (O) étant

$$\frac{d}{dv}(f\xi) = \frac{d}{du}(g\eta),$$

on voit qu'elle ne contient ni P, ni Q, ni D; donc on peut déformer (O) comme on voudra : *si chacun des plans tangents entraîne dans la déformation la droite* (N) *qui le traverse, le faisceau* (N) *aura toujours ses images principales conjuguées sur* (O).

Nous avons fait voir que dans ce cas l'intégrale du problème est toujours connue, puisque les droites (N) sont les cordes de contact d'une famille de sphères.

65. *Dans un faisceau de droites parallèles aux normales de la surface de référence, le produit des distances focales ne dépend pas de la forme de cette surface.* — L'équation (11) conduit à une proposition très importante dans l'ordre d'idées où nous nous plaçons. Z_1 et Z_2 désignant les distances des foyers du faisceau (N) au plan tangent en (O), on a

$$\begin{aligned} 0 = -Z_1Z_2(PQ - fg\,D^2) &+ \left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) \\ &- \left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right), \end{aligned}$$

ou, en tenant compte des équations (9),

$$\begin{aligned} -Z_1Z_2&\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du}\right)\right] \\ &= \left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right)\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) \\ &\quad - \left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right)\left(\frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta\right), \end{aligned}$$

expression qui ne contient que f et g; ainsi : *Quelle que soit la forme de* (O), *le produit des distances focales du faisceau* (N) *est constant.* (En désignant, pour abréger, par distance focale la distance d'un foyer au plan tangent.)

Ce théorème est une généralisation du célèbre théorème de Gauss sur l'invariabilité du produit des rayons de courbure principaux, lorsqu'on déforme la surface; il suffit en effet d'annuler ξ et η dans l'équation précédente pour avoir la valeur du produit des rayons de courbure principaux de (O), puisque le faisceau (N) coïncide avec celui des normales à (O).

66. *Application du théorème précédent. La somme algébrique des aires correspondantes des deux nappes d'une enveloppe de sphères reste constante quelle que soit la forme de la surface lieu des centres.* — Arrêtons-nous un moment à déduire des conséquences géométriques de la proposition que nous venons d'établir.

Supposons que les droites (N) soient les cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur (O); alors, si R désigne le rayon de la sphère ayant son centre au point (u, v), posant

$$R^2 = -2Z,$$

on peut écrire

$$\xi = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{g\,dv}, \qquad \zeta^2 = -2Z - \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 - \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2;$$

mais, pour simplifier les formules, prenons pour (u), (v) un réseau isométrique, et enfin passons aux coordonnées symétriques imaginaires; en adoptant les mêmes notations qu'au n° **44**, il vient

$$\lambda + \frac{d\xi}{du} + \frac{d\lambda}{\lambda\,dv}\eta = \lambda\left(1 + 2c - \frac{da}{dx} - \frac{db}{dy}\right),$$

$$\lambda + \frac{d\eta}{dv} + \frac{d\lambda}{\lambda\,du}\xi = \lambda\left(1 + 2c + \frac{da}{dx} + \frac{db}{dy}\right),$$

$$\frac{d\xi}{dv} - \frac{d\lambda}{\lambda\,du}\eta = \frac{d\eta}{du} - \frac{d\lambda}{\lambda\,dv}\xi = i\lambda\left(\frac{da}{dx} - \frac{db}{dy}\right).$$

De là résulte, pour le produit $Z_1 Z_2$, la valeur remarquable

$$-\frac{4Z_1Z_2}{\lambda^2}\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy} = (1+2c)^2 - 4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}.$$

Considérons maintenant les deux nappes (M) et (M′) de l'enveloppe de sphères, soit ζ l'ordonnée commune aux deux points M et M′, et i l'angle de OM ou de OM′ avec la normale à (O); si $d(\mathrm{M})$ et $d(\mathrm{M}')$ sont les éléments des aires des surfaces enveloppes correspondant à un élément $d(\mathrm{O})$ de la surface de référence, on a, d'après un théorème de Gauss,

$$\cos i\, d(\mathrm{M}) = \frac{d(\mathrm{O})}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(Z_1+\zeta)(Z_2+\zeta),$$

$$\cos i\, d(\mathrm{M}') = \frac{d(\mathrm{O})}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(Z_1-\zeta)(Z_2-\zeta),$$

de telle sorte que

$$\cos i\,\frac{d(\mathrm{M})+d(\mathrm{M}')}{2} = \frac{d(\mathrm{O})}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2}(Z_1Z_2+\zeta^2),$$

d'où résulte, après substitution,

$$-\cos i\,\frac{d(\mathrm{M})+d(\mathrm{M}')}{2} = i\left(\frac{dx^2-dy^2}{4}\right)\left\{4\zeta^2\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy} - \lambda^2\left[(1+2c)^2-4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]\right\}.$$

On voit que $\cos^2 i$ est égal au quotient de ζ^2 par $-2Z$; par conséquent, si l'on déforme la surface des centres, $d(\mathrm{M})+d(\mathrm{M}')$ ne varie pas; d'où résulte cette proposition :

Que l'on trace deux contours conjugués fermés, sur les deux nappes (M) *et* (M′) *d'une enveloppe de sphères dont les centres sont rangés sur une surface* (O) *et compris à l'intérieur d'un certain contour fermé; on peut déformer la portion de surface* (O) *comprise à l'intérieur du contour sans que la somme des aires des contours* (M) *et* (M′) *varie,* pourvu que chaque point de (O) entraîne avec lui la sphère dont il est le centre.

67. *Théorème sur la somme des volumes des deux nappes d'une enveloppe de sphères.* — On peut également déduire de ce qui précède un théorème sur le volume des enveloppes de sphères. Nous appellerons volume de la nappe (M) correspondant à un certain contour fermé tracé sur cette surface le solide limité à la portion de (M) comprise dans le contour et à la portion correspondante de la surface des centres (O), ainsi qu'à la surface gauche lieu des normales à (M) tout le long du contour; soit dV ce volume.

Considérons la famille des surfaces parallèles à (M) : elle décomposera le volume en question suivant une série de prismes infinitésimaux dont la mesure est facile.

Soit R′ la distance de O à l'une des surfaces parallèles à (M), posons

$$R' = R - K,$$

où K est la distance de cette surface à (M); si l'on écrit

$$A = \frac{dR}{\lambda^2 dx}, \qquad B = \frac{dR}{\lambda^2 dy}, \qquad C = \frac{d^2 R}{\lambda^2 dx\, dy},$$

il vient

$$-\zeta'^2 = -\zeta^2 - K^2(1 - 4\lambda^2 AB) + 2K[R + 2\lambda^2(Ab + Ba)],$$

$$a' = a + KA, \qquad b' = b + KB,$$

$$\frac{da'}{dx} = \frac{da}{dx} + K\frac{dA}{dx}, \qquad \frac{db'}{dy} = \frac{db}{dy} + K\frac{dB}{dy},$$

$$c' = c + KC.$$

Mais si l'on décrit des sphères ayant leurs centres sur (O) et dont le rayon soit égal à R′, elles envelopperont manifestement deux surfaces parallèles à (M) et (M′); soient $d(M_1)$ et $d(M'_1)$ les éléments de ces surfaces correspondant aux éléments $d(M)$ et $d(M')$, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned}
&-\cos i\,\frac{d(M_1) + d(M'_1)}{2}\\
&= i\,\frac{dx^2 - dy^2}{4}\Big(4\,\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}\{\zeta^2 + K^2(1 - 4\lambda^2 AB) - 2K[R + 2\lambda^2(Ab + Ba)]\}\\
&\qquad - \lambda^2(1 + 2c + 2KC)^2 + 4\lambda^2\left(\frac{da}{dx} + K\frac{dA}{dx}\right)\left(\frac{db}{dy} + K\frac{dB}{dy}\right)\Big),
\end{aligned}$$

ou, en ordonnant suivant les puissances de K,

$$
\begin{aligned}
-\cos i\,\frac{d(\mathrm{M}_1)+d(\mathrm{M}'_1)}{2}
&= i\,\frac{dx^2-dy^2}{4}\bigg(\mathrm{K}^2\left[4\,\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}(1-4\lambda^2\mathrm{AB})-4\lambda^2\mathrm{C}^2+4\lambda^2\frac{d\mathrm{A}}{dx}\frac{d\mathrm{B}}{dy}\right]\\
&\qquad+2\mathrm{K}\bigg\{-4\,\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}[\mathrm{R}+2\lambda^2(\mathrm{A}b+\mathrm{B}a)]\\
&\qquad\qquad-2\lambda^2(1+2c)\,\mathrm{C}+2\lambda^2\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx}\frac{db}{dy}+\frac{d\mathrm{B}}{dy}\frac{da}{dx}\right)\bigg\}\\
&\qquad-4\,\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}(2\mathrm{Z}+4\lambda^2ab)-\lambda^2\left[(1+2c)^2-4\,\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]\bigg).
\end{aligned}
$$

L'élément du solide limité à deux surfaces infiniment voisines parallèles à (M) et compris entre deux contours correspondants a pour mesure

$$d(\mathrm{M}_1)\,d\mathrm{K},$$

de telle sorte que les deux volumes dont nous cherchons la mesure ont pour expression

$$dV=\int_{\mathrm{K}=\mathrm{R}}^{\mathrm{K}=0} d(\mathrm{M}_1)\,d\mathrm{K},\qquad dV'=\int_{\mathrm{K}=\mathrm{R}}^{\mathrm{K}=0} d(\mathrm{M}'_1)\,d\mathrm{K},$$

et la somme de ces volumes s'obtiendra en intégrant par rapport à K l'expression écrite plus haut. Dans ces conditions l'on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{K}=\mathrm{R}}^{\mathrm{K}=0} d\mathrm{K}[d(\mathrm{M}_1)+d(\mathrm{M}'_1)]\\
&\quad=-i\,\frac{(dx^2-dy^2)}{2\cos i}\bigg(\frac{\mathrm{R}^3}{3}\left[4\,\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}(1-4\lambda^2\mathrm{AB})-4\lambda^2\mathrm{C}^2+4\lambda^2\frac{d\mathrm{A}}{dx}\frac{d\mathrm{B}}{dy}\right]\\
&\qquad+\mathrm{R}^2\bigg\{-4\,\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}[\mathrm{R}+2\lambda^2(\mathrm{A}b+\mathrm{B}a)]\\
&\qquad\qquad-2\lambda^2(1+2c)\mathrm{C}+2\lambda^2\left(\frac{d\mathrm{A}}{dx}\frac{db}{dy}+\frac{d\mathrm{B}}{dy}\frac{da}{dx}\right)\bigg\}\\
&\qquad-4\,\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}\mathrm{R}(2\mathrm{Z}+4\lambda^2ab)-\mathrm{R}\lambda^2\left[(1+2c)^2-4\,\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]\bigg).
\end{aligned}
$$

On voit que cette expression ne dépend pas des éléments de forme relatifs à la surface des centres. Ainsi :

La somme des volumes correspondant aux deux nappes d'une enveloppe de sphères reste invariable quelle que soit la déformation que l'on fasse subir à la surface lieu des centres.

68. *Relations entre les rayons de courbure des deux nappes d'une enveloppe de sphères.* — Les résultats que nous venons d'établir conduisent à des relations entre les rayons de courbure principaux des deux nappes d'une enveloppe de sphères.

Soient ρ_1, ρ_2 les distances du point O aux centres de courbure principaux de (M); de même soient ρ'_1, ρ'_2 les distances de O aux centres de courbure de (M′); soient enfin $d(\mu)$ et $d(\mu')$ les valeurs sphériques des éléments $d(\mathrm{M})$ et $d(\mathrm{M}')$; on a

$$\begin{aligned} d(\mathrm{M}) &= d(\mu)(\rho_1+\mathrm{R})(\rho_2+\mathrm{R}),\\ d(\mathrm{M}') &= d(\mu')(\rho'_1+\mathrm{R})(\rho'_2+\mathrm{R}); \end{aligned}$$

d'où résulte

$$\begin{aligned} d(\mathrm{M})+d(\mathrm{M}') = \mathrm{R}^2[d(\mu)+d(\mu')]& \\ +\mathrm{R}[d(\mu)(\rho_1+\rho_2)+d(\mu')(\rho'_1+\rho'_2)]& \\ +d(\mu)\rho_1\rho_2+d(\mu')\rho'_1\rho'_2.& \end{aligned}$$

Mais nous venons de démontrer que, si l'on remplace R par R − K, l'expression précédente est indépendante de la forme de (O), quel que soit K ; il en résulte

$$\begin{aligned} d(\mu)\rho_1\rho_2+d(\mu')\rho'_1\rho'_2 &= \text{const.},\\ d(\mu)(\rho_1+\rho_2)+d(\mu')(\rho'_1+\rho'_2) &= \text{const.},\\ d(\mu)+d(\mu') &= \text{const.} \end{aligned}$$

La première de ces équations est évidente, la troisième exprime cette propriété remarquable :

La somme des deux valeurs sphériques de deux contours tracés sur les deux nappes d'une enveloppe de sphères et conjugués est *constante quelle que soit la déformation que l'on fasse subir à la portion de la surface des centres comprise dans le contour correspondant aux deux premiers.*

Des trois propositions que nous venons d'établir, celle-ci est celle qui se rapproche le plus du théorème de Gauss : lorsqu'on déforme une portion de surface limitée à un contour fermé, la valeur sphérique de ce contour reste constante.

La seconde des trois dernières équations conduit facilement à établir que

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho'_1} + \frac{1}{\rho'_2} = \text{const.},$$

quelle que soit la déformation de (O).

69. *Extension des théorèmes au cas où* (O) *se réduit à une courbe gauche ou plane.* — Nous ne pouvons passer sous silence les particularisations des théorèmes qui précèdent, auxquelles on est conduit en remplaçant la surface des centres par une courbe gauche puis par une courbe plane.

Si (O) est remplacé par une courbe gauche, il faut supposer une sphère unique ayant son centre en chaque point de (O); chaque sphère touche alors son enveloppe suivant un cercle. Que l'on déforme une portion de la courbe (O), chaque point de celle-ci entraînant la sphère dont elle est le centre, *la portion de surface enveloppe comprise entre les cercles de contact des sphères extrêmes reste constante. Le volume compris entre les plans de ces cercles et le boyau qui est l'enveloppe des sphères reste aussi constant.*

Nous ne pourrions sans quitter notre sujet établir directement ces propositions, non plus que celles qui ont rapport aux enveloppes de cercles dans le plan; ces dernières constituent une généralisation intéressante d'un théorème très particulier établi par Steiner à propos des podaires des courbes. C'est même en cherchant cette généralisation que nous avons été conduit à soupçonner l'existence des propositions qui font l'objet de ce Chapitre.

70. *Remarque au sujet d'un travail de Bour qui n'a pas été publié.* — Il n'est peut-être pas sans intérêt de faire observer que Bour

(*Théorie de la déformation des surfaces*, p. 148) parle « d'un appendice à son Mémoire consacré à la théorie des surfaces caustiques » (appendice qu'on n'a pas retrouvé); il annonçait que « cette théorie présente des rapports fort curieux avec celle de la déformation des surfaces ». Nous ne pensons pas que Bour ait songé aux aires des surfaces enveloppes de sphères ni à leurs volumes, mais il avait certainement trouvé des relations liant entre elles et à la surface *dirimante* les quatre nappes des surfaces *caustiques conjuguées*, c'est-à-dire les développées des surfaces enveloppes de sphères dans le cas où les rayons incidents sont normaux à une surface. Cette phrase nous a paru poser un problème intéressant à résoudre, tant au point de vue de la théorie des surfaces proprement dite, qu'à celui de la reconstitution d'un travail perdu : telle est l'origine de toutes les recherches que nous exposons partiellement aujourd'hui. Dans le Chapitre IX, nous résumerons rapidement les propriétés des surfaces *caustiques* qui persistent avec la déformation de la surface *dirimante :* c'est manifestement ce que visait Bour.

71. *Pourquoi la distance des points d'une surface* (O) *à un plan fixe satisfait à une équation indépendante de la forme de* (O). — On a considéré comme un fait digne de remarque que la distance des points d'une surface (O) à un plan fixe satisfît à une équation qui ne contient que les dérivées de cette fonction et les éléments indéformables de (O). C'est en partant de cette équation aux différentielles partielles du second ordre qu'on a essayé la recherche de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée, mais on n'a pas indiqué quelle était la raison géométrique du fait analytique important que nous venons de signaler. Ce fait se met en relief d'une facon tout à fait nette si, au lieu de la distance à un plan, on fait intervenir la distance à un point fixe. Supposons en effet qu'en chacun des points d'une surface (O) on fixe avec liaison une tige égale à la distance au point fixe M; si les extrémités de ces tiges ne sont pas réunies, la surface est libre, on peut la déformer comme on l'entend; réunit-on au contraire toutes les tiges, elle est comme une *carène* maintenue par ses *acores*, et ne peut être déformée, car la mise en place de la surface s'opère consécutivement en construisant une suite de tétraèdres ayant pour bases des éléments triangulaires accolés de (O) et pour sommet commun le point M. Ainsi : *étant donné un système de tiges fixées en chacun des sommets d'un polyèdre à faces triangulaires infiniment petites, il n'y a qu'une forme du polyèdre (et la forme symétrique) permettant de réunir les extrémités des tiges en un même point.* Mais cette construction est-elle toujours possible sans déchirure du polyèdre, quel que soit le système des tiges adopté? Il est bien facile de voir que non. Soient en effet O l'un des sommets du polyèdre et 1, 2, 3, ..., n les sommets des triangles ayant O comme sommet commun, on construira sans difficulté les tétraèdres (O, 1, 2, M), (O, 2, 3, M), ..., (O, $n-1$, n, M) qui s'accoleront les uns aux autres; or, ceci fait, on n'aura plus qu'à joindre le sommet n au point 1 pour constituer le polyèdre autour de O, mais rien n'implique que la distance (n, 1) sera précisément celle qu'on s'était donnée *a priori*. Autrement, si l'on construit le tétraèdre ayant pour base (nOM) et dont on connaît les trois arêtes (1n), (1O), (1M), rien n'implique que le sommet 1 ainsi obtenu coïncidera avec le sommet 1 qui a servi de point de départ; il y aura donc, en général, déchirure suivant (O1). Si l'on passe à la limite, on voit facilement par ce qui précède que *la distance de chacun des points d'une surface* (O) *à un point* (M) *n'est pas une fonction quelconque des éléments indéformables de* (M), *qu'à toute valeur de cette fonction correspond une seule forme de la surface, si l'on néglige la forme symétrique.*

72. *Signification géométrique de l'équation qui lie la distance des points d'une surface* (O) *à un point fixe, aux éléments indéformables de* (O). Veut-on savoir quelle est l'interprétation géométrique de l'équation de condition dont nous venons d'établir l'existence? Elle résulte immédiatement du théorème démontré au n° **65**; on écrira que le produit des *distances focales* relatives à l'enveloppe de sphères de centre M est égal au carré de la distance du point M au plan tangent de (O), toutes les sphères passant par O.

Supposons maintenant que, au lieu de prendre pour données de la question les distances des points de (O) à M, nous choisissions les distances de (O) à une sphère de centre M; il est clair que ce que nous avons dit au n° **71** subsiste intégralement. Il suffit de supposer que le rayon de la sphère croît indéfiniment (certains de ses points restant à distance finie) pour voir que *la distance de chacun des points d'une surface* (O) *à un plan* (P) *n'est pas une fonction quelconque des éléments indéformables de* (M), *qu'à toute valeur de cette fonction correspond une seule forme de la surface.*

73. *Remarque.* — Il est remarquable que si la surface (M) est un point, l'aire (M) est nulle; que si la surface est un plan, sa valeur sphérique est nulle : de telle sorte qu'on est induit à penser que la surface pour laquelle le volume (défini comme il a été dit plus haut) compris entre (O) et (M) est nul, présenterait un certain intérêt. Nous ne pouvons nous arrêter à tous ces détails.

74. *Exemple dans lequel, en particularisant la surface de référence* (O), *on obtient un faisceau de droites parallèles à des normales et normales à une surface, quelle que soit la valeur de* (O). — Nous avons établi dans ce Chapitre des propriétés qui persistent quelle que soit la déformation de la surface de référence, en laissant à celle-ci toute sa généralité; il serait facile d'arriver à de nouvelles propositions en particularisant (O). Ainsi, demandons-nous dans quel cas le faisceau de droites (N) parallèles aux normales de (O) peut rester celui des normales à une surface quelle que soit la forme de (O). Reportons-nous aux formules du n° **30**; on peut toujours supposer que η est nul, ce qui ne fait que particulariser le réseau $(u)(v)$; la condition devient

$$\mathrm{P}\frac{d\xi}{dv} + g\mathrm{D}\frac{d\xi}{du} + \mathrm{Q}\frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\frac{dg}{f\,du}\xi = 0.$$

Or elle ne peut être vérifiée, quelle que soit la forme de (O), que si l'on a

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{df}{g\,dv} = 0, \qquad g\frac{d\xi}{du} - \frac{dg}{du}\xi = 0,$$

système dont l'intégrale est

$$\xi = g = \mathrm{U}, \qquad f = 1.$$

Le dS^2 de la surface (O) peut s'écrire

$$dS^2 = du^2 + U^2 dv^2 :$$

donc *la surface de référence est, dans ce cas, applicable sur une surface de révolution; le* ξ *de la droite* N *est égal au rayon du parallèle de la surface, passant en* O.

CHAPITRE VIII.

ÉTUDE DES FAISCEAUX DE DROITES SITUÉES DANS LE PLAN TANGENT DE LA SURFACE DE RÉFÉRENCE.

75. *Équation donnant la variation du plan tangent à une surface élémentaire.* — Il nous est nécessaire d'établir à présent un certain nombre de formules relatives aux faisceaux de droites situées individuellement dans les plans tangents de la surface de référence; mais nous passerons rapidement sur cette étude, afin de ne pas faire double emploi avec celle beaucoup plus générale et très intéressante des faisceaux de courbes tracées dans les plans tangents de la surface de référence, dont nous nous occuperons plus loin.

Considérons un réseau orthogonal $(u)(v)$ tracé sur la surface de référence, et soit, par rapport aux axes OX, OY,

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p = 0$$

l'équation de la droite T faisant partie du faisceau (T) dont nous voulons nous occuper.

Si l'on suit un chemin défini par les accroissements du et dv sur (O), les droites telles que T forment une surface élémentaire; il s'agit tout d'abord de trouver la loi de variation du plan tangent le long de T. Désignons par θ l'angle du plan tangent en un point $M(\xi, \eta)$ de T avec le plan XOY. On peut considérer le point M marqué sur T comme se déplaçant avec elle suivant une certaine loi qu'il est inutile de particulariser; les coordonnées du point M' après le déplacement (du, dv) sont par rapport aux anciens axes

$$\xi + \Delta X, \quad \eta + \Delta Y, \quad \Delta Z;$$

dès lors, la distance de la projection de M' sur le plan tangent à T est

$$\Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\varphi,$$

et l'on voit immédiatement que l'angle θ du plan tangent en M est défini par la formule

$$\tang\theta = \frac{\Delta Z}{\Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\varphi}.$$

On a d'ailleurs, pour lier les coordonnées de M, l'équation

$$\xi \cos\varphi + \eta \sin\varphi - p = 0;$$

mais d'après les formules (F) et si l'on pose

$$\begin{aligned} \xi &= p\cos\varphi + L\sin\varphi, \\ \eta &= p\sin\varphi - L\cos\varphi, \end{aligned}$$

il vient

$$\begin{aligned} \Delta Z = {} & du[-P(p\cos\varphi + L\sin\varphi) + fD(p\sin\varphi - L\cos\varphi)] \\ & + dv[-Q(p\sin\varphi - L\cos\varphi) + gD(p\cos\varphi + L\sin\varphi)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta X\cos\varphi + \Delta Y\sin\varphi = {} & \left[\; f\,du + (p\sin\varphi - L\cos\varphi)\left(du\frac{df}{g\,dv} - dv\frac{dg}{f\,du}\right)\right]\cos\varphi \\ & + \left[+g\,dv + (p\cos\varphi + L\sin\varphi)\left(dv\frac{dg}{f\,du} - du\frac{df}{g\,dv}\right)\right]\sin\varphi \\ & + \Delta\xi\cos\varphi + \Delta\eta\sin\varphi; \end{aligned}$$

mais l'on a

$$\Delta\xi\cos\varphi + \Delta\eta\sin\varphi = \Delta p + (\xi\sin\varphi - \eta\cos\varphi)\Delta\varphi = \Delta p + L\Delta\varphi;$$

d'où résulte l'équation cherchée

$$\tang\theta = \frac{\left\{\begin{array}{l} du[p(-\mathrm{P}\cos\varphi + f\mathrm{D}\sin\varphi) - \mathrm{L}(\mathrm{P}\sin\varphi + f\mathrm{D}\cos\varphi)] \\ + dv[p(-\mathrm{Q}\sin\varphi + g\mathrm{D}\cos\varphi) + \mathrm{L}(\mathrm{Q}\cos\varphi + g\mathrm{D}\sin\varphi)] \end{array}\right\}}{du\left[f\cos\varphi + \dfrac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\dfrac{df}{g\,dv} - \dfrac{d\varphi}{du}\right)\right] + dv\left[g\sin\varphi + \dfrac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\dfrac{dg}{f\,du} + \dfrac{d\varphi}{dv}\right)\right]},$$

Nous allons en déduire comme dans les études précédentes toutes les propriétés du faisceau des droites (T).

76. *Condition pour que les droites joignant* O *aux foyers du faisceau soient conjuguées sur* (O); *elle est indépendante de la forme de* (O). — On remarquera que L représente une longueur comptée sur T à partir du pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur cette droite. Aux foyers de T, les plans tangents aux surfaces élémentaires sont invariables; on y a donc

$$\begin{aligned}\tang\theta &= \frac{p(-\mathrm{P}\cos\varphi + f\mathrm{D}\sin\varphi) - \mathrm{L}(\mathrm{P}\sin\varphi + f\mathrm{D}\cos\varphi)}{f\cos\varphi + \dfrac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\dfrac{df}{g\,dv} - \dfrac{d\varphi}{du}\right)} \\ &= \frac{p(-\mathrm{Q}\sin\varphi + g\mathrm{D}\cos\varphi) + \mathrm{L}(\mathrm{Q}\cos\varphi + g\mathrm{D}\sin\varphi)}{g\sin\varphi + \dfrac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\dfrac{dg}{f\,du} + \dfrac{d\varphi}{dv}\right)},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit à volonté soit l'équation des foyers, soit celle des plans tangents principaux; mais il convient tout d'abord de transformer les équations précédentes; on peut les écrire

$$\begin{aligned}\tang\theta &= \frac{-\mathrm{P}(p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi) + f\mathrm{D}(p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi)}{f\cos\varphi + \dfrac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\dfrac{df}{g\,dv} - \dfrac{d\varphi}{du}\right)} \\ &= \frac{-\mathrm{Q}(p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi) + g\mathrm{D}(p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi)}{g\sin\varphi + \dfrac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\dfrac{dg}{f\,du} + \dfrac{d\varphi}{dv}\right)}.\end{aligned}$$

ou, en multipliant haut et bas par des coefficients convenables et ajoutant,

$$\begin{aligned}\frac{-\tang\theta}{\mathrm{PQ} - fg\mathrm{D}^2} &= \frac{p\sin\varphi - \mathrm{L}\cos\varphi}{g\mathrm{D}\left[f\cos\varphi + \dfrac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\dfrac{df}{g\,dv} - \dfrac{d\varphi}{du}\right)\right] + \mathrm{P}\left[g\sin\varphi + \dfrac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\dfrac{dg}{f\,du} + \dfrac{d\varphi}{dv}\right)\right]} \\ &= \frac{p\cos\varphi + \mathrm{L}\sin\varphi}{\mathrm{Q}\left[f\cos\varphi + \dfrac{dp}{du} - \mathrm{L}\left(\dfrac{df}{g\,dv} - \dfrac{d\varphi}{du}\right)\right] + f\mathrm{D}\left[g\sin\varphi + \dfrac{dp}{dv} + \mathrm{L}\left(\dfrac{dg}{f\,du} + \dfrac{d\varphi}{dv}\right)\right]}.\end{aligned}$$

Posons

$$
\begin{aligned}
A &= \sin\varphi\left(\frac{g\sin\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,dv}\right) - \cos\varphi\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right),\\
B &= \cos\varphi\left(\frac{f\cos\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,du}\right) - \sin\varphi\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right),\\
C &= \sin\varphi\left(\frac{f\cos\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,du}\right) + \cos\varphi\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right),\\
E &= \cos\varphi\left(\frac{g\sin\varphi}{p} + \frac{dp}{p\,dv}\right) + \sin\varphi\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)
\end{aligned}
$$

et cherchons l'équation quadratique des droites passant par les deux foyers et par O; nous trouvons

$$
\begin{aligned}
&Y^2(fDA + QC)\\
&\quad + XY(fDE - PA - gDC + QB) - X^2(PE + gDB) = 0.
\end{aligned}
$$

Que faut-il pour que ces droites soient conjuguées de l'indicatrice en (O)? D'après l'équation (2) on trouve facilement

$$gC = fE,$$

d'où résulte l'équation fort importante

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g\sin\varphi}{p}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{f\cos\varphi}{p}\right).$$

On remarquera que les paramètres tenant à la forme de (O) ont disparu; d'où résulte que : *si les segments focaux d'un faisceau de droites* T *situées dans les plans tangents de la surface de référence sont vus des points de contact sous un angle dont les côtés sont conjugués, on peut déformer* (O) *comme on l'entend, chaque plan tangent entraînant la droite correspondante, et cette propriété subsistera.*

77. *Intégrale de l'équation de condition précédente; interprétation géométrique.* — Mais l'équation de condition est équivalente au système

$$\frac{g\sin\varphi}{p} = \frac{dZ}{dv}, \qquad \frac{f\cos\varphi}{p} = \frac{dZ}{du},$$

d'où résulte que l'on peut construire immédiatement tous les faisceaux de droites telles que T satisfaisant à la condition géométrique indiquée.

On peut même donner de ces faisceaux une définition géométrique tout à fait nette. Choisissons le réseau (u, v) de telle sorte que φ soit toujours nul, il vient

$$\frac{f}{p} = \frac{dZ}{du}, \qquad \frac{dZ}{dv} = 0;$$

d'où résulte que *la droite peut être considérée comme la polaire de la corde de contact d'une enveloppe de sphères ayant leurs centres sur* (O).

Autrement dit, que l'on considère deux enveloppes de sphères conjuguées (M) et (M′), si l'on mène les plans tangents à ces enveloppes aux points correspondants M et M′, ils se couperont suivant une série de droites T situées individuellement dans chacun des plans tangents de (O); les droites joignant O aux foyers de T sont conjuguées sur (O).

Telle est l'intégrale du problème, elle témoigne une fois de plus du rôle que jouent les enveloppes de sphères en Géométrie.

Nous aurons par la suite à revenir sur ces faisceaux intéressants.

78. *Équation des plans tangents principaux. Fonction invariante quelle que soit la forme de* (O). *Cas où les droites sont normales à des surfaces.* — Formons maintenant l'équation qui donne les plans tangents principaux; on trouve

$$\begin{aligned}
&-\tang^2\theta\left[\left(f\cos\varphi + \frac{dp}{du}\right)\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)\right.\\
&\qquad\qquad\left. + \left(g\sin\varphi + \frac{dp}{dv}\right)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)\right]\\
&+\tang\theta\left[-p(\mathrm{P}\cos\varphi - f\mathrm{D}\sin\varphi)\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right)\right.\\
&\qquad\qquad + \left(f\cos\varphi + \frac{dp}{du}\right)(\mathrm{Q}\cos\varphi + g\mathrm{D}\sin\varphi)\\
&\qquad\qquad + (\mathrm{P}\sin\varphi + \mathrm{D}f\cos\varphi)\left(g\sin\varphi + \frac{dp}{dv}\right)\\
&\qquad\qquad \left. - p(\mathrm{Q}\sin\varphi - g\mathrm{D}\cos\varphi)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + p(\mathrm{PQ} - fg\mathrm{D}^2) = 0.
\end{aligned}$$

On voit que *le produit des tangentes que font les plans principaux avec le plan tangent à* (O) *est constant quelle que soit la forme de* (O); *en particulier, si un faisceau* (T) *est composé des normales à une surface, il jouit de cette propriété quelle que soit la forme de* (O). Dans ce cas, l'équation de condition est

$$p(\mathrm{PQ} - fg\mathrm{D}^2) = \left(f\cos\varphi + \frac{dp}{du}\right)\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{d\varphi}{dv}\right) + \left(g\sin\varphi + \frac{dp}{dv}\right)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{d\varphi}{du}\right).$$

79. *Liaison entre les droites joignant les foyers du faisceau à* (O) *et les images principales.* — D'après les errements suivis précédemment, nous sommes naturellement amené à rechercher les images principales sur (O) du faisceau (T); soit OO_1 un élément de (O) qu'il faut suivre pour que les droites T se rencontrent consécutivement; soit F_1 le foyer de T correspondant. Le plan XOY contenant T est (d'après un lemme souvent employé) tangent à la surface élémentaire au point où sa caractéristique rencontre T, pour tout déplacement de T; mais, dans l'espèce, la surface élémentaire étant développable, le plan XOY ne peut être tangent qu'au point de l'arête de rebroussement, c'est-à-dire au foyer F_1 : donc si l'on suit l'une des images principales, la direction conjuguée de celle-ci contient le foyer correspondant de T. Par conséquent, on obtiendra l'équation quadratique des images principales en formant celles des droites conjuguées aux droites issues du point O et contenant les foyers F_1 et F_2.

Il importe d'établir cette formule en prenant l'équation de la droite T sous la forme

$$\mathrm{AX} + \mathrm{BY} = 1, \qquad \mathrm{Z} = 0,$$

où A et B sont les quantités $\frac{\cos\varphi}{p}$ et $\frac{\sin\varphi}{p}$.

Si l'on suit le chemin $du\,dv$, les équations de la droite dans la seconde position sont

$$\left(A + \frac{dA}{du}du + \frac{dA}{dv}dv\right)\Big[-f\,du + X + Y\left(\frac{-df}{g\,dv}du + \frac{dg}{f\,du}dv\right)$$
$$+ Z(-P\,du + g\,D\,dv)\Big]$$
$$+\left(B + \frac{dB}{du}du + \frac{dB}{dv}dv\right)\Big[-g\,dv + X\left(\frac{-dg}{f\,du}dv + \frac{df}{g\,dv}du\right)$$
$$+ Y + Z(-Q\,dv + f\,D\,du)\Big] = 1,$$
$$X(P\,du - g\,D\,dv) + Y(Q\,dv - f\,D\,du) + Z = 0.$$

Écrivant que X, Y, Z ont les mêmes valeurs dans les équations qui précèdent, il vient

$$du^2\left[P\left(\frac{dB}{du} - A\frac{df}{g\,dv} - ABf\right) + fD\left(\frac{dA}{du} + B\frac{df}{g\,dv} - A^2f\right)\right]$$
$$+ du\,dv\Big[\quad P\left(\frac{dB}{dv} + A\frac{dg}{f\,du} - B^2g\right) + fD\left(\frac{dA}{dv} - B\frac{dg}{f\,du} - ABg\right)$$
$$- Q\left(\frac{dA}{du} + B\frac{df}{g\,dv} - A^2f\right) - gD\left(\frac{dB}{du} - A\frac{df}{g\,dv} - ABf\right)\Big]$$
$$+ dv^2\left[-Q\left(\frac{dA}{dv} - B\frac{dg}{f\,du} - ABg\right) - gD\left(\frac{dB}{dv} + A\frac{dg}{f\,du} - B^2g\right)\right] = 0.$$

On vérifie sur cette équation que les images principales sont conjuguées lorsque

$$\frac{d}{dv}(Af) = \frac{d}{du}(Bg).$$

Si pour une forme de (O) *les images principales de* (T) *sont conjuguées, elles restent conjuguées quelle que soit la forme de* (O); *de plus, leurs tangentes en* (O) *coïncident avec les droites qui joignent* O *aux foyers de* T : *l'intégrale du problème correspond donc aux polaires des enveloppes de sphères.*

80. *Cas où les segments focaux sont vus suivant des directions conjuguées des points de contact de deux plans passant par les droites du faisceau, l'une des surfaces étant l'une des nappes* *d'une enveloppe de sphères ayant leurs centres sur l'autre. Première équation du problème.* — Lorsque T est la polaire d'une enveloppe de sphères (M) et (M'), le segment focal est vu du point O sous des directions conjuguées; les droites MF_1, MF_2 jouissent-elles de la même propriété par rapport à (M)?

Renversons le problème et, nous donnant des droites T situées dans les plans tangents de (O), exprimons qu'elles appartiennent aux plans tangents d'une surface (S) telle que le point S soit à chaque instant sur la normale en O à (O). Il est clair que l'on peut considérer (O) comme l'une des nappes d'une enveloppe de sphères dont les centres sont sur (S); dès lors, les droites SF_1, SF_2 sont conjuguées sur (S), et le problème est ramené à la recherche des conditions dans lesquelles OF_1 et OF_2 sont conjuguées sur (O).

Prenons l'équation du plan tangent en S sous la forme

$$AX + BY + CZ = 1.$$

Supposons de plus que (O) est rapportée à ses lignes de courbure. C est l'inverse du segment OS.

On obtiendra les équations des coordonnées du point de contact en cherchant l'intersection du plan tangent avec tous les plans tangents infiniment voisins; les formules (Φ) donnent

$$X\left(B\frac{df}{g\,dv} + PC + \frac{dA}{du}\right) + Y\left(-A\frac{df}{g\,dv} + \frac{dB}{du}\right) + Z\left(-AP + \frac{dC}{du}\right) - Af = 0,$$

$$Y\left(A\frac{dg}{f\,du} + QC + \frac{dB}{dv}\right) + X\left(-B\frac{dg}{f\,du} + \frac{dA}{dv}\right) + Z\left(-BQ + \frac{dC}{dv}\right) - Bg = 0;$$

mais, ici, X et Y doivent être nuls et Z doit être remplacé par $\frac{1}{C}$, de telle sorte qu'on doit avoir

$$\frac{dC}{du} = Af\left(C + \frac{P}{f}\right),$$

$$\frac{dC}{dv} = Bg\left(C + \frac{Q}{g}\right);$$

nous voulons que

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{A}f) = \frac{d}{du}(\mathrm{B}g);$$

ceci conduit à

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\frac{d\mathrm{C}}{du}}{\mathrm{C}+\frac{\mathrm{P}}{f}}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\frac{d\mathrm{C}}{dv}}{\mathrm{C}+\frac{\mathrm{Q}}{g}}\right),$$

qui est l'équation différentielle des surfaces telles que (S); il est facile de voir qu'elle n'est autre que l'équation (7) dans laquelle on a remplacé l par $\frac{1}{\mathrm{C}}$. Ce résultat était prévu; en effet, puisque les droites SF_1, SF_2 rencontrent respectivement OF_1 et OF_2, en suivant l'image principale du faisceau (T), les normales OS à (O) doivent également se rencontrer consécutivement; par conséquent, OF_1 et OF_2 sont tangentes aux lignes de courbure de (O).

80 *bis. Deuxième équation du même problème.* — Mais, au lieu de chercher à déterminer (S), on peut demander quelle est la définition directe du faisceau (T); il faut alors éliminer C des deux équations où il entre; or on trouve, en différentiant,

$$\frac{d^2\mathrm{C}}{du\,dv} = \frac{d}{dv}(\mathrm{A}f)\left(\mathrm{C}+\frac{\mathrm{P}}{f}\right) + \mathrm{AB}fg\mathrm{C} + \mathrm{AB}f\mathrm{Q} + \mathrm{A}f\frac{d}{dv}\left(\frac{\mathrm{P}}{f}\right),$$

$$\frac{d^2\mathrm{C}}{du\,dv} = \frac{d}{du}(\mathrm{B}g)\left(\mathrm{C}+\frac{\mathrm{Q}}{g}\right) + \mathrm{AB}fg\mathrm{C} + \mathrm{AB}g\mathrm{P} + \mathrm{B}g\frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{Q}}{g}\right).$$

Il vient donc, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, si l'on considère que l'on peut poser

$$\mathrm{A}f = \frac{-d\varphi}{\varphi\,du},\qquad \mathrm{B}g = \frac{-d\varphi}{\varphi\,dv},$$

$$\frac{d^2\varphi}{du\,dv} = \frac{d\varphi}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dg}{g\,du}.$$

Telle est l'équation du problème; on voit que l'on retombe sur cette équation pour ainsi dire *canonique* qui régit toutes les théories dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent.

CHAPITRE IX.

ÉTUDE DES FAISCEAUX DE DROITES ISSUES DES POINTS DE LA SURFACE DE RÉFÉRENCE.

81. *Équation des traces principales.* — Nous arrivons à l'étude des faisceaux de droites rayonnant des différents points de la surface de référence; on peut considérer ces droites comme des rayons lumineux et la surface (O) comme la surface dirimante séparant deux milieux d'inégale transparence; alors les surfaces focales des faisceaux deviennent des caustiques; mais nous n'emploierons pas les dénominations employées en Optique.

Les équations d'une droite R issue du point O de (O) peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = \frac{Z}{1}.$$

Les équations de la droite infiniment voisine correspondant au déplacement $du\,dv$ sont, d'après le système Φ,

$$\frac{X - du\left(f + \dfrac{df}{g\,dv}Y + PZ\right) + dv\left(\dfrac{dg}{f\,du}Y + gDZ\right)}{a + \dfrac{da}{du}du + \dfrac{da}{dv}dv}$$

$$= \frac{Y - dv\left(g + \dfrac{dg}{f\,du}X + QZ\right) + du\left(\dfrac{df}{g\,dv}X + fDZ\right)}{b + \dfrac{db}{du}du + \dfrac{db}{dv}dv}$$

$$= Z + du(PX - fDY) + dv(QY - gDX);$$

exprimons que la seconde droite rencontre la première, nous aurons ainsi l'équation des *traces principales* du faisceau (R) sur (O):

X, Y, Z seront les coordonnées d'un foyer. On peut écrire

$$\frac{-du\left(\frac{da}{du}+\frac{f}{Z}+P+\frac{df}{g\,dv}b\right)+dv\left(-\frac{da}{dv}+\frac{dg}{f\,du}b+gD\right)}{a}$$
$$=\frac{-dv\left(\frac{db}{dv}+\frac{g}{Z}+Q+\frac{dg}{f\,du}a\right)+du\left(-\frac{db}{du}+\frac{df}{g\,dv}a+fD\right)}{b}$$
$$=du(Pa-fDb)+dv(Qb-gDa),$$

où ne figurent plus que les du, dv de la trace principale et le Z du foyer. On trouve pour les *traces principales*

$$(26)\quad\left\{\begin{aligned}&du^2 f\left[\left(-\frac{db}{du}+\frac{df}{g\,dv}a+fD\right)-b(Pa-fDb)\right]\\&-dv^2 g\left[\left(-\frac{da}{dv}+\frac{dg}{f\,du}b+gD\right)-a(Qb-gDa)\right]\\&-du\,dv\left\{f\left[\frac{db}{dv}+Q+\frac{dg}{f\,du}a+b(Qb-gDa)\right]\right.\\&\qquad\left.-g\left[\frac{da}{du}+P+\frac{df}{g\,dv}b+a(Pa-fDb)\right]\right\}=0.\end{aligned}\right.$$

82. *Dans quel cas les traces principales sont conjuguées. Transformation des faisceaux en question.* — Cherchons dans quel cas elles formeront un réseau conjugué sur (O). En appliquant la condition (2), il vient

$$P\left(-\frac{da}{dv}+\frac{dg}{f\,du}b\right)-Q\left(-\frac{db}{du}+\frac{df}{g\,dv}a\right)$$
$$+D\left(f\frac{db}{dv}-b\frac{df}{dv}-g\frac{da}{du}+a\frac{dg}{du}\right)=0.$$

On remarquera tout d'abord que si l'on change les signes de a et de b la condition ne change pas; mais en faisant cette transformation on fait intervenir les droites symétriques de R par rapport aux plans tangents de (O); donc : *si les traces principales d'un faisceau incident* R *sont conjuguées, il en est de même pour le faisceau formé par les rayons réfléchis.*

Supposons maintenant qu'on ait choisi pour réseau (u, v) celui des lignes de courbure, la condition devient, en tenant compte des équations de Codazzi

$$\frac{d}{dv}(a\mathrm{P}) = \frac{d}{du}(b\mathrm{Q});$$

on voit que f et g ont disparu; par conséquent, *que l'on mène à chaque instant par les points images de la sphère de rayon unité des parallèles aux droites du faisceau* (R), *si les traces de celui-ci sont conjuguées sur* (O), *les traces principales du faisceau image sont aussi conjuguées sur la sphère.*

Cette propriété nous paraît très digne d'intérêt, car elle vient encore grossir la belle théorie des images sphériques.

L'énoncé précédent peut d'ailleurs être mis sous une forme plus générale en apparence. En effet, tout faisceau rencontrant la sphère et y découpant par ses traces principales un réseau conjugué constitue un être géométrique qui n'a plus rien de commun avec le réseau des lignes de courbure de (O); par conséquent : *si l'on fait correspondre deux surfaces quelconques de façon que leurs plans tangents soient simultanément parallèles, que, de plus, on mène par les points de contact des rayons parallèles entre eux, si l'un des faisceaux a ses traces principales conjuguées, l'autre faisceau jouit aussi de la même propriété.*

La recherche des faisceaux (R) en question revient à celle des faisceaux analogues qui découpent la sphère, par leurs traces principales, suivant un réseau orthogonal.

83. *Intégrale directe du problème à l'aide de surfaces dont les plans tangents sont parallèles à ceux de la surface de référence.* — L'intégrale du problème s'obtient d'ailleurs sans ce détour; on peut poser, en effet,

$$a\mathrm{P} = \frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}\,du}, \qquad b\mathrm{Q} = \frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Z}\,dv}.$$

Considérons une surface (N), enveloppe des plans distants de Z des plans tangents à (O), les coordonnées du point de contact sont (n° **34**)

$$\zeta = \mathrm{Z}, \qquad \xi = \frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{P}\,du}, \qquad \eta = \frac{d\mathrm{Z}}{\mathrm{Q}\,dv},$$

d'où il résulte

$$P\frac{\xi}{\zeta} = \frac{dZ}{Zdu}, \qquad Q\frac{\eta}{\zeta} = \frac{dZ}{Zdv};$$

par conséquent, *on obtiendra l'intégrale la plus générale du problème en joignant les points de* (O) *à ceux d'une surface quelconque* (N), *la correspondance étant établie par le parallélisme des plans tangents.*

Il n'échappera pas que la réciproque de cette proposition conduit évidemment à une solution (qui était bien connue d'ailleurs), mais il est important de savoir qu'elle est la plus générale et qu'elle fournit tous les faisceaux (R) dont les traces principales découpent (O) suivant un réseau conjugué.

84. *Autre intégrale obtenue en homographiant la précédente.* — Enfin la définition précédente peut elle-même être généralisée. Les plans tangents en N et O étant parallèles se rencontrent sur le plan de l'infini. On peut donner la règle suivante : *Tracez dans un plan* P *une droite quelconque* D, *et par cette droite menez des plans tangents à deux surfaces* (O) *et* (N), *joignez les points de contact par une droite* R *lorsque* D *se déplace dans le plan* P, *les droites* R *forment un faisceau qui a pour images principales, sur* (O) *et* (N), *deux réseaux conjugués.*

Il serait intéressant de chercher toutes les surfaces (N) associées à une surface (O) et telles qu'en joignant les points N et O on obtienne un faisceau de droites dont les traces principales sur (N) et (O) soient conjuguées. Il conviendrait de se donner l'équation du plan tangent à (N) sous la forme

$$AX + BY + CZ = 1;$$

l'une des équations du problème serait

$$\frac{d}{dv}(Af) = \frac{d}{du}(Bg);$$

l'autre équation serait du second ordre par rapport à C. Il conviendrait d'examiner le cas où C disparaît; alors on obtiendrait la génération indiquée ci-dessus. Le cas où (N) est infiniment voisin de (O) présente beaucoup d'intérêt. Mais cette étude comporte de trop grands développements pour trouver place ici.

85. *Si les traces d'un faisceau sont conjuguées, celles du faisceau réfléchi le sont aussi. Si les deux traces coïncident, chacun des faisceaux est formé des normales à une surface, le réseau des traces communes est conjugué.* — Nous avons dit que, si les traces principales du faisceau (R) sont conjuguées sur (O), il en est de même pour les traces principales du faisceau formé par les rayons R réfléchis; mais les deux images coïncident-elles? Pour que la coïncidence ait lieu, il faut que l'équation en du, dv ne change pas si l'on change les signes de a et b; on est ainsi conduit à écrire

$$\frac{-fD(1+b^2)+abP}{\frac{db}{du}-\frac{df}{g\,dv}a}=\frac{-gD(1+a^2)+abQ}{\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f\,du}b}=\frac{fQ(1+b^2)-gP(1+a^2)}{f\frac{db}{dv}+a\frac{dg}{du}-g\frac{da}{du}-\frac{df}{dv}b},$$

et l'on observera que l'on n'a pas supposé encore que les traces fussent conjuguées. Mais si l'on multiplie par Q les deux termes de la première fraction, par P ceux de la seconde et enfin par D ceux de la troisième et qu'on ajoute, on trouve

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &Q\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g\,dv}a\right)-P\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f\,du}b\right)\\ &\qquad\qquad+D\left(f\frac{db}{dv}+a\frac{dg}{du}-g\frac{da}{du}-\frac{df}{dv}b\right)=0.\end{aligned}\right.$$

Si, au contraire, on multiplie les fractions de telle sorte qu'en les ajoutant P, Q et D disparaissent, il vient

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &g(1+a^2)\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g\,dv}a\right)-f(1+b^2)\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f\,du}b\right)\\ &\qquad\qquad+ab\left(f\frac{db}{dv}+a\frac{dg}{du}-g\frac{da}{du}-\frac{df}{dv}b\right)=0,\end{aligned}\right.$$

et, comme il n'y a que deux équations distinctes, les deux dernières peuvent être seules considérées. Mais la première exprime que les traces principales sont conjuguées; quant à la seconde, elle établit que les droites R sont normales à des surfaces, comme nous le démontrerons tout à l'heure. On peut changer les signes de a et de b dans la dernière condition sans l'altérer, de telle sorte qu'on démontre à la fois les propriétés que voici :

Si des rayons sont normaux à une surface et qu'ils se réfléchissent sur une surface donnée, les rayons réfléchis sont encore normaux à des surfaces (théorème de Malus et Dupin).

Si les traces principales de deux faisceaux symétriques par rapport aux plans tangents de la surface de référence coïncident: 1° *ces traces sont conjuguées;* 2° *chacun des faisceaux est composé de droites normales à une surface.* Ce dernier théorème a été établi par Charles Dupin.

86. *Condition pour que le faisceau soit formé des normales à une surface.* — Il faut maintenant trouver directement la condition pour que les droites R soient normales à des surfaces; on l'obtiendra en écrivant que les plans menés par la droite R et les traces principales sont rectangulaires.

Le plan passant par R et par la tangente à O correspondant au déplacement du, dv a pour équation

$$g\,dv(X - aZ) = f\,du(Y - bZ).$$

Si les plans passant par les déplacements du, dv, du', dv' sont rectangulaires, on aura

$$0 = g^2(1 + a^2)\,dv\,dv' + (1 + b^2)f^2\,du\,du' - abfg(du\,dv' + dv\,du');$$

en exprimant que les deux racines de l'équation (26) satisfont à cette équation, on retrouve (28).

87. *Théorème de Malus et Dupin sur les rayons réfractés. Conique passant par les foyers des faisceaux des rayons incidents et réfléchis : double génération.* — Nous supposerons dans ce qui va suivre que l'on a constamment

$$b = 0, \qquad a = \tang i,$$

c'est-à-dire que le plan des ZX est toujours choisi de façon à contenir le rayon R.

La condition pour que les droites soient normales à des surfaces est

$$\frac{df}{f\,dv} + \frac{\cos i\,di}{\sin i\,dv} = 0;$$

on voit que si l'on change $\sin i$ en $K \sin i$, l'équation est encore vérifiée; par conséquent, *si des rayons lumineux normaux à une surface en rencontrent une seconde, ils sont toujours réfractés normalement à une surface.* C'est le complément du théorème de Malus et Ch. Dupin.

Établissons rapidement ce qui a trait à la courbure des deux nappes d'une enveloppe de sphères.

Soit i l'angle que la droite R fait avec l'axe des Z; puisque l'on suppose que cette droite est située dans le plan XOZ, si l'on désigne par θ l'angle que le plan tangent en un point M de R à une surface élémentaire fait avec XOZ, on a, en désignant par ξ et ζ les coordonnées du point M,

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\Delta Y}{\Delta X \cos i - \Delta Z \sin i},$$

d'où résulte, en vertu des équations (F) et en tenant compte de la relation

$$\Delta\xi \cos i - \Delta\zeta \sin i = (\xi \sin i + \zeta \cos i)\Delta i,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{-du\left(\dfrac{df}{g\,dv}\xi + fD\zeta\right) + dv\left(g + \dfrac{dg}{f\,du}\xi + Q\zeta\right)}{\left\{\begin{array}{l}\cos i[f\,du + \zeta(P\,du - gD\,dv)] \\ \quad + \sin i(P\,du - gD\,dv)\xi + (\xi \sin i + \zeta \cos i)\left(\dfrac{di}{du}du + \dfrac{di}{dv}dv\right)\end{array}\right\}};$$

aux foyers du faisceau, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tang}\theta &= \frac{-\dfrac{df}{g\,dv}\xi - fD\zeta}{(f + P\zeta)\cos i + P\xi \sin i + (\xi \sin i + \zeta \cos i)\dfrac{di}{du}} \\ &= \frac{g + \dfrac{dg}{f\,du}\xi + Q\zeta}{-gD(\zeta \cos i + \xi \sin i) + \dfrac{di}{dv}(\xi \sin i + \zeta \cos i)},\end{aligned}$$

d'où résulte

$$\frac{\tang\theta}{\cos i} = \frac{-\frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\zeta}{f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \xi\frac{di}{du}\cot i} = \frac{g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta}{-g\mathrm{D}\zeta + \xi\frac{di}{dv}\cot i},$$

et l'on s'est arrangé pour que les fractions ne contenant pas tangθ ne varient pas si tang$i$ change de signe; on voit, par cet artifice, que les foyers des rayons incidents et réfléchis sont sur la conique

$$\left(-\frac{df}{g\,dv}\xi - f\mathrm{D}\zeta\right)\left(-g\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right)$$
$$= \left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right)\left(f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi\right);$$

si l'on fait $\xi = 0$, il vient

$$\zeta^2(\mathrm{PQ} - fg\mathrm{D}^2) + fg\cos^2 i + (g\mathrm{P} + f\mathrm{Q}\cos^2 i)\zeta = 0,$$

et l'on reconnaît que le produit des segments interceptés sur OZ est égal (au signe près) au produit des rayons de courbure principaux de (O) multiplié par le carré du cosinus de l'angle d'incidence.

Si l'on fait $\zeta = 0$, il vient

$$-\frac{df}{g\,dv}\frac{di}{dv}\cot i.\xi^2 = \left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi\right)\left(f\cos^2 i + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right),$$

équation qui ne varie pas si l'on déforme (O), chaque plan tangent entraînant avec lui son couple de rayons.

D'une façon générale, on a

$$(29)\quad \tang\theta\cos i = \frac{-du\left(\frac{df}{g\,dv}\xi + f\mathrm{D}\zeta\right) + dv\left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right)}{du\left(f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi\right) + dv\left(-g\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right)}\cos^2 i = m\cos^2 i,$$

mais le premier membre représente la tangente de l'angle que la trace du plan tangent en M sur XOY fait avec OX; c'est, si l'on veut, le coefficient angulaire de cette trace.

88. *Double génération de la conique précédente.* — Cette remarque conduit à des conséquences qui méritent d'être signalées : donnons à m une certaine valeur et cherchons à déterminer les points de contact des plans tangents correspondants sur les deux surfaces élémentaires formées par les rayons incidents et réfléchis. Il faut, dans l'équation (29), considérer ξ et ζ comme des coordonnées courantes, et l'on voit qu'alors elle représente une droite qui contient les deux points de contact; cette droite varie avec la trace des surfaces élémentaires, mais elle pivote alors autour d'un point déterminé par les équations

$$m = \frac{-\left(\frac{df}{g\,dv}\xi + f\mathrm{D}\zeta\right)}{f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi} = \frac{g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta}{-g\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi}$$

et le lieu de tous ces pivots pour toutes les valeurs de m est précisément la conique trouvée plus haut.

Inversement, si pour une même trace des surfaces élémentaires on cherche l'enveloppe de la droite joignant les points de contact correspondant à une valeur de m, lorsque m prend toutes les valeurs possibles, on trouve qu'elle se réduit au point défini par les équations

$$-du\left(\frac{df}{g\,dv}\xi + f\mathrm{D}\zeta\right) + dv\left(g + \frac{dg}{f\,du}\xi + \mathrm{Q}\zeta\right) = 0,$$

$$du\left(f\cos^2 i + \mathrm{P}\zeta + \frac{di}{du}\cot i.\xi\right) + dv\left(-g\mathrm{D}\zeta + \frac{di}{dv}\cot i.\xi\right) = 0.$$

Le lieu de tous ces pivots, lorsque du et dv varient, est encore la conique trouvée précédemment.

Si dans l'équation (29) on fait $\zeta = 0$, tous les termes dépendant de la courbure de (O) s'éliminent et l'on voit que pour les mêmes valeurs de m et $\frac{dv}{du}$, si l'on déforme (O), la droite des contacts pivote autour du point où elle rencontre le plan tangent en O.

89. ***Autre double génération de la conique quand les rayons incidents et réfléchis sont normaux à des surfaces.*** — Dans ce qui précède nous n'avons pas supposé que les rayons fussent normaux à des surfaces; faisons maintenant cette hypothèse et considérons les surfaces élémentaires formées par les cordes de contact des sphères tangentes aux deux nappes normales aux rayons réfléchis et incidents. Soient R le rayon d'une sphère enveloppée et δ le ξ d'une corde de contact, on a

$$\delta = -\frac{\mathrm{R}\,d\mathrm{R}}{f\,du} = \mathrm{R}\sin i,$$

$$\frac{d\delta}{du} = -f\sin^2 i + \delta\cot i\,\frac{di}{du}, \qquad \frac{d\delta}{dv} = \delta\cot i\,\frac{di}{dv} = -\delta\,\frac{df}{f\,dv}.$$

L'équation qui donne la variation du plan tangent le long d'une génératrice, pour le déplacement du, dv, est

$$(30) \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{\Delta\mathrm{Y}}{\Delta\mathrm{X}} = \frac{du\left(-\dfrac{df}{g\,dv}\delta - f\,\mathrm{D}\zeta\right) + dv\left(g + \dfrac{dg}{f\,du}\delta + \mathrm{Q}\zeta\right)}{du\left(f\cos^2 i + \delta\cot i\,\dfrac{di}{du} + \mathrm{P}\zeta\right) + dv\left(\delta\cot i\,\dfrac{di}{dv} - g\,\mathrm{D}\zeta\right)}.$$

Le second membre de cette expression ne diffère pas de celui de $\dfrac{\operatorname{tang}\theta}{\cos i}$ trouvé plus haut. Mais, si l'on remarque qu'en faisant intervenir toutes les surfaces enveloppes parallèles on aura une série de cordes de contact auxquelles s'appliquera l'équation en $\operatorname{tang}\omega$; δ et ζ désignant les coordonnées courantes, la relation (29) montre que le lieu des points de toutes les cordes de contact où les plans tangents font avec le plan d'incidence l'angle ω est une droite. Pour une valeur de ω, si du et dv varient, la droite pivote autour d'un point. Inversement, si, ω variant, du et dv restent constants, la droite pivote autour d'un second point; les lieux de ces pivots coïncident entre eux et avec la conique trouvée précédemment.

Au point où une corde de contact rencontre l'un des rayons,

$$\frac{\operatorname{tang}\theta}{\cos i} = \operatorname{tang}\omega.$$

D'où l'on déduit que l'intersection des plans tangents aux surfaces des cordes et des rayons est perpendiculaire au rayon.

90. *Les asymptotes de la conique sont parallèles aux normales principales des surfaces focales enveloppes des polaires.* — Si l'on voulait étudier plus complètement cette théorie des caustiques, il conviendrait de former l'équation des surfaces lieux des *polaires* des enveloppes de sphères parallèles. Nous signalerons seulement les deux faits suivants :

Les normales aux surfaces focales des polaires d'une enveloppe conservent la même direction si l'on considère toutes les enveloppes de sphères parallèles; elles sont parallèles aux asymptotes de la conique lieu des foyers des cordes de contact.

91. *Les propriétés des faisceaux parallèles aux normales de* (O) *et des faisceaux issus des points de* (O) *sont corrélatives.* — Si l'on jette un regard d'ensemble sur les diverses propriétés que nous avons rencontrées, on reconnaîtra qu'il s'établit une correspondance bien nette entre les faisceaux de droites (N) parallèles aux normales de la surface de référence et ceux formés par des rayons (R) issus des différents points de cette même surface.

Si (N) a ses images principales conjuguées, R est le faisceau des normales d'une surface, et inversement. Dans le premier cas, l'intégrale est indépendante de la forme de (O); dans le second, elle ne dépend que de son image sphérique.

Quant aux théorèmes sur les segments focaux des faisceaux (N), ils se transforment en des relations qui lient les segments focaux de deux faisceaux symétriques par rapport aux plans tangents de (O).

(A suivre.)