JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. WILLOTTE

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 7 (1891), p. 399-431.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1891_4_7__399_0>

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide,

PAR M. H. WILLOTTE,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

1. *Objets des présentes études.* — Les forces instantanées, dites de *percussion*, peuvent être considérées comme représentant ce que deviennent, dans l'hypothèse limite d'une vitesse d'accroissement infinie les forces répulsives de la nature qui, naissant à petite distance de leurs centres d'action, grandissent avec une rapidité considérable à mesure que les points sur lesquels elles agissent se rapprochent de ces centres, puis décroissent avec une rapidité également considérable quand les mêmes points s'éloignent des mêmes centres.

A ce point de vue, on conçoit que l'emploi des forces de percussion est propre à donner des facilités toutes spéciales pour l'étude des phénomènes de relation entre les fluides et les solides qui y sont immergés, phénomènes connus sous le nom de *résistance des fluides*. Les phénomènes dont il s'agit sont en effet caractérisés par l'apparition entre les corps en présence d'un nombre immensément grand de forces répulsives agissant pendant un temps excessivement court.

Nous nous proposons, dans la série d'études que nous commençons ici, de montrer le parti que l'on peut tirer de la notion des forces de percussion ainsi envisagées pour faire la théorie de la résistance des fluides dans des cas particuliers qui nous conduiront à l'explication d'importantes lois naturelles.

Le fluide que nous étudierons sera constitué comme celui dont la considération s'est introduite depuis longtemps déjà dans l'enseignement classique sous le nom d'*éther* et y tient maintenant une si grande place; ce sera donc un ensemble indéfini de points matériels m qui pourront être liés entre eux par des forces dépendant d'un potentiel. Nous prendrons ce fluide en un état de *division infinie;* nous entendons par là que nous regarderons le nombre N de points m contenus dans l'unité de volume du fluide comme croissant au delà de toute limite, la valeur m des masses de ces points décroissant en même temps de manière que la masse totale Nm de l'unité de volume du fluide conserve une valeur finie déterminée, d'ailleurs quelconque.

Enfin les solides que nous considérerons seront toujours des solides *invariables;* une conséquence de la condition ainsi posée sera que ces solides devront toujours être regardés comme étant parfaitement élastiques, tout solide invariable pouvant en effet être assimilé à ce que devient à la limite un solide parfaitement élastique, dans lequel, les coefficients d'élasticité croissant indéfiniment, les déformations produites par un choc quelconque sont infiniment petites.

Nous avons surtout en vue d'examiner le cas où les solides envisagés sont en état de *moyen mouvement permanent.* Voici comment l'on est conduit à la conception de cet état : prenons un solide M complètement immergé dans un fluide; admettons d'abord que le solide soit en état de repos; il ne pourra y rester: car, les particules m du fluide étant en mouvement vibratoire, les actions de ces particules sur le solide changent à tout instant et, par suite, le solide, étant soumis à des forces qui ne se font pas constamment équilibre, se mettra nécessairement en mouvement. Mais les vitesses du solide ne croîtront pas non plus au delà de toute limite, puisque la résistance du fluide vient les diminuer dès qu'elles dépassent certaines valeurs. Il existe, par conséquent, pour le solide M, entre l'état de repos et l'état de grande agitation, un certain état intermédiaire caractérisé par ce fait que la valeur moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T v^2\,dt$ du carré de la vitesse de l'une quelconque de ses parties, calculée pour une période de temps T comptée, à partir d'une origine quelconque, tend pour $T = \infty$ vers une limite bien déterminée. C'est de cet état, comparable à celui d'une feuille d'arbre placée au sein de l'atmosphère terrestre, que nous nous proposons de dégager ici les lois.

II. *Rappel des formules générales du choc.* — Nous commencerons par rappeler les formules du choc de deux solides pris dans le cas le plus général, formules qui conduisent, on le sait, à l'évaluation des forces de percussion.

Considérons un solide invariable quelconque, de masse M, que nous appellerons le solide M et dont nous rapporterons tous les points à ses trois axes principaux Gx, Gy, Gz passant par son centre de gravité G.

Soient, par rapport aux trois axes ainsi définis :

A, B, C les trois moments d'inertie principaux du solide;

u_0, v_0, w_0, n_0, p_0, q_0 les composantes de la vitesse du centre de gravité de ce solide et ses rotations instantanées autour des axes de coordonnées à un certain moment, choisi de manière à précéder immédiatement un choc produit par la rencontre dudit solide M avec un autre solide quelconque que nous nommerons le solide M';

u, v, w, n, p, q les mêmes quantités immédiatement après le choc;

a, b, c les coordonnées de l'élément choqué de la surface limitative du solide M;

ϖ l'impulsion totale pendant la durée très courte du choc de la percussion résultant de ce choc;

α, β, γ les angles que la normale *extérieure* à la surface du solide en l'élément choqué fait avec les axes de coordonnées.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$b\cos\gamma - c\cos\beta = h,$$
$$c\cos\alpha - a\cos\gamma = i,$$
$$a\cos\beta - b\cos\alpha = j.$$

Nous aurons dans ces conditions les relations bien connues

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} M(u - u_0) &= \varpi\cos\alpha,\\ M(v - v_0) &= \varpi\cos\beta,\\ M(w - w_0) &= \varpi\cos\gamma,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \begin{cases} A(n - n_0) = h\varpi, \\ B(p - p_0) = i\varpi, \\ C(q - q_0) = j\varpi. \end{cases}$$

Si maintenant, rapportant également à ses trois axes principaux passant par son centre de gravité le solide M' dont la rencontre avec le solide M détermine la production de la percussion ϖ, nous désignons par des lettres accentuées les quantités correspondant, pour ce solide M', à celles ci-dessus définies pour le solide M (avec cette seule différence que les lettres α', β', γ' s'appliqueront aux angles que la normale *intérieure* en l'élément choqué du solide M' fait avec les axes de coordonnées relatifs à ce solide), nous aurons les relations

$$(3)\quad \begin{cases} M'(u' - u'_0) = -\varpi\cos\alpha', \\ M'(v' - v'_0) = -\varpi\cos\beta', \\ M'(w' - w'_0) = \quad\varpi\cos\gamma', \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} A'(n' - n'_0) = -h'\varpi, \\ B'(p' - p'_0) = -i'\varpi, \\ C'(q' - p'_0) = -j'\varpi, \end{cases}$$

la percussion qui agit sur le solide M' étant, d'après le principe de l'égalité entre l'action et la réaction, égale et de sens opposé à la percussion ϖ actionnant le solide M.

Par ailleurs, les deux solides M et M' étant des solides invariables et pouvant par suite, d'après ce qui a déjà été remarqué page 400 ci-dessus, être assimilés à des solides parfaitement élastiques, nous ajouterons aux douze équations précédentes l'équation bien connue exprimant que, dans le choc des corps parfaitement élastiques, le total des forces vives après le choc est égal à ce qu'il était avant le choc

$$(5)\quad \begin{cases} M(u^2 + v^2 + w^2) + An^2 + Bp^2 + Cq^2 \\ \qquad + M'(u'^2 + v'^2 + w'^2) + A'n'^2 + B'p'^2 + C'q'^2 \\ = M(u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) + An_0^2 + Bp_0^2 + Cq_0^2 \\ \qquad + M'(u_0'^2 + v_0'^2 + w_0'^2) + A'n_0'^2 + B'p_0'^2 + C'q_0'^2. \end{cases}$$

On peut écrire cette équation comme il suit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{M}(u-u_0)(u+u_0)+\mathrm{M}(v-v_0)(v+v_0)+\mathrm{M}(w-w_0)(w+w_0)\\
&+\mathrm{A}(n-n_0)(n+n_0)+\mathrm{B}(p-p_0)(p+p_0)+\mathrm{C}(q-q_0)(q+q_0)\\
&+\mathrm{M}'(u'-u'_0)(u'+u'_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\mathrm{A}'(n'-n'_0)(n'+n'_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\ldots\ldots\ldots\ldots=0,
\end{aligned}$$

ou, en tenant compte des relations (1), (2), (3), (4),

$$\begin{aligned}
&u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma+u_0\cos\alpha+v_0\cos\beta+w_0\cos\gamma\\
&\quad+hn+ip+jq+hn_0+ip_0+jq_0\\
&=u'\cos\alpha'+v'\cos\beta'+w'\cos\gamma'\\
&\quad+u'_0\cos\alpha'+v'_0\cos\beta'+w'_0\cos\gamma'\\
&\quad+h'n'+i'p'+j'q'+h'n'_0+i'p'_0+j'q'_0.
\end{aligned}$$

Or la somme $u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma$, c'est la composante, suivant la normale en l'élément choqué de la surface du solide M, de la vitesse après le choc du centre de gravité de ce solide. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma=\mathrm{U},$$

et de même

$$\begin{aligned}
u_0\cos\alpha+v_0\cos\beta+w_0\cos\gamma&=\mathrm{U}_0,\\
u'\cos\alpha'+v'\cos\beta'+w'\cos\gamma'&=\mathrm{U}',\\
u'_0\cos\alpha'+v'_0\cos\beta'+w'_0\cos\gamma'&=\mathrm{U}'_0.
\end{aligned}$$

Par ailleurs la somme $hn+ip+jq$, c'est pour le solide M la composante après le choc, suivant la même normale en l'élément choqué, de la vitesse de rotation (par rapport à l'axe instantané de rotation passant par le centre de gravité du solide) de l'élément choqué dudit solide M.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$hn+ip+jq=\mathrm{V},$$

et de même

$$\begin{aligned} h n_0 + i p_0 + j q_0 &= V_0, \\ h' n' + i' p' + j' q' &= V', \\ h' n'_0 + i' p'_0 + j' q'_0 &= V'_0. \end{aligned}$$

En tenant compte de ces notations et des transformations faites ci-dessus, l'équation (5) s'écrit

$$(6) \qquad U + U_0 + V + V_0 = U' + U'_0 + V' + V'_0;$$

les composantes de vitesses qui figurent dans le premier membre de cette équation (6) sont comptées suivant la normale *extérieure* en l'élément choqué du solide M, celles du second membre sont mesurées suivant la normale *intérieure* en l'élément choqué du solide M', en sorte que, en définitive, toutes ces composantes sont comptées en prenant une même direction pour sens positif sur la normale commune aux deux solides M et M' au point où ces solides se touchent au moment du choc.

Si maintenant, multipliant la première des équations (1), page 401 ci-dessus, par $\cos\alpha$, la seconde par $\cos\beta$, la troisième par $\cos\gamma$, nous ajoutons membres à membres les trois équations ainsi préparées, nous arrivons à la relation

$$(7) \qquad M(U - U_0) = \varpi \qquad \text{ou} \qquad U - U_0 = \frac{\varpi}{M},$$

et, en traitant de même les équations (3), page 402, nous obtenons

$$(8) \qquad U' - U'_0 = -\frac{\varpi'}{M}.$$

Considérons maintenant les équations (2), page 402. Nous pouvons les écrire

$$n - n_0 = \frac{h\varpi}{A}, \qquad p - p_0 = \frac{i\varpi}{B}, \qquad q - q_0 = \frac{j\varpi}{C},$$

et si ensuite, multipliant la première par h, la deuxième par i, la troisième par j, nous les ajoutons membres à membres, nous parvenons à la relation

$$(9) \qquad V - V_0 = \frac{\varpi}{\mathfrak{M}},$$

en posant

$$\frac{h^2}{A} + \frac{i^2}{B} + \frac{j^2}{C} = \frac{1}{\mathfrak{M}}.$$

De même, en posant

$$\frac{h'^2}{A'} + \frac{i'^2}{B'} + \frac{j'^2}{C'} = \frac{1}{\mathfrak{M}'},$$

nous déduisons de la considération des équations (4), page 402,

$$(10) \qquad V' - V'_0 = -\frac{\varpi}{\mathfrak{M}'}.$$

Or l'équation (6), page 404, peut s'écrire

$$U - U_0 + V - V_0 + U'_0 - U' + V'_0 - V' = 2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0).$$

On en conclut, en tenant compte des relations (7), (8), (9), (10),

$$(11) \qquad \begin{cases} U - U_0 = \dfrac{2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0)}{M\left(\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}} + \dfrac{1}{M'} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \\[2ex] V - V_0 = \dfrac{2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0)}{\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}} + \dfrac{1}{M'} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \\[2ex] U' - U'_0 = \dfrac{2(U_0 + V_0 - U'_0 - V'_0)}{M'\left(\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}} + \dfrac{1}{M'} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \\[2ex] V' - V'_0 = \dfrac{2(U_0 + V_0 - U'_0 - V'_0)}{\mathfrak{M}'\left(\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}} + \dfrac{1}{M'} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}'}\right)}, \end{cases}$$

$$\varpi = \frac{2(U'_0 + V'_0 - U_0 - V_0)}{\dfrac{1}{M} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}} + \dfrac{1}{M'} + \dfrac{1}{\mathfrak{M}'}}.$$

Ces relations constituent les formules fondamentales de la théorie des percussions.

III. *Formules donnant les variations de forces vives dans le choc.* — Dans le présent travail nous aurons surtout à nous occuper des variations de forces vives. Nous allons, en conséquence, indiquer les formules relatives à ces variations qui se déduisent des relations ci-dessus.

La première des équations (1), page 401, donne

$$u - u_0 = \frac{\varpi \cos\alpha}{M}$$

et, par suite,

$$u + u_0 = 2u_0 + \frac{\varpi \cos\alpha}{M}.$$

On déduit de là

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{l} M(u^2 - u_0^2) = \varpi\left(2u_0 \cos\alpha + \dfrac{\varpi \cos^2\alpha}{M}\right). \\ \text{On obtient de même} \\ M(v^2 - v_0^2) = \varpi\left(2v_0 \cos\beta + \dfrac{\varpi \cos^2\beta}{M}\right), \\ M(w^2 - w_0^2) = \varpi\left(2w_0 \cos\gamma + \dfrac{\varpi \cos^2\gamma}{M}\right), \\ A(n^2 - n_0^2) = \varpi\left(2n_0 h + \dfrac{\varpi h^2}{A}\right), \\ B(p^2 - p_0^2) = \varpi\left(2p_0 i + \dfrac{\varpi i^2}{B}\right), \\ C(q^2 - q_0^2) = \varpi\left(2q_0 j + \dfrac{\varpi j^2}{C}\right). \end{array} \right.$$

Par conséquent, en appelant :

W_0 la vitesse du centre de gravité du solide M avant le choc,

I_0, ω_0 le moment d'inertie et la vitesse angulaire de rotation de ce solide par rapport à son axe instantané de rotation passant par son centre de gravité à l'instant qui précède le choc,

W, I, ω les mêmes quantités à l'instant qui suit le choc,

on conclut, par addition, membres à membres, des relations (12) ci-dessus,

$$(13)\quad MW^2 + I\omega^2 - (MW_0^2 + I_0\omega_0^2) = \varpi\left[2(U_0 + V_0) + \varpi\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)\right].$$

IV. *Simplification des formules précédentes.* — Nous avons dit en commençant, page 400 ci-dessus, que le fluide dont nous voulons étudier l'action due aux percussions qu'il exerce sur les solides, dans l'espèce sur le solide M, était pris en un état de *division infinie*. Chacune des particules constitutives de ce fluide est, dans ces conditions, assimilée à un point matériel de masse m infiniment petite; or, comme un point matériel, étant sans dimensions, peut toujours être regardé comme la limite d'une sphère homogène infiniment petite de même masse m, nous ferons, dans les formules ci-dessus, $M' = m$ et $\frac{1}{\mathfrak{M}'} = 0$ (la quantité $\frac{1}{\mathfrak{M}'}$ étant nulle dans le cas de la sphère parce que, toutes les normales de celle-ci venant passer par son centre, les quantités h', i', j' sont nulles).

De plus, pour simplifier l'écriture, nous conviendrons de désigner par les lettres l_0, l les sommes $U_0 + V_0$, $U + V$, c'est-à-dire les composantes avant et après le choc de la vitesse totale de l'élément choqué de la surface du solide mesurées suivant la normale extérieure à cet élément.

D'autre part, nous représenterons toujours par λ la grandeur absolue mesurée à un instant quelconque de la vitesse de l'un quelconque des points m et par φ l'angle que la direction de cette vitesse fait avec la normale extérieure en un élément quelconque de la surface du solide M.

Enfin nous désignerons par le symbole ∇ la variation totale

$$MW^2 + I\omega^2 - (MW_0^2 + I_0\omega_0^2)$$

de la force vive du solide M sous l'effet de la percussion produite par sa rencontre avec l'un quelconque des points m.

Avec ces notations les formules ci-dessus se présentent sous un aspect plus simple. C'est ainsi que la valeur de ϖ, donnée page 405 ci-dessus, s'écrit

$$\varpi = \frac{2(\lambda_0 \cos\varphi_0 - l_0)}{\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} + \frac{1}{m}} = \frac{2m(\lambda_0 \cos\varphi_0 - l_0)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}},$$

ou, en effaçant les indices, ce qui est sans inconvénient si l'on convient que dans toutes les relations subséquentes les vitesses mises au second membre désignent des vitesses mesurées à l'instant qui précède chacun des divers chocs considérés,

$$\varpi = \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}. \tag{14}$$

Avec les mêmes notations et conventions, la formule (13), page 406 ci-dessus, s'écrit

$$\left\{\begin{aligned} \wp &= \varpi\left[2l + \varpi\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}}\right)\right] \\ &= \frac{4m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}\left[l + \left(\frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}\right)\frac{\lambda\cos\varphi - l}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}\right]. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

V. *Propriétés fondamentales du fluide considéré dans cette première étude.* — Dans cette première étude, nous supposerons que les points m consécutifs du fluide considéré sont complètement indépendants les uns des autres et qu'il n'y a non plus aucune force à action continue s'exerçant entre le solide M et lesdits points m, de sorte que les seules forces intervenant dans le mouvement du système sont les forces de percussion qui se produisent par le fait des rencontres du solide M et des points m.

Le cas ainsi défini est purement théorique et il n'y a vraisemblablement dans la nature aucun fluide qu'on puisse assimiler à un ensemble de points matériels sans actions mutuelles. Mais ce cas n'en est pas moins utile à considérer tout d'abord à cause de sa simplicité relative qui permet de dégrossir aisément les phénomènes et d'en dégager les lois. Il restera, pour étendre ces lois au cas d'un fluide à actions internes continues, à faire un travail de généralisation qui sera l'objet d'une étude ultérieure.

Le fluide à points indépendants dont nous allons rechercher les effets jouit, lorsqu'il est à l'état libre, de deux propriétés fondamentales qui sont une conséquence de ce que la distribution des masses m constitutives du fluide et celle des vitesses de ces masses, étant uniquement réglés par le hasard, doivent satisfaire à la loi des grands nombres :

1° Le nombre $\mathfrak{N}$ des points m animés d'une même valeur de vitesse λ contenus dans un espace (E) limité de ce fluide est d'autant plus près d'être constant à tout instant et en toute région du fluide, quelles que soient la forme et la position de l'espace (E), que cet espace et par suite le nombre $\mathfrak{N}$ sont plus grands;

2° Les vitesses des $\mathfrak{N}$ points m animés de la même valeur de vitesse λ contenus dans l'espace quelconque (E) sont d'autant plus près d'être également réparties suivant toutes les directions possibles que l'espace (E) et le nombre $\mathfrak{N}$ sont plus grands.

Cette seconde propriété s'exprime algébriquement, comme on sait, en disant que, parmi les $\mathfrak{N}$ vitesses λ contenues dans l'espace (E), le nombre de vitesses, dont la direction fait avec une droite déterminée quelconque un angle compris entre la valeur quelconque φ et la valeur infiniment voisine $\varphi + d\varphi$, est d'autant plus près d'être égal à $\frac{\mathfrak{N}\sin\varphi\, d\varphi}{2}$ que l'espace (E) et par suite le nombre $\mathfrak{N}$ sont plus grands.

Cela posé, considérons un plan (P) indéfini se transportant parallèlement à lui-même avec une vitesse constante dont nous appellerons l la composante suivant la normale à ce plan. Proposons-nous de trouver le nombre de points m du fluide qui, dans l'intervalle de temps dt, viendront rencontrer l'une des faces du plan (P) à l'intérieur d'une aire infiniment grande Ω tracée sur cette face du plan avec une vitesse λ faisant avec la normale audit plan un angle compris entre φ et $\varphi + d\varphi$. La normale, dont nous nous servons en l'espèce, est celle qui est située du même côté du plan (P) que l'aire Ω.

Prenons un point m quelconque dans le fluide, ce point étant, bien entendu, placé du même côté du plan (P) que l'aire Ω. Si l'on appelle δ la distance du point en question au plan (P) mesurée au commencement de l'instant dt, cette distance, à la fin du même instant dt, sera devenue

$$\delta + (\lambda\cos\varphi - l)\,dt,$$

λ étant, comme toujours, la vitesse du point m et φ l'angle de cette vitesse avec la normale au plan.

Pour que le point m soit situé à la fin de l'instant dt dans le plan (P), il faut qu'à la fin de cet instant sa distance au plan soit devenue nulle et que l'on ait, par conséquent,

$$\delta + (\lambda \cos\varphi - l)\,dt = 0.$$

De là résulte évidemment que tous les points m qui, étant animés de la vitesse λ faisant l'angle φ avec la normale au plan (P), se trouvent au commencement de l'instant dt à une distance du plan (P) moindre que $(l - \lambda\cos\varphi)\,dt$ et du même côté du plan que l'aire Ω viendront, pendant l'instant dt, percer la face du plan sur laquelle est tracée l'aire Ω. Par suite, pour reconnaître quels sont ceux de ces points qui viennent rencontrer le plan (P) dans l'intérieur de l'aire Ω, il suffit de considérer le cylindre droit ayant pour base l'aire Ω et une hauteur égale à $(l - \lambda\cos\varphi)\,dt$; les points qui, animés de la vitesse λ faisant l'angle φ avec la normale au plan (P), sont situés à l'intérieur de ce cylindre au commencement de l'instant dt sont les points cherchés.

Si l'on désigne par N le nombre de points m animés de la vitesse λ compris dans l'unité de volume du fluide, le nombre de ces points m enfermés au commencement de l'instant dt à l'intérieur du cylindre qui vient d'être défini et faisant avec la normale au plan un angle compris entre les valeurs infiniment voisines φ, $\varphi + d\varphi$ sera représenté par l'expression

$$\mathrm{N}\Omega(l - \lambda\cos\varphi)\,dt \times \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2}, \tag{16}$$

avec une approximation d'autant plus grande que cette expression (qui, toutes choses égales d'ailleurs, croît proportionnellement à l'aire infinie Ω) sera elle-même plus grande.

L'expression (16) ainsi obtenue désigne un nombre; elle doit donc être positive, ce qui exige que la somme $l - \lambda\cos\varphi$ soit plus grande que zéro et, par suite, λ étant essentiellement positif, que l'angle φ soit compris entre un minimum φ_1 défini par la relation

$$\cos\varphi_1 = \frac{l}{\lambda} \tag{17}$$

et la valeur π.

Comme nous l'expliquerons, page 419 ci-après, les valeurs de λ que nous aurons à considérer seront toujours infiniment grandes par rapport aux l. Aussi, le rapport $\frac{l}{\lambda}$ étant toujours plus petit que l'unité, les valeurs de φ_1 données par la relation (17) seront toujours réelles.

VI. *Calcul du nombre relatif de rencontres éprouvées par un élément quelconque de la surface du solide.* — Considérons maintenant le solide M en état de moyen mouvement permanent au sein du fluide constitué par les points m et suivons par la pensée dans la marche indéfinie des temps un même élément quelconque $d\sigma$ de la surface limitative du solide. Ce solide étant en état de moyen mouvement permanent, il est évident que les diverses valeurs de vitesses que possédera aux divers instants successifs cet élément $d\sigma$ se reproduiront toutes indéfiniment, non pas nécessairement dans le même ordre de succession, mais de telle façon que si, dans une période de temps très longue T, on détermine ceux des instants dt pour lesquels ledit élément $d\sigma$ a une composante normale de vitesse égale à une certaine valeur quelconque l, la somme $\sum dt$ de ces instants, comprise dans T, peut être rendue aussi grande qu'on le veut, à condition de prendre T suffisamment grand, quelle que soit d'ailleurs l'origine des temps à partir de laquelle on compte T.

Or, pendant l'un quelconque des dt ainsi définis, l'élément $d\sigma$ peut, au point de vue de ses probabilités de rencontres avec les points m du fluide (celui-ci étant pour un instant considéré comme inaltéré par la présence du solide M), être assimilé à l'un quelconque des éléments de l'aire Ω de l'expression (16) ci-dessus, en sorte que la probabilité de sa rencontre pendant l'instant dt avec l'un quelconque des

$$(16) \qquad N\Omega(l-\lambda\cos\varphi)\,dt \times \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2}$$

points m compris dans cette expression est $\frac{d\sigma}{\Omega}$.

Par suite, en vertu de la loi des grands nombres, cette fraction $\frac{d\sigma}{\Omega}$ mesure la proportion relative du nombre de rencontres qu'éprouve l'élément $d\sigma$ pendant l'intervalle de temps très long $\sum dt$ sur le nombre total

$$N\Omega(l-\lambda\cos\varphi)\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2}\times\sum dt$$

de rencontres auquel serait soumise l'aire Ω pendant ce même intervalle $\sum dt$.

Le nombre des rencontres éprouvées par l'élément $d\sigma$ peut donc être pris égal à

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &N\Omega(l-\lambda\cos\varphi)\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{2}\times\frac{d\sigma}{\Omega}\times\sum dt\\ &\quad=\frac{1}{2}Nt(l-\lambda\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi\times d\sigma\end{aligned}\right.$$

$\left(\text{en posant } \sum dt = t\right)$, et cela avec une approximation d'autant plus grande que l'espace de temps indéfini t est lui-même plus grand.

Toutefois, ce raisonnement suppose, ainsi que nous l'avons stipulé ci-dessus, que la constitution du fluide n'est pas altérée par la présence du solide M. Il reste donc à montrer qu'il est légitime de regarder ce fluide comme inaltéré : or ceci résulte pour la présente étude de la condition, posée page 408 ci-dessus, que les points m constitutifs du fluide ne sont soumis à aucune force d'action continue; car alors les points m ne rencontrent le solide M chacun qu'une seule fois; ils arrivent de l'infini, se mouvant uniformément en ligne droite chacun avec la vitesse λ qui lui est propre, rebondissent sur le solide M et repartent ensuite en s'éloignant de ce solide pour ne plus le revoir jamais. Les points m qui, marchant vers le solide M, ne l'ont pas encore rencontré sont donc exactement dans les mêmes conditions que si ce solide n'existait pas, puisque rien n'est encore venu altérer leur distribution dans l'espace, ni leurs vitesses.

Il convient d'ajouter que, pour que les considérations ici présentées soient exactes, il faut que le solide M soit convexe; un solide concave serait, en effet, exposé à être rencontré plusieurs fois par un même point m. Il est nécessaire aussi que le solide M n'éprouve pas brusquement de grandes variations de vitesses; autrement il pourrait rejoindre les points m qui s'éloignent de lui et les heurter à nouveau; cette dernière condition est toujours remplie dans la présente théorie, parce que, comme il a déjà été annoncé, page 411 ci-dessus, les vitesses λ des points m doivent être infiniment grandes par rapport aux vitesses l du solide; or, comme les grandeurs des vitesses λ ne sont altérées qu'infiniment peu par les rencontres des points m et du solide M, ces vitesses restent, après ces rencontres, infiniment grandes par rapport aux vitesses du solide qui, par suite, ne peut arriver à rattraper les points m s'éloignant de lui.

VII. *Formules :* $\frac{1}{T}\sum \varphi = 0$, $\int l\,d\sigma = 0$. — Nous allons maintenant établir deux formules qui nous seront utiles ci-après.

La première est relative à l'état de moyen mouvement permanent dans lequel se trouve le solide M. Nous avons dit, page 400 ci-dessus, que cet état est caractérisé par ce fait que la valeur moyenne du carré de la vitesse de l'une quelconque des parties du solide M, et, par suite, aussi la valeur moyenne

$$\frac{1}{T}\int_0^T (MW^2 + I\omega^2)\,dt$$

de la force vive totale du solide, calculées pendant l'espace de temps T, tendent pour $T = \infty$ vers une limite finie et bien déterminée, indépendante de l'époque à partir de laquelle on commence à compter ce temps T. La formule que nous avons ici en vue sert précisément à l'évaluation de cette moyenne de la force vive totale, moyenne dont la détermination est le principal but de nos recherches.

Si l'on considère les valeurs de la force vive totale du solide M

$$(MW^2 + I\omega^2)_T, \qquad (MW^2 + I\omega^2)_0,$$

à deux époques quelconques séparées par un intervalle de temps T infiniment grand, la différence

$$(MW^2 + I\omega^2)_T - (MW^2 + I\omega^2)_0 \quad .$$

de ces deux valeurs est finie, puisque chacune de ces valeurs est elle-même évidemment une quantité finie. Le quotient

$$(18) \qquad \frac{(MW^2+I\omega)_T-(MW^2+I\omega^2)_0}{T}$$

tend par conséquent vers zéro pour $T=\infty$.

Mais, pendant l'intervalle de T, le solide M éprouve par l'effet de ses rencontres avec les points m un nombre très grand de percussions, nombre qui devient infini pour $T=\infty$; et, si l'on représente par

$$(MW^2+I\omega^2)_1, \quad (MW^2+I\omega_2)_2, \quad \ldots, \quad (MW^2+I\omega^2)_p$$

les valeurs de la force vive totale de ce solide après la première, la seconde, ..., l'avant-dernière de ses rencontres, on peut écrire identiquement

$$(19) \quad \left\{\begin{array}{l} (MW^2+I\omega^2)_T-(MW^2+I\omega^2)_0 \\ \quad = \quad (MW^2+I\omega_2)_T-(MW^2+I\omega^2)_p+(MW^2+I\omega^2)_p \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad -(MW^2+I\omega^2)_2+(MW^2+I\omega^2)_2-(MW^2+I\omega^2)_1 \\ \qquad +(MW^2+I\omega^2)_1-(MW^2+I\omega^2)_0, \end{array}\right.$$

la force vive totale du solide restant d'ailleurs constante entre deux rencontres consécutives puisque ce solide n'est soumis à aucune force autre que les percussions.

Mais les diverses différences de la forme

$$(MW^2+I\omega^2)_K-(MW^2+I\omega^2)_{K-1},$$

qui composent le second membre de l'identité (19), ne sont autre chose que les variations de force vive dues aux percussions que nous avons appelées φ, pages 407 et 408 ci-dessus. Le second membre de cette identité est donc égal à la somme $\sum\varphi$ des variations de forces vives dues aux percussions éprouvées par le solide M pendant l'intervalle de temps T. De là résulte qu'en rapprochant la relation (19) et l'expression (18) on arrive à la formule

$$(20) \qquad \frac{1}{T}\sum\varphi=0, \qquad \text{pour } T=\infty,$$

qui est la première de celles que nous voulions établir, et dont nous verrons l'emploi ci-après.

La seconde des formules que nous avons en vue est relative à une propriété générale du mouvement des solides invariables.

Pour y arriver, considérons d'abord une surface fermée quelconque se déplaçant d'une façon quelconque en se déformant ou non. Si, prenant deux positions quelconques infiniment voisines (S) et (S_1) de cette surface, on appelle s le segment de la normale à l'élément quelconque $d\sigma$ de (S) compris entre (S) et (S_1), l'intégrale

$$\int s \times d\sigma$$

étendue à tous les éléments $d\sigma$ de (S) représente la différence des volumes enfermés respectivement à l'intérieur des surfaces (S_1) et (S), la longueur s étant, bien entendu, prise avec le signe + ou le signe − suivant qu'elle est à l'extérieur ou à l'intérieur de (S).

On en conclut que, lorsque le volume enfermé à l'intérieur de (S) est constant, ce qui arrive notamment quand (S) est la surface limitative d'un solide invariable, l'intégrale $\int s \times d\sigma$ est nulle.

Mais, si l'on appelle l la composante de la vitesse du déplacement de l'élément quelconque $d\sigma$ de (S) mesurée suivant la normale extérieure à cet élément et dt l'intervalle de temps infiniment petit que (S) met à passer en (S_1), on a

$$s = l \times dt.$$

Par conséquent, dans le cas du mouvement d'un solide invariable, on peut écrire

$$\int l \times dt \times d\sigma = 0,$$

ou, en supprimant le facteur dt commun à tous les termes de cette intégrale, facteur qui n'est pas nul,

$$\int l\, d\sigma = 0. \tag{21}$$

C'est la seconde des formules cherchées. Il est possible d'en déduire six autres qu'il faut aussi connaître.

On a, d'après les définitions des pages 403 et 407 ci-dessus,

$$(22) \qquad l = \mathrm{U} + \mathrm{V} = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma + hn + ip + jq$$

et, par suite,

$$\int l\,d\sigma = u\int\cos\alpha\,d\sigma + v\int\cos\beta\,d\sigma + w\int\cos\gamma\,d\sigma + n\int h\,d\sigma + y\int i\,d\sigma + q\int j\,d\sigma;$$

et, comme la relation (21) est exacte, quel que soit le mouvement imprimé au solide M, on conclut de là

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \displaystyle\int\cos\alpha\,d\sigma = 0, & \displaystyle\int\cos\beta\,d\sigma = 0, & \displaystyle\int\cos\gamma\,d\sigma = 0, \\ \displaystyle\int h\,d\sigma = 0, & \displaystyle\int i\,d\sigma = 0, & \displaystyle\int j\,d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

VIII. *Sommation en* φ. — Prenons à présent la formule (20), page 414 ci-dessus, et cherchons à l'appliquer au mouvement du solide M en nous servant pour calculer $\sum\varphi$ de l'expression (17), page 412.

Chacune des percussions comprise dans l'expression (17) produira un φ dont la valeur est donnée par la formule (15), page 408 ci-dessus. L'ensemble de ces percussions déterminera, par suite, une somme de φ égale à

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{4m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \dfrac{m}{\mathrm{M}} + \dfrac{m}{\mathfrak{M}}} \left[l + \left(\frac{m}{\mathrm{M}} + \frac{m}{\mathfrak{M}} \right) \frac{\lambda\cos\varphi - l}{1 + \dfrac{m}{\mathrm{M}} + \dfrac{m}{\mathfrak{M}}} \right] \\ & \qquad \times \tfrac{1}{2}\mathrm{N}t(l - \lambda\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi \times d\sigma \\ & = -\frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)^2}{1 + \dfrac{m}{\mu}} \left(l + \frac{m}{\mu}\,\frac{\lambda\cos\varphi - l}{1 + \dfrac{m}{\mu}} \right) \mathrm{N}t\sin\varphi\,d\varphi \times d\sigma. \end{aligned} \right.$$

en posant

$$\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{\mu}.$$

Pour avoir la somme de tous les φ qu'éprouve pendant le temps T le solide M sous l'effet des percussions dues aux points m qu'il rencontre, il faut intégrer l'expression (24) ainsi formée par rapport aux $d\varphi$, aux $d\sigma$, puis ajouter ensemble les résultats obtenus correspondant à chacune des diverses valeurs possibles de λ et de l.

Occupons-nous d'abord de l'intégration en φ.

Nous avons vu, page 410 ci-dessus, que l'angle φ devait être compris entre un minimum φ_1 donné par la relation

$$(17) \qquad \cos\varphi_1 = \frac{l}{\lambda}$$

et π.

Or on a

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} (\lambda\cos\varphi - l)^2 \sin\varphi\, d\varphi = -\left[\frac{(\lambda\cos\varphi - l)^3}{3\lambda}\right]_{\varphi_1}^{\pi} = \frac{(\lambda + l)^3}{3\lambda},$$

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} (\lambda\cos\varphi - l)^3 \sin\varphi\, d\varphi = -\left[\frac{(\lambda\cos\varphi - l)^4}{4\lambda}\right]_{\varphi_1}^{\pi} = -\frac{(\lambda + l)^4}{4\lambda}.$$

En tenant compte de ces deux résultats, la sommation en φ donne une première somme de φ que nous représenterons par le symbole $\sum_1 \varphi$ et dont l'expression est

$$(25) \qquad \sum_1 \varphi = \frac{2mN}{1 + \frac{m}{\mu}}\left[\frac{l(\lambda + l)^3}{3\lambda} - \frac{m}{\mu}\,\frac{(\lambda + l)^4}{4\lambda\left(1 + \frac{m}{\mu}\right)}\right] t\, d\sigma.$$

IX. *Sommation en λ, en t et en $d\sigma$.* — Pour continuer, nous présenterons une remarque importante à laquelle nous avons déjà fait allusion, pages 411 et 413 ci-dessus. C'est qu'il est impossible que l'état de moyen mouvement permanent du solide M se réalise si les vitesses des différentes parties de ce solide ne sont pas infiniment petites par rapport aux vitesses λ des différents points m du fluide.

Supposons, en effet, que les vitesses l et λ soient du même ordre de grandeur. Alors les rapports $\frac{m}{M}$, $\frac{m}{\mathfrak{M}}$ étant infiniment petits, puisque, page 400 ci-dessus, les masses m sont infiniment petites, la formule (15), page 408, peut s'écrire simplement

$$(15\ bis) \qquad \varphi = 4m(\lambda\cos\varphi - l)\,l = 4m\lambda\cos\varphi \times l - 4ml^2.$$

Admettons maintenant pour un instant que (ce qui arriverait si le solide M était immobile) le nombre de points m, qui viennent rencontrer, pendant l'espace de temps quelconque t, les divers éléments $d\sigma$ de la surface du solide avec la composante de vitesse $\lambda\cos\varphi$, soit à égalité d'aire des $d\sigma$ le même pour tous; autrement dit, prenons pour représenter ce nombre, une expression de la forme $\mathrm{H}t\,d\sigma$, H étant un coefficient positif dépendant de λ et de φ, mais ayant même valeur pour tous les $d\sigma$ de la surface du solide. Alors la somme $\sum\varphi$ des variations de force vive produites sur le solide par l'ensemble des chocs survenus pendant le temps t avec la composante de vitesse $\lambda\cos\varphi$ s'obtiendra en faisant l'intégration en $d\sigma$ pour toute l'étendue de la surface du solide de l'expression

$$4m\lambda\cos\varphi \times l \times \mathrm{H}t\,d\sigma - 4ml^2 \times \mathrm{H}t\,d\sigma,$$

c'est-à-dire que l'on aura

$$\sum\varphi = 4m\lambda\cos\varphi \times \mathrm{H}t\int l\,d\sigma - 4m\mathrm{H}t\int l^2\,d\sigma.$$

Et comme, d'après ce que nous avons vu ci-dessus, formule (21), page 415, on a, à tout instant du mouvement du solide,

$$\int l\,d\sigma = 0,$$

il viendra simplement

$$(26) \qquad \sum\varphi = -4m\mathrm{H}t\int l^2\,d\sigma.$$

Par conséquent, avec les hypothèses ici faites, $\sum \psi$ serait constamment négatif.

Mais de ce que le solide M est en mouvement il résulte que les éléments $d\sigma$ pour lesquels l est positif, c'est-à-dire ceux qui progressent dans le fluide, marchent vers les points m, et que par suite les rencontres éprouvées par ces $d\sigma$ sont plus nombreuses qu'elles ne le seraient dans l'état d'immobilité du solide et au contraire que les $d\sigma$ pour lesquels l est négatif, fuyant devant les points m, sont exposés à moins de rencontres que dans l'état d'immobilité.

Par ailleurs, comme il est nécessaire, pour qu'une rencontre se produise entre un $d\sigma$ et un point m, que la composante normale de la vitesse relative du point m par rapport au $d\sigma$ tende à rapprocher ce point du $d\sigma$, autrement dit que l'expression $\lambda \cos\varphi - l$ soit négative, la relation (15 *bis*), page 418 ci-dessus, montre que ψ est négatif quand l est positif, positif quand l est négatif.

L'état de mouvement du solide M a donc pour effet d'accroître le nombre des percussions qui lui enlèvent de la force vive, de diminuer le nombre de celles qui lui en apportent, et, par suite, le $\sum \psi$ qui, donné par la formule (26) de la page précédente, est toujours négatif pour l'hypothèse de la page 418 dans laquelle est établie cette formule, serait, *a fortiori*, toujours négatif si, à ladite formule (26), on substituait une formule tenant compte du nombre exact des percussions éprouvées par chacun des divers $d\sigma$.

Par conséquent, lorsque les λ et les l sont du même ordre de grandeur, la force vive totale du solide M tend constamment à diminuer et la réalisation de l'état de moyen mouvement permanent est par suite impossible.

La conclusion serait la même si les l étaient infiniment grands par rapport aux λ.

Il faut donc que, pour rechercher les conditions de l'état de moyen mouvement permanent du solide M, on regarde les l comme étant infiniment petits par rapport aux λ.

Si alors, prenant la formule (25), page 417 ci-dessus, on en développe le second membre suivant les puissances décroissantes de λ, on obtient

$$\sum_1 \varphi = -\frac{2mN}{1+\frac{m}{\mu}}\left(\frac{l\lambda^2}{3} + l^2\lambda + \ldots - \frac{\frac{m}{\mu}\frac{\lambda^3}{4} + \ldots}{1+\frac{m}{\mu}}\right) t\, d\sigma,$$

en laissant de côté des termes infiniment petits par rapport à ceux que l'on écrit.

On peut encore, en négligeant devant l'unité le rapport infiniment petit $\frac{m}{\mu}$, donner au $\sum_1 \varphi$ la forme plus simple

$$(25\ bis)\qquad \sum_1 \varphi = -2mN\left(\frac{l\lambda^2}{3} + l^2\lambda - \frac{m}{\mu}\frac{\lambda^3}{4}\right) t\, d\sigma.$$

Formant maintenant l'expression (25 *bis*) pour chacune des diverses valeurs de λ existant dans le fluide et ajoutant ensemble tous les $\sum_1 \varphi$ ainsi constitués, on obtient, pour chaque élément $d\sigma$, pendant la durée t du temps pour laquelle il possède la vitesse l, une somme de variations que nous appellerons $\sum_2 \varphi$,

$$(26)\qquad \sum_2 \varphi = \left(-\frac{2}{3}lt\sum Nm\lambda^2 - 2l^2t\sum Nm\lambda + \frac{t}{2\mu}\sum Nm^2\lambda^3\right) d\sigma.$$

Écrivant alors l'expression (26) pour un même $d\sigma$ pour chacune des valeurs de l par lesquelles passe ce $d\sigma$ pendant la période de temps infiniment grande T, ajoutant ensemble tous les $\sum_2 \varphi$ ainsi formés, remarquant, par ailleurs, que, si l'on appelle $l_1, l_2, l_3, \ldots$ ces diverses valeurs de l et $t_1, t_2, t_3, \ldots$ les espaces de temps compris dans T pendant lesquels $d\sigma$ possède les différents l en question, on a

$$l_1t_1 + l_2t_2 + l_3t_3 + \ldots = \int_0^T l\, dt,$$

$$l_1^2t_1 + l_2^2t_2 + l_3^2t_3 + \ldots = \int_0^T l^2\, dt,$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + \ldots = T;$$

on arrive, pour l'ensemble des variations de force vive dues aux percussions éprouvées par l'élément $d\sigma$ pendant le temps T, à la somme

$$(27)\quad \sum_s \psi = \left(-\frac{2}{3}\int_0^T l\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda^2 - 2\int_0^T l^2\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda + \frac{\mathrm{T}}{2\mu}\sum \mathrm{N} m^2\lambda^3\right) d\sigma.$$

Il ne reste plus, pour trouver le total des ψ éprouvés par le solide M pendant le temps T, qu'à ajouter ensemble tous les $\sum_s \psi$ correspondant à tous les $d\sigma$ qui composent la surface extérieure du solide M.

Avant de faire cette sommation, remarquons que l'on peut, en intervertissant l'ordre des intégrations, écrire

$$\int d\sigma \int_0^T l\,dt = \int_0^T dt \int l\,d\sigma,$$

et que, par suite, comme d'après la relation (21), page 415 ci-dessus, on a, à tout instant,

$$\int l\,d\sigma = 0,$$

le premier terme du second membre de la sommation dont il s'agit sera nul.

Tenant compte de cette observation, on arrive à l'expression

$$\sum \psi = -2\int d\sigma \int_0^T l^2\,dt \times \sum \mathrm{N} m\lambda + \frac{\mathrm{ST}}{2\mu_1}\sum \mathrm{N} m^2\lambda^3,$$

S désignant la surface totale du solide M et μ_1 une constante définie par l'égalité $\int \frac{d\sigma}{\mu} = \frac{\mathrm{S}}{\mu_1}$.

Et cette expression de $\sum \psi$, portée dans le premier membre de la relation

$$(20)\qquad \frac{1}{\mathrm{T}}\sum \psi = 0$$

donne l'équation

$$(28)\qquad -\frac{2}{T}\int d\sigma\int_0^T l^2\,dt\times\sum \mathrm{N} m\lambda+\frac{S}{2\mu_1}\sum \mathrm{N} m^2\lambda^2=0,$$

qui exprime une des lois du mouvement du solide M.

X. *Interprétation du résultat obtenu pour le cas où le solide* M *est une sphère homogène.* — Pour interpréter le résultat ainsi obtenu, examinons d'abord le cas simple où le solide M serait une sphère homogène.

Dans toute sphère homogène, on a, comme nous l'avons déjà remarqué, page 407 ci-dessus,

$$\frac{1}{\mathfrak{M}}=0;$$

par suite, $\frac{1}{\mu}$ se réduit à $\frac{1}{M}$. Par ailleurs, la formule (22), page 416 ci-dessus, s'écrit simplement

$$(22\ bis)\qquad l=u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma,$$

et l'on a alors

$$\int d\sigma\int_0^T l^2\,dt=\int_0^T dt\int l^2\,d\sigma=\int_0^T dt\int(u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma)^2\,d\sigma$$

$$=\int_0^T dt\left\{\begin{aligned}&u^2\int\cos^2\alpha\,d\sigma+v^2\int\cos^2\beta\,d\sigma\\&+w^2\int\cos^2\gamma\,d\sigma+2vw\int\cos\beta\cos\gamma\,d\sigma\\&+2uw\int\cos\alpha\cos\gamma\,d\sigma+2uv\int\cos\alpha\cos\beta\,d\sigma.\end{aligned}\right.$$

Or on a pour la sphère

$$\int\cos^2\alpha\,d\sigma=\int\cos^2\beta\,d\sigma=\int\cos^2\gamma\,d\sigma=\frac{S}{3},$$

$$\int\cos\beta\cos\gamma\,d\sigma=\int\cos\alpha\cos\gamma\,d\sigma=\int\cos\alpha\cos\beta\,d\sigma=0.$$

Par suite,

$$\int d\sigma \int_0^T l^2\,dt = \frac{S}{3}\int_0^T (u^2+v^2+w^2)\,dt = \frac{S}{3}\int_0^T W^2\,dt,$$

et dans ces conditions, l'équation (28) de la page précédente devient

$$-\frac{2S}{3T}\int_0^T W^2\,dt \times \sum Nm\lambda + \frac{S}{2M}\sum Nm^2\lambda^2 = 0;$$

on en conclut la formule

$$\frac{1}{T}\int_0^T MW^2\,dt = \frac{3}{4}\,\frac{\Sigma Nm^2\lambda^2}{\Sigma Nm\lambda}. \tag{29}$$

La fraction qui compose le second membre de cette formule ne contient que des termes dépendant exclusivement de la constitution du fluide. On arrive donc à ce théorème :

La valeur moyenne de la force vive du mouvement de translation d'une sphère homogène en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide à points indépendants, infiniment divisé, est égale, quels que soient le rayon *et la* masse *de la sphère, à une quantité qui ne dépend que de la constitution du fluide.*

Quant à la force vive de rotation de la sphère, elle peut être en l'espèce quelconque; les quantités h, i, j étant nulles (p. 407 ci-dessus) pour toute sphère homogène, la vitesse de rotation de la sphère n'influe aucunement sur la grandeur des composantes normales des vitesses des divers éléments de sa surface; c'est ce qui appert clairement de la relation (22 *bis*), page 422 ci-dessus. Aussi les percussions éprouvées par la sphère ne peuvent avoir aucun effet pour modifier et régler la force vive de rotation comme elles font pour la force vive de translation.

XI. *Interprétation du résultat pour le cas où le solide* M *est quelconque.* — L'interprétation des lois du mouvement du solide se fait d'une façon moins immédiate lorsque ce solide est quelconque.

Pour y arriver il faut substituer à l'équation unique (28) de la page 422 un système de vingt et une équations basées sur les considérations suivantes :

La force vive totale $MW^2 + I\omega^2$ du solide M est liée, comme l'on sait, aux six vitesses u, v, w, n, p, q définissant à un instant quelconque le mouvement du solide par l'équation

$$MW^2 + I\omega^2 = Mu^2 + Mv^2 + Mw^2 + An^2 + Bp^2 + Cq^2.$$

Nous allons d'abord montrer que ce que nous avons dit (p. 413-414 ci-dessus) au sujet des variations φ de la force totale du solide M, s'applique aussi (avec d'autant plus d'exactitude que le fluide constitué par les points m est plus divisé) aux variations φ_u, φ_v, φ_w, φ_n, φ_p, φ_q des produits Mu^2, Mv^2, Mw^2, An^2, Bp^2, Cq^2 et que, par suite, on peut écrire les équations

$$(30)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{1}{T}\sum \varphi_u = 0, & \dfrac{1}{T}\sum \varphi_v = 0, & \dfrac{1}{T}\sum \varphi_w = 0, \\ \dfrac{1}{T}\sum \varphi_n = 0, & \dfrac{1}{T}\sum \varphi_p = 0, & \dfrac{1}{T}\sum \varphi_q = 0, \end{array}\right.$$

analogues à l'équation (20), en négligeant des quantités dont l'importance relative est d'autant moindre que le fluide est plus divisé.

Pour justifier ces équations (30), il n'y aurait qu'à répéter le raisonnement fait (p. 413-414 ci-dessus) pour l'établissement de l'équation (20) si (comme cela arrive pour la force vive totale) les produits Mu^2, Mv^2, Mw^2, An^2, Bp^2, Cq^2 restaient constants dans l'intervalle de temps compris entre deux percussions consécutives quelconques. Mais l'on sait que cette condition n'est pas remplie, les composantes de vitesse u, v, w, n, p, q changeant à chaque instant suivant les lois du célèbre mouvement de Poinsot. Il faut donc, pour légitimer l'emploi des équations (30), des explications et peut-être des conditions spéciales, et c'est précisément dans la reconnaissance de ces conditions que nous allons voir intervenir l'emploi de la notion du fluide infiniment divisé que nous avons posée page 400 ci-dessus, comme point de départ des présentes études.

En vue d'élucider la question, formons d'abord le $\sum \varphi_u$ pendant l'espace de temps infiniment grand T; pour cela, nous n'avons qu'à suivre une marche analogue à celle qui, dans les pages précédentes 417 à 421, nous a permis de calculer $\sum \varphi$ pendant ce même espace de temps T.

On a, d'après la première des formules (12) de la page 406 ci-dessus,

$$\varphi_u = \mathrm{M}u^2 - \mathrm{M}u_0^2 = \varpi\left(2u_0 \cos\alpha + \frac{\varpi \cos^2\alpha}{\mathrm{M}}\right),$$

ou, en employant les notations définies pages 407 et 417 ci-dessus,

$$\varphi_u = \frac{4m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{\mu}}\left(u\cos\alpha + \frac{m}{\mathrm{M}}\,\frac{\lambda\cos\varphi - l}{1 + \frac{m}{\mu}}\cos^2\alpha\right).$$

On en conclut, par une série de calculs semblables à ceux développés pages 416 et suivantes ci-dessus,

$$\sum_1 \varphi_u = -\frac{2m\mathrm{N}}{1 + \frac{m}{\mu}}\left[\frac{(\lambda + l)^3 u\cos\alpha}{3\lambda} - \frac{m}{\mathrm{M}}\,\frac{(\lambda + l)^4 \cos^2\alpha}{4\lambda\left(1 + \frac{m}{\mu}\right)}\right] t\,d\sigma$$

$$= -2m\mathrm{N}\left(\frac{u\cos\alpha \times \lambda^2}{3} + u\cos\alpha\, l\lambda - \frac{m}{\mathrm{M}}\,\frac{\lambda^3\cos^2\alpha}{4}\right) t\,d\sigma,$$

$$\sum_2 \varphi_u = \left(-\frac{2}{3}u\cos\alpha \times t\sum \mathrm{N}m\lambda^2 - 2u\cos\alpha \times lt\sum \mathrm{N}m\lambda + \frac{t\cos^2\alpha}{2\mathrm{M}}\mathrm{N}m^3\lambda^3\right)d\sigma,$$

$$\sum_3 \varphi_u = \left(-\frac{2}{3}\int_0^{\mathrm{T}} u\cos\alpha\,dt \times \sum \mathrm{N}m\lambda^2 - 2\int_0^{\mathrm{T}} u\cos\alpha\, l\,dt \times \sum \mathrm{N}m\lambda + \frac{\mathrm{T}\cos^2\alpha}{2\mathrm{M}}\sum \mathrm{N}m^2\lambda^3\right)d\sigma,$$

et, enfin, en remarquant que, comme il a été établi page 416 ci-dessus, on a, pour l'ensemble de la surface limitative du solide [première des formules (23)] : $\int \cos\alpha\, d\sigma = 0$,

$$(31)\qquad \sum \varphi_u = -2\int d\sigma \int_0^{\mathrm{T}} u\cos\alpha\, l\,dt \sum \mathrm{N}m\lambda + \frac{\mathrm{T}}{2\mathrm{M}}\int \cos^2\alpha\, d\sigma \sum \mathrm{N}m^2\lambda^3.$$

Or, en examinant l'expression de $\sum \varphi_u$ ainsi obtenue, on voit que l'on peut, en laissant constamment du même ordre de grandeur, d'une part, les produits $\mathrm{N}m$ (et, par suite, la masse de l'unité de volume, autrement dit la densité du fluide), d'autre part, le rapport $\frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda}$, faire grandir au delà de toute limite les deux termes de ladite expression en attribuant aux vitesses λ des valeurs suffisamment élevées.

Mais, comme la relation (28), page 422 ci-dessus, peut s'écrire

$$\frac{\mu_1}{\mathrm{ST}} \int d\sigma \int_0^{\mathrm{T}} l^2\, dt = \frac{1}{4} \frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda},$$

les vitesses l du solide M restent constamment du même ordre de grandeur quand, le solide ne variant pas, les vitesses λ grandissent sans que l'ordre de grandeur du rapport $\frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda}$ soit altéré. D'autre part, les variations des composantes de vitesses du solide M dues au mouvement de Poinsot dans l'intervalle des chocs successifs sont, comme on sait, proportionnelles aux produits de ces composantes et par suite l'ordre de grandeur de leur somme, calculée pendant un espace de temps déterminé (dans l'espèce T), ne change pas quand, le solide ne variant pas, les vitesses l de ce solide conservent leur ordre de grandeur pendant que les vitesses λ croissent indéfiniment.

De là résulte que, lorsque, voulant appliquer aux φ_u le raisonnement des pages 413-414 ci-dessus pour arriver à écrire l'équation $\frac{1}{\mathrm{T}} \sum \varphi_u = 0$, on regarde les produits $\mathrm{M} u^2$ comme constants entre deux chocs consécutifs, on commet des erreurs dont la somme peut être réduite d'importance relativement à la somme $\sum \varphi_u$ autant qu'on le veut en attribuant aux vitesses λ du fluide des valeurs suffisantes.

Par ailleurs, pour que les produits $\mathrm{N}m$ et le rapport $\frac{\Sigma \mathrm{N} m^2 \lambda^3}{\Sigma \mathrm{N} m \lambda}$ restent constamment du même ordre de grandeur quand les λ croissent au delà de toute limite, il faut que les produits $m\lambda^2$ demeurent eux-mêmes constamment du même ordre de grandeur et, par suite, que les masses m décroissent de plus en plus, autrement dit que la division du fluide soit poussée de plus en plus loin.

C'est donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé page 424 ci-dessus, sur l'emploi de la considération des fluides infiniment divisés que repose la justification des équations (30) ci-dessus.

Nous pouvons maintenant nous servir des équations (30) ainsi légitimées.

Prenons l'expression (31) de la page 425, divisons-la par T et égalons-la à zéro. En tenant compte de la relation

$$(22) \qquad l = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma + hn + ip + jq,$$

nous obtiendrons l'équation

$$(32) \quad \left\{ \begin{aligned} &M \left\{ \begin{aligned} &\int \cos^2\alpha \, d\sigma \frac{1}{T}\int_0^T u^2\, dt + \int \cos\alpha\cos\beta\, d\sigma \frac{1}{T}\int_0^T uv\, dt \\ &+ \int \cos\alpha\cos\gamma\, d\sigma \frac{1}{T}\int_0^T uw\, dt + \int h\cos\alpha\, d\sigma \frac{1}{T}\int_0^T un\, dt \\ &+ \int i\cos\alpha\, d\sigma \frac{1}{T}\int_0^T up\, dt + \int j\cos\alpha\, d\sigma \frac{1}{T}\int_0^T uq\, dt \end{aligned} \right. \\ &= \frac{1}{4}\int \cos^2\alpha\, d\sigma \frac{\Sigma N m^2 \lambda^3}{\Sigma N m \lambda}. \end{aligned} \right.$$

En opérant maintenant sur chacune des variations $\mathfrak{V}_v$, $\mathfrak{V}_w$, $\mathfrak{V}_n$, $\mathfrak{V}_p$, $\mathfrak{V}_q$ comme on vient de le faire sur la variation $\mathfrak{V}_u$, on arriverait semblablement à cinq équations analogues à l'équation (32) et de même forme, équations que, pour abréger, nous n'écrirons pas.

Si l'on examine l'ensemble des six équations ainsi formées, on constate qu'il s'y trouve vingt et une inconnues, savoir :

D'abord les six valeurs moyennes $\frac{1}{T}\int_0^T u^2\, dt$, $\frac{1}{T}\int_0^T v^2\, dt$, $\frac{1}{T}\int_0^T w^2\, dt$, $\frac{1}{T}\int_0^T n^2\, dt$, $\frac{1}{T}\int_0^T p^2\, dt$, $\frac{1}{T}\int_0^T q^2\, dt$ des carrés des vitesses u, v, w, n, p, q; puis les quinze valeurs moyennes $\frac{1}{T}\int_0^T uv\, dt, \ldots, \frac{1}{T}\int_0^T un\, dt, \ldots$ des produits deux à deux de ces vitesses.

Il reste donc, pour dégager les valeurs des vingt et une inconnues, à trouver quinze autres équations.

Ces quinze équations s'obtiennent facilement en remarquant que, si l'on considère ce que devient dans un choc quelconque l'un des quinze produits de vitesses précités, par exemple le produit uv, on a, d'après les formules et conventions des pages 406, 407, 417, pour variation ϑ_{uv} correspondante,

$$\begin{aligned}\vartheta_{uv} &= \mathrm{M}uv - \mathrm{M}u_0v_0 = \mathrm{M}\left(u_0 + \frac{\varpi\cos\alpha}{\mathrm{M}}\right)\left(v_0 + \frac{\varpi\cos\beta}{\mathrm{M}}\right) - \mathrm{M}u_0v_0 \\ &= \varpi\left(u_0\cos\beta + v_0\cos\alpha + \frac{\varpi}{\mathrm{M}}\cos\alpha\cos\beta\right) \\ &= \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{1+\frac{m}{\mu}}\left[u\cos\beta + v\cos\alpha + \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{\mathrm{M}\left(1+\frac{m}{\mu}\right)}\cos\alpha\cos\beta\right].\end{aligned}$$

Mais, en vertu des raisonnements qui ont servi à établir, pages 425-426 ci-dessus, l'équation $\frac{1}{\mathrm{T}}\sum\vartheta_u = 0$ et aux mêmes conditions, on peut écrire

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\sum\vartheta_{uv} = 0.$$

Partant de là et opérant comme précédemment, on arrive sans peine à l'équation

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{M}\left\{\begin{aligned} &\int\cos\alpha\cos\beta\,d\sigma\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} u^2\,dt + \frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} v^2\,dt\right) \\ &+\left(\int\cos^2\alpha\,d\sigma + \int\cos^2\beta\,d\sigma\right)\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} uv\,dt \\ &+\int\cos\beta\cos\gamma\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} uw\,dt + \int\cos\alpha\cos\gamma\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} vw\,dt \\ &+\int h\cos\beta\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} un\,dt + \int h\cos\alpha\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} vn\,dt \\ &+\int i\cos\beta\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} up\,dt + \int i\cos\alpha\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} vp\,dt \\ &+\int j\cos\beta\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} uq\,dt + \int j\cos\alpha\,d\sigma\,\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} vq\,dt \end{aligned}\right. \\ = \frac{1}{2}\int\cos\alpha\cos\beta\,d\sigma\,\frac{\Sigma\mathrm{N}m^2\lambda^3}{\Sigma\mathrm{N}m\lambda}. \end{aligned}\right.$$

Et, en considérant successivement chacun des quatorze autres produits de vitesses deux à deux, on obtiendrait de la même façon quatorze autres équations analogues à cette équation (33).

Les six équations (32) et les quinze équations (33) forment donc en définitive un système de vingt et une équations du premier degré par rapport aux vingt et une inconnues de la forme

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt, \quad \ldots, \quad \frac{1}{T}\int_0^T uv\,dt, \quad \ldots$$

qu'elles contiennent. Par conséquent, ces vingt et une équations admettent, en général, un seul système de solution.

Et cet unique système de solution qui apparaît immédiatement à la seule inspection des équations est le suivant :

$$(34)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T Mu^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Mv^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Mw^2\,dt \\ &\quad = \frac{1}{T}\int_0^T An^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Bp^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T Cq^2\,dt = \frac{1}{4}\,\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}, \end{aligned} \right.$$

$$(35)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{T}\int_0^T uv\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T uw\,dt = \ldots \\ &\qquad = \frac{1}{T}\int_0^T un\,dt = \ldots = \frac{1}{T}\int_0^T np\,dt = \ldots = 0. \end{aligned} \right.$$

Des valeurs (34), on déduit

$$\frac{1}{T}\int_0^T M(u^2+v^2+w^2)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (An^2+Bp^2+Cq^2)\,dt = \frac{3}{4}\,\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}$$

et, par suite, vu les définitions de la page 406,

$$(36)\qquad \frac{1}{T}\int_0^T MW^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I\omega^2\,dt,$$

$$(37)\qquad \frac{1}{T}\int_0^T (MW^2 + I\omega^2)\,dt = \frac{3}{2}\,\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}.$$

La relation (37) se traduit par le théorème suivant, analogue à celui déjà trouvé (p. 423 ci-dessus) pour le cas particulier de la sphère homogène.

La valeur moyenne de la force vive totale d'un solide invariable en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide à points indépendants, infiniment divisé, est égale, quelles que soient la forme, *les* dimensions, *la* masse *du solide, à une quantité qui ne dépend que de la constitution du fluide.*

De la relation (36), on conclut que dans les mêmes conditions :

La force vive moyenne de translation du solide est égale à sa force vive moyenne de rotation.

On reconnaît, d'ailleurs, facilement que, comme cela doit être, les valeurs (34), (35) vérifient l'équation (28) de la page 422, en sorte que cette équation (28) est surabondante par rapport au système des équations (32), (33).

Lorsque (ainsi que cela arrive, par exemple, pour les ellipsoïdes homogènes) le solide considéré admet comme plans de symétrie les trois plans déterminés par ses axes principaux passant par son centre de gravité, les intégrales de la forme $\int \cos\alpha \cos\beta \, d\sigma$, ..., $\int h \cos\alpha \, d\sigma$, ... étant toutes nulles, les six équations (32) donnent immédiatement les six valeurs (34) des forces vives moyennes.

XII. *Valeurs moyennes des composantes des vitesses du solide.* — On peut, pour achever de bien définir le mouvement du solide M, remarquer que, si l'on considère les variations $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$, $n - n_0$, ... des composantes de vitesses u, v, w, n, p, q données par les formules (1) et (2), pages 401-402 ci-dessus, ces variations doivent, pour des raisons analogues à celles qui viennent d'être présentées pour les variations des forces vives et aux mêmes conditions, satisfaire à des équations de la forme

$$(38) \qquad \frac{1}{T}\sum \varphi_u = 0, \qquad \frac{1}{T}\sum \varphi_v = 0, \qquad \ldots,$$

φ_u, φ_v, ... désignant les variations $u - u_0$, $v - v_0$, ... en question.

En opérant sur ces équations (38), comme on l'a fait ci-dessus sur les équations (30), on arrive, par des calculs analogues, à trouver les relations

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T v\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T w\,dt \\ = \frac{1}{T}\int_0^T n\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T q\,dt = 0,\end{aligned}$$

et, par suite, vu l'équation (22), page 416,

$$\frac{1}{T}\int_0^T l\,dt = 0.$$