JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CELLERIER

Note sur quelques effets des tremblements de terre

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 7 (1891), p. 271-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1891_4_7__271_0>

Note sur quelques effets des tremblements de terre;

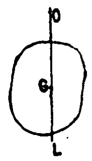
Par M. CELLERIER.

---

§ 1. — Cas les plus simples.

1. Cas d'un pendule composé dont l'axe de suspension éprouve une secousse horizontale. — Le plan de la figure est mené par le centre de gravité G du corps, perpendiculairement à l'axe de suspen-

Fig. 1.



sion qu'il coupe en O : m est la masse du corps, C son moment d'inertie par rapport à l'axe, h la distance OG, l la longueur réduite OL du pendule, de sorte que $C = mhl$, θ est l'angle d'écart de la verticale, compté positif à droite.

Le temps t est compté à partir du commencement de la secousse; le mouvement relatif au système des appuis et des objets environnants se calculera comme si ce système était immobile, en supposant appliquée en tout point du corps mobile une accélération égale et contraire à celle du système, ou de l'axe; la composante de celle-ci perpendiculaire au plan de la figure étant détruite, l'accélération à appliquer, parallèle au plan de la figure horizontale, et dirigée à droite sera

$$\frac{d^2 u}{dt^2},$$

u étant le déplacement horizontal du point O dans le plan de la figure, compté positif à gauche; ainsi u est une fonction donnée de t, nulle de même que $\frac{du}{dt}$ quand $t = 0$. L'accélération imprimée au corps équivaut à une force $m\frac{d^2 u}{dt^2}$ appliquée au point G. L'équation du mouvement est ainsi

$$C\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\sin\theta + mh\frac{d^2 u}{dt^2};$$

en négligeant θ^3 ou remplaçant $\sin\theta$ par θ, substituant $C = mhl$, divisant par mh, posant

$$\mu = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad l\theta = x,$$

l'équation devient

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu^2 x + \frac{d^2 u}{dt^2}, \tag{1}$$

et x est le déplacement du point L, pris positif à droite. L'intégrale est

$$x = -\frac{\cos\mu t}{\mu}\int_0^t \frac{d^2 u}{dt^2}\sin\mu t\,dt$$
$$+\frac{\sin\mu t}{\mu}\int_0^t \frac{d^2 u}{dt^2}\cos\mu t\,dt + A\cos\mu t + B\sin\mu t.$$

On suppose que, pour $t = 0$, le corps était en repos; on avait

$$x = 0, \qquad \frac{dx}{dt} = 0,$$

les deux premiers termes de x et leurs dérivées se détruisant quand $t = 0$, il en résulte que les constantes arbitraires A et B sont nulles. En intégrant par partie $\frac{d^2 u}{dt^2}$, et remarquant que $\frac{du}{dt} = 0$ pour $t = 0$, les termes hors du signe $\int$ se détruisent, et il reste

$$x = \cos\mu t \int_0^t \frac{du}{dt}\cos\mu t\, dt + \sin\mu t \int_0^t \frac{du}{dt}\sin\mu t\, dt,$$

ou plus simplement

$$x = \int_0^t \frac{du'}{dt'}\cos\mu(t - t')\, dt',$$

u' étant ce que devient u quand on y remplace t par t'.

Discussion du résultat précédent. — Quel que soit le mode de variation de u' en fonction de t', on peut partager l'ensemble de la secousse en mouvements simples, c'est-à-dire tels que, pendant chacun d'eux, le point O se déplace dans un même sens, ou que u' soit toujours croissant ou décroissant, et $\frac{du'}{dt'}$ de signe constant. La valeur de x est la somme des portions de l'intégrale correspondant à chaque mouvement simple; elle ne dépend d'ailleurs que de $\frac{du'}{dt'}$, et ne changera pas si, pour chacun, nous considérons le point O comme partant de sa position primitive, en conservant à $\frac{du'}{dt'}$ sa valeur exacte.

Ainsi x est la somme des valeurs particulières correspondant à chaque mouvement simple considéré comme secousse unique, les secousses commençant pour des valeurs diverses de t'.

Pour un mouvement simple d'excursion h, on aura évidemment un maximum numérique de la valeur (2) de x en remplaçant $\cos\mu(t - t')$ par l'unité, puisque $\frac{du'}{dt'}$ a un signe constant; le résultat sera

$$\int \frac{du'}{dt'} \quad \text{ou} \quad h.$$

Ce maximum ne pourra être atteint que si $\cos\mu(t - t')$ ne varie pas sensiblement pendant la durée θ du mouvement, et comme $\mu = \frac{\pi}{T}$, T étant la durée de l'oscillation pendulaire, il faut pour cela que $\frac{\theta}{T}$ soit très petit. Cette condition sera d'ailleurs suffisante, car on peut toujours supposer t tel que $\mu(t-t')$ pendant le temps θ soit sensiblement multiple de π; t croissant, x variera à très peu près entre $\pm h$, et h sera, pour le point L, l'excursion du mouvement pendulaire qui suit la secousse. Ce résultat était facile à prévoir. Le déplacement h du point O étant brusque, le point L reste en arrière, ayant ainsi un déplacement relatif h, qui sert de position initiale pour le mouvement pendulaire. Dans le cas où la durée θ du mouvement est plus grande, on ne peut dire, d'une manière générale, que x sera notablement inférieur à h, car il peut toujours arriver que $\cos\mu(t-t')$ reste presque constant pendant une notable partie du mouvement, ou que celui-ci soit presque soudain.

Mais, s'il n'en est pas ainsi, x sera toujours inférieur à h, et même, si θ est très grand par rapport à T, la valeur (2) de x sera constamment très petite par rapport à h; en effet, nous supposons le mouvement lent sans se trouver accumulé sur une faible portion de la durée totale, et, pendant celle-ci, $\cos\mu(t-t')$ changera de signe un grand nombre de fois; les portions correspondantes de l'intégrale (2) se détruiront en partie, et le tout sera très petit par rapport à

$$\int \frac{du'}{dt'} \quad \text{ou} \quad h.$$

Si, pour d'autres mouvements simples, l'excursion du point O est

$$h', \quad h'', \quad h''', \quad \ldots,$$

ce seront les maxima théoriques de x pour chacun d'eux, et de la sorte pour leur ensemble le maximum théorique de x serait leur somme

$$h + h' + h'' + \ldots.$$

Mais cela suppose une série de plus en plus improbable de coïncidences; pour deux mouvements cela supposerait qu'à la fois

$$\cos\mu(t-t')$$

fût ± 1 pendant la durée du premier et ∓ 1 pendant celle du second, où $\frac{du'}{dt'}$ est de signe contraire, ou que les deux secousses fussent presque instantanées se suivant à un intervalle de temps égal à T. Il en serait de même quand il y a plus de deux mouvements simples.

Ces cas anormaux ont donc peu d'importance et, puisque l'effet d'un nombre quelconque de secousses se trouve en calculant celui d'une seule, il suffit d'examiner, soit le cas d'une seule comme nous venons de le faire, soit celui d'une *secousse complète*, en désignant ainsi le mouvement formé d'une excursion h du point O à gauche, suivi de son retour à sa position primitive.

Cas d'une secousse complète. — Désignons par θ sa durée totale : si $\theta > T$ ou $\mu\theta > \pi$, il est clair que le mouvement pourra présenter les circonstances anormales déjà mentionnées et que x pourra atteindre à peu près $2h$. Bornons-nous donc au cas où $\theta < T$, qui est le plus important. Il faut distinguer ce qui se passe pendant la secousse et dans le mouvement qui lui succède.

1° *Valeur de x pendant la secousse.* — Tout ce qu'on peut dire de général quand $\theta < T$, c'est que, pendant la première période de la secousse, x peut approcher beaucoup de h si elle est courte, mais que, pendant la seconde, il restera inférieur à $2h$ numériquement. Le résultat est plus simple si $\theta < \frac{1}{2}T$, car alors $\mu t'$ n'atteindra pas $\frac{1}{2}\pi$, non plus que $\mu(t - t')$; l'intégrale (2) pendant la seconde période de la secousse est ainsi composée de deux parties de signe contraire, toutes deux numériquement inférieures à h; en outre, dans la seconde, le même accroissement du' est multiplié par un cosinus plus fort, $\mu(t - t')$ diminuant. Il en résulte que, pendant la secousse, x est compris entre $\pm h$ et qu'à la fin il est négatif.

2° *Valeur de x après la secousse.* — Soient θ', $\theta - \theta'$ les durées des deux périodes du mouvement et H, H' les portions correspondantes de l'intégrale (2) où $t > \theta$. Dans la première, $\mu(t - t')$ décroît de μt à $\mu(t - \theta')$ et, en remplaçant tour à tour $\cos\mu(t - t')$ par sa valeur la plus grande et la plus petite (algébriquement) dans cet intervalle, on aurait des limites entre lesquelles H est comprise, d'où résulte

$$H = \cos i \int \frac{du'}{dt'} = h \cos i,$$

i étant compris entre μt et $\mu t - \mu\theta'$. De même

$$H' = \cos i' \int \frac{du'}{dt'} = - h \cos i',$$

i' étant compris entre $\mu(t - \theta')$ et $\mu(t - \theta)$; de la sorte $i - i'$ est compris entre o et $\mu\theta$ ou $\frac{\pi\theta}{T}$. La valeur complète de x est ainsi

$$x = H + H' = h(\cos i - \cos i') = - 2h \sin \frac{i+i'}{2} \sin \frac{i-i'}{2}.$$

On aura donc constamment, numériquement,

$$x < 2h \sin \frac{\pi\theta}{2T}.$$

Si donc $\theta < \frac{1}{2}T$, $x < h\sqrt{2}$, et si $\frac{\theta}{T}$ est très petit, bien que, pendant la secousse, x atteigne à peu près la valeur h, $\frac{x}{h}$ sera toujours très petit dans le mouvement qui lui succède, la seconde période de la secousse détruisant en grande partie l'effet de la première.

On pourrait avec quelque probabilité attribuer à la secousse la loi ordinaire des oscillations, en posant

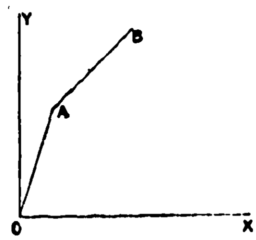
$$u' = \tfrac{1}{2}h(1 - \cos\mu' t');$$

de la sorte u' et $\frac{du'}{dt'}$ seraient nulles pour $t' = 0$ et le redeviendraient quand $t' = \frac{2\pi}{\mu'}$. On pourrait ainsi chercher à déduire de l'observation du mouvement les valeurs de h et de μ' et la durée $\frac{2\pi}{\mu'}$ de la secousse. Toutefois le résultat est d'une grande complication et ne pourrait s'obtenir qu'en construisant des Tables numériques étendues.

On ne pourrait d'ailleurs lui attribuer une grande précision, la fonction u' pouvant contenir plusieurs termes analogues au précédent.

2. Cas de deux tiges articulées. *Équations du mouvement.* — Le système se compose de deux tiges OA, AB, que nous rapportons aux axes OX, OY, dont le second est vertical. Les tiges, que nous

Fig. 2.



assimilons à des droites ont la même masse m, la même longueur l, et ne peuvent se mouvoir que dans un plan vertical; elles sont articulées entre elles en A, et la première l'est en outre, au sol, en O. Leurs angles avec la verticale sont θ pour OA, et $\theta + \theta'$ pour AB; θ et θ' sont comptés positivement à droite. Le mouvement est déterminé par une secousse dans laquelle le sol éprouve une translation horizontale; u, connu en fonction de t, est le déplacement du point O, sur l'axe des x, considéré comme positif du côté des x négatives. Nous admettons que, dans l'articulation O, s'exercent des forces dont le moment par rapport à O est numériquement $\frac{1}{2} lmb\theta$ et qui tendent à ramener OA dans la position verticale. De même, dans l'articulation A, agissent sur AB des forces tendant à diminuer θ' ou à amener AB en droite ligne avec OA; leur moment par rapport à A est $\frac{1}{2} mlb'\theta'$.

Les axes étant entraînés dans le mouvement du point O, le mouvement relatif des tiges est le même que si les axes étaient immobiles, en supposant tous les points des tiges animés, outre les forces réelles, d'une accélération commune $\frac{d^2u}{dt^2}$ parallèle à OX et de même sens.

Les équations du mouvement sont celles de Lagrange, ou

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\theta''}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{dT}{d\theta}\right) = K, \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\theta'''}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{dT}{d\theta'}\right) = K',$$

en remarquant que la position du système ne dépend que des deux variables θ, θ', désignant par $K\,d\theta + K'\,d\theta'$ le travail des forces pour un petit déplacement, par T la force vive totale, et posant

$$\theta'' = \frac{d\theta}{dt}, \qquad \theta''' = \frac{d\theta'}{dt}.$$

Valeur de T. — Pour un élément dr de OA, à la distance r de O, les coordonnées sont

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

la masse de l'élément est

$$\frac{m\,dr}{l},$$

et sa force vive

$$\frac{m}{l}\,r^2\,dr\,\frac{d\theta^2}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \frac{m}{l}\,\theta''^2\,r^2\,dr.$$

Pour un élément dr de AB à la distance r de A, la masse est

$$\frac{m\,dr}{l},$$

les coordonnées

$$x = l\sin\theta + r\sin(\theta+\theta'), \qquad y = l\cos\theta + r\cos(\theta+\theta')$$

et la force vive

$$\frac{m\,dr}{l}\left[l^2\theta''^2 + r^2(\theta''+\theta''')^2 + 2lr\theta''(\theta''+\theta''')\cos\theta'\right].$$

En intégrant ces deux forces vives de $r = 0$ à l, on aura en tout

$$T = ml^2\left[\tfrac{1}{3}\theta''^2 + \theta''^2 + \tfrac{1}{3}(\theta''+\theta''')^2 + \theta''(\theta''+\theta''')\cos\theta'\right].$$

Nous négligerons les termes du troisième degré par rapport aux petits nombres θ, θ', θ'', θ'''. Nous devrons donc, dans les équations du mouvement, supprimer $\left(\frac{dT}{d\theta'}\right)$ et, dans les autres dérivées partielles de T, remplacer $\cos\theta'$ par l'unité, d'où résulte

$$T = \frac{ml^2}{3}(8\theta''^2 + 5\theta''\theta''' + \theta'''^2).$$

Valeurs de K *et* K'. — Puisque $K\,d\theta + K'\,d\theta'$ est le travail des forces, $K'\,d\theta'$ est ce travail en supposant θ constant, ou la tige OA immobile; ainsi K' est la somme des moments des forces agissant sur AB par rapport au point A. De même, $K\,d\theta$ est le travail en supposant θ' constant, ou le système OAB de forme invariable. Ainsi K est la somme des moments des forces agissant sur les deux tiges, par rapport au point O. Il ne s'agit que des forces extérieures, et celles qui agissent dans l'articulation A n'y sont pas comprises. Tous les moments doivent être pris positifs s'ils tendent à augmenter θ' ou θ, ou à faire tourner de OY vers OX.

Les moments des forces exercées dans les articulations sont $-\frac{1}{2}mlb\dot{\theta}$ pour K, et $-\frac{1}{2}mlb'\theta'$ pour K'. L'accélération $\frac{d^2u}{dt^2}$, que nous désignerons par u'', équivaut à une force mu'' agissant sur le centre de gravité dx, c'est-à-dire le milieu de chaque tige, dans le sens OX; le poids mg agit sur les mêmes points. Leurs moments réunis sont évidemment $mu''y + mgx$, x et y étant les coordonnées du point; celles-ci pour K' se rapportent à l'origine A, ce qui donne pour le moment

$$\tfrac{1}{2}mu''l\cos(\theta + \theta') + \tfrac{1}{2}mgl\sin(\theta + \theta').$$

Dans la valeur de K, l'origine est en O, ce qui donne, pour le moment des forces appliquées au milieu de OA,

$$\tfrac{1}{2}mu''l\cos\theta + \tfrac{1}{2}mgl\sin\theta.$$

Pour le milieu de AB, on aura de même

$$mu''[l\cos\theta + \tfrac{1}{2}l\cos(\theta + \theta')] + mg[l\sin\theta + \tfrac{1}{2}l\sin(\theta + \theta')].$$

En négligeant le troisième degré, nous devons remplacer les sinus par les angles. En outre, θ et θ' sont de l'ordre de u'' qui doit ainsi être regardé comme du premier degré; on doit donc remplacer aussi les cosinus par l'unité. En substituant dans les formules de Lagrange la valeur de T et toutes les parties de K, K' que nous venons de trouver, on aura, avant toute réduction,

$$\begin{aligned}\frac{ml^2}{6}\left(16\frac{d\theta''}{dt}+5\frac{d\theta'''}{dt}\right) &= -\tfrac{1}{2}mlb\theta+\tfrac{1}{2}ml(u''+g\theta)\\ &\quad+m[u''(l+\tfrac{1}{2}l)+g(l\theta+\tfrac{1}{2}l\theta+\tfrac{1}{2}l\theta')],\\ \frac{ml^2}{6}\left(5\frac{d\theta''}{dt}+2\frac{d\theta'''}{dt}\right) &= -\tfrac{1}{2}mlb'\theta'+\tfrac{1}{2}mu''l+\tfrac{1}{2}mgl(\theta+\theta'),\end{aligned}$$

ou, en divisant par $\frac{1}{2}ml$,

$$\frac{l}{3}\frac{d^2(16\theta+5\theta')}{dt^2}+(b-4g)\theta-g\theta'-4u''=0,$$

$$\frac{l}{3}\frac{d^2(5\theta+2\theta')}{dt^2}-g\theta+(b'-g)\theta'-u''=0.$$

En posant

$$(3)\qquad b-4g=a,\qquad b'-g=a',$$

ces équations prennent la forme plus simple

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{l}{3}\frac{d^2(16\theta+5\theta')}{dt^2}+a\theta-g\theta'-4u''=0,\\ &\frac{l}{3}\frac{d^2(5\theta+2\theta')}{dt^2}-g\theta+a'\theta'-u''=0.\end{aligned}\right.$$

3. Intégration des équations précédentes. — Ajoutons à la première le produit de la seconde par une indéterminée f et posons

$$(5)\qquad p=(16+5f)\theta+(5+2f)\theta'.$$

Nous aurons

$$\frac{l}{3}\frac{d^2p}{dt^2}+(a-gf)\theta+(a'f-g)\theta'=(4+f)u''.$$

Choisissons f de façon que l'on ait

$$\frac{a-gf}{16+5f}=\frac{a'f-g}{5+2f}. \tag{6}$$

En désignant par z la valeur commune de ces deux rapports, l'équation deviendra alors

$$\frac{l}{3}\frac{d^2p}{dt^2}+zp=(4+f)u'' \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2p}{dt^2}+\mu^2p=\frac{3}{l}(4+f)u'',$$

en posant

$$\frac{3z}{l}=\mu. \tag{7}$$

Si μ est réelle, l'équation s'intègre comme celle du n° **1**; en remarquant que p et $\frac{dp}{dt}$ s'annulent pour $t=0$, le système étant vertical et immobile au commencement de la secousse, les constantes arbitraires A, B disparaissent, et l'on trouve

$$p=\frac{3(4+f)}{l}q, \qquad q=\int_0^t\frac{du'}{dt'}\cos\mu(t-t')\,dt', \tag{8}$$

u' étant ce que devient u quand on y remplace t par t'. Si μ est imaginaire, la valeur de p contient des exponentielles, et le mouvement, même en l'absence de l'accélération u'', est instable.

Pour que f satisfasse à l'équation (6), il faut et il suffit que, pour un même nombre z, on ait à la fois

$$\frac{a-gf}{16+5f}=z, \qquad \frac{a'f-g}{5+2f}=z$$

ou

$$f=\frac{a-16z}{5z+g}, \qquad f=\frac{5z+g}{a'-2z}, \tag{9}$$

d'où

$$(16z-a)(2z-a')-(5z+g)^2=0$$

ou

$$(10)\qquad \begin{cases} 7z^2 - 2z(a + 8a' + 5g) + aa' - g^2 = 0, \\ z = \dfrac{a + 8a' + 5g \pm \sqrt{R}}{7}, \\ R = (a + 8a' + 5g)^2 - 7(aa' - g^2). \end{cases}$$

Il faut remarquer que

$$R = 32g^2 + 10g(a + 8a') + (a + 8a')^2 - 7aa'$$

ou

$$32R = [5(a + 8a') + 32]^2 + 7(a - 8a')^2.$$

Les valeurs de z sont donc réelles et inégales.

Désignons par z, z' les deux racines, et par μ', f', p', q' ce que deviennent μ, f, p, q, quand on y remplace z par z'. D'après la valeur (5) de p, on a

$$16\theta + 5\theta' + f(5\theta + 2\theta') = p, \qquad 16\theta + 5\theta' + f'(5\theta + 2\theta') = p'.$$

d'où

$$5\theta + 2\theta' = \frac{p - p'}{f - f'}, \qquad 16\theta + 5\theta' = \frac{fp' - f'p}{f - f'}.$$

On en tirerait θ et θ'; mais nous avons surtout besoin de connaître le mouvement du point B pour lequel

$$x = l\sin\theta + l\sin(\theta + \theta'), \qquad y = l\cos\theta + l\cos(\theta + \theta').$$

La valeur de y est à peu près constante et égale à $2l$; celle de x, en négligeant le troisième degré, est

$$x = l(2\theta + \theta').$$

En ajoutant les deux relations ci-dessus, multipliées par $\frac{6}{7}$ et $-\frac{1}{7}$, on aura

$$2\theta + \theta' \quad \text{ou} \quad \frac{x}{l} = \frac{(6 + f')p - (6 + f)p'}{7(f - f')}$$

et, en substituant la valeur (8) de p et son analogue pour p',

$$\frac{7x}{3} = \frac{(4+f)(6+f')q - (4+f')(6+f)q'}{f-f'}.$$

On peut l'écrire

$$(11) \qquad \frac{7x}{3} = q + q' + \mathrm{H}(q - q'),$$

où

$$\mathrm{H} = \frac{(5+f)(5+f') - 1}{f-f'}.$$

En y substituant, d'après les formules (9),

$$f = \frac{5z+g}{a'-2z}, \qquad f' = \frac{5z'+g}{a'-2z'},$$

on aura, avant les réductions,

$$\mathrm{H} = \frac{(5a'+g-5z)(5a'+g-5z') - (a'-2z)(a'-2z')}{(5z+g)(a'-2z') - (5z'+g)(a'-2z)}$$

ou

$$\mathrm{H} = \frac{24a'^2 + 10ga' + g^2 - (23a'+5g)(z+z') + 21zz'}{(5a'+2g)(z-z')}.$$

L'équation (10) donne

$$z + z' = \frac{2}{7}(a + 8a' + 5g), \qquad zz' = \frac{aa'-g^2}{7},$$

d'où

$$7\mathrm{H} = \frac{168a'^2 + 70ga' + 7g^2 + 21(aa'-g^2) - 2(23a'+5g)(a+8a'+5g)}{(5a'+2g)(z-z')}$$
$$= \frac{-5a(5a'+2g) - 8(25a'^2+30ga'+8g^2)}{(5a'+2g)(z-z')} = -\frac{5a+8(5a'+4g)}{z-z'}.$$

En outre, en supposant $z > z'$, les formules (10) donnent

$$z - z' = \frac{2}{7}\sqrt{\mathrm{R}};$$

la valeur (11), en remplaçant H par $-$ H′, devient ainsi

$$\frac{7x}{3} = (H' + 1)q' - (H' - 1)q, \tag{12}$$

où

$$H' = \frac{5(a + 8a') + 32g}{2\sqrt{R}},$$

q, q' ayant la valeur (8) et une autre homologue. C'est l'intégrale sous sa forme la plus simple.

4. Discussion du résultat : 1° *Conditions de stabilité*. — Nous supposons stable la position verticale d'équilibre des tiges. Pour cela, z et z' étant réelles, comme on l'a vu, il faut de plus qu'elles soient positives et, pour cela, d'après les formules (10), que l'on ait

$$a + 8a' + 5g > 0, \qquad aa' - g^2 > 0.$$

La seconde condition exige que a et a' soient de même signe, et $g < \sqrt{aa'}$. On a d'ailleurs, quels que soient a, a',

$$a^2 + 64a'^2 - 9aa' > 0 \qquad \text{ou} \qquad (a + 8a')^2 > 25aa' > 25g^2.$$

Ainsi, numériquement, $a + 8a' > 5g$, et, si a et a' étaient toutes deux négatives, la condition $a + 8a' + 5g > 0$ ne serait pas satisfaite. Par conséquent, pour la stabilité de l'équilibre et celle du mouvement dû à la secousse, il faut et il suffit que a et a' soient toutes deux positives et que $g < \sqrt{aa'}$.

2° *Relation de grandeur entre* μ *et* μ'. — On a identiquement

$$32aa' = (a + 8a')^2 - (a - 8a')^2,$$

d'où

$$32(aa' - g^2) < (a + 8a' + 5g)^2,$$

ou, en multipliant par $\frac{1}{7}$,

$$128zz' < 7(z + z')^2$$

ou

$$32(z+z')^2 - 32(z-z')^2 < 7(z+z')^2,$$
$$5(z+z') < 4(z-z')\sqrt{2},$$

en remarquant que $z > z'$. Il en résulte

$$\frac{z}{z'} > \frac{5+4\sqrt{2}}{4\sqrt{2}-5} \quad \text{ou} \quad > \frac{57+40\sqrt{2}}{7} > 16,$$
$$\frac{\mu^2}{\mu'^2} > 16, \quad \frac{\mu}{\mu'} > 4.$$

3° *Cas où les tiges se réduisent à une seule.* — Les formules trouvées comprennent ce cas en supposant infini le moment des forces qui tendent à amener la tige AB sur le prolongement de OA; nous devons donc faire croître à l'infini b' et, par suite, a' d'après les équations (3).

Les formules (10) montrent que z croît à l'infini; et, comme

$$\frac{zz'}{z+z'} = \frac{aa'-g^2}{2(a+8a'+5g)},$$

en désignant $\lim z'$ par z'', on a

$$z'' = \frac{a}{16}.$$

En même temps $\frac{8a'}{\sqrt{R}}$ converge vers 1, et la valeur (12) de H' vers $\frac{3}{2}$; μ étant infini, $q = 0$, comme on le voit en intégrant $\cos\mu(t-t')\,dt'$ par partie dans la formule (8). En posant $\mu'' = \sqrt{\frac{3z''}{l}} = \sqrt{\frac{3a}{16l}}$, désignant par q'', x'' les valeurs correspondantes de q, x, l'équation (12) se réduit à $x'' = \frac{3}{2}q''$.

4° *Discussion du cas général.* — En posant

$$5(a+8a') + 32g = F,$$

les formules (10) donnent, comme on l'a vu,

$$32R = F^2 + 7(a-8a')^2.$$

Puisque a et a' sont positives

$$25(a-8a')^2 < F^2, \qquad 32R > F^2 \quad \text{et} \quad < F^2 + \tfrac{7}{25}F^2;$$

ainsi $\sqrt{R}$ est compris entre $\frac{F}{\sqrt{32}}$ et $\frac{F}{5}$. La valeur (12) de H' est $\frac{F}{2\sqrt{R}}$; elle est donc comprise entre $\frac{5}{2}$ et $\sqrt{8}$, ou entre 2,5 et 2,82. Pour les évaluations qui suivront, il suffit de donner à H' la valeur moyenne 2,66; l'erreur est au plus de 0,16, et, après avoir multiplié par $\frac{3}{7}$ pour déduire x de la formule (12), elle se réduit à 0,07. Il en résulte la valeur très simple

$$x = 1,57q' - 0,71q. \tag{13}$$

Ce résultat remarquable ne dépend plus de g, a, a', mais seulement des durées $\frac{\pi}{\mu}$, $\frac{\pi}{\mu'}$ des oscillations pendulaires dont le système est susceptible.

Le cas des deux tiges se rattache à une question plus générale, savoir : de quelle façon la secousse du sol, transmise à un édifice, s'augmente-t-elle dans les portions supérieures? La question est trop complexe pour être directement résolue; mais les portions supérieures de l'édifice, les objets qu'elles contiennent, éprouvent, dans leurs appuis, une secousse résultant elle-même de celle du sol; or, de la même façon, dans le cas des tiges, le mouvement du point A joue, pour la tige AB, le rôle de l'ébranlement du sol. L'assimilation d'un bâtiment ou d'un mur au système des deux tiges n'est point parfaite et, en particulier, la pesanteur, qui tend à écarter les tiges de la verticale tend au contraire à y ramener un bâtiment, sauf dans le cas de secousses violentes et destructives; mais cette différence n'est qu'apparente : l'influence de la pesanteur a disparu dans la formule (13) et, d'autre part, le moment de la pesanteur et de toutes les forces qui tendent à ramener un mur à la position verticale, quand l'angle d'écart est petit, ne peut être que proportionnel à cet angle, comme nous l'avons admis pour les tiges sans rien spécifier relativement à la nature de ces forces. Ainsi, la comparaison de la déviation maxima de l'extrémité B, dans le cas de deux tiges et d'une seule, nous donnera au moins une idée de l'effet de la mobilité relative des parties inférieure et supérieure d'un édifice.

Le mode de variation de q, q', q'' suivant la nature de la secousse a déjà été indiqué au n° **1**, l'intégrale (2) étant la même que q.

Ici la durée de la secousse est très petite par rapport aux durées $\frac{\pi}{\mu}$, $\frac{\pi}{\mu'}$, $\frac{\pi}{\mu''}$ des oscillations pendulaires, $\cos\mu(t-t')$ est sensiblement l'unité pendant cette durée, de sorte que l'on a

$$q = u$$

et, de même,

$$q' = q'' = u.$$

La valeur $x'' = \frac{3}{2}q''$ et celle de x se réduisent à

$$x'' = \tfrac{3}{2}u, \qquad x = 0,86u;$$

le maximum de u est h au bout de la première période de la secousse; pendant la seconde u diminue, et dans le mouvement qui subsiste ensuite, q, q', q'' sont très inférieurs à h. On voit donc que les déplacements maxima sont $\frac{3}{2}h$; $0,86h$, ou plus faibles dans le cas des deux tiges.

En supposant la durée de la secousse plus grande, x sera le plus grand en donnant à q et q' leurs valeurs maxima de signes contraires; désignant par M une moyenne entre ces valeurs, on aura

$$x = 2,28M,$$

tandis que le maximum de x'' est $\frac{3}{2}M''$, M'' étant celui de q''. On peut remarquer que, à très peu près, $2,28 = (\frac{3}{2})^2$. Par conséquent, si M'' et M sont peu différents, les maxima de déviation, dans le cas de deux tiges et d'une seule, sont dans le rapport de 3 à 2. Mais ce résultat suppose que q et q' atteignent simultanément leurs valeurs maxima de signe contraire, ce qui est une coïncidence improbable. On en peut conclure qu'en général la déviation ne sera pas beaucoup plus grande pour deux tiges que pour une seule.

En supposant que a soit le même pour x et x'', voici ce qu'on peut connaître des grandeurs relatives de μ, μ', μ''.

On a

$$z > \frac{z+z'}{2} > a, \qquad \frac{zz'}{2z} < \frac{zz'}{z+z'}, \qquad \text{ou} \qquad z' < \frac{aa'-g^2}{a+8a'+5g} < \frac{aa'}{8a'}.$$

Ainsi

$$z > a, \qquad z' < \frac{a}{8}, \qquad z'' = \frac{a}{16}.$$

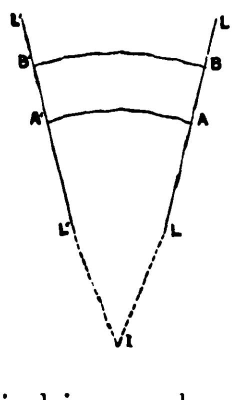
Par conséquent, μ' et μ'' peuvent être du même ordre de grandeur, mais μ est beaucoup plus grand que chacun d'eux, puisque $\mu > 4\mu'$, $\mu > 4\mu''$.

§ 2. — Application à une tige élastique.

3. Équations du mouvement, abstraction faite de la secousse. — Quoique cette équation soit connue, il n'est pas inutile d'en présenter ici la démonstration, qui, telle qu'on la fait d'ordinaire, renferme une lacune.

Cherchons d'abord la position d'équilibre. On suppose que la tige est homogène prismatique; en l'absence de toute force, le plan de la figure la partage en deux portions symétriques; il en sera encore de même après sa déformation, en supposant que toutes les forces agissent dans ce plan ou sont symétriques par rapport à lui. Ainsi deux sections droites, d'aire ω, primitivement situées à une petite dis-

Fig. 3.



tance λ resteront perpendiculaires au plan de la figure qui les coupe suivant LL, L'L'; A et A' sont les centres de gravité des deux aires, AA′ un petit arc du filet moyen, lieu des centres de gravité; BB′ est la projection d'un autre filet qui, dans l'état naturel de la tige, était parallèle à AA′, et joint deux éléments égaux $d\omega$ des aires, projetés en B, B′; soient $AB = A'B' = u$, $AI = A'I = \rho$, rayon de courbure du filet moyen.

La longueur primitive de AA′, BB′ était λ; soient δ, δ' leurs allongements relatifs. On a

$$\frac{BB'}{AA'} = \frac{BI}{AI}, \quad \text{ou} \quad \frac{\lambda(1+\delta')}{\lambda(1+\delta)} = \frac{u+\rho}{\rho}, \quad \text{ou} \quad \delta' = \delta + \frac{u}{\rho},$$

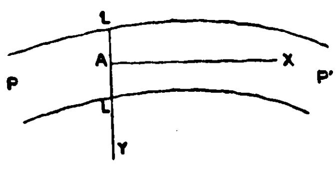
en négligeant le produit des petits nombres δ, $\frac{u}{\rho}$.

L'allongement δ' produit sur l'élément $d\omega$ une force ou traction normale $k\delta' d\omega$, k étant le coefficient d'extension rapporté aux unités d'extension et de surface. Elle se change en pression si δ' est négatif ou correspond à une contraction.

Il doit se produire aussi, en général, un léger glissement altérant d'un petit angle ε, l'angle droit que les arcs AA′, BB′ ont été supposés faire avec LL, et accompagné d'une force $k'\varepsilon d\omega$, parallèle à LL et agissant sur $d\omega$, k' étant le coefficient de résistance au glissement pour l'unité de surface. Cet angle ε altérerait la figure et la valeur de δ'. Mais la résistance k' est énorme et cette altération peut être négligée. La flexion et même l'allongement ont des valeurs sensibles, et non l'angle ε, bien que, pour les équations d'équilibre, on doive le supposer exister.

De là résulte l'ensemble des forces agissant sur une section LL, et exercées par la partie P de la tige située à gauche, sur l'autre P′ que

Fig. 4.



nous supposons libre. Pour les autres forces extérieures agissant sur P′, soient S, S′ les sommes de leurs projections sur les axes AX, AY dont le premier est perpendiculaire à LL, et M la somme de leurs moments par rapport au point A. Les sommes analogues provenant de l'action de P seront, suivant AX,

$$-k\sum \delta' d\omega \quad \text{ou} \quad -k\sum\left(\delta+\frac{u}{\rho}\right)d\omega,$$

qui se réduit à

$$-k\sum \delta\, d\omega \quad \text{ou} \quad -k\delta\omega,$$

en remarquant que $\sum u\,d\omega = 0$. Pour la même raison, la somme des moments par rapport à A, ou $-k\sum u\,\delta' d\omega$ se réduit à

$$-\frac{k}{\rho}\sum u^2 d\omega \quad \text{ou} \quad -\frac{k}{\rho}c^2\omega,$$

c étant de l'ordre des dimensions transversales de la tige. Parallèlement à LL la somme des projections des forces est $-k'\varepsilon\omega$, d'où résultent, pour les conditions d'équilibre de P',

$$k\omega\delta = S, \qquad k'\omega\varepsilon = S', \qquad \frac{kc^2}{\rho}\omega = M.$$

Les deux premières donnent δ, ε, et la troisième $\frac{1}{\rho}$ ou la courbe du filet moyen.

Le moment, par rapport à A, des forces dont S est la somme, est évidemment très faible à moins d'une flexion considérable; en désignant par β le bras de levier moyen des forces parallèles à AY, on aura donc, à très peu près,

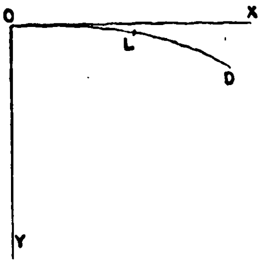
$$M = S'\beta, \qquad \delta = \frac{S}{k\omega}, \qquad \frac{c}{\rho} = \frac{S'}{k\omega}\frac{\beta}{c}.$$

Si S et S' sont du même ordre de grandeur, comme $\frac{\beta}{c}$ est, en général, très grand, δ sera très petit par rapport à $\frac{c}{\rho}$, et, par suite, aux valeurs moyennes de $\frac{u}{\rho}$, c'est-à-dire que δ' est beaucoup plus grand que δ. Dans tous les cas où il y a flexion, δ sera donc faible, sans quoi δ'

dépasserait la limite de rupture. Du reste, δ étant toujours un allongement très petit, on peut n'en pas tenir compte en cherchant la forme de la courbe dont ρ est le rayon de courbure. Ce sera surtout fort exact si, comme dans ce qui va suivre, toutes les forces sont à peu près perpendiculaires à la tige, ce qui rend S insensible.

Supposons maintenant la tige encastrée en O qui sera l'origine, sur

Fig. 5.



le filet moyen, OX étant tangente à ce filet; soient x, y les coordonnées d'un quelconque L de ses points. On devra avoir

$$y = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{pour } x = 0,$$

et la courbe achèvera d'être déterminée par une équation différentielle du second ordre qui sera l'équation $\dfrac{kc^2\omega}{\rho} = \mathrm{M}$ appliquée à tous ses points.

Admettons qu'il agisse sur tous une force accélératrice Y fonction de x. Si m est la masse de l'unité de longueur, la force, pour la tranche correspondant à l'arc ds de la courbe, sera $m\mathrm{Y}\,ds$, et, pour le point L, on aura

$$\frac{kc^2\omega}{\rho} = \int_x^l m(x' - x)\,\mathrm{Y}'\,\frac{ds}{dx'}\,dx',$$

l étant la valeur de x à l'extrémité D, et Y' ce que devient Y quand on y remplace x par x'. En négligeant les erreurs relatives de l'ordre de $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$, on pourra remplacer ds par dx', et $\dfrac{1}{\rho}$ par $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ qui a bien le signe $+$, en supposant, comme on l'a fait, le centre de courbure audessous de la tige et M positif. Il en résulte

$$b^2\frac{d^2y}{dx^2}=\int_x^l (x'-x)\,\mathrm{Y}'\,dx', \qquad \text{où} \qquad b^2=\frac{kc^2\omega}{m}.$$

Si on lui substitue sa dérivée, ou

$$b^2\frac{d^3y}{dx^3}=-\int_x^l \mathrm{Y}'\,dx',$$

l'équation primitive n'en résulte qu'avec l'addition d'une constante arbitraire. Cette indétermination disparaît en y joignant la condition évidente $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ pour $x=l$. En répétant la même opération, on aura encore

$$\frac{d^3y}{dx^3}=0, \quad \text{pour } x=l.$$

et l'équation

$$b^2\frac{d^4y}{dx^4}=\mathrm{Y}.$$

Pour passer à l'équation du mouvement on devra remplacer chaque composante $\mathrm{Y}\,dm$ de la force exercée sur l'élément de masse dm par $\mathrm{Y}\,dm-dm\,\frac{d^2y}{dt^2}$; ce qui donne pour équation du mouvement de la tige

$$(14)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+b^2\frac{d^4y}{dx^4}=\mathrm{Y},$$

avec les équations aux limites

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{llll} y=0 & \text{et} & \dfrac{dy}{dx}=0, & \text{pour } x=0,\\ \dfrac{d^2y}{dx^2}=0 & \text{et} & \dfrac{d^3y}{dx^3}=0, & \text{pour } x=l, \end{array}\right.$$

l étant la longueur de la tige.

Si, au lieu de x, on prend pour variable $\frac{x}{l}=x'$ et qu'on pose $\frac{b}{l^2}=b$, le terme $b^2 \frac{d^4 y}{dx^4}$ deviendra

$$b'^2 \frac{d^4 y}{dx'^4}.$$

Ainsi, en supprimant l'accent, il est indifférent de prendre $l = 1$, et, si plus tard on veut adapter le résultat au cas l quelconque, il suffira de remplacer x et b par $\frac{x}{l}$, $\frac{b}{l^2}$.

6. Intégrales simples de l'équation sans second membre. — Nous n'aurons plus à employer les lettres des calculs du numéro précédent, sauf celles qui entrent dans les formules (14) et (15); les autres pourront servir avec une nouvelle signification. L'équation à intégrer est

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0, \tag{16}$$

où b est une constante. La méthode suivante se trouve dans la *Mécanique* de Poisson; mais, comme elle présente quelques lacunes, il est préférable de la reproduire.

On aura une solution particulière de l'équation précédente en prenant

$$y = p \cos b\mu^2 t = p' \sin b\mu^2 t,$$

μ étant une constante réelle ou imaginaire et p, p' des fonctions de x seul; p devra satisfaire à l'équation $\frac{d^4 p}{dx^4} = \mu^4 p$, dont l'intégrale complète est

$$p = \mathrm{A} \sin\mu x + \mathrm{A}' \cos\mu x + \mathrm{B}(e^{\mu x} - e^{-\mu x}) + \mathrm{B}'(e^{\mu x} + e^{-\mu x}),$$

A, B, A′, B′ étant des constantes; mais, en outre, p doit satisfaire aux équations (15), c'est-à-dire,

$$p = 0, \qquad \frac{dp}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = 0; \qquad \frac{d^2 p}{dx^2}, \ \frac{d^3 p}{dx^3} = 0 \quad \text{pour } x = 1.$$

Pour abréger, posons

$$
(17)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\cos\mu = c, &\qquad &\sin\mu = s,\\
&e^{\mu} + e^{-\mu} = f, &\qquad &e^{\mu} - e^{-\mu} = g,\\
&2c + f = f', &\qquad &2s + g = g'.
\end{aligned}
\right.
$$

On aura, pour ces conditions,

$$2B = -A, \qquad 2B' = -A',$$

$$-As - A'c + B'f + Bg = 0, \qquad -Ac + A's + Bf + B'g = 0,$$

d'où

$$Ag' + A'f' = 0, \qquad -Af' + A'(2s - g) = 0.$$

De la première on tire

$$A = f'E, \qquad A' = -g'E,$$

E étant une constante arbitraire, et l'autre devient

$$f'^2 + g'(2s - g) = 0,$$

équation à laquelle μ doit satisfaire; en la divisant par 4, nous l'exprimerons par $F(\mu) = 0$, et $\frac{dF(\mu)}{d\mu}$ sera désignée par $F'(\mu)$. On aura ainsi

$$4F(\mu) = (2c + f)^2 + (4s^2 - g^2), \qquad f^2 - g^2 = 4,$$

d'où

$$(18)\qquad F(\mu) = fc + 2 = (e^{\mu} + e^{-\mu})\cos\mu + 2, \qquad F'(\mu) = cg - sf.$$

En posant

$$(19)\qquad X = f'(\sin\mu x - \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}) + g'(-\cos\mu x + \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}),$$

il en résulte

$$p = EX.$$

On trouverait de même p', qui ne pourrait différer de p que par la valeur de la constante E; en la remplaçant par $\frac{E'}{b\mu^2}$, on aura pour solution particulière

$$(20) \qquad y = X\left(E\cos b\mu^2 t + \frac{E'}{b\mu^2}\sin b\mu^2 t\right),$$

et X satisfait aux conditions

$$(21) \qquad \begin{cases} X = 0, & \frac{dX}{dx} = 0, \quad \text{pour } x = 0; \\ \frac{d^2X}{dx^2} = 0, & \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \quad \text{pour } x = 1. \end{cases}$$

On peut remarquer, en désignant par X' ce que devient X, en y remplaçant μ par une autre racine μ', qu'on a

$$\mu^4 X = \frac{d^4X}{dx^4}, \qquad \mu'^4 X' = \frac{d^4X'}{dx^4}, \qquad (\mu'^4 - \mu^4)XX' = X\frac{d^4X'}{dx^4} - X'\frac{d^4X}{dx^4}$$

et, en multipliant par dx et intégrant, à une constante près,

$$(\mu'^4 - \mu^4)\int XX'\,dx = X\frac{d^3X'}{dx^3} - \frac{dX}{dx}\frac{d^2X'}{dx^2} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{dX'}{dx} - \frac{d^3X}{dx^3}X';$$

en vertu des relations (21), le second membre s'annule pour $x = 0$ et $x = 1$.

Il en résulte que, si μ^4 et μ'^4 sont différents, on a

$$(22) \qquad \int_0^1 XX'\,dx = 0.$$

Propriétés des racines de l'équation $F(\mu) = 0$. — Avant de détailler celles qu'indique Poisson, il faut démontrer deux points qu'il a omis.

1° L'équation ne peut avoir aucune racine de la forme $h(1 + \sqrt{-1})$, h étant réelle. En effet, la valeur (18) peut s'écrire

$$F(\mu) = 2\cos\mu\cos\mu\sqrt{-1} + 2,$$

ou

$$F(\mu) = \cos\mu(1+\sqrt{-1}) + \cos\mu(1-\sqrt{-1}) + 2$$

et, en supposant $\mu = h(1+\sqrt{-1})$,

$$F(\mu) = \cos 2h\sqrt{-1} + \cos 2h + 2,$$

dont le premier terme, ou $\frac{1}{2}e^{2h} + \frac{1}{2}e^{-2h}$, est positif; ainsi $F(\mu)$ ne peut être nul,

2° Pour aucune racine μ, on ne peut avoir $X = 0$ quel que soit x: en effet, on aurait aussi

$$\frac{d^2X}{\mu^2\,dx^2} = 0$$

et, d'après la valeur (19), en soustrayant $X = 0$, il en résulterait

$$f'\sin\mu x - g'\cos\mu x = 0:$$

en posant $x = 0$ dans cette relation et sa dérivée, il en résulterait

$$f' = 0, \qquad g' = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2c + f = 0, \qquad 2s + g = 0:$$

substituant $f = -2c$ dans $F(\mu) = fc + z = 0$, on aurait

$$c^2 = 1,$$

d'où

$$s = 0, \qquad g = 0$$

ou

$$e^{\mu} - e^{-\mu} = 0, \qquad e^{\mu\sqrt{-1}} - e^{-\mu\sqrt{-1}} = 0, \qquad \text{ou} \qquad e^{2\mu} = 1, \qquad e^{2\mu\sqrt{-1}} = 1:$$

les modules de $e^{2\mu}$, $e^{2\mu\sqrt{-1}}$ seraient donc l'unité, et en posant

$$\mu = h + h'\sqrt{-1},$$

h et h' étant réelles, il faudrait qu'on eût $e^{2h} = 1$, $e^{-2h'} = 1$, d'où

$$h = 0, \qquad h' = 0,$$

et $\mu = 0$; or la valeur $\mu = 0$ n'est pas racine de $F(\mu) = 0$.

Nous pouvons maintenant démontrer que l'équation $F(\mu) = 0$ ne peut avoir aucune racine de la forme $\mu = h + h'\sqrt{-1}$, h et h' étant réelles et toutes deux différentes de 0; en effet, $\mu' = h - h'\sqrt{-1}$ serait une autre racine et $\mu^4 - \mu'^4$ ou $8hh'(h^2 - h'^2)\sqrt{-1}$ ne serait pas nulle, sans quoi on aurait $h'^2 = h^2$, $h' = \pm h$, et μ, μ' auraient pour valeur $h(1 \pm \sqrt{-1})$, ce qu'on a vu être impossible. En désignant par X, X' les valeurs correspondantes de X, elles satisferaient donc à la relation (22) et, leur forme étant $F \pm G\sqrt{-1}$, il en résulterait

$$\int_0^1 (F^2 + G^2)\,dx = 0.$$

Comme F et G sont réelles, il faudrait que l'on eût, pour toutes les valeurs de x, $F = 0$, $G = 0$ et, par suite, $X = 0$, et l'on vient de voir que c'est impossible.

Toutes les racines ont donc la forme $\pm h$, $\pm h\sqrt{-1}$, h étant réelle et positive. D'ailleurs, en prenant pour μ ces quatre valeurs, $F(\mu)$ ne change pas. Les racines se distribuent donc en groupes de quatre valeurs de cette forme, pour lesquelles μ^4 est le même, et il suffit, pour les connaître, de chercher celles qui sont réelles et positives.

Il n'y a pas de racines égales, ou satisfaisant à la fois à $F(\mu) = 0$, $F'(\mu) = 0$, car, d'après les équations (18), on aurait

$$fe = -2;$$

ainsi ni e, ni f ne peuvent être nuls. De plus,

$$ge = fs, \qquad g^2e^2 = f^2 - f^2e^2 = f^2 - 4 = g^2 \qquad \text{ou} \qquad g^2s^2 = 0:$$

s ou g seraient nulles : puisque $ge - fs = 0$ et que ni f, ni e ne sont nulles, il faut que l'on ait $s = 0$ et $g = 0$; soit que μ ait la forme $\pm h$ ou $\pm h\sqrt{-1}$, il en résulte

$$e^{2\mu} = 1, \qquad h' = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu = 0,$$

ce qui est impossible. [On a alors $F'(\mu) = 4$.]

Supposons maintenant que l'on fasse croître μ de $n\frac{\pi}{2}$ à $(n+1)\frac{\pi}{2}$, n étant un entier positif ou nul. L'expression

$$\frac{4}{(e^{\mu}+e^{-\mu})^2}-\frac{1}{\cos^2\mu}$$

est toujours négative dans cet intervalle, en laissant de côté les valeurs extrêmes $n\frac{\pi}{2}$, $(n+1)\frac{\pi}{2}$; elle est la dérivée de $\frac{e^{\mu}-e^{-\mu}}{e^{\mu}+e^{-\mu}}-\operatorname{tang}\mu$, qui, par suite, est toujours décroissante et ne peut s'annuler qu'une fois dans l'intervalle; son produit par $(e^{\mu}+e^{-\mu})\cos\mu$, c'est-à-dire $F'(\mu)$, ne pourra donc, non plus, s'annuler plus d'une fois, et $F(\mu)$ aura dans l'intervalle au plus une période de croissance et une de décroissance, et ne pourra s'annuler plus de deux fois.

D'ailleurs, $F(\mu)$ ou $fc+2$ ne peut s'annuler que si $\cos\mu$ dans l'intervalle de $n\frac{\pi}{2}$ à $(n+1)\frac{\pi}{2}$ est négatif, ou si n a la forme $4i+1$ ou $4i+2$, i étant un entier. Mais, quand il en est ainsi, les valeurs extrêmes de $F(\mu)$ sont 2 et $2-f$, ou de signe contraire; n'ayant pu changer de signe plus d'une fois, il ne s'est annulé qu'une seule.

Par conséquent, les valeurs réelles et positives de μ, rangées par ordre de grandeur croissante, sont

$$\frac{\pi}{2}+\delta,\quad \frac{3\pi}{2}-\delta',\quad \frac{5\pi}{2}+\delta'',\quad \frac{7\pi}{2}-\delta''',\quad \ldots,$$

dans lesquelles δ, δ', δ'', ... sont comprises entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$; $\sin\delta$, $\sin\delta'$, $\sin\delta''$, ... sont les valeurs de $-\cos\mu$ ou de $\frac{2}{e^{\mu}+e^{-\mu}}$, très rapidement décroissantes. Pour la plus petite racine $\frac{\pi}{2}+\delta$, Poisson a donné

$$\mu=\frac{\pi}{2}+0,30431=1,87511,$$

valeur aisée à vérifier. Quant aux autres, il suffit de connaître leurs valeurs approchées $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, ..., dont l'erreur est très faible et devient rapidement négligeable.

7. Intégrale de l'équation (16). — Supposons données, de $x = 0$ à $x = 1$, les valeurs initiales

$$(23) \qquad y = \varphi(x), \qquad \frac{dy}{dt} = f(x), \qquad \text{pour } t = 0.$$

Poisson admet comme postulat que l'intégrale complète est une somme de solutions particulières de la forme (20), étendue à toutes les racines μ, de sorte que l'on a

$$y = \sum X\left(E \cos b\mu^2 t + \frac{E'}{b\mu^2} \sin b\mu^2 t\right).$$

Si X correspond à une valeur particulière de μ, il résulte de la relation (22) que, dans l'expression $\int_0^1 X y \, dx$, tous les termes de la somme $\sum$ correspondant à des racines μ' autres que μ disparaissent, de sorte que l'on a

$$\int_0^1 yX \, dx = \left(E \cos b\mu^2 t + \frac{E'}{b\mu^2} \sin b\mu^2 t\right) \int_0^1 X^2 \, dx.$$

En posant $t = 0$ dans cette équation et sa dérivée par rapport à t, il en résulte

$$E = \frac{\int_0^1 X \varphi(x) \, dx}{\int_0^1 X^2 \, dx}, \qquad E' = \frac{\int_0^1 X f x \, dx}{\int_0^1 X^2 \, dx}$$

et l'intégrale complète devient

$$y = \sum \frac{X}{\int_0^1 X^2 \, dx} \left[\int_0^1 X \varphi(x) \, dx \cos b\mu^2 t + \int_0^1 X f(x) \, dx \frac{\sin b\mu^2 t}{b\mu^2}\right].$$

Voici comment Cauchy transforme $\int_0^1 X^2 \, dx$ dont le calcul est sans cela fort prolixe. Considérons μ non plus comme une racine de $F(\mu) = 0$, mais comme une lettre indéterminée. On a encore identiquement

$$\frac{d^4X}{dx^4} = \mu^4 X,$$

d'où

$$\frac{d^5X}{dx^4\,d\mu} = 4\mu^3 X + \mu^4 \frac{dX}{d\mu}.$$

En multipliant par X et substituant $\mu^4 X = \dfrac{d^4X}{dx^4}$, on aura

$$4\mu^3 X^2 = X\frac{d^5X}{dx^4\,d\mu} - \frac{dX}{d\mu}\frac{d^4X}{dx^4} = \frac{dR}{dx}, \qquad 4\mu^3\int_0^1 X^2\,dx = R_1 - R_0,$$

en posant

$$R = X\frac{d^4X}{dx^3\,d\mu} - \frac{dX}{dx}\frac{d^3X}{dx^2\,d\mu} + \frac{d^2X}{dx^2}\frac{d^2X}{dx\,d\mu} - \frac{d^3X}{dx^3}\frac{dX}{d\mu},$$

et désignant par R_1, R_0 les valeurs de R correspondant à $x = 1$, $x = 0$. Quel que soit μ, on a, quand $x = 0$,

$$X = 0, \qquad \frac{dX}{dx} = 0,$$

d'où

$$\frac{dX}{d\mu} = 0, \qquad \frac{d^2X}{dx\,d\mu} = 0;$$

il en résulte

$$R_0 = 0.$$

Ensuite, quand $x = 1$, la valeur (19) donne

$$\frac{d^2X}{\mu^2\,dx^2} = f'(-s - \tfrac{1}{2}g) + g'(c + \tfrac{1}{2}f) = -f'(\tfrac{1}{2}g') + g'(\tfrac{1}{2}f'),$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3X}{dx^2\,d\mu} = 0,$$

ce qui annule le second et le troisième terme de R; on a aussi, pour $x = 1$,

$$X = f'(s - \tfrac{1}{2}g) + g'(-c + \tfrac{1}{2}f),$$

ou

$$2X = (2c + f)(2s - g) - (2c - f)(2s + g) = 4(sf - gc),$$

$$2\frac{d^3X}{\mu^3\,dx^3} = f'(-2c - f) + g'(-2s + g) = -f'^2 - (4s^2 - g^2).$$

et ces valeurs peuvent s'écrire, d'après les formules (18),

$$X = -2F'(\mu), \qquad \frac{d^3X}{dx^3} = -2\mu^3 F(\mu).$$

Il en résulte

$$4\mu^3 \int_0^1 X^2\,dx = 2F'(\mu)\frac{d}{d\mu}[2\mu^3 F(\mu)] - 2\mu^3 F(\mu)\frac{d}{d\mu}[2F'(\mu)],$$

ou, en faisant $F(\mu) = 0$ après les différentiations,

$$\int_0^1 X^2\,dx = [F'(\mu)]^2 = (gc - fs)^2.$$

L'intégrale complète est ainsi

$$(24) \quad y = \sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2}\left[\int_0^1 X\varphi(x)\,dx\cos b\mu^2 t + \int_0^1 X f(x)\,dx\,\frac{\sin b\mu^2 t}{b\mu^2}\right],$$

la somme $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs réelles et positives de μ.

8. Conditions que l'intégrale doit remplir. — Le postulat de Poisson n'est évidemment qu'une hypothèse gratuite, et il a laissé de côté les trois vérifications suivantes sans lesquelles la formule (24) n'est qu'une réunion de solutions particulières. Il faut démontrer : 1° que la série (24) est convergente; 2° que, pour $t = 0$, elle satisfait aux conditions (23); 3° qu'elle satisfait, quelque soit t, aux équations (16) et (15).

1° *Convergence de la série* (24). D'après les formules (18), on a

$$-F'(\mu) = fs - gc = fs + \frac{2g}{f},$$

et, quand μ croît à l'infini, $\frac{g}{f}$ ou $\frac{e^\mu - e^{-\mu}}{e^\mu + e^{-\mu}}$ converge vers l'unité, de même que $\frac{f}{e^\mu}$ et $\sin\mu$, sauf le signe; il en résulte que $e^{-2\mu}F'(\mu)^2$ a pour limite 1.

Ensuite la valeur (19) de X donne

$$e^{-\mu}X = (2ce^{-\mu} + 1 + e^{-2\mu})(\sin\mu x - \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x})$$
$$+ (2se^{-\mu} + 1 - e^{-2\mu})(-\cos\mu x + \tfrac{1}{2}e^{\mu x} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x}),$$

et si l'on y néglige les termes qui, quel que soit x, décroissent sans limite quand μ augmente, on devra dans les coefficients supprimer $e^{-2\mu}$ et aussi $2ce^{-\mu}$, puisque $c = -\frac{2}{f}$; il restera

$$se^{-\mu+\mu x} + \sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x},$$

dont chaque terme est au plus l'unité, et même le second et le troisième réunis forment au plus $\sqrt{2}$; puisqu'on a, au signe près,

$$\lim e^{-\mu}F'(\mu) = 1,$$

il en résulte qu'à partir d'une valeur de μ suffisamment grande, on aura numériquement

$$\frac{X}{F'(\mu)} = \frac{e^{-\mu}X}{e^{-\mu}F'(\mu)} < 4.$$

Il est clair que les termes conservés dans $e^{-\mu}X$ seraient à peu près les mêmes dans $\frac{d^2X}{\mu^2\,dx^2}$ et qu'on en tirerait de même

$$\frac{1}{\mu^2}\,\frac{\frac{d^2X}{dx^2}}{F'(\mu)} < 4.$$

Cela suffit pour vérifier la convergence de la série (24), si on la réduit à sa seconde partie dépendant de x; en effet, en y remplaçant $f(x)$ par son maximum numérique M, $\sin b\mu^2 t$ par 1 et, quel que soit x, $\frac{X}{F'(\mu)}$ par 4, elle se réduit à

$$M\sum\frac{16}{b\mu^2},$$

où les valeurs de μ sont supérieures à celles d'une progression arithmétique.

Quant à la première partie, il faut remarquer que la tige doit être supposée encastrée déjà dans les conditions initiales, de sorte que l'on a (¹)

$$\varphi(x) = 0, \qquad \frac{d\varphi(x)}{dx} = 0, \qquad \text{pour } x = 0.$$

Ensuite

$$\mu^4 \int X \varphi(x)\, dx = \int \frac{d^4X}{dx^4} \varphi(x)\, dx$$
$$= \frac{d^3X}{dx^3}\varphi(x) - \frac{d^2X}{dx^2}\frac{d\varphi(x)}{dx} + \int \frac{d^2X}{dx^2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\, dx.$$

Les deux premiers termes s'annulent pour $x = 0$, d'après les conditions précédentes, et aussi pour $x = 1$, d'après les relations (21). On a donc

$$\int_0^1 X\varphi(x)\, dx = \frac{1}{\mu^2}\int_0^1 \frac{d^2X}{\mu^2\, dx^2}\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}\, dx,$$

et pourvu que $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ ne devienne pas infinie dans les limites de l'intégrale, en remplaçant

$$\frac{X}{F'(\mu)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F'(\mu)}\frac{d^2X}{\mu^2\, dx^2}$$

par ψ, on verra, comme ci-dessus, que la série a ses termes numériquement inférieurs à ceux d'une suite de la forme $M' \sum \frac{1}{\mu^2}$, où M' a une valeur finie.

2° *Conditions initiales*. — Leur vérification ne peut se faire que par les théorèmes généraux dus à Cauchy et dont l'application demande une discussion détaillée dans chaque cas particulier. Pour ne pas interrompre la recherche actuelle relative à la tige, je renvoie cette discussion au § 3, et, pour le moment, nous admettrons que la série (24) et sa dérivée $\frac{dy}{dt}$ se réduisent bien à $\varphi(x)$, $f(x)$ quand $t = 0$, sans que $\varphi(x)$ soit astreinte à aucune condition pour $x = 0$ ou 1.

3° *Conditions* (16) *et* (15). — Ces relations sont satisfaites séparé-

(¹) *Voir*, au n° 21, le complément de cette démonstration.

ment par chaque terme de la série (24); mais, pour pouvoir dire qu'il en est de même pour la série tout entière, il faudrait que ses dérivées fussent convergentes. Or en particulier $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^4y}{dx^4}$ ne diffèrent de y que par l'introduction d'un facteur μ^4 ou $b^2\mu^4$ dans chaque terme. On pourrait essayer de le faire disparaître comme ci-dessus en substituant dans la portion dépendant de $f(x)$,

$$\begin{aligned}\mu^4 \int X f(x)\,dx &= \int \frac{d^4X}{dx^4} f(x)\,dx \\ &= \frac{d^3X}{dx^3} f(x) - \frac{d^2X}{dx^2}\frac{df(x)}{dx} + \frac{dX}{dx}\frac{d^2f(x)}{dx^2} \\ &\quad - X\frac{d^3f(x)}{dx^3} + \int X \frac{d^4f(x)}{dx^4}\,dx.\end{aligned}$$

Il faudrait alors, pour annuler les termes hors du signe $\int$ quand $x = 0$ ou 1, supposer que $f(x)$ satisfait aux conditions (21), ou que l'on ait

$$\begin{aligned} &f(x) = 0, \qquad \frac{df(x)}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = 0\,; \\ &\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^3f(x)}{dx^3} = 0 \qquad \text{pour } x = 1, \end{aligned}$$

et qu'en outre $\frac{d^4f(x)}{dx^4}$ reste finie entre les limites $x = 0$ et 1. S'il en est ainsi, il est clair que, dans la portion de la série dépendant de $f(x)$, les termes seraient inférieurs à ceux d'une suite de la forme $M''\sum\frac{1}{\mu^2}$.

Mais cette transformation ne suffirait pas pour la portion dépendant de $\varphi(x)$; aussi devons-nous recourir à un autre mode de raisonnement.

Soit y_n la somme des n premiers termes de la valeur (24) de y: y_n satisfait aux équations (16) et (15), et les valeurs initiales de y_n, $\frac{dy_n}{dt}$ sont des fonctions $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$ différentes de $\varphi(x)$, $f(x)$, et que l'on obtient en posant $t = 0$ dans les valeurs de y_n, $\frac{dy_n}{dt}$; ainsi, quand n croît à l'infini, $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$ finissent par différer aussi peu que l'on voudra de $\varphi(x)$, $f(x)$. Or, si les fonctions initiales étaient $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$, le mouvement de la tige serait bien représenté par y_n; si $\varphi_1(x)$, $f_1(x)$ finissent par différer infiniment peu de $\varphi(x)$, $f(x)$, ce mouvement sera donc bien à la limite le mouvement correspondant à $\varphi(x)$, $f(x)$; celui-là est donc représenté par la valeur limite de y_n ou par la formule (24).

9. Intégrale complète de l'équation (14). — Cherchons maintenant l'intégrale complète de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = Y,$$

satisfaisant en outre aux équations (15) où $l = 1$, et aux conditions initiales (23).

Il suffira de déterminer y en regardant les fonctions initiales $\varphi(x)$, $f(x)$ comme nulles, car, en ajoutant au résultat l'expression (24), on aura évidemment la solution demandée. Nous admettons que l'expression Y est une fonction donnée quelconque de t et x. Toutefois, pour trouver la valeur de y, qui sera ensuite vérifiée, nous pouvons regarder Y comme une accélération imprimée à tous les points de la tige, puisque, dans sa signification primitive, c'était une force accélératrice. Nous pouvons, provisoirement, ne l'astreindre à aucune condition spéciale correspondant à l'encastrement.

Soit Y' ce que devient Y quand on y remplace t par t'. L'effet de la force équivaut à une série de vitesses $Y'dt'$, imprimées à tous les points de la tige à des intervalles de temps dt'; le mouvement est dû à ces vitesses seules, les fonctions φ et f étant nulles. La valeur de y, due à une seule vitesse $Y'dt'$, se déduit de la formule (24) en remplaçant $\varphi(x)$ par o, la vitesse initiale $f(x)$ par $Y'dt'$, et t par $t - t'$, temps écoulé depuis l'époque initiale. La valeur complète de y est la somme de celles qui correspondent aux vitesses élémentaires, ou

$$(25) \qquad y = \sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^t \int_0^1 XY' \frac{\sin b\mu^2(t - t')}{b\mu^2} dx\, dt'.$$

Vérification. — En remplaçant $\sin b\mu^2(t - t')$ par 1, Y par son maximum numérique, et quel que soit x, $\frac{X}{F'(\mu)}$ par 4, on verra, comme au numéro précédent, que la série est convergente.

Soit y_n la somme des n premiers termes. On aura

$$\frac{dy_n}{dt} = \sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^t \int_0^1 XY' \cos b\mu^2(t-t')\, dx\, dt'.$$

Ainsi y_n et $\frac{dy_n}{dt}$ s'annulent avec t. En outre, en remarquant que $\frac{d^4X}{dx^4} = \mu^4 X$, on aura

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} + b^2 \frac{d^4y_n}{dx^4} = Y_n,$$

où

$$Y_n = \sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^1 XY\, dx,$$

la somme $\sum$ s'étendant aux n premiers termes. De plus, y_n comme X satisfait aux conditions (15). Par conséquent, si, dans l'équation (14), le second membre était Y_n au lieu de Y, y_n serait de la valeur exacte de y, satisfaisant à toutes les conditions, y compris celle de s'annuler pour $t = 0$ de même que sa dérivée.

Or, d'après ce qui a été dit au numéro précédent relativement aux conditions initiales, il est prouvé que toute série de la forme

$$\sum \frac{X}{[F'(\mu)]^2} \int_0^1 X\varphi(x)\, dx$$

est convergente et a pour somme $\varphi(x)$. Il en résulte, en remplaçant $\varphi(x)$ par Y, qu'en faisant croître n à l'infini, Y_n a pour limite Y, et par suite la valeur exacte de y sera la limite de y_n ou l'expression (25).

10. Lois du mouvement relatif pour une secousse de nature quelconque. — Si l'on veut passer du cas simple examiné jusqu'ici à celui des secousses tournantes, il est nécessaire de rappeler quelques principes généraux.

1° *Changement de coordonnées.* — Étant donné un système S de points ou de corps, rapportons son mouvement à un premier système

A d'axes des x, y, z, immobile, puis à un second A' des x', y', z' en mouvement d'une manière quelconque. Prenons d'abord pour S un point libre M et soient f la force qui agit sur lui; X, Y, Z ses projections sur les axes A; X', Y', Z' les mêmes pour les axes A', en supposant f rapportée à l'unité de masse. Les équations du mouvement absolu sont $\frac{d^2x}{dt^2} = X, \ldots$, et, en transformant les coordonnées, on aura pour celles du mouvement relatif

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + X'', \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} = Y' + Y'', \qquad \frac{d^2z'}{dt^2} = Z' + Z''.$$

Les termes additionnels X'', Y'', Z'' dépendent de $x', y', z', \frac{dx'}{dt}, \frac{dy'}{dt}, \frac{dz'}{dt}$, ou de la position relative et de la vitesse relative du point et, en outre, du mouvement des axes. On peut les regarder comme les projections d'une force fictive ou apparente φ et, de la sorte, le mouvement relatif sera le même que si les axes ne bougeaient pas, mais qu'à la force f on joignît la force φ.

Il en est de même pour tout système S, car on peut toujours le considérer comme un assemblage de points libres exerçant entre eux des forces. Les lois du mouvement relatif s'obtiendront donc en supposant les axes A' immobiles, et corrigeant l'erreur par l'hypothèse que la force apparente φ agit sur chaque point, outre les forces réelles.

2° *Mouvement contraint.* — Admettons que le sol ou un ensemble de corps formant un tout de forme invariable éprouve un déplacement, et pour y rapporter celui du système S menons des axes fixes par rapport au sol. Ce seront les axes A dans la position primitive ou immobile du sol, les axes A' pendant son mouvement.

Admettons maintenant, en outre, que le système S renferme un certain nombre de points d'appui P, fixés au sol d'une manière invariable et dont le mouvement, par conséquent, sera *contraint* par celui du sol. Nous ne pourrons plus, en apparence, les considérer comme libres.

Nous pouvons les supposer tels, pendant le mouvement de S, si le sol est immobile en supposant les liaisons qui les fixent remplacées par des forces convenables F, F', ..., maintenant leur immobilité; mais les lois du mouvement s'obtiennent aussi bien en laissant de côté ces forces, et exprimant d'une autre façon la condition d'immobilité; c'est ce qui a été fait pour la tige encastrée, en ajoutant aux autres conditions celles que y et $\frac{dy}{dx}$ fussent nuls pour $x = 0$.

Pendant le déplacement du sol, on pourrait de même regarder les points d'appui comme libres, en supposant l'action des forces F, F', ... propres à leur donner leur mouvement contraint; ensuite, dans les équations du mouvement relatif, comme on l'a vu, on doit, pour déterminer ce mouvement, supposer l'action de la force apparente φ, puis considérer les axes comme immobiles, et, de la sorte, les forces F, F', ... doivent être prises de façon à assurer l'immobilité des points d'appui. On retombe ainsi sur le cas précédent, et l'on peut de nouveau laisser de côté les forces F, F', ..., en exprimant d'une autre manière la condition d'immobilité.

Pour la tige entre autres, il suffira donc de supposer sur tous ses points l'action de la force apparente φ et d'y joindre la condition qu'elle est encastrée en l'exprimant comme si les axes étaient fixes.

On aura ainsi son mouvement tel qu'il apparaîtrait à un observateur partageant celui du sol.

3° *Cas où l'axe instantané a une direction constante.* — Le mouvement du système des axes A' se compose de celui de l'origine O' dont α, β, γ seront les coordonnées par rapport aux axes fixes et, en outre, d'un mouvement de rotation autour d'un axe instantané passant par O'. Nous laisserons de côté le cas plus compliqué où cet axe a une direction variable, et nous supposerons qu'il reste parallèle à lui-même.

Pour la transformation, nous prendrons d'abord les nouveaux axes parallèles aux autres, et de même sens, de sorte que l'on aura

$$x = x' + \alpha,$$

. . . .

$$X' = X = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' - \frac{d^2\alpha}{dt^2},$$

. . . .

Les termes additionnels X″, Y″, Z″ seront ainsi : $-\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $-\frac{d^2\beta}{dt^2}$, $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$, et la force apparente φ est l'accélération de l'origine prise en signe contraire.

Puisqu'on doit la considérer comme agissant, il est plus simple de la faire rentrer dans les forces réelles f dont les projections sont X, Y, Z, et de désigner de nouveau par x, y, z les coordonnées relatives aux nouveaux axes qu'on doit maintenant supposer immobiles. Supposons, pour simplifier, que l'axe de rotation soit celui des z; en désignant par θ l'angle dont les axes mobiles ont tourné, on aura

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta, \qquad y = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

La valeur de x se déduit de celle de y en remplaçant θ par $\theta + \frac{1}{2}\pi$ et $\frac{d^2x}{dt^2}$ se déduira de même de $\frac{d^2y}{dt^2}$. On trouvera ainsi

$$X = \frac{d^2x}{dt^2} = P\cos\theta - Q\sin\theta, \qquad Y = \frac{d^2y}{dt^2} = P\sin\theta + Q\cos\theta,$$

en posant

$$P = \frac{d^2x'}{dt^2} - 2\frac{dy'}{dt}\frac{d\theta}{dt} - x'\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - y'\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$Q = \frac{d^2y'}{dt^2} + 2\frac{dx'}{dt}\frac{d\theta}{dt} - y'\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + x'\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Ensuite

$$X' = X\cos\theta + Y\sin\theta = P, \qquad Y' = -X\sin\theta + Y\cos\theta = Q.$$

En substituant les valeurs de P, Q, ces relations prennent la forme supposée $\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + X''$, ..., dans lesquelles

$$(26)\quad \begin{cases} X'' = 2\dfrac{dy'}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + x'\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 + y'\dfrac{d^2\theta}{dt^2}, \\ Y'' = -2\dfrac{dx'}{dt}\dfrac{d\theta}{dt} + y'\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 - x'\dfrac{d^2\theta}{dt^2}, \\ Z'' = 0, \end{cases}$$

Ce sont les projections d'une seconde force apparente φ', agissant sur tous les points du système, outre la première désignée ci-dessus par φ, et les forces réelles.

11. Application de ce qui précède a la tige. — Comme on l'a vu, le but de cette recherche est de trouver comment le déplacement du sol peut être augmenté en se communiquant à un corps élevé; nous devons donc supposer la tige verticale, encastrée inférieurement.

En outre, l'effet des forces φ, φ' est de donner des impulsions élémentaires successives aux divers points de la tige, et les mouvements dus à ces impulsions s'ajoutent algébriquement, de sorte qu'il suffit de les considérer séparément.

Il y a évidemment dans le mouvement du sol des complications à laisser de côté. Il est inutile de supposer variable l'axe de rotation; on n'a guère non plus à considérer des rotations azimutales, mais d'inclinaison. Aussi l'axe que nous avons pris pour celui des z sera horizontal; l'axe des x vertical suivant la tige.

Il est inutile également de tenir compte de la courbure du mouvement de translation ou du déplacement de l'origine mobile O; il sera rectiligne. La composante verticale de la force φ peut être laissée de côté, son effet étant détruit par la fixité du pied de la tige; il suffit de considérer le déplacement horizontal de O que nous désignerons par u, placé sur le prolongement de l'axe des y : la force φ se réduira ainsi à sa composante $Y = \frac{d^2 u}{dt^2}\cdot$ C'est le cas simple que nous avons considéré précédemment pour un système de deux tiges articulées.

Quant à la force φ dont les projections X'', Y'', Z'' ont la valeur (26), il faut remarquer que θ est un très petit angle et qu'on doit négliger les termes de degré supérieur au premier par rapport à θ et ses dérivées, et entre autres $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ par rapport à $\frac{d^2\theta}{dt^2}$; cela devient du reste encore plus évident en attribuant à θ la forme d'un cosinus. Soit, en effet, $\theta = h(1 - \cos kt)$, h et k étant des constantes : θ croît alors de o à $2h$ et diminue jusqu'à o dans un temps $\frac{2\pi}{k}$; il en résulte

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = k^2 h^2 \sin^2 kt, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = k^2 h \cos kt,$$

et le rapport h des coefficients est imperceptible.

On doit regarder y' comme de l'ordre de θ, puisque la tige à l'état primitif était rectiligne et, par conséquent, négliger dans les formules (26) les termes ayant y' ou $\frac{dy'}{dt}$ en facteur. De la sorte, $X''=0$; aucune force ne tendant à donner à la tige des oscillations longitudinales, $\frac{dx'}{dt}=0$, et l'on a $Z''=0$, $Y''=-x'\frac{d^2\theta}{dt^2}$. Nous désignerons les coordonnées par x, y, au lieu de x', y' et, en outre, nous remplacerons θ par $-\theta$, de sorte que cet angle tendra à éloigner la tige de l'axe des y. La force φ' se réduira ainsi à sa composante $Y=x\frac{d^2\theta}{dt^2}$, agissant sur chaque point; θ est le déplacement absolu qu'aurait l'extrémité si la tige restait rectiligne.

Soient u', θ' ce que deviennent u et θ quand on y remplace t par t'. En substituant soit $Y'=\frac{d^2u'}{dt'^2}$, soit $Y'=x\frac{d^2\theta'}{dt'^2}$ dans la formule (25), nous aurons

$$(27)\qquad \begin{cases} y=\sum U\int_0^t \frac{d^2u'}{dt'^2}\,\frac{\sin b\mu^2(t-t')}{b\mu^2}\,dt', \\ y'=\sum U'\int_0^t \frac{d^2\theta'}{dt'^2}\,\frac{\sin b\mu^2(t-t')}{b\mu^2}\,dt', \end{cases}$$

en posant

$$(28)\qquad U=\frac{X\int_0^t X\,dx}{[F'(\mu)]^2},\qquad U'=\frac{X\int_0^t xX\,dx}{[F'(\mu)]^2},$$

y correspondant à la secousse par translation et y' à la secousse par inclinaison, la tige dans les deux cas étant rectiligne et immobile avant la secousse.

On a

$$\mu\int X\,dx=\int\frac{d^4X}{\mu^3\,dx^4}\,dx=\frac{d^3X}{\mu^3\,dx^3}.$$

Cette valeur est nulle pour $x=1$ et, d'après la formule (19), se réduit pour $x=0$ à $-2f'$. Ensuite

$$\mu^2\int xX\,dx=\int x\,\frac{d^4X}{\mu^2\,dx^4}\,dx=x\,\frac{d^3X}{\mu^2\,dx^3}-\frac{d^2X}{\mu^2\,dx^2}.$$

Le premier terme est nul pour $x=1$ et $x=0$, le second pour $x=1$; il se réduit à $-2g'$ quand $x=0$. Il en résulte

$$\int_0^1 X\,dx = \frac{2f'}{\mu}, \qquad \int_0^1 xX\,dx = \frac{2g'}{\mu^2}.$$

En outre, il nous suffit de connaître y et y' pour l'extrémité de la tige, et pour cela il faut prendre $x=1$ dans le premier facteur X des formules (28). Comme on l'a vu au n° **7**, on a dans ce cas $X=-2F'(\mu)$, d'où résultent

$$U = -\frac{4f'}{\mu F'(\mu)}, \qquad U' = -\frac{4g'}{\mu^2 F'(\mu)}.$$

Pour simplifier ces valeurs, remarquons, comme on l'a vu au n° **6**, que les racines μ de rang impair, que nous appellerons, pour abréger, les racines impaires ont la forme $(4i+1)\frac{\pi}{2}+\delta$, et les racines paires la forme $(4i+3)\frac{\pi}{2}-\delta$, δ étant compris entre o et $\frac{1}{2}\pi$; ainsi $\sin\mu=\pm\cos\delta$ étant positif pour les impaires, négatif pour les paires. Convenons d'employer les signes supérieurs pour les racines impaires, les signes inférieurs pour les paires. On a

$$fc+2=0, \qquad s^2=1-c^2=\frac{f^2-4}{f^2}=\frac{g^2}{f^2}, \qquad s=\pm\frac{g}{f},$$

pour la valeur et pour le signe. Il en résulte, en exprimant tout en fonction de s et c,

$$f=-\frac{2}{c}, \qquad g=\pm fs=\mp\frac{2s}{c}, \qquad f'=2c+f=-\frac{2s^2}{c},$$

$$g'=2s+g=\frac{2s(c\mp 1)}{c}=\mp\frac{2s(1\mp c)}{c},$$

$$F'(\mu)=gc-fs=\mp 2s+\frac{2s}{c}=\frac{2s(1\mp c)}{c},$$

et les valeurs ci-dessus se réduisent à

$$U=\frac{4s}{\mu(1\mp c)}, \qquad U'=\frac{\pm 4}{\mu^2}.$$

Pour la première racine, on a $U = 1,5660$, $U' = 1,1377$. Pour les autres, on peut prendre $e = 0$, $s = \pm 1$, d'où

$$(29) \qquad U = \frac{\pm 4}{\mu}, \qquad U' = \frac{\pm 4}{\mu^2}, \qquad \mu = \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

En même temps, en intégrant, par partie, $\frac{d^2u'}{dt'^2}$, $\frac{d^2\theta'}{dt'^2}$, et remarquant que $\frac{du'}{dt'}$, $\frac{d\theta'}{dt'}$ s'annulent avec t', les formules (27) deviendront

$$(30) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= \sum U \int_0^t \frac{du'}{dt'} \cos b\mu^2(t-t')\,dt', \\ y' &= \sum U' \int_0^t \frac{d\theta'}{dt'} \cos b\mu^2(t-t')\,dt'. \end{aligned} \right.$$

12. Remarques sur les valeurs précédentes. — Désignons par h l'excursion, c'est-à-dire le maximum de u ou de θ, ou le déplacement absolu qu'éprouverait l'extrémité de la tige si elle restait rectiligne pendant la secousse; soit τ la durée de celle-ci et posons

$$b\mu^2 = m, \qquad \int_0^t \frac{du'}{dt'} \cos m(t-t')\,dt' = V,$$

en remplaçant u' par θ' pour y' comme dans tout ce qui suit, de sorte que m corresponde à la période $\frac{\pi}{m}$ d'un des mouvements naturels de la tige.

Nous avons vu, au n° **1**, le mode de variation de V dans divers cas; il convient d'en distinguer trois, ou trois espèces de valeurs de m ou de V : 1° $\frac{\pi}{m}$ est très petit par rapport à τ; 2° $\frac{\pi}{m}$ est très grand par rapport à τ; 3° ils sont du même ordre de grandeur.

1° Si V est de la première espèce (en supposant, cela va sans dire, que la secousse soit réellement répartie sur la durée τ et non accumulée sur un instant plus court), la variation très rapide de $\cos m(t-t')$ rend V très petite par rapport à $\int \frac{du'}{dt'}\,dt'$, et, par conséquent, par rapport à h; si y se réduisait au terme UV, il serait presque nul; la tige accompagnerait la secousse lente en restant presque rectiligne. Il en serait évidemment de même pour la valeur complète de y si, déjà pour le premier terme, τ était très grand par rapport à $\frac{\pi}{m}$.

2° Si V est de la seconde espèce, on a vu au n° 1 que V croît d'abord à peu près jusqu'à $+h$, puis diminue et reste insensible après la fin de la secousse. Si V est de la troisième espèce, le résultat est intermédiaire entre les deux autres cas : pendant la première partie de la secousse, V n'atteint pas la valeur h, et il en est de même pendant la seconde partie, à moins de coïncidences improbables; mais le mouvement, après la fin de la secousse, n'est pas insensible.

3° S'il existe dans la valeur de y des termes V de la seconde espèce, ils se trouvent parmi les premiers; pour le premier seul le maximum est ainsi $1,5660\,h$; si un grand nombre de termes consécutifs sont de cette même espèce, les suivants sont négligeables par suite de la petitesse du coefficient U, et, quant aux autres, V restant positive pendant la secousse, ils sont de signe alternatif; le maximum de y est ainsi moindre que la valeur ci-dessus et se réduit environ à h; il en est de même pour la valeur de y' si τ est le même. En poussant ce cas à l'extrême, c'est celui d'une secousse infiniment courte, où l'extrémité de la tige reste sensiblement immobile dans l'espace, ayant, par suite, $+h$ pour déplacement relatif maximum.

4° Il reste à examiner seulement le cas où les valeurs de V de troisième espèce se présentent dès le premier terme ou peu après.

Quoique, sur une donnée aussi peu précise, on ne puisse baser de résultat absolu pour ce qui se passe pendant la secousse, il est clair qu'à moins de coïncidences improbables, on ne doit pas s'attendre, pour y, à un maximum beaucoup plus grand que dans le cas précédent, ou que h; c'est surtout évident pour la valeur de y' puisque le coefficient U' décroît plus rapidement que U.

Mais, après la fin de la secousse, le mouvement persiste, et l'on se rendra mieux compte de ce qui se passe alors en attribuant à u ou 0 la forme déjà employée

$$0 \text{ ou } u = \tfrac{1}{2}h(1 - \cos kt),$$

h étant le maximum de u et k la constante $\frac{2\pi}{\tau}$. On aura alors

$$\begin{aligned} V &= \frac{hk}{2}\int_0^\tau \sin kt' \cos m(t-t')\,dt' \\ &= \frac{hk}{4}\left(\frac{1}{k-m}+\frac{1}{k+m}\right)[\cos mt - \cos m(t-\tau)] \end{aligned}$$

ou

$$V = -\lambda \sin m(t - \tfrac{1}{2}\tau),$$

en posant

$$\lambda = \frac{hk^2}{k^2-m^2}\sin\frac{m\tau}{2};$$

Ce λ est l'amplitude de l'oscillation correspondant à un seul terme de y; pour trouver pour quel terme, ou quelle valeur de m, elle est la plus grande, posons

$$\frac{m\tau}{2} = x, \qquad k = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{\pi m}{x}, \qquad \lambda = h\pi^2 v,$$

où

$$v = \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}.$$

On verra plus loin que m ou x variant, le maximum de v correspond avec une grande exactitude à $x = \frac{5\pi}{6}$; on a

$$\tau = \frac{2\pi}{k}, \qquad x = \frac{m\tau}{2} = \frac{m\pi}{k};$$

cela suppose donc $m = \frac{5}{6}k$; il en résulte

$$v = \frac{18}{11\pi^2}, \qquad \lambda = \frac{18h}{11}.$$

Dans le cas très particulier où il en serait ainsi pour le premier terme de y ou y', l'amplitude $1,5660\lambda$ ou $1,1377\lambda$ de l'oscillation deviendrait, pour ce terme seul, $2,56h$ ou $1,86h$, tandis que, pour les termes suivants, elle décroîtrait très rapidement. Il faut remarquer, en effet, que les valeurs de x sont proportionnelles à m ou à μ^2 et celles du dénominateur $x^2 - \pi^2$ le seraient sensiblement à μ^4.

Dans le cas général, le maximum de λ ne se réalisera qu'approximativement seulement, si dans le premier terme $m > \frac{5k}{6}$, et ce sera pour un autre terme, de sorte qu'après la secousse, y sera beaucoup plus faible de même que y'. Toutefois, il peut arriver que, dans les mouvements pendulaires correspondant à une série de termes, bien que tous soient faibles, il se présente, même au bout d'un temps assez long, une coïncidence de leurs maxima produisant à l'extrémité de la tige un ébranlement soudain fort sensible. Ce phénomène est aisé à vérifier par expérience.

Si l'on voulait assimiler un édifice ou un mur élevé à une tige élastique, il faudrait tenir compte de son élasticité imparfaite, qui a pour effet d'amortir rapidement tout mouvement pendulaire après la fin de la secousse.

5° *Maximum numérique de* $v = \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$. — La valeur de x correspondant à ce maximum ne peut dépasser π; en effet, soit $x = \pi + y$, y étant positif et différent de o; y ne peut être un multiple de π, ce qui donnerait $v = 0$; on aurait

$$v = + \frac{\sin y}{2\pi y + y^2};$$

or, en donnant à x la valeur numérique de $\pi - y$, on aurait, pour v, celle de

$$\frac{\sin y}{2\pi y - y^2}$$

qui est plus forte. Nous devons donc faire varier x seulement de o à π. On a

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v'}{(\pi^2 - x^2)^2},$$

$$v' = (\pi^2 - x^2)\cos x + 2x\sin x,$$

$$\frac{dv'}{dx} = -(\pi^2 - x^2 - 2)\sin x.$$

Par conséquent $\frac{dv'}{dx}$ est négatif de $x=0$ à $x\sqrt{\pi^2-2}$, puis positif jusqu'à $x=\pi$; v' est d'abord décroissant, puis croissant. Comme $v'=\pi^2$ pour $x=0$, $v'=0$ pour $x=\pi$; v' s'annule une seule fois entre ces limites, ce qui correspond au maximum de v, v' passant du $+$ au $-$. Il en est ainsi presque rigoureusement quand $x=\frac{5\pi}{6}$, ce qui donne

$$v' = -\frac{11\pi^2}{36}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi}{6}=0,0063.$$

On trouve ainsi la valeur $\frac{5\pi}{6}$ employée ci-dessus.

§ 3. – Vérification des conditions initiales.

13. Transformation de la relation a démontrer. — Comme on l'a vu au n° **8**, nous avons à prouver que, pour $t=0$, la valeur (24) de y se réduit à $\varphi(x)$; la condition analogue relative à $\frac{dy}{dt}$ est toute pareille en remplaçant $\varphi(x)$ par $f(x)$. En désignant par X′ ce que devient X quand on substitue x' à x, la relation à vérifier est

$$(31)\qquad \varphi(x)=\sum\int_0^1 \mathrm{L}\varphi(x')\,dx',\qquad \text{où}\qquad \mathrm{L}=\frac{\mathrm{XX'}}{[\mathrm{F}'(\mu)]^2}.$$

La somme $\sum$ s'étend seulement aux racines μ de la forme $\mu=h$, où h est réelle et positive; mais, pour ce qui suivra, il convient de la remplacer par une autre s'étendant à toutes les racines telles que $\pm h$, $\pm h\sqrt{-1}$.

Posons, pour abréger,

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} &gc-fs=\mathrm{F}'(\mu)=\mathrm{H},\\ &\mathrm{X}=f'\mathrm{M}+g'\mathrm{N},\\ &\mathrm{M}=\sin\mu x+\tfrac{1}{2}e^{-\mu x}-\tfrac{1}{2}e^{\mu x},\\ &\mathrm{N}=-\cos\mu x+\tfrac{1}{2}e^{\mu x}+\tfrac{1}{2}e^{-\mu x}.\end{aligned}\right.$$

En substituant

$$\cos\mu x = \tfrac{1}{2}e^{\mu x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}e^{-\mu x\sqrt{-1}},$$

$$\sin\mu x = \frac{\sqrt{-1}}{2}e^{-\mu x\sqrt{-1}} - \frac{\sqrt{-1}}{2}e^{\mu x\sqrt{-1}},$$

on aura

$$\frac{X}{H} = pe^{-\mu x} + p'e^{-\mu x\sqrt{-1}} + p''e^{\mu x} + p'''e^{\mu x\sqrt{-1}},$$

où

$$p = \frac{f'+g'}{2H},$$

$$p' = \frac{f'\sqrt{-1}-g'}{2H},$$

$$p'' = \frac{g'-f'}{2H},$$

$$p''' = \frac{-f'\sqrt{-1}-g'}{2H}.$$

Quand on change μ en $\mu\sqrt{-1}$, f' ou $2c+f$ reste le même, g' se change en $g'\sqrt{-1}$, H en $-H\sqrt{-1}$, et les nombres p, p', p'', p''' se changent chacun dans le suivant, le dernier devenant le premier. Il en est donc de même des quatre termes $pe^{-\mu x}$, ... de $\frac{X}{H}$. Ils résultent du premier en faisant plusieurs fois cette substitution, ou en remplaçant μ par $\mu\sqrt{-1}$, $-\mu$, $-\mu\sqrt{-1}$, $+\mu$.

Comme il en est de même pour $\frac{X'}{H}$, on voit qu'au lieu de substituer dans cette expression la valeur réelle et positive $\mu = h$, on peut écrire

$$\frac{X'}{H} = \sum pe^{-\mu x},$$

la somme $\sum$ s'étendant aux valeurs $\mu = h$, $h\sqrt{-1}$, $-h$, $-h\sqrt{-1}$. D'après ce qui précède, il est clair que $\frac{X}{F'(\mu)}$ reste le même pour ces quatre substitutions, et, par conséquent, la valeur (31) de L pourra s'écrire

$$(33) \qquad L = \sum \frac{Q e^{-\mu x'}}{F'(\mu)}, \qquad \text{où} \qquad Q = pX,$$

la somme $\sum$ étant la même que ci-dessus. Il reste à simplifier l'expression Q. Pour cela, d'après les valeurs de X et de p, on a

$$Q = \alpha M + \beta N, \qquad \alpha = \frac{f'(f'+g')}{2H}, \qquad \beta = \frac{g'(f'+g')}{2H}.$$

Comme on peut exprimer $\frac{g'}{H}$ sous forme entière, plutôt que $\frac{f'}{H}$, remarquons que l'on a identiquement

$$f'^2 + 4s^2 - g^2 = (2c+f)^2 + 4s^2 - g^2 = 8 + 4fc = 4F(\mu) = 0;$$

d'où

$$f'^2 = g'(g-2s), \qquad \alpha = \frac{g'(f'+g-2s)}{2H}, \qquad \beta = \frac{g'(f'+g+2s)}{2H},$$

qu'il vaut mieux remplacer par

$$\alpha + \beta = \frac{g'(f'+g)}{H}, \qquad \alpha - \beta = -\frac{2g's}{H}.$$

On a

$$fc + 2 = 0, \qquad s^2 = 1 - c^2 = 1 - \frac{4}{f^2} = \frac{g^2}{f^2}.$$

De plus

$$\frac{fs}{g} g' = \frac{fs}{g}(g + 2s) = \frac{2fs^2}{g} + fs,$$

ou, d'après la valeur de s^2,

$$\frac{fs}{g} g' = \frac{2g}{f} + fs = -gc + fs = -H, \qquad \frac{g'}{H} = -\frac{g}{fs}.$$

On a ainsi

$$\alpha + \beta = -\frac{g}{fs}(f'+g) = -\frac{f'}{f}\frac{g}{s} - \frac{g^2}{fs}, \qquad \alpha - \beta = \frac{2g}{f}.$$

On en fera disparaître les dénominateurs en substituant

$$\frac{f'}{f} = 1 + \frac{2c}{f} = 1 - c^2 = s^2, \qquad \frac{g'^2}{fs} = fs, \qquad \frac{2}{f} = -c,$$

d'où

$$\alpha + \beta = -(g+f)s, \qquad \alpha - \beta = -gc.$$

L'équation $fc + 2 = 0$ donne

$$(1 + ce^{\mu}) = -(1 + ce^{-\mu}),$$
$$gc = (1 + ce^{\mu}) - (1 + ce^{-\mu}) = 2(1 + ce^{\mu}),$$

d'où résulte

$$\alpha + \beta = -2se^{\mu}, \qquad \alpha - \beta = -2(1 + ce^{\mu}),$$
$$Q = \alpha M + \beta N = -se^{\mu}(M + N) + (1 + ce^{\mu})(N - M),$$

ou, d'après les valeurs (32),

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q = {} & (1 + ce^{\mu})(e^{\mu x} - \cos\mu x - \sin\mu x) \\ & - se^{\mu}(e^{-\mu x} + \sin\mu x - \cos\mu x). \end{aligned} \right.$$

C'est la formule cherchée.

14. Propriétés des variables imaginaires. — Dans ce qui suit, nous nous bornons à ce qui est nécessaire pour la question à résoudre.

1° *Définitions.* — Une variable imaginaire a la forme

$$z = x + y\sqrt{-1},$$

où x, y sont des variables réelles. Une fonction $f(z)$ de cette variable est telle qu'on ait

$$f(z) = u + v\sqrt{-1},$$

u et v étant des fonctions réelles de x, y, satisfaisant aux conditions

$$(35)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{dv}{dx}\right) = -\left(\dfrac{du}{dy}\right), \\ \left(\dfrac{dv}{dy}\right) = \left(\dfrac{du}{dx}\right), \\ \text{ou} \\ \dfrac{df(z)}{dy} = \sqrt{-1}\,\dfrac{df(z)}{dx}. \end{cases}$$

Admettons pour simplifier que u et v soient bien déterminées, finies et continues pour toutes les valeurs finies de x, y, et qu'il en soit de même pour les dérivées précédentes; $f(z)$ sera ainsi bien définie pour toutes les valeurs de z, et nous supposerons qu'il en est de même pour la fonction $F(z)$ employée plus loin.

La dérivée $f'(z)$ signifie

$$f'(z) = \frac{df(z)}{dx} = \frac{du}{dx} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dx},$$

et, d'après les relations (35), on a

$$\begin{aligned} d(u + v\sqrt{-1}) &= \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}\right)dx + \left(\frac{du}{dy} + \sqrt{-1}\,\frac{dv}{dy}\right)dy \\ &= \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}\right)(dx + dy\sqrt{-1}), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$df(z) = f'(z)\,dz.$$

2° *Théorème relatif à un contour.* — Considérons x, y comme les coordonnées rectangulaires d'un point variable, et soit C un contour fermé quelconque; les relations (34) donnent

$$\int\!\!\int\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)dx\,dy = 0, \qquad \int\!\!\int\left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy}\right)dx\,dy = 0,$$

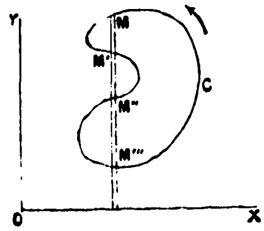
les intégrales s'étendant à l'aire intérieure au contour.

On a

$$dx\int\frac{du}{dy}\,dy = dx(u - u' + u'' - u'''),$$

u, u', u'', u''' correspondant aux points M, M′, M″, M‴ situés sur une même ordonnée, qui se réduisent à deux si le contour est convexe, et sont, en tout cas, en nombre pair. C'est la portion de l'aire intérieure

Fig. 6.



comprise entre deux ordonnées très voisines de distance dx; si maintenant on définit sur le contour dx, dy, comme étant les expressions positives ou négatives $\frac{dx}{ds}\,ds$, $\frac{dy}{ds}\,ds$, l'arc s étant compté dans le sens direct, ou celui de la flèche, les termes précédents seront pour la valeur et pour le signe $-u\,dx$, $-u'\,dx$, ..., d'où résulte

$$\int dx \int \frac{du}{dy}\,dy = -\int u\,dx,$$

l'intégrale du second membre s'étendant au contour. En interprétant de même les autres parties des intégrales, le résultat deviendra

$$\int v\,dy - \int u\,dx = 0, \qquad \int u\,dy + \int v\,dx = 0,$$

d'où

$$\int (u + v\sqrt{-1})(dx + dy\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire

$$\int f(z)\,dz = 0, \tag{36}$$

l'intégrale s'étendant au contour.

Cette relation remarquable exige seulement que $f(z)$ soit bien définie à l'intérieur de l'aire. Par conséquent, si $F(z)$ est une autre fonction bien définie, on aura

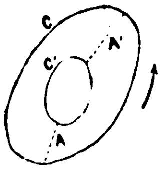
$$\frac{d\mathrm{F}(z)}{dy} = \sqrt{-1}\,\frac{d\mathrm{F}(z)}{dx}, \qquad \frac{d}{dy}\left[\frac{f(z)}{\mathrm{F}(z)}\right] = \sqrt{-1}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{f(z)}{\mathrm{F}(z)}\right],$$

et, pourvu que $\mathrm{F}(z)$ ne s'annule pas à l'intérieur de l'aire, on aura pour le contour

$$\int \frac{f(z)\,dz}{\mathrm{F}(dz)} = 0.$$

Le principe reste applicable à l'aire comprise entre deux contours C, C' dont l'un est intérieur à l'autre; on le verrait aisément en la partageant en deux autres par les droites A, A' et ajoutant l'équation (36)

Fig. 7.



pour les aires partielles; les portions d'intégrales correspondant à A, A' se détruiraient; dans celle qui correspond au contour C', il serait parcouru en sens inverse. Cela revient à dire que l'intégrale $\int f(z)\,dz$ est la même pour les deux contours, si tous deux sont parcourus dans le sens direct.

3° *Cas où la fonction devient infinie dans l'intérieur de l'aire.* — La fonction dont il s'agit est $\frac{f(z)}{\mathrm{F}(z)}$, $f(z)$ et $\mathrm{F}(z)$ étant constamment finies; mais nous supposons que $\mathrm{F}(z)$ s'annule pour une valeur $z = \mu = a + b\sqrt{-1}$, correspondant à un point A, tandis que $\mathrm{F}'(\mu)$ n'est pas nulle.

Soit AL une droite ayant θ pour angle polaire, et sur cette droite M un point variable à la distance $\mathrm{AM} = \rho$; en supposant pour ce point $\mathrm{F}(z) = u + v\sqrt{-1}$, u et v seront des fonctions réelles de ρ, et l'on aura

$$\frac{du}{d\rho} = \left(\frac{du}{dx}\right)\frac{dx}{d\rho} + \left(\frac{du}{dy}\right)\frac{dy}{d\rho} = \left(\frac{du}{dx}\right)\cos\theta + \left(\frac{du}{dy}\right)\sin\theta.$$

Puisque u s'annule en A, pour $\rho = 0$, la valeur $\frac{du}{d\rho}$ en A est la limite de celle de $\frac{u}{\rho}$ quand ρ diminue ; on a donc

$$\lim \frac{u}{\rho} = \left(\frac{du}{dx}\right)\cos\theta + \left(\frac{du}{dy}\right)\sin\theta, \qquad \lim \frac{v}{\rho} = \left(\frac{dv}{dx}\right)\cos\theta + \left(\frac{dv}{dy}\right)\sin\theta,$$

les dérivées correspondant au point A ; il en résulte, d'après les relations (35),

$$\lim \frac{F(z)}{\rho} = \lim \frac{u + v\sqrt{-1}}{\rho} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\sqrt{-1}\right)(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)$$
$$= F'(\mu)(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

ou

$$\lim \frac{\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}{F(z)} = \frac{1}{F'(\mu)},$$

la limite supposant ρ infiniment petit. On voit que, pour des points suffisamment rapprochés de A, $F(z)$ ne peut s'annuler.

Soit maintenant

$$I = \int \frac{f(z)\,dz}{F(z)},$$

l'intégrale s'étendant à une circonférence de centre A, de rayon ρ. On a

$$x = a + \rho\cos\theta, \qquad y = b + \rho\sin\theta, \qquad dz = \rho(\sqrt{-1}\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta,$$

d'où

$$I = \sqrt{-1}\int_0^{2\pi} f(z)\,d\theta\,\frac{\rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)}{F(z)}.$$

Quand ρ est très petit, $f(z)$ diffère aussi peu qu'on voudra de $f(\mu)$, et l'autre facteur sous le signe $\int$ de $\frac{1}{F'(\mu)}$, d'où

$$\lim I = \sqrt{-1}\int^{2\pi} \frac{f(\mu)}{F'(\mu)}\,d\theta = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{F'(\mu)}{f(\mu)}.$$

Or, comme on l'a vu, l'intégrale I reste la même si on l'étend à un contour C quelconque renfermant le cercle, pourvu que $F(z)$ ne s'annule pour aucun point extérieur autre que A. On aura donc pour ce contour

$$\int \frac{f(z)\,dz}{F(z)} = 2\pi\sqrt{-1}\,\frac{f(\mu)}{F'(\mu)}. \tag{37}$$

15. Application de ce qui précède a la formule (31). — Dans cette formule la somme $\sum$ s'étend à toutes les valeurs réelles et positives de μ; soit S sa valeur quand on l'étend seulement à celles qui sont inférieures à un grand nombre donné ρ. Nous supposerons que celui-ci soit un multiple exact de π, de façon à ne pouvoir être lui-même une des valeurs de μ qui sont de la forme $(2i+1)\frac{\pi}{2}$. Si l'on y remplace L par sa valeur (33) composée de quatre termes correspondant à $\pm\mu$, $\pm\mu\sqrt{-1}$, racines de même module, la somme $\sum$ s'étendra non plus seulement aux racines μ réelles et positives, mais à toutes les racines de $F(\mu)=0$ dont le module est inférieur à ρ. On aura ainsi

$$S = \sum \frac{f(\mu)}{F'(\mu)}, \qquad \text{où} \qquad f(\mu) = Q\int_0^1 \varphi(x')\,e^{-\mu x'}\,dx.$$

Désignons par $F(z)$, $f(z)$ ce que deviennent $F(\mu)$ en remplaçant μ par une variable imaginaire z. Il est clair que de la sorte ces fonctions sont finies et bien déterminées pour toutes les valeurs de z. Enfin soit

$$I = \int \frac{f(z)\,dz}{F(z)},$$

l'intégrale s'étendant à un contour C pour lequel nous prendrons une circonférence de rayon ρ ayant pour centre l'origine. Pour chaque racine μ, μ', μ'', ..., le module est la distance de l'origine au point A, A', A'', ... qui lui correspond : pour l'ensemble de ceux qui sont intérieurs à C, μ, μ', μ'', ... sont l'ensemble des racines dont le module est inférieur à ρ et auxquelles s'étend la somme S.

L'aire intérieure à C peut être partagée en plusieurs autres contenant chacune un seul des points A, A', A'', ... Appliquons au contour limitant chacune d'elles l'équation (37) et ajoutons les résultats. Dans le premier membre, toutes les portions d'intégrales correspondant aux lignes qui séparent deux aires voisines disparaissent, le sens où l'on compte dx, dy, dz étant contraire pour toutes deux. Il ne restera que les portions correspondant au contour C, et dont I est l'ensemble; on aura donc

$$I = 2\pi\sqrt{-1}\left[\frac{f(\mu)}{F'(\mu)} + \frac{f'(\mu')}{F'(\mu')} + \ldots\right]$$

ou

$$S = \sum \frac{f(\mu)}{F'(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{f(z)\,dz}{F(z)}.$$

En désignant par θ l'angle polaire d'un point quelconque du contour,

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta,$$

$$\begin{aligned} dz &= \left[-\rho\sin\theta + \sqrt{-1}\,\rho\cos\theta\right] d\theta \\ &= \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta)\sqrt{-1}\,d\theta = z\sqrt{-1}\,d\theta. \end{aligned}$$

Substituons cette valeur de z, et, pour simplifier, remplaçons z par μ, qui deviendra ainsi une variable imaginaire. Nous aurons

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} S &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mu f(\mu)\,d\theta}{F(\mu)}, \\ f(\mu) &= Q\int_0^1 \varphi(x)\,e^{-\mu x}\,dx, \\ \mu &= \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}; \end{aligned}\right.$$

$F(\mu)$ et Q sont donnés par les formules (18) et (34). Il reste à démontrer que S converge vers $\varphi(x)$ quand ρ croît à l'infini.

Il est nécessaire, pour cela, d'avoir une limite inférieure du module de $F(\mu)$.

Soient r celui de f, r' celui de $2e$, et $\mu = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, de sorte que

$\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$. On a

$$f = e^{\mu} + e^{-\mu},$$

$$2c = 2\cos\mu = e^{\mu\sqrt{-1}} + e^{-\mu\sqrt{-1}} = (e^{\beta} + e^{-\beta})\cos\alpha$$
$$+ (e^{-\beta} - e^{\beta})\sqrt{-1}\sin\alpha,$$

par conséquent,

$$r^2 = e^{2\alpha} + e^{-2\alpha} + 2\cos 2\beta, \qquad r'^2 = e^{2\beta} + e^{-2\beta} + 2\cos 2\alpha.$$

Ces expressions étant indépendantes du signe de α, β, nous les remplacerons par α', β' qui désigneront leurs valeurs numériques. On aura ainsi

$$\alpha' = \rho\cos\theta', \qquad \beta' = \rho\sin\theta',$$

θ' étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ et ayant, sauf le signe, les mêmes sinus et cosinus que θ. Les valeurs ci-dessus donnent

$$r^2 e^{-2\alpha'} = 1 + e^{-4\alpha'} + 2\lambda > 1 + 2\lambda, \qquad \text{où} \qquad \lambda = \frac{\cos 2\beta'}{e^{2\alpha'}};$$

λ est positif si θ' est o ou $\frac{\pi}{2}$, car $2\beta'$ est alors o ou 2ρ, c'est-à-dire un multiple de 2π. Ainsi, en faisant varier θ', le minimum de $1 + 2\lambda$ ou le maximum négatif de λ ne peut correspondre qu'à une valeur de θ' satisfaisant à l'équation

$$0 = \frac{d\lambda}{d\theta'} = \frac{d}{d\theta'}(e^{-2\rho\cos\theta'}\cos 2\rho\sin\theta')$$
$$= e^{-2\rho\cos\theta'}(2\rho\sin\theta'\cos 2\rho\sin\theta' - 2\rho\cos\theta'\sin 2\rho\sin\theta').$$

On aurait, en ce cas,

$$\sin(2\rho\sin\theta' - \theta') = 0, \qquad 2\rho\sin\theta' \qquad \text{ou} \qquad 2\beta' = i\pi + \theta',$$

i étant entier; on doit le supposer impair pour que λ soit négatif, et il en résulte

$$\lambda = -\frac{\cos\theta'}{e^{2\rho\cos\theta'}}.$$

Or, x étant une variable positive, xe^{-x} a pour maximum $\frac{1}{e}$; en prenant $x = 2\rho\cos\theta'$, on voit que le maximum précédent de $-\lambda$ est au plus $\frac{1}{2\rho e}$.

Le calcul serait tout pareil pour r'^2, sauf qu'on aurait

$$\lambda = e^{-2\rho\sin\theta'}\cos(2\rho\cos\theta'),$$

et ce cas se ramène à l'autre en remplaçant θ' par $\frac{\pi}{2} - \theta'$. On a donc

$$r^2 > e^{2\alpha'}\left(1 - \frac{1}{\rho e}\right), \qquad r'^2 > e^{2\beta'}\left(1 - \frac{1}{\rho e}\right).$$

Le module de la somme de deux expressions étant supérieur à la différence de leurs modules, celui de $2F(\mu)$ ou $2fe + 4$, dépasse $rr' - 4$, et, par suite,

$$e^{\alpha'+\beta'}\left(1 - \frac{1}{\rho e} - \frac{4}{e^{\alpha'+\beta'}}\right).$$

Comme $\alpha' + \beta'$ ou $\rho(\cos\theta' + \sin\theta')$ est toujours au moins égal à ρ quand θ' est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la quantité entre parenthèses devient aussi voisine qu'on veut de l'unité en prenant ρ assez grand. Nous pourrons supposer constamment ρ telle qu'elle dépasse $\frac{2}{3}$. Il en résulte que le module $F(\mu)$ est constamment supérieur à $\frac{1}{3}e^{\alpha'+\beta'}$, α' et β' étant les valeurs numériques de α et β.

16. Réduction de la formule (38). — Il est indifférent de prendre $-\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$ pour limites d'intégration, ou d'intégrer de $-\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{1}{2}\pi$, puis de $\frac{1}{2}\pi$ à $\frac{3}{2}\pi$; si, dans cette seconde partie, on change θ en $\pi + \theta$, les limites seront de nouveau $\pm\frac{1}{2}\pi$, et μ aura simplement changé de signe. La formule (38) devient ainsi

$$2\pi S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu f(\mu) - \mu f(-\mu)}{F(\mu)}\,d\theta,$$

en remarquant que $F(-\mu) = F(\mu)$. Posons

$$(39)\qquad I = \mu\int_0^1 e^{-\mu x'}\varphi(x')\,dx', \qquad I' = \mu\int_0^1 e^{-\mu(1-x')}\varphi(x')\,dx',$$

et soit Q' ce que devient Q en remplaçant μ par $-\mu$. Les formules (38) donneront

$$\mu f(\mu) = IQ, \qquad \mu f(-\mu) = Q'\mu\int_0^1 \varphi(x')\,e^{\mu x'}\,dx' = I'e^{\mu}Q',$$

d'où

$$(40)\qquad 2\pi S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{IQ - I'e^{\mu}Q'}{F(\mu)}\,d\theta.$$

La valeur (34) peut s'écrire

$$\begin{aligned} Q = &-\cos\mu x - \sin\mu x - e^{\mu}\cos\mu(1-x) + e^{\mu}\sin\mu(1-x)\\ &- se^{\mu(1-x)} + (1 + ce^{\mu})e^{\mu x}, \end{aligned}$$

d'où

$$(41)\quad \left\{ \begin{aligned} e^{\mu}Q' = {} & e^{\mu}(\sin\mu x - \cos\mu x) - \cos\mu(1-x) - \sin\mu(1-x)\\ & + se^{\mu x} + (1 + ce^{-\mu})e^{\mu(1-x)}. \end{aligned} \right.$$

Dans le dernier terme de la valeur de Q nous substituerons

$$1 + ce^{\mu} = F(\mu) - (1 - ce^{-\mu}), \qquad \text{d'où} \qquad Q = e^{\mu x}F(\mu) + Q'',$$

$$(42)\quad \left\{ \begin{aligned} Q'' = {} & -\cos\mu x - \sin\mu x - e^{\mu}\cos\mu(1-x) + e^{\mu}\sin\mu(1-x)\\ & - se^{\mu(1-x)} - e^{\mu x} - ce^{-\mu(1-x)}. \end{aligned} \right.$$

La valeur (40) se décomposera alors ainsi

$$(43)\quad \left\{ \begin{aligned} & 2\pi S = S' + S'' - S''', \qquad S' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{\mu x} I\,d\theta,\\ & S'' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{IQ''}{F(\mu)}\,d\theta, \qquad S''' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{I'e^{\mu}Q'}{F(\mu)}\,d\theta. \end{aligned} \right.$$

Nous allons vérifier que, si ρ croît à l'infini, S'' et S''' décroissent sans limite. Nous regarderons x comme une constante comprise entre 0 et 1, et différente de ces deux limites, sauf à examiner plus tard le cas où l'on a $x = 0$ ou $x = 1$.

1° *Évaluation de* S'' *en excès.* — L'expression $\frac{IQ''}{F(\mu)}$ est une fonction de μ ne contenant explicitement ni la lettre θ ni le signe $\sqrt{-1}$; en y substituant $\mu = \rho e^{\theta\sqrt{-1}}$, elle prend la forme $U + U'\sqrt{-1}$, où U et U' sont des fonctions réelles de θ; le changement de θ en $-\theta$, revient à substituer $\mu = \rho e^{-\theta\sqrt{-1}}$ ou à changer le signe de $\sqrt{-1}$, de sorte qu'on a en réalité

$$\tfrac{1}{2} S'' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} U\, d\theta.$$

Si, pour simplifier, nous désignons la valeur numérique de $\frac{1}{2}S''$ par $\frac{1}{2}S''$, nous en aurons une valeur trop forte en remplaçant U, non par la partie réelle de $\frac{Q''I}{F(\mu)}$, mais par son module. Par conséquent,

$$(14) \qquad \tfrac{1}{2} S'' < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m P\, d\theta}{\operatorname{mod} F(\mu)},$$

m étant le module de I, P celui de Q'' pris trop forts.

Nous poserons $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, $\mu = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, et nous évaluerons P en ajoutant les modules de tous les termes de Q'' pris plutôt trop forts. Ainsi $2c$ ou $2\cos\mu$ a deux termes de module $e^{\pm\beta}$ que nous remplacerons par $2e^{\beta}$; c et s seront ainsi remplacés par e^{β}, et de même $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\mu x$ par $e^{\beta x}$, $\begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix}\mu(1-x)$ par $e^{\beta(1-x)}$. Quant aux exponentielles, on devra y remplacer μ par α. On trouve ainsi

$$P = 2e^{\beta x} + 2e^{\alpha}e^{\beta(1-x)} + e^{\alpha x} + e^{\beta}e^{\alpha(1-x)} + e^{\beta}e^{-\alpha(1-x)}.$$

Dans le numéro suivant nous déterminerons pour le module m de I une valeur en excès, indépendante de ρ et θ. Nous avons trouvé au n° **15** $\frac{1}{3}e^{\alpha'+\beta'}$ pour le module de $F(\mu)$ pris trop faible; α' et β' ont d'ailleurs la signification actuelle de α et β; en faisant ces substitutions, la relation (44) deviendra, d'après la valeur de P,

$$\frac{3}{2m} S'' < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[2e^{-\alpha} e^{-\beta(1-x)} + 2e^{-\beta x} + e^{-\alpha(1-x)} e^{-\beta} + e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(2-x)} \right] d\theta.$$

Nous partagerons l'intégrale en deux autres, prises de o à $\frac{\pi}{4}$ et de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$.

2° *Évaluation de la première partie.* — On a, pour celle-là,

$$\alpha = \rho \cos\theta > \frac{\rho}{2}$$

et, parmi les termes entre parenthèses, tous ceux où entre α convergent vers o quand ρ augmente, x et $1 - x$ étant des constantes positives. La portion qui reste au second membre correspond à $2e^{-\beta x}$ et peut s'écrire

$$2(M + M'), \qquad M = \int_0^{\varepsilon} e^{-\beta x}\, d\theta, \qquad M' = \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} e^{-\beta x}\, d\theta,$$

où ε est un petit angle. Dans M' on a constamment

$$\beta = \rho \sin\theta > \rho \sin\varepsilon;$$

d'ailleurs $M < \varepsilon$; par conséquent,

$$M + M' < \varepsilon + \frac{\pi}{4} e^{-\rho x \sin\varepsilon}.$$

Après avoir choisi ε aussi petit qu'on voudra, on peut toujours prendre ρ assez grand pour avoir

$$\frac{\pi}{4} e^{-\rho x \sin\varepsilon} < \varepsilon,$$

d'où

$$M + M' < 2\varepsilon.$$

Cette quantité décroît donc sans limite.

3° *Évaluation de la seconde partie.* — On a, pour celle-là,

$$\beta = \rho \sin\theta > \frac{\rho}{2};$$

les termes contenant β en exposant décroissent sans limite, et il reste au second membre

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} [e^{-\alpha x} + e^{-\alpha(2-x)}]\, d\theta,$$

ou, en remplaçant θ par $\frac{\pi}{2} - \theta$,

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} [e^{-\beta x} + e^{-\beta(2-x)}]\, d\theta,$$

et l'on vérifie, comme dans le cas précédent, que cette quantité converge vers o.

4° *Évaluation de* S‴. — En remplaçant x' par $1 - x'$ dans la valeur (39) de I′, elle ne diffère de I qu'en ce que $\varphi(x')$ est remplacé par $\varphi(1-x')$, et le module de I′ en excès serait m comme celui de I; ensuite on voit, par les formules (41) et (42), qu'en remplaçant x par $1-x$ dans tous les termes de Q″, ils deviennent ceux de $Q'e^{\mu}$, quelques-uns en signe contraire; mais, ces signes étant tous positifs dans la valeur de P, celle qu'on trouverait en suivant la même marche que pour S″ ne différerait que par l'échange de x et $1-x$, qui sont deux constantes quelconques entre o et 1. Le reste du calcul ne serait que la répétition de celui qui a été fait pour S″, et par conséquent S‴ converge aussi vers o.

17. Module de l'expression I. — 1° *Proposition préliminaire. Si une fonction $f(y)$ reste continue, positive et décroissante, pendant que y augmente de y' à y'', on a numériquement*

$$\int_{y'}^{y''} f(y) \sin y\, dy < 2f(y'). \tag{45}$$

En effet, partageons l'intégrale en d'autres A, A′, A″, ... dont les limites successives soient, outre y', y'', tous les multiples de π compris entre ces deux nombres.

Chacune, sauf la première et la dernière, aura la forme

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} f(y)\sin y\, dy,$$

et comme $\sin y$ a un signe constant et que $f(y) < f(y')$, elle est numériquement moindre que $f(y')\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\sin y\, dy$, ou que $2f(y')$. Il en est de même évidemment pour la première et la dernière où la différence est $< \pi$.

Il est évident que A, A′, ... sont de signes alternatifs et qu'à partir de A′ elles sont numériquement décroissantes. Ainsi, numériquement, la somme $A' + A'' + A''' + \ldots$ est moindre que A′ ou que $2f(y')$ et, en outre, elle a le signe de A′ contraire à celui de A; celle-ci étant numériquement moindre que $2f(y')$, il en sera donc de même de la somme totale $A + A' + A'' + \ldots$.

2° *Conditions que $\varphi(x)$ doit remplir.* — Soit qu'il s'agisse du module de I ou du théorème principal que S ait $\varphi(x)$ pour limite, lequel doit être étendu même à une fonction discontinue, il y a forcément à exclure certains cas singuliers où la fonction présente plus ou moins certains caractères d'indétermination.

Voici les conditions qu'elle doit remplir :

Nous admettrons que *les valeurs de x pour lesquelles $\varphi(x)$ est discontinue sont en nombre limité*, de sorte qu'il y ait en tout de $x = 0$ à $x = 1$, n intervalles dans chacun desquels elle reste continue, n se réduisant à 1 quand il n'y a pas de discontinuité.

Nous admettrons, en outre, que dans chacun de ces intervalles *il y en a au plus n' dans chacun desquels la fonction reste constamment croissante ou constamment décroissante*, n' étant comme n un nombre fini.

3° *Module de* I. — Soit M le maximum numérique de $\varphi(x)$. Le module d'une somme étant inférieur à la somme des modules de ses termes, il en est de même si la somme devient une intégrale. Nous aurons donc en excès le module m de la valeur (39) de I en remplaçant les facteurs μ et $e^{-\mu x'}$ par leurs modules ρ, $e^{-\alpha x'}$ et $\varphi(x')$ par M, ce qui donne

$$m < \rho \mathrm{M} \int_0^1 e^{-\alpha x'}\, dx'.$$

Si

$$\theta < \frac{4}{\pi}, \qquad \alpha > \tfrac{1}{2}\rho, \qquad m < \mathrm{M}\rho \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\rho x'}\, dx', \qquad < 2\mathrm{M}.$$

Il ne reste donc à examiner que le cas où θ est compris entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$. En substituant $\mu = \rho e^{\theta\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on a

$$\mathrm{I} = \rho \int_0^1 e^{-\alpha x'} e^{-(\beta x' - \theta)\sqrt{-1}} \varphi(x')\, dx' = \rho(\mathrm{G} - \mathrm{G}'\sqrt{-1}), \qquad m = \rho\sqrt{\mathrm{G}^2 - \mathrm{G}'^2}$$

où

$$\mathrm{G} = \int_0^1 e^{-\alpha x'} \varphi(x') \cos(\beta x' - \theta)\, dx',$$

$$\mathrm{G}' = \int_0^1 e^{-\alpha x'} \varphi(x') \sin(\beta x' - \theta)\, dx'.$$

G et G′ rentrent toutes deux dans la forme générale

$$(46) \qquad \mathrm{G}'' = \int_0^1 e^{-\alpha x'} \varphi(x') \sin(\beta x' + \lambda)\, dx',$$

λ étant une constante. C'est de G″ que nous allons chercher la valeur, dans laquelle $\theta > \frac{\pi}{4}$, $\beta = \rho \sin\theta > \frac{\rho}{\sqrt{2}}$. Soit d'abord

$$\mathrm{K} = \int_a^b e^{-\alpha x'} \varphi(x') \sin(\beta x' + \lambda)\, dx'.$$

a et b étant deux nombres compris entre o et 1. Nous devons distinguer trois cas.

Premier cas. — Si, dans l'intervalle de $x' = a$ à $x' = b$, $\varphi(x')$ est continue, positive et décroissante, comme $e^{-\alpha x'}$ l'est aussi, si l'on pose

$\beta x' + \lambda = y$, K prendra la forme

$$K = \frac{1}{\beta}\int_{y'}^{y''} f(y)\sin y\,dy,$$

y' et y'' correspondant à a et b, et $f(y)$ étant une fonction positive, continue et décroissante, toujours inférieure à M. D'après la propriété préliminaire, on aura donc numériquement $K < \frac{2}{\beta}f(y') < \frac{2M}{\beta}$.

Deuxième cas. — Si $\varphi(x')$ reste, entre a et b, continue et décroissante (algébriquement), mais non toujours positive, K est la différence des résultats obtenus en y remplaçant $\varphi(x')$ par $M + \varphi(x')$ et M, qui toutes deux remplissent les conditions du premier cas; le maximum numérique de $M + \varphi(x')$ étant au plus $2M$, les deux résultats sont numériquement inférieurs à $\frac{4M}{\beta}$, $\frac{2M}{\beta}$, et, par suite, leur différence ou K, à $\frac{6M}{\beta}$.

Troisième cas. — Si de $x' = a$ à b, $\varphi(x')$ est continue, croissante, de signe quelconque, la valeur numérique de K ne changera pas en remplaçant $\varphi(x')$ par $-\varphi(x')$, et comme celle-ci est décroissante et remplit les conditions du second cas, cette valeur est encore inférieure à $\frac{6M}{\beta}$.

C'est donc la limite numérique de K si $\varphi(x')$ est dans l'intervalle de a à b, constamment croissante ou constamment décroissante, de signe quelconque. Or, d'après les conditions indiquées ci-dessus, pour la fonction $\varphi(x)$, il existe entre $x = 0$ et 1 au plus nn' intervalles dans chacun desquels $\varphi(x')$ est continue, constamment croissante ou décroissante. En partageant l'intégrale (46) en d'autres correspondant à tous ces intervalles, celles-ci auront toutes la forme K et, leur limite numérique étant $\frac{6M}{\beta}$, celle de G'' sera $\frac{6nn'M}{\beta}$; elle sera la même pour G et G'; d'ailleurs, on a vu que $\beta > \frac{\rho}{\sqrt{2}}$; par conséquent, on aura

$$m = \rho\sqrt{G^2 + G'^2} < \rho\sqrt{2}\,\frac{6nn'M}{\beta} < 12nn'M.$$

Cette valeur limite s'étend au cas où $0 < \frac{\pi}{4}$, puisqu'on avait alors $m < 2\mathrm{M}$. Ainsi m dépend seulement de n, n', M ou de la nature de $\varphi(x)$ et reste le même si on la remplace par $\varphi(1-x)$; le module de I' est, par conséquent, aussi $< m$.

18. Démonstration du théorème principal. — Ce théorème consiste en ce que la limite de S, quand ρ croît à l'infini, est $\varphi(x)$. Les limites de S'', S''' étant nulles, d'après ce qui précède, les formules (43) et (39) donnent

$$\lim 2\pi \mathrm{S} = \lim \mathrm{S}', \qquad \mathrm{S}' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \mu e^{\mu(x-x')} \varphi(x')\, dx'\, d\theta.$$

En substituant $\mu = \rho e^{\theta\sqrt{-1}} = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{S}' &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{\alpha(x-x')} e^{[\beta(x-x')+\theta]\sqrt{-1}} \varphi(x')\, d\theta\, dx' \\ &= \int_0^1 (\mathrm{U} + \mathrm{U}'\sqrt{-1})\varphi(x')dx',\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{U} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{\alpha(x-x')} \cos[\beta(x-x')+\theta]\, d\theta,$$

$$\mathrm{U}' = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho e^{\alpha(x-x')} \sin[\beta(x-x')+\theta]\, d\theta.$$

Comme $\alpha = \rho\cos\theta$, $\beta = \rho\sin\theta$, il est clair que $\mathrm{U}' = 0$, et

$$(x-x')\mathrm{U} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\,\{ e^{\rho(x-x')\cos\theta} \sin[\rho(x-x')\sin\theta]\};$$

ou

$$\mathrm{U} = \frac{2\sin\rho(x-x')}{x-x'},$$

et cette valeur reste exacte si $x - x' = 0$, celle de U se réduisant bien alors à 2ρ. Le théorème consiste donc en ce que

$$(47) \qquad \lim S' = 2\pi\varphi(x), \qquad \tfrac{1}{2}S' = \int_0^1 \frac{\sin\rho(x-x')}{x-x'}\varphi(x')\,dx'.$$

Réduit à ces termes, le théorème revient, au fond, à la démonstration de la série trigonométrique de Lagrange, qu'ont donnée tour à tour Cauchy, Dirichlet et Bertrand. Toutefois, il reste dans ces démonstrations des points obscurs; et, en effet, le théorème n'existant que si la fonction $\varphi(x)$ est bien déterminée et supposant pour elle des propriétés de croissance et de décroissance, les démonstrations ne peuvent avoir une entière précision si l'on ne fixe d'avance, comme nous l'avons fait, les conditions exactes auxquelles la fonction est assujettie et qui seront les mêmes qu'au numéro précédent.

Le théorème peut alors être démontré rigoureusement comme il suit :

Nous supposons, comme précédemment, x différent de 0 et de 1: partageons l'intégrale (47) en deux autres, l'une de $x' = 0$ à $x' = x$, l'autre de $x' = x$ à $x' = 1$. Posons dans la première $x - x' = y$, $\varphi(x-y) = \psi(y)$, et dans la seconde $x' - x = y$, $\varphi(x+y) = \psi'(y)$, d'où

$$(48) \qquad \begin{cases} \tfrac{1}{2}S' = A + A', \\ A = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy, \\ A' = \displaystyle\int_0^{1-x} \frac{\sin\rho y}{y}\psi'(y)\,dy. \end{cases}$$

Presque toute la démonstration se réduit au cas principal suivant :

Cas principal. — Si de $y = 0$ à $y = x$, $\psi(y)$ est continue, décroissante et positive, la limite de A, quand ρ croît à l'infini, est $\tfrac{1}{2}\pi\,\psi(0)$.

En effet, remplaçons y par $\frac{y}{\rho}$ et posons $\psi(0) - \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) = F(y)$; soit aussi n un entier positif choisi à volonté et donnons à ρ une valeur telle que $\rho x > n\pi$; nous aurons identiquement

$$A = \int_0^{\rho x} \frac{\sin y}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) dy = B - B' - B'' + B''',$$

où

$$B = \int_{n\pi}^{\rho x} \frac{\sin y}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) dy, \qquad B' = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{y} F(y) dy,$$

$$B'' = \int_{n\pi}^{\infty} \frac{\sin y}{y} \psi(0) dy, \qquad B''' = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y} \psi(0) dy.$$

En effet, il est clair que

$$B''' - B'' = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{y} \psi(0) dy,$$

$$B''' - B'' - B' = \int_0^{n\pi} \frac{\sin y}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right) dy = A - B.$$

La fonction $f(y) = \frac{1}{y} \psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ étant, comme $\psi(y)$, positive, continue et décroissante, la valeur de B, d'après la proposition préliminaire du numéro précédent, est numériquement inférieure à $2f(y')$ où $y' = n\pi$. D'ailleurs les valeurs de $\psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ sont les mêmes que celles de $\varphi(x')$ et ont M pour maximum; le maximum numérique de B est donc $\frac{2M}{n\pi}$.

Nous aurons celui de B' en remplaçant $F(y)$ par son maximum M' et $\sin y$ par y de $y = 0$ à π, par 1 de $y = \pi$ à $n\pi$, d'où résulte numériquement

$$B' < M' \int_0^{\pi} dy + M' \int_{\pi}^{n\pi} \frac{dy}{y} = M' [\pi + l(n)].$$

D'ailleurs ψ étant décroissante, $F(y)$ ou $\psi(0) - \psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ a pour maximum, dans l'intervalle de l'intégration,

$$M' = \psi(0) - \psi\left(\frac{n\pi}{\rho}\right).$$

On a exactement

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin y\, dy}{y} = \frac{1}{2}\pi, \qquad B''' = \frac{1}{2}\pi\psi(0).$$

Le principe à démontrer consiste en ce que, étant donné un nombre γ aussi petit qu'on voudra, la différence $A - \frac{1}{2}\pi\psi(0)$ ou $A - B'''$ sera comprise entre $\pm\gamma$ dès que ρ aura dépassé une certaine valeur : or, $\int_{n\pi}^{\infty}\frac{\sin y\,dy}{y}$ convergeant vers 0 quand n augmente, nous pouvons prendre n assez grand pour avoir $B'' < \frac{1}{3}\gamma$; nous pouvons le prendre en même temps assez grand pour avoir $\frac{2M}{n\pi} < \frac{1}{3}\gamma$ et, par suite, numériquement, $B < \frac{1}{3}\gamma$. Ensuite, $\psi\left(\frac{y}{\rho}\right)$ étant continue, M ou $\psi(0) - \psi\left(\frac{n\pi}{\rho}\right)$ décroît sans limite quand ρ augmente; ainsi, une fois n choisi, comme on vient de le dire, on aura, dès que ρ aura dépassé une certaine valeur, soit $\rho x > n\pi$ comme on l'a supposé, soit $M'[\pi + l(n)] < \frac{1}{3}\gamma$, ou $B' < \frac{1}{3}\gamma$; alors B, B', B'' étant compris entre $\pm\frac{1}{3}\gamma$, $A - \frac{1}{2}\pi\psi(0)$ le sera entre $\pm\gamma$. C. Q. F. D.

Fin de la démonstration. — Nous allons vérifier que la limite de la valeur (48) de A est toujours $\frac{1}{2}\pi\psi(0)$.

1° Si de $y = 0$ à $y = x$, $\psi(y)$ est continue, toujours décroissante, mais non toujours positive : $M + \psi(y)$ sera positive; la limite de A est la différence de celles qu'on obtiendrait en remplaçant $\psi(y)$ par $M + \psi(y)$ et par M; toutes deux rentrent dans le cas principal; ces limites sont donc $\frac{1}{2}\pi[M + \psi(0)]$ et $\frac{1}{2}\pi M$, dont la différence est $\frac{1}{2}\pi\psi(0)$.

2° Si de $y = 0$ à x, $\psi(y)$ est continue et croissante, de signe quelconque, $-\psi(y)$ est décroissante et rentre dans le cas précédent. La limite de $-$ A est donc $-\frac{1}{2}\pi\psi(0)$.

3° Soient a, b deux nombres compris entre 0 et x, et supposons que $\psi(y)$ reste continue, constamment croissante ou décroissante quand y augmente de a à b, l'intégrale

$$T = \int_a^b \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy$$

aura alors pour limite 0 quand ρ augmente.

En effet, considérons la fonction $\psi(y)$ comme restant constante et égale à $\psi(a)$ quand y croît de 0 à a, on aura

$$T = T' - T'', \qquad T' = \int_0^b \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy, \qquad T'' = \int_0^a \frac{\sin\rho y}{y}\psi(y)\,dy.$$

T', T'' rentrant dans les cas précédents en prenant a ou b pour x et, comme pour chacune $\psi(0)$ a pour valeur $\psi(a)$, il en résulte

$$\lim T' = \lim T'' = \tfrac{1}{2}\pi\psi(a), \qquad \lim T = \lim T' - \lim T'' = 0.$$

4° *Cas général.* — Comme $\psi(y) = \varphi(x-y) = \varphi(x')$, $\psi(y)$ satisfait aux mêmes conditions que $\varphi(x')$; ainsi on peut partager l'intervalle de 0 à x en un nombre limité d'intervalles dans chacun desquels, comme de a à b, $\psi(y)$ reste continue et constamment croissante ou décroissante. En partageant l'intégrale A en d'autres correspondant à tous ces intervalles, toutes, sauf la première, auront, comme on vient de le voir, une limite nulle quand ρ augmente, tandis que celle de la première est $\frac{1}{2}\pi\psi(0)$; celle-ci est donc aussi la limite de A.

Tout ce qui précède est également applicable à la valeur (48) de A', dont la limite est ainsi $\frac{1}{2}\pi\psi'(0)$. D'ailleurs, il est clair que

$$\psi(0) = \psi'(0) = \varphi(x).$$

Les formules (48) donnent alors

$$\lim \tfrac{1}{2}S' = \pi\varphi(x),$$

c'est-à-dire la relation (47) qu'il s'agissait de démontrer. Toutefois, si pour la valeur de x la fonction $\varphi(x)$ était discontinue, passant brusquement de φ_1 à φ_2, il est clair qu'on trouverait

$$\lim A = \tfrac{1}{2}\pi\varphi_1, \qquad \lim A' = \tfrac{1}{2}\pi\varphi_2, \qquad \lim S' = \pi(\varphi_1 + \varphi_2).$$

19. Cas dans lesquels on a $x = 0$ ou $x = 1$. — Dans les deux cas l'une des valeurs (48) de A, A' est nulle, ce qui donnerait seulement

$$\lim S = \frac{\pi}{2}\varphi(0) \quad \text{ou} \quad \frac{\pi}{2}\varphi(1),$$

si les deux sommes S'', S''' avaient encore pour limite 0; mais il n'en est pas ainsi.

1° *Cas où $x = 0$.* — On a alors

$$X = 0,$$

et, par conséquent, la formule (31) donne o pour valeur initiale $\varphi(0)$. Il en est de même si on la transforme en employant la valeur (34) de Q, qui se réduit de même à o.

2° *Cas où $x = 1$. Expression de S en intégrale relative à* **0.** — La valeur (19) de X se réduit alors identiquement à $-2F'(\mu)$ comme on l'a déjà vu au n° **7**. Ainsi la valeur (31) de S, qui doit avoir $\varphi(x)$ pour limite, devient

$$-2\sum\int_0^1 \frac{X'\varphi(x')\,dx'}{F'(\mu)},$$

la somme s'étendant aux valeurs réelles et positives de μ.

Ensuite au n° **13** nous avons trouvé

$$\frac{X'}{F'(\mu)} = \sum p\,e^{-\mu x'} = \sum \frac{(f'+g')\,e^{-\mu x'}}{2F'(\mu)};$$

la somme s'étendra aux quatre racines de même module.

Il en résulte

$$S = \sum P\int_0^1 \frac{e^{\ \mu x'}\varphi(x')\,dx'}{F'(\mu)},$$

où

$$P = -f' - g' = -2(e^{\mu} + c + s).$$

Dans la formule (33), obtenue par un calcul moins simple, P était remplacé par Q; mais la valeur (34) de Q, comme on l'a vu au n° **16**, peut s'écrire en général

$$\begin{aligned} Q = &- \cos\mu x - \sin\mu x - e^{\mu}\cos\mu(1-x) \\ &+ e^{\mu}\sin\mu(1-x) - s e^{(\mu 1 - x)} + (1 + c e^{\mu})\,e^{\mu x}, \end{aligned}$$

et quand $x = 1$ se réduit à

$$-c - s - e^{\mu} - s + (1 + c e^{\mu})e^{\mu},$$

en substituant $1+ce^{\mu}=-(1+ce^{-\mu})$, elle coïncide avec la valeur ci-dessus de P.

La formule (38) devient ainsi

$$2\pi S=\int_0^{2\pi}\frac{\mu f(\mu)\,d\theta}{F(\mu)},$$

où

$$f(\mu)=P\int_0^1\varphi(x')e^{-\mu x}\,dx'.$$

3° *Expression de S au moyen de* I, I' *et vérification.* — En désignant par P' ce que devient P quand on y remplace μ par $-\mu$, la valeur précédente de S se transforme, comme au n° **16**, en

$$(49)\quad \begin{cases} 2\pi S=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu f(\mu)-\mu f(-\mu)}{F(\mu)}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{PI-e^{\mu}P'I'}{F\mu}\,d\theta,\\ P=-2(e^{\mu}+c+s),\qquad P'e^{\mu}=-2(1+ce^{\mu}-se^{\mu}).\end{cases}$$

On peut encore vérifier que la formule (43) coïncide avec la précédente, car, en écrivant S_1 au lieu de S, elle a la forme

$$2\pi S_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\mu}F(\mu)I+Q''I'-Q'e^{\mu}I'}{F(\mu)}\,d\theta,$$

dans laquelle, pour $x=1$, on a

$$Q''=-2e^{\mu}-2c-2s=P,$$
$$e^{\mu}Q'=2se^{\mu}+ce^{-\mu}-ce^{\mu}=P'e^{\mu}+F(\mu);$$

d'où

$$2\pi(S_1-S)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{\mu}F(\mu)I-F(\mu)I'}{F(\mu)}\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(e^{\mu}I-I')\,d\theta,$$

ou, d'après les valeurs (39),

$$2\pi(S_1 - S) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left[e^{\mu(1-x')} - e^{-\mu(1-x')}\right] \mu\, \varphi(x')\, dx'\, d\theta.$$

Le premier terme est la valeur (43) de S' pour $x = 1$, ou en y remplaçant $x - x'$ par $1 - x'$; le second est la même en remplaçant $x - x'$ par $x' - 1$. Mais, comme on l'a vu au n° **18**, quel que soit $x - x'$, on trouve en intégrant par rapport à θ,

$$S' = 2\int_0^1 \frac{\sin \rho(x - x')}{x - x'} \varphi(x')\, dx',$$

et cette valeur reste la même soit qu'on y remplace $x - x'$ par $1 - x'$ ou par $x' - 1$; les deux termes de $2\pi(S_1 - S)$ sont donc égaux, d'où

$$S_1 = S.$$

4° *Valeur limite de* S. — Pour évaluer la valeur (49) remplaçons dans celle de $e^{\mu}P'$ l'expression $1 + ce^{\mu}$ par

$$F(\mu) - (1 + ce^{-\mu});$$

d'où

$$\tfrac{1}{2} e^{\mu} P' = -F(\mu) + 1 + ce^{-\mu} + se^{\mu},$$

nous aurons

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} 2\pi S &= 2T - 2T',\\ T &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P'\, d\theta,\\ T' &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + ce^{-\mu} + se^{\mu})P' + (e^{\mu} + c + s)I}{F(\mu)}\, d\theta. \end{aligned}\right.$$

Comme on l'a vu au commencement de ce numéro, les formules (48) donnent, pour $x = 1$,

$$\lim \tfrac{1}{2} S' = \tfrac{1}{2}\pi\varphi(1),$$

et nous venons de voir que les intégrales T et S′ étaient les mêmes. On a donc

$$\lim T = \pi\varphi(1);$$

nous démontrerons au numéro suivant que $\lim T' = 0$; il en résultera pour S,

$$\lim 2\pi S = 2\lim T = 2\pi\varphi(1), \qquad \lim S = \varphi(1).$$

Ainsi le théorème est exact quand $x = 1$. Il y a une exception apparente seulement quand $x = 0$; mais, comme on l'a vu, la tige étant encastrée, on ne peut supposer $\varphi(0)$ différente de 0.

Il est vrai qu'au n° **9** nous avons appliqué le théorème à un cas où $\varphi(x)$ était remplacé par la fonction Y, qui n'est point toujours nulle pour $x = 0$; mais, en employant les notations de ce numéro, Y_n aura bien pour limite Y, sauf une discontinuité accidentelle de la série pour $x = 0$, et, par conséquent, cela n'empêchera point le mouvement représenté par y d'être la limite de celui qui correspond à y_n.

20. Limite de T′. 1° *Réduction de* T′ *à un seul terme*. — Laissons de côté le terme $se^{\mu}I'$ du numérateur sous le signe $\int$. Quant aux autres, remplaçons I, I′ par leur module m, de même que les facteurs qui les multiplient, en les évaluant comme au n° **16**. En remplaçant θ par $-\theta$, ou $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$, les modules ne changent pas; il suffit donc d'intégrer de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, en doublant le résultat. On aura ainsi

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{(1 + e^{\beta}e^{-\alpha} + e^{\alpha} + 2e^{\beta})m}{\operatorname{mod} F(\mu)}\,d\theta.$$

Or le module de $F(\mu)$ dépasse $\frac{1}{3}e^{\alpha+\beta}$ et en outre on a vu au n° **16** que $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\,d\theta$, $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\,d\theta$ ont des limites nulles; il en sera donc de même de l'expression précédente. On peut donc réduire le numérateur à $se^{\mu}\Gamma'$ et même ajouter le terme $se^{-\mu}\Gamma'$ qui donnerait une limite nulle. Il en résulte

$$T' = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{sf\Gamma'\,d\theta}{fc+2} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{s}{c}\Gamma'\,d\theta - \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2s\Gamma'\,d\theta}{c(fc+2)}.$$

On verrait comme ci-dessus que le second terme a une limite nulle, en l'évaluant au moyen des modules et remarquant que celui de c, d'après le n° **15**, est supérieur à $\frac{1}{3}e^{\beta}$, β étant positif.

En substituant $\mu = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, on a, θ étant positif,

$$\frac{S}{c} = \frac{\sin(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\alpha-\beta\sqrt{-1})} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta\sqrt{-1})}{R^2},$$

où R^2 est le module de c; soit aussi $\Gamma' = v + v'\sqrt{-1}$, on pourra changer dans $\frac{S}{c}\Gamma'$ le signe de $\sqrt{-1}$, ajouter les résultats, et n'intégrer que de 0 à $\frac{1}{2}\pi$, ce qui donne

$$T' = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{v\sin 2\alpha - \frac{1}{2}v'(e^{2\beta} - e^{-2\beta})}{R^2}\,d\theta.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, puisque $R^2 > \frac{1}{9}e^{2\beta}$, et que v, v' sont inférieurs à m, on peut supprimer au numérateur les termes $v\sin 2\alpha$, $\frac{1}{2}v'e^{-2\beta}$, les limites correspondantes étant nulles et par conséquent il est indifférent de les remplacer par $-v'\cos 2\alpha$, $-\frac{1}{2}v'e^{-2\beta}$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} T' &= -\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{v'(\cos 2\alpha + \cos 2\beta\sqrt{-1})}{R^2}\,d\theta \\ &= -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{v'\cos(\alpha+\beta\sqrt{-1})\cos(\alpha-\beta\sqrt{-1})}{R^2}\,d\theta = -2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} v'\,d\theta. \end{aligned}$$

2° *Valeur de v' et* T'. — Il est préférable, dans la valeur (39) de Γ', de remplacer $1-x'$ par y, $\varphi(x')$ ou $\varphi(1-y)$ par $F(y)$, de sorte qu'on aura

$$F(0)=\varphi(1).$$

Alors T' sera déterminé par les relations

$$(51)\quad I'=v+v'\sqrt{-1}=\int_0^1 \mu e^{-\mu y} F(y)\,dy, \qquad -\tfrac{1}{2}T'=\int_0^{\frac{1}{2}\pi} v'\,d\theta.$$

En substituant $\mu=e^{\theta\sqrt{-1}}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, on a

$$I'=\rho\int_0^1 e^{-\alpha y} e^{-(\beta y-\theta)\sqrt{-1}} F(y)\,dy,$$

et le coefficient de $\sqrt{-1}$ est

$$v'=-\int_0^1 \rho e^{-\alpha y}\sin(\beta y-\theta)\,F(y)\,dy=\int_0^1 \frac{F(y)\,dy}{y}\,\frac{d}{d\theta}(e^{-\alpha y}\cos\beta y).$$

Il en résulte

$$-\tfrac{1}{2}T'=\int_0^1 \frac{\cos\rho y-e^{-\rho y}}{y}\,F(y)\,dy.$$

Remplaçons y par $\frac{y}{\rho}$ et posons

$$F\left(\frac{y}{\rho}\right)-F(0)=\psi(y):$$

nous aurons

$$-\tfrac{1}{2}T'=\int_0^{\rho}[F(0)+\psi(y)]\frac{\cos y-e^{-y}}{y}\,dy.$$

Le terme contenant $F(0)$ est la valeur que prend $-\frac{1}{2}T'$ quand $F(y)$ est constante et s'obtient plus simplement par les formules (51), qui donnent en ce cas

$$I'=F(0)\int_0^1 \mu e^{-\mu y}\,dy=F(0)(1-e^{-\mu})=F(0)(1-e^{-\alpha-\beta\sqrt{-1}});$$

le coefficient de $\sqrt{-1}$, dans cette expression, étant $e^{-\alpha}\sin\beta\,F(0)$, la valeur correspondante de $-\frac{1}{2}T'$ est

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} F(0)\,e^{-\alpha}\sin\beta\,d\theta.$$

Remplaçons par cette expression le terme en $F(0)$ de la valeur de $-\frac{1}{2}T'$, et partageons le reste de l'intégrale en deux autres, nous aurons

$$(52)\quad \left\{\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}T' &= E + E' + E'',\\ E &= F(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\rho\cos\theta}\sin(\rho\sin\theta)\,d\theta,\\ E' &= \int_0^{a} \frac{\cos y - e^{-y}}{y}\,\psi(y)\,dy,\\ E'' &= \int_0^{\rho} \frac{\cos y - e^{-y}}{y}\,\psi(y)\,dy, \end{aligned}\right.$$

a étant un nombre quelconque compris entre 0 et ρ.

3° *Principe général.* — Quoique la démonstration suivante soit en partie la répétition de raisonnements déjà employés aux n$^{\text{os}}$ **17** et **18**, il convient de la détailler, le principe étant plus général et comprenant les précédents.

Soit $f(y)$ une fonction dont les valeurs sont bien déterminées entre les limites A, B; admettons qu'entre ces nombres il existe i intervalles dans chacun desquels la fonction soit continue, constamment croissante ou décroissante.

Soit $f'(y)$ une autre fonction qui de A à B soit continue, positive et constamment décroissante; enfin soient N le maximum numérique de $f(y)$; a et b deux nombres compris entre A et B, et λ une constante quelconque.

On aura numériquement

$$(53)\qquad \int_0^{b} f(y)f'(y)\sin(y+\lambda)\,dy < 6iNf'(a).$$

En effet, désignons le premier membre par H.

Premier cas. — Si de a à b, $f(y)$ est continue, positive et toujours décroissante, il en sera de même de $f(y)f'(y)$ et aussi de $f(y-\lambda)f'(y-\lambda)$ quand y varie de $a+\lambda$ à $b+\lambda$; en remplaçant y par $y-\lambda$, on a

$$\mathrm{H}=\int_{b+\lambda}^{a+\lambda} f(y-\lambda)f'(y-\lambda)\sin y\,dy,$$

et, d'après la propriété préliminaire du n° **17**, on aura numériquement

$$\mathrm{H} < 2f(a)f'(a)$$

et, par suite,

$$\mathrm{H} < 2\mathrm{N}f'(a).$$

Deuxième cas. — Si $f(y)$ est continue, décroissante, mais non toujours positive, on aura

$$\mathrm{H}=\mathrm{H}'-\mathrm{H}''.$$

H′ et H″ se trouvant en remplaçant $f(y)$ par $\mathrm{N}+f(y)$ ou N, qui, toutes deux, rentrent dans le premier cas; le maximum de $\mathrm{N}+f(y)$ étant $2\mathrm{N}$, on aura numériquement

$$\mathrm{H}' < 4\mathrm{N}f'(a),\qquad \mathrm{H}'' < 2\mathrm{N}f'(a);$$

d'où

$$\mathrm{H} < 6\mathrm{N}f'(a).$$

Troisième cas. — Si $f(y)$ est continue, toujours croissante et de signe quelconque, $-f(y)$ sera décroissante, et l'on aura

$$6\mathrm{N}f'(a)$$

pour limite numérique de $-\mathrm{H}$ et, par suite, de H.

4° *Cas général.* — Il existera entre a et b au plus i intervalles dans chacun desquels $f(y)$ sera continue, constamment croissante ou décroissante. En partageant l'intégrale H en d'autres qui leur correspondent, et remarquant que les valeurs de $f'(y)$ correspondant au commencement des intervalles sont au plus égales à $f'(a)$, on aura

$$6Nf'(a),$$

pour la limite numérique d'une intégrale partielle, et $6iNf'(a)$ pour celle de II. C. Q. F. D.

5° *Limite de* T'. — Dans la valeur (52) de E'', si N est le maximum numérique de $\psi(y)$, on pourra appliquer la propriété (53) au terme

$$\int_a^\rho \frac{\sin(y+\frac{1}{2}\pi)}{y}\psi(y)\,dy,$$

en prenant $f'(y)=\frac{1}{y}$; sa limite numérique sera ainsi $\frac{6iN}{a}$; celle de

$$\int_a^\rho \frac{e^{-y}}{y}\psi(y)\,dy$$

est évidemment $\frac{N}{a}\int_a^\rho e^{-y}\,dy < \frac{N}{a}$. D'ailleurs $\psi(y)=F\left(\frac{y}{\rho}\right)-F(o)$, et cette fonction a les mêmes périodes de continuité croissante ou décroissante que $F(y)$; i est donc le nombre de périodes qui convient à $F(y)$ ou à $\varphi(x)$; en outre, $N =$ ou $< 2M$, M étant, comme précédemment, le maximum numérique de $F(y)$; celui de E'' est donc

$$\frac{2M(6i+1)}{a}.$$

Pour avoir celui de E', nous remplacerons $\psi(y)$ par son maximum M' entre $y=o$ et a, et $\frac{\cos y - e^{-y}}{y}$ par une valeur trop forte; de $y=o$ à $y=1$, ce sera son maximum M'' dans cet intervalle; de $y=1$ à $y=a$, ce sera $\frac{2}{y}$: on aura ainsi numériquement

$$E' < M'\int_0^1 M''\,dy + M'\int_0^a \frac{2\,dy}{y}$$

ou

$$E' < M'[M'' + 2l(a)];$$

M'' est une quantité purement numérique inutile à déterminer; M' est le maximum de $F\left(\frac{y}{\rho}\right) - F(0)$ quand y varie de 0 à a; comme $F(y)$ est continue, ce maximum converge vers 0 quand $\frac{a}{\rho}$ diminue.

Ainsi, étant donné un nombre γ aussi petit qu'on voudra, on pourra prendre a assez grand pour avoir $\frac{2M(bi+1)}{a} < \frac{1}{2}\gamma$, et ensuite, a étant ainsi choisi, on prendra $\rho > a$ comme on l'a supposé et de façon à rendre $\frac{a}{\rho}$ assez petit pour avoir $M' < \frac{\frac{1}{2}\gamma}{M'' + 2l(a)}$; on aura alors numériquement

$$E' < \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad E'' < \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad E' + E'' < \gamma,$$

et, par conséquent, cette expression converge vers 0 quand ρ augmente.

Quant à la valeur (52) de E, en remplaçant le sinus par 1, on a, numériquement,

$$E < F(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\rho\cos\theta}\,d\theta \qquad \text{ou} \qquad E < F(0)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\,d\theta,$$

et nous avons déjà vu que $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{-\alpha}\,d\theta$ converge vers 0 quand ρ augmente; il en sera donc de même pour E et, par suite, pour T'.

21. Complément de la démonstration de la convergence de la série (24) indiqué en note au n° **8**. — Il s'agit seulement de la première partie de cette série; en la désignant par S et posant $e^{-\mu}F'(\mu) = k$, on peut l'écrire

$$S = \sum \frac{e^{-\mu}X \int_0^1 e^{-\mu}X\varphi(x)\,dx \cos 6\mu^2 t}{k^2},$$

la somme Σ s'étendant aux valeurs réelles et positives de μ. La formule (19) donne

$$X = e^{\mu}(\sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x}) + e^{-\mu}(\sin\mu x + \cos\mu x - e^{\mu x})$$
$$+ c(e^{-\mu x} - e^{\mu x}) - 2\sin\mu(1-x) + se^{-\mu x} + se^{\mu x}.$$

En remarquant que $-c$ est positif, moindre que $\frac{2}{e^\mu}$, les termes de X, sauf le premier et le dernier, ont pour limite numérique 3, 2, 2, 1, d'où

$$e^{-\mu}X = P + Le^{-\mu}, \qquad P = \sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x} + se^{-\mu(1-x)},$$

tandis que L est compris entre ± 8.

De là résulte qu'à partir d'une certaine valeur de μ on a constamment $e^{-\mu}X < 4$, et, en même temps, k^2 converge vers 1. Ainsi, en supprimant les termes en L, on laisse de côté des séries évidemment très convergentes, et en désignant par S′ le reste de S, on a

$$S' = \sum \frac{PQ\cos b\mu^2 t}{k^2},$$

$$Q = \int_0^1 [\sin\mu x - \cos\mu x + e^{-\mu x} + se^{-\mu(1-x)}]\varphi(x)\,dx.$$

Or les deux derniers termes de cette expression, en remplaçant $\varphi(x)$ par son maximum M, sont inférieurs chacun à $\frac{M}{\mu}$; quant aux précédents, en y posant $\mu x = y$, chacun, d'après la propriété (53), en y faisant $f'(y) = 1$, est inférieur à $\frac{6iM}{\mu}$, i ayantl a signification déjà indiquée pour $\varphi(x)$. On aura donc $Q = \frac{\lambda}{\mu}$, λ étant inférieur à une limite numérique commune à tous les termes de la série S′. Ces termes décroissent donc sans limite et de plus n'ont pas, en général, le même signe. Cela rend probable la convergence de la série, mais ne la démontre pas rigoureusement.

Cette démonstration semble fort difficile si on laisse à $\varphi(x)$ la même généralité qu'au numéro précédent, sans employer la dérivée de la fonction, en la supposant discontinue, etc.

Mais, d'autre part, les conditions auxquelles elle a été assujettie au nº **8** ne sont pas toutes nécessaires. Il suffit d'admettre que la fonction $\varphi(x)$ s'annule avec x, que de $x = 0$ à $x = 1$ elle reste continue, et que sa dérivée reste finie.

En effet, on a

$$\int \mathrm{P}\varphi(x)\,dx = \frac{\mathrm{P}'}{\mu}\varphi(x) - \frac{1}{\mu}\int \mathrm{P}'\frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx,$$
$$\mathrm{P}' = se^{\mu(1-x)} - e^{-\mu x} - \sin\mu x - \cos\mu x;$$

comme $\varphi(0) = 0$, il en résulte

$$\mu\mathrm{Q} = \mu\int_0^1 \mathrm{P}\varphi(x)\,dx = -(e^{-\mu} + c)\varphi(1) - \int_0^1 \mathrm{P}'\frac{d\varphi(x)}{dx}\,dx.$$

Comme numériquement $c < 2e^{-\mu}$, si l'on remplaçait $\mu\mathrm{Q}$ par son premier terme seul, la série S′ serait très convergente; quant au second, on verrait, comme ci-dessus, qu'il a la forme $\frac{\lambda}{\mu}$; la portion correspondante de la série S′ aurait donc ses termes de la forme $\frac{\mu^2}{\lambda}$ et serait convergente.