JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALBERT RIBAUCOUR

Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 7 (1891), p. 219-270.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1891_4_7__219_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes (¹);

PAR M. ALBERT RIBAUCOUR,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

CHAPITRE X.

DERNIÈRES PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE DROITES. CORRESPONDANCE DES LIGNES ISOTROPES SUR DEUX SURFACES.

92. *Faisceau de droites liées aux plans tangents de la surface* (O) *et normales à des surfaces quelle que soit la forme de* (O). — Nous avons vu que, si des droites rayonnent des différents points de (O) ou sont couchées dans ses plans tangents, les faisceaux qu'elles engendrent ne peuvent être normaux à des surfaces sans garder cette propriété, quelle que soit la forme de (O). Cherchons s'il existe d'autres faisceaux formés de droites liées individuellement à chaque plan tangent de (O), qui jouissent aussi de la même propriété.

Chaque droite D rencontre le plan tangent en un point M; prenons pour ligne OX la droite OM et considérons un réseau orthogonal (u, v) satisfaisant à cette condition. Si l'on porte sur D, à partir de M, une longueur variable R, l'extrémité du segment doit décrire une surface normale à D. Désignons par a, b, c les cosinus que D fait avec les trois axes instantanés et par l la distance OM; les coordonnées du point appartenant à la surface trajectoire sont

$$\xi = l + a\mathrm{R}, \qquad \eta = b\mathrm{R}, \qquad \zeta = c\mathrm{R}, \qquad a^2 + b^2 + c^2 = 1;$$

(¹) Voir même Tome, p. 5.

on doit avoir, manifestement,

$$a\Delta X + b\Delta Y + c\Delta Z = 0$$

quels que soient du et dv; les formules (F) donnent

$$a\left(f + \frac{dl}{du}\right) + \frac{dR}{du} - bl\frac{df}{g\,dv} - clP = 0,$$

$$a\frac{dl}{dv} + \frac{dR}{dv} + bg + bl\frac{dg}{f\,du} + clgD = 0;$$

telles sont les équations qui régissent le problème. On voit qu'elles sont indépendantes de la forme de (O) dans les deux cas où l est nul [c'est l'hypothèse des rayons issus des différents points de (O)], et dans celui où c est nul [c'est l'hypothèse des droites couchées dans les plans tangents de (O)].

Dans ces deux cas on obtient l'intégrale des surfaces trajectoires en résolvant les équations

$$\frac{dR}{du} = -af, \qquad \frac{dR}{dv} = -bg \qquad \text{pour } l = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dR}{du} &= -a\left(f + \frac{dl}{du}\right) + bl\frac{df}{g\,dv} \\ \frac{dR}{dv} &= -a\frac{dl}{dv} - b\left(g + l\frac{dg}{f\,du}\right) \end{aligned}\right\} \text{pour } c = 0;$$

mais celles-ci sont elles-mêmes indépendantes de la forme (O), de telle sorte que, non seulement le faisceau des droites est normal à des surfaces, mais encore que l'intégrale de ces surfaces ne dépend pas de la forme de (O).

Il peut se faire pourtant que la première propriété persiste sans la seconde, et c'est ce cas particulier que nous visons.

Dans cette hypothèse, il faut éliminer R des équations où il figure, on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} P\frac{d}{dv}(cl) + gD\frac{d}{du}(cl) + cl\left[\frac{dP}{dv} + \frac{d}{du}(gD)\right] \\ + \frac{d}{dv}\left[bl\frac{df}{g\,dv} - a\left(f + \frac{dl}{du}\right)\right] + \frac{d}{du}\left[a\frac{dl}{dv} + b\left(g + \frac{l\,dg}{f\,du}\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

que l'on peut transformer, en vertu des équations (φ), ainsi

$$P\frac{d}{dv}(cl) + Qcl\frac{df}{g\,dv} - gD\left[cl\frac{dg}{g\,du} - \frac{d}{du}(cl)\right]$$
$$+ \frac{d}{dv}\left[bl\frac{df}{g\,dv} - a\left(f + \frac{dl}{du}\right)\right] + \frac{d}{du}\left[a\frac{dl}{dv} + b\left(g + l\frac{dg}{f\,du}\right)\right] = 0;$$

mais puisque nous voulons que ceci ait lieu quelle que soit la forme de (O), il faut que

$$cl = U, \qquad \frac{df}{g\,dv} = 0, \qquad \frac{dg}{g\,du} - \frac{U'}{U} = 0.$$

La surface (O) est applicable sur une surface de révolution dont les lignes (v) sont les méridiennes.

Le faisceau est déterminé par les trois équations

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad cl = U,$$
$$\frac{d}{dv}\left[a\left(1 + \frac{dl}{du}\right)\right] = \frac{d}{du}\left[a\frac{dl}{dv} + b(U + lU')\right],$$

que l'on ramène à une relation différentielle en l et φ en posant

$$a\left(1 + \frac{dl}{du}\right) = \frac{d\varphi}{du},$$
$$a\frac{dl}{dv} + b(U + lU') = \frac{d\varphi}{dv}.$$

93. *Formule donnant les images principales d'un faisceau de droites quelconque.* — Il peut être utile dans certains cas de connaître les formules qui déterminent les images principales du faisceau de droites le plus général; la condition pour que ces images soient conjuguées présente une véritable simplicité, c'est pourquoi nous allons les déterminer, en supposant la plus grande généralité possible.

Soit R une droite dont les équations sont

$$\frac{X - \xi}{a} = \frac{Y - \eta}{b} = Z,$$

a et b n'ayant plus la même signification que dans l'article précédent; ξ et η sont les coordonnées instantanées du point où la droite perce le plan tangent en O.

Exprimons que si l'on suit le chemin $(du\,dv)$, les droites se rencontrent consécutivement. On aura, comme au n° **81**,

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{Z}\left[-du\left(f+\dfrac{d\xi}{du}+\eta\,\dfrac{df}{g\,dv}\right)+dv\left(-\dfrac{d\xi}{dv}+\eta\,\dfrac{dg}{f\,du}\right)\right]\\ \qquad -du\left(b\,\dfrac{d\xi}{g\,dv}+P+\dfrac{da}{du}\right)+dv\left(b\,\dfrac{dg}{f\,du}+gD-\dfrac{da}{dv}\right)\end{array}\right\}}{a}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{l}\dfrac{1}{Z}\left[-dv\left(g+\dfrac{d\eta}{dv}+\xi\,\dfrac{dg}{f\,du}\right)+du\left(-\dfrac{d\eta}{du}+\xi\,\dfrac{df}{g\,dv}\right)\right]\\ \qquad -dv\left(a\,\dfrac{dg}{f\,du}+Q+\dfrac{db}{dv}\right)+du\left(a\,\dfrac{df}{g\,dv}+fD-\dfrac{db}{du}\right)\end{array}\right\}}{b}$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{Z}[du(P\xi-fD\eta)+dv(Q\eta-gD\xi)]\\ &\quad+du(aP-bfD)+dv(bQ-agD);\end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned}
M&=-\left(f+\frac{d\xi}{du}+\eta\,\frac{df}{g\,dv}\right), & M'&=-\frac{d\eta}{du}+\xi\,\frac{df}{g\,dv},\\
N&=-\frac{d\xi}{dv}+\eta\,\frac{dg}{f\,du}, & N'&=-\left(g+\frac{d\eta}{dv}+\xi\,\frac{dg}{f\,du}\right),\\
m&=-\left(b\,\frac{df}{g\,dv}+P+\frac{da}{du}\right), & m'&=a\,\frac{df}{g\,dv}+fD-\frac{db}{du},\\
n&=b\,\frac{dg}{f\,du}+gD-\frac{da}{dv}, & n'&=-\left(a\,\frac{dg}{f\,du}+Q+\frac{db}{dv}\right),\\
R&=P\xi-fD\eta, & r&=Pa-fDb,\\
S&=Q\eta-gD\xi; & s&=Qb-gDa;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu&=b\,\frac{df}{g\,dv}+\frac{da}{du},\\
\mu'&=a\,\frac{df}{g\,dv}-\frac{db}{du},\\
\nu&=b\,\frac{dg}{f\,du}-\frac{da}{dv},\\
\nu'&=a\,\frac{dg}{f\,du}+\frac{db}{dv}.
\end{aligned}$$

L'équation des images principales devient

$$du^2\left[\begin{matrix}\mathrm{M}(m'-br)\\ -\mathrm{M}'(m-ar)\end{matrix}+\mathrm{R}(bm-am')\right]+dv^2\left[\begin{matrix}\mathrm{N}(n'-bs)\\ -\mathrm{N}'(n-as)\end{matrix}+\mathrm{S}(bn-an')\right]$$
$$+du\,dv\left[\begin{matrix}\mathrm{M}(n'-bs)-\mathrm{M}'(n-as)\\ +\mathrm{N}(m'-br)-\mathrm{N}'(m-ar)\end{matrix}+\mathrm{R}(bn-an')+\mathrm{S}(bm-am')\right]=0.$$

La condition qui exprime que les images principales sont conjuguées est, ordonnée suivant les paramètres définissant la forme de (O),

$$-\mathrm{P}[f(\mathrm{N}\nu'+\mathrm{N}'\nu)+gb\xi(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)]+\mathrm{Q}[g(\mathrm{M}\mu'+\mathrm{M}'\mu)+fa\eta(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)]$$
$$+fg\mathrm{D}[(\mathrm{N}\mu'+\mathrm{N}'\mu)-(\mathrm{M}\nu'+\mathrm{M}'\nu)-(a\xi-b\eta)(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)]$$
$$+(\mathrm{PQ}-fg\mathrm{D}^2)[-ab(g\mathrm{M}+f\mathrm{N}')+(1+a^2)g\mathrm{M}'-g\xi(b\mu+a\mu')$$
$$-(1+b^2)f\mathrm{N}+f\eta(b\nu+a\nu')]=0.$$

Nous aurons l'occasion d'appliquer ces formules dans l'étude du mouvement d'un corps assujetti à quatre conditions.

94. *Deux surfaces se correspondent avec parallélisme des plans tangents. Dans quel cas les lignes isotropes se correspondent-elles? Deux systèmes.* — Nous avons annoncé, au n° **47**, que nous exposerions une généralisation de la correspondance qui existe entre la sphère et les surfaces à étendue minima; nous sommes à présent en mesure de l'établir. Le problème doit être ainsi posé : *On fait correspondre deux surfaces avec parallélisme des plans tangents, dans quelles conditions les lignes isotropes se correspondent-elles?*

Soient (O) et (N) les deux surfaces, ξ, η, ζ étant les coordonnées du point N; on a d'abord, en prenant pour (u, v) le réseau des lignes de courbure,

$$\xi=\frac{d\zeta}{\mathrm{P}\,du},\qquad \eta=\frac{d\zeta}{\mathrm{Q}\,dv};$$

on peut poser

$$\Delta\mathrm{X}=\mathrm{A}\,du+\mathrm{B}\,dv,\qquad \Delta\mathrm{Y}=\mathrm{B}'\,du+\mathrm{A}'\,dv,$$

où A, B, B′, A′ ont les valeurs

$$A = f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta + P\zeta, \qquad B = \frac{d\xi}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\eta,$$

$$B' = \frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi, \qquad A' = g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi + Q\zeta.$$

Le dS^2 de (N) a pour expression

$$dS^2 = (A^2 + B'^2)\,du^2 + (B^2 + A'^2)\,dv^2 + 2(AB + A'B')\,du\,dv,$$

et, si les lignes isotropes se correspondent sur (N) et (O), on a

$$AB + A'B' = 0,$$

$$\frac{A^2 + B'^2}{f^2} = \frac{B^2 + A'^2}{g^2},$$

système que l'on peut écrire sous la forme

$$\left[\left(\frac{A}{f} + \frac{A'}{g}\right) + i\left(\frac{B}{g} - \frac{B'}{f}\right)\right]\left[\left(\frac{A}{f} - \frac{A'}{g}\right) + i\left(\frac{B}{g} + \frac{B'}{f}\right)\right] = 0,$$

$$\left[\left(\frac{A}{f} + \frac{A'}{g}\right) - i\left(\frac{B}{g} - \frac{B'}{f}\right)\right]\left[\left(\frac{A}{f} - \frac{A'}{g}\right) - i\left(\frac{B}{g} + \frac{B'}{f}\right)\right] = 0,$$

et si l'on se restreint aux transformations réelles, il faut que l'on ait l'un des systèmes de conditions que voici

$$\frac{A}{f} + \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} - \frac{B'}{f} = 0$$

ou

$$\frac{A}{f} - \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} + \frac{B'}{f} = 0,$$

à moins que les quatre premiers membres ne soient nuls à la fois; mais ce cas particulier ne peut être considéré parce qu'il conduit à prendre pour (N) un point fixe.

95. *Examen du premier système : les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes. Relation entre les rayons de courbure principaux; autre théorème sur la question.* — Examinons d'abord le système de correspondance dans lequel

$$\frac{A}{f} + \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} - \frac{B'}{f} = 0.$$

Si l'on remplace ξ et η par leurs valeurs en ζ, on trouve

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g}{P}\frac{d\zeta}{du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{f}{Q}\frac{d\zeta}{dv}\right) + fg\left[2 + \zeta\left(\frac{P}{f} + \frac{Q}{g}\right)\right] = 0,$$

$$\left(\frac{f}{P} - \frac{g}{Q}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{du\,dv} - \frac{d\zeta}{du}\frac{dP}{P\,dv} - \frac{d\zeta}{dv}\frac{dQ}{Q\,du}\right) = 0, \qquad \text{soit} \qquad B = B' = 0.$$

Le cas particulier de la sphère se met de lui-même en évidence.

Dans l'hypothèse où (O) est une sphère, la première équation n'est autre chose que l'équation différentielle des surfaces à étendue minima. Dans le cas général, on voit que les lignes de courbure de (N) et (O) se correspondent : c'est ce qui est exprimé par la seconde condition. La première équation a un sens géométrique très remarquable : puisque les lignes de courbure se correspondent, $A\,du$ et $A'\,dv$ sont les éléments de ces lignes correspondant respectivement à $f\,du$ et $g\,dv$. Désignons par R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de (O) et par R'_1 et R'_2 ceux de (N); la première condition équivaut à la relation

$$\frac{R'_1}{R_1} + \frac{R'_2}{R_2} = 0.$$

Ainsi : *lorsque deux surfaces* (O) *et* (N) *se correspondent avec parallélisme des plans tangents et par leurs lignes isotropes : 1° elles ont même image sphérique; 2° la somme algébrique des quotients obtenus en divisant les rayons de courbure principaux de l'une par les rayons de courbure principaux de l'autre est nulle.*

On peut donner une autre interprétation géométrique à ce qui précède. Joignons les points N et O par une droite, celle-ci engendrera un faisceau; soient F_1 et F_2 les foyers. Il est clair que les lignes de courbure sont les traces principales de ce faisceau sur (O) et sur (N), mais on a

$$\frac{2}{ON} = \frac{1}{OF_1} + \frac{1}{OF_2}.$$

Ainsi, les foyers du faisceau sont harmoniques conjugués des deux points O et N.

96. *Deuxième système. Les surfaces dérivées sont homothétiques.* — Avant d'aller plus loin, il convient de se débarrasser du second cas, correspondant au système

$$\frac{A}{f} - \frac{A'}{g} = 0, \qquad \frac{B}{g} + \frac{B'}{f} = 0;$$

la seconde équation donne

$$\left(\frac{f}{P} + \frac{g}{Q}\right)\left(\frac{d^2\zeta}{du\,dv} - \frac{d\zeta}{du}\frac{dP}{P\,dv} - \frac{d\zeta}{dv}\frac{dQ}{Q\,du}\right) = 0,$$

donc les lignes de courbure se correspondent encore; mais la première équation conduirait à

$$OF_1 = OF_2,$$

de telle sorte que les foyers du faisceau ON coïncident, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que (O) et (N) sont homothétiques. Il n'y a donc que le premier système qui puisse conduire à un résultat non évident.

97. *Équation du problème à l'aide de l'image sphérique.* — Puisqu'il y a deux équations différentielles qui régissent la question, il est visible que l'on ne peut pas prendre arbitrairement même l'une des surfaces. Donnons-nous l'image sphérique du couple (O) (N) et cherchons à le déterminer. Soient ζ et ζ' les distances du centre de la sphère de rayon unité. En général, on a pour les éléments des lignes de courbure

$$\Delta X = du\left[PZ + \frac{d}{du}\left(\frac{dZ}{P\,du}\right) + \frac{dP}{Q\,dv}\frac{dZ}{Q\,dv}\right] = A\,du,$$

$$\Delta Y = dv\left[QZ + \frac{d}{dv}\left(\frac{dZ}{Q\,dv}\right) + \frac{dQ}{P\,du}\frac{dZ}{P\,du}\right] = A'\,dv.$$

Les équations du problème sont donc

$$\frac{P\zeta + \frac{d}{du}\left(\frac{d\zeta}{P\,du}\right) + \frac{dP}{Q\,dv}\frac{d\zeta}{Q\,dv}}{P\zeta' + \frac{d}{du}\left(\frac{d\zeta'}{P\,du}\right) + \frac{dP}{P\,du}\frac{d\zeta'}{P\,dv}} + \frac{Q\zeta + \frac{d}{dv}\left(\frac{d\zeta}{Q\,dv}\right) + \frac{dQ}{P\,du}\frac{d\zeta}{P\,du}}{Q\zeta' + \frac{d}{dv}\left(\frac{d\zeta'}{Q\,dv}\right) + \frac{dQ}{P\,du}\frac{d\zeta'}{P\,du}} = 0,$$

$$PQ + \frac{d}{du}\left(\frac{dQ}{P\,du}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{dP}{Q\,dv}\right) = 0;$$

de plus, ζ et ζ' sont des solutions de l'équation (16).

98. *Réduction des équations du problème à des formes connues.* — Nous n'avons pu résoudre le problème complètement, il semble offrir une véritable résistance; mais, avant d'abandonner le sujet, il convient de faire remarquer que l'on peut toujours prendre pour (N) un point fixe, de telle sorte que le ζ d'un point satisfait aux équations du n° **95**. On peut profiter de cette remarque pour réduire un peu le problème. Si, en effet, au lieu de ζ nous prenons pour variable la distance p d'un point fixe aux plans tangents de (N), il viendra

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2p}{du\,dv} = \dfrac{dp}{du}\dfrac{dP}{P\,dv} + \dfrac{dp}{dv}\dfrac{dQ}{Q\,du}, \\[2ex] \dfrac{d}{du}\left(\dfrac{g}{P}\dfrac{dp}{du}\right) + \dfrac{d}{dv}\left(\dfrac{f}{Q}\dfrac{dp}{dv}\right) + fgp\left(\dfrac{P}{f} + \dfrac{Q}{g}\right) = 0, \end{cases}$$

et l'on voit que le terme indépendant a disparu. Mais cette dernière équation, ainsi réduite, n'est autre chose que l'équation déterminant les couples de surfaces applicables l'une sur l'autre, ainsi que nous le verrons plus loin. Nous aurons donc à faire, à propos de cette théorie, des rapprochements avec la question que nous venons de traiter.

CHAPITRE XI.

Théorie des systèmes cycliques.

99. *Définition des systèmes cycliques résultant du théorème de Dupin et des intégrales trouvées précédemment.* — Il résulte du théorème de Ch. Dupin sur les faisceaux de droites symétriques par rapport aux plans tangents de la surface de référence que toutes les fois que les traces principales d'un faisceau (R), lieu des normales à une surface, découpent (O) suivant un réseau conjugué, les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes d'une enveloppe de sphères dont une des nappes est trajectoire orthogonale des droites R. Il est naturel de prendre le rayon de la sphère enveloppe pour variable et de chercher l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait cette fonction, mais cette équation n'est guère maniable, et il y a intérêt à opérer comme nous l'avons fait au n° **80** pour trouver des faisceaux jouissant de la propriété indiquée.

Considérons donc les deux nappes d'une enveloppe de sphères tangentes à (O), dont les centres sont sur (S); soit (R) la seconde nappe; supposons enfin que les lignes de courbure se correspondent sur (O) et (R). Si C représente l'inverse du segment OS, on a (n° **80**)

$$\frac{dC}{du} = -\frac{d\varphi}{\varphi\, du}\left(C + \frac{P}{f}\right), \qquad \frac{dC}{dv} = -\frac{d\varphi}{\varphi\, dv}\left(C + \frac{Q}{g}\right).$$

Si M et N sont les points où le plan tangent à (S) en S rencontre les tangentes OX, OY aux lignes de courbure de (O) prises pour axes,

$$\frac{1}{OM} = -\frac{d\varphi}{f\varphi\, du}, \qquad \frac{1}{ON} = -\frac{d\varphi}{g\varphi\, dv}.$$

Enfin, la quantité φ elle-même vérifie l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{du\, dv} = \frac{d\varphi}{du}\frac{df}{f\, dv} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dg}{g\, du}$$

qui régit tout le problème.

On voit que, lorsqu'on connaîtra une valeur de φ satisfaisant à cette condition, on obtiendra C par des quadratures; il y a donc tout un système de valeurs de C correspondant à cette valeur de φ. Par conséquent, on connaîtra une famille de surfaces telles que (R), sur lesquelles les lignes de courbure correspondront à celles de (O). Mais le plan tangent à (R) contient MN qui ne dépend que de φ; il en résulte que le lieu des points R, pour toutes les valeurs de C, est le cercle normal en O à (O) dont le centre est sur MN.

On voit facilement que toutes les surfaces (R) normales à ce cercle font partie d'un système triplement orthogonal. Nous appellerons *système cyclique* un système triplement orthogonal dans lequel les trajectoires des surfaces d'une famille sont des cercles.

100. *Si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une infinité et engendrent un système cyclique.* — Avant de tirer parti de ce qui précède, il convient d'établir que la façon dont nous avons été amené à considérer les systèmes cycliques donne ceux-ci avec une généralité complète.

Considérons des cercles normaux à (O) en chacun de ses points; on peut les définir comme l'intersection de sphères ayant leurs centres en deux points M et N des tangentes OX et OY aux lignes de courbure, et dont les rayons sont $\frac{1}{A}$ et $\frac{1}{B}$. Soit (R) une surface normale à la famille des cercles; si l'on mène la normale à (R), elle rencontrera OZ en un point S; égalons OS à $\frac{1}{C}$. Il est clair que la surface (R) existera si le plan tangent au lieu des points S passe par MN; on devra donc poser

$$\frac{dC}{du} = Af\left(C + \frac{P}{f}\right), \qquad \frac{dC}{dv} = Bg\left(C + \frac{P}{g}\right).$$

Mais ces équations ne sont possibles qu'autant que les dérivées $\frac{d^2C}{du\,dv}$ qu'on déduit de chacune soient égales, c'est-à-dire si

$$(32)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[d\,\frac{(Af)}{dv} - d\,\frac{(Bg)}{du}\right]C + Af\,\frac{d}{dv}\left(\frac{P}{f}\right) - Bg\,\frac{d}{du}\left(\frac{Q}{g}\right) \\ &\qquad\qquad + \frac{P}{f}\,\frac{\partial(Af)}{\partial u} - \frac{Q}{g}\,\frac{\partial(Bg)}{\partial u} - \left(\frac{P}{f} - \frac{Q}{g}\right)AfCg = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation signifie qu'étant donnée une famille de cercles normaux à (O) et d'ailleurs complètement arbitraires, il existe toujours une seconde surface (R) normale aux faisceaux de cercles, mais seulement dans une étendue infiniment petite. Le lieu des points des cercles par lesquels on peut mener cet élément normal n'est pas en effet, généralement, une trajectoire des cercles.

Mais (32) met en évidence un résultat capital, à savoir que, s'il y a deux valeurs de C répondant à la question, il y en a une infinité, car cela ne peut avoir lieu que si

$$\frac{d}{dv}(\mathrm{A}f) - \frac{d}{du}(\mathrm{B}g) = 0,$$

$$\mathrm{A}f\frac{d}{dv}\frac{\mathrm{P}}{f} - \mathrm{B}g\frac{d}{du}\left(\frac{\mathrm{Q}}{g}\right) + \left(\frac{\mathrm{P}}{f} - \frac{\mathrm{Q}}{g}\right)\left[\frac{\partial(\mathrm{A}f)}{\partial v} - \mathrm{A}f\mathrm{C}g\right] = 0.$$

On retrouve ainsi les équations du n° **80**, et partant le système canonique du n° **99**.

On résumera ce qui précède et l'on en fera saisir l'importance géométrique en disant :

Si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à toute une famille de surfaces qui font partie d'un système triplement orthogonal (système cyclique).

101. *Équation des systèmes cycliques en partant d'une des surfaces trajectoires. Les cercles osculateurs des trajectoires, dans un système triple orthogonal, le long d'une de leurs surfaces normales, engendrent un système cyclique.* — On obtiendra tous les systèmes cycliques contenant une surface (O) en intégrant sur celle-ci l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{du\,dv} = \frac{d\varphi}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{d\varphi}{dv}\frac{dg}{g\,du},$$

qui est celle des systèmes triplement orthogonaux, des surfaces ayant même image sphérique, etc., etc. Les trajectoires des cercles s'obtiendront par des quadratures, pourvu, bien entendu, que l'on connaisse les lignes de courbure de (O). Il paraîtra sans doute digne de remarque que d'un système triple orthogonal quelconque on puisse dériver un système cyclique, mais ceci tient à une propriété géométrique que nous allons mettre en lumière.

Reportons-nous aux formules du n° **28** et soit

$$dS^2 = \mathrm{H}^2\,d\rho^2 + \mathrm{H}_1^2\,d\rho_1^2 + \mathrm{H}_2^2\,d\rho_2^2$$

le dS^2 d'un système triplement orthogonal, dans lequel $H\,d\rho$ est l'élément OO′ qui sépare deux surfaces infiniment voisines, dont fait partie (O). Le plan normal à la trajectoire OO′, au point O′, d'après les formules (Φ''), a pour équation

$$Z' = Z - H\,d\rho - X\frac{dH}{H_1\,d\rho_1}\,d\rho - Y\frac{dH}{H_2\,d\rho_2}\,d\rho = 0.$$

Si l'on désigne par M et N les points où il rencontre les droites OX et OY, on a

$$\frac{1}{OM} = -\frac{1}{H_1}\frac{dH}{H\,d\rho_1}, \qquad \frac{1}{ON} = -\frac{1}{H_2}\frac{dH}{H\,d\rho_2},$$

ou, en prenant les notations habituelles sur (O),

$$\frac{1}{OM} = -\frac{1}{f}\frac{dH}{H\,du}, \qquad \frac{1}{ON} = -\frac{1}{g}\frac{dH}{H\,dv}.$$

On remarquera que la droite MN n'est autre chose que la polaire de la trajectoire OO′, c'est-à-dire que si l'on décrit des sphères ayant leurs centres en M et N et passant par O, elles se couperont suivant le cercle osculateur de la trajectoire des surfaces de même famille que (O), issue de O.

Enfin, si l'on rapproche cela de ce qui a été dit plus haut, on obtient ce théorème :

Étant donné un système triplement orthogonal de surfaces, si l'on considère les cercles osculateurs des trajectoires d'une famille, tout le long d'une surface normale à ces courbes, tous les cercles donnent naissance à un système cyclique, c'est-à-dire qu'ils sont eux-mêmes normaux à une infinité de surfaces.

On aurait pu d'ailleurs prévoir ce résultat, en remarquant que les cercles osculateurs aux trajectoires peuvent être considérés (à la limite) comme normaux à deux surfaces infiniment voisines sur lesquelles les lignes de courbure se correspondent.

102. *A tout système cyclique correspond une infinité d'autres systèmes normaux à la sphère.* — Si nous reprenons les équations du n° **99**, nous pouvons les écrire sous la forme

$$\frac{d}{du}(C\varphi) = \frac{d\varphi}{du}\frac{P}{f}, \qquad \frac{d}{dv}(C\varphi) = \frac{d\varphi}{dv}\frac{Q}{g}$$

et, si l'on considère $C\varphi$ comme une nouvelle variable, que l'on élimine φ, il vient

$$\frac{d^2}{du\,dv}(C\varphi) = \frac{d}{du}(C\varphi)\frac{dP}{P\,dv} + \frac{d}{dv}(C\varphi)\frac{dQ}{Q\,du};$$

par conséquent, *la connaissance de deux trajectoires d'un système cyclique équivaut à celle d'un système cyclique normal à la sphère.* Ceci demande explication. Soient (O) et (R) deux surfaces trajectoires d'un système cyclique, soient ω et ρ les images de O et de R sur la sphère de rayon unité; on peut faire passer un cercle normal à la sphère en ω et ρ. Il résulte de ce qui précède que tous les cercles ainsi construits engendrent un système cyclique.

103. *L'intégrale des surfaces trajectoires est connue si l'une d'entre elles est plane ou sphérique.* — Lorsque la surface (O) est une sphère ou un plan, il n'est pas besoin de se donner les lignes remplaçant les lignes de courbure pour trouver les surfaces trajectoires; on a, dans ce cas (pour la sphère, par exemple),

$$C\varphi = K\varphi + K_1,$$

où K et K_1 désignent des constantes; K est l'inverse du rayon de la sphère.

104. *Systèmes cycliques dérivés les uns des autres. Correspondance des trajectoires.* — Si l'on remplace φ par $\varphi + K$, où K est constant, l'équation en φ ne varie pas, mais on obtient un nouveau système cyclique. Les trajectoires des deux systèmes sont liées entre elles par une relation fort simple. On a manifestement

$$C\varphi = C'(\varphi + K),$$

en désignant par C′ ce que devient C lorsque φ s'accroît de K.

On vérifie très facilement qu'aux points correspondants des trajectoires qui en dérivent les normales sont parallèles; par conséquent : *les trajectoires du second système ont même image sphérique que celles du premier système. La droite qui joint les points correspondants passe toujours par le point* O.

103. *Intégrale des surfaces trajectoires quand on connaît trois d'entre elles. Diverses formes de l'intégrale.* — Nous avons dit qu'il était nécessaire de connaître les lignes de courbure d'une surface trajectoire pour ramener aux quadratures l'intégration des autres surfaces trajectoires d'un système cyclique; mais, si l'on connaît trois trajectoires, on peut construire toutes les autres, même sans effectuer de quadratures; c'est ce que j'ai établi en détail dans une Note insérée aux *Comptes rendus*, le 24 février 1873; sans établir les démonstrations, il convient de rappeler les résultats :

Les normales à trois surfaces trajectoires rencontrent la normale à une quatrième trajectoire, en trois points qui forment avec le pied de celle-ci un groupe dont le rapport anharmonique est constant.

Appelons *corde* toute droite joignant à chaque instant les points correspondants de deux trajectoires, et appelons ces points *points limites*.

Que l'on prolonge la normale à une trajectoire jusqu'à la rencontre d'une corde, et que du point d'intersection l'on mène une seconde tangente au cercle, le lieu des points de contact est une surface trajectoire.

Sur une corde donnée, deux points, intersections des normales à deux couples de surfaces trajectoires associées, forment avec les *points limites un groupe dont le rapport anharmonique est constant.*

La droite qui joint deux points, intersections des normales à deux courbes de surfaces trajectoires associées, est une corde.

106. *Sur les deux manières dont on peut engendrer les systèmes cycliques normaux à un plan.* — Les systèmes cycliques les plus simples sont ceux qui dérivent de la sphère ou du plan : que l'on construise des cercles normaux à une surface arbitraire et à une sphère, et l'on constituera un système cyclique; en effet, un cercle ne peut être normal à une sphère sans la couper normalement une seconde fois. Donc chacun des cercles sera normal à trois trajectoires et, en vertu de ce qui a été dit plus haut, il sera aussi normal à une infinité de surfaces.

Pour trouver un système cyclique normal à un plan, on peut aussi partir d'une surface arbitraire que l'on considérera comme le lieu de l'intersection de la normale au plan et d'une normale à une trajectoire associée quelconque. Les distances au plan des points correspondants de toutes les surfaces qu'on obtient en faisant varier la trajectoire associée sont proportionnelles entre elles. Les lignes qui correspondent sur ces surfaces aux lignes de courbure des surfaces trajectoires forment des réseaux conjugués assujettis à la condition de se projeter orthogonalement sur le plan.

107. *Recherche du réseau conjugué tracé sur une surface du deuxième ordre et qui se projette sur un plan suivant un réseau orthogonal.* — Le problème de la recherche sur une surface donnée du réseau conjugué qui se projette sur un plan suivant un réseau orthogonal présente de l'intérêt par lui-même, et, pour montrer comment on peut tirer, même des formules générales, des résultats qui semblent ne dépendre que de la Géométrie cartésienne, nous résoudrons la question pour les surfaces du second degré.

Mais d'abord remarquons que, si (u, v) représente sur le plan le réseau orthogonal cherché, on a pour le Z de la surface (n° **23**)

$$\frac{d^2 Z}{du\,dv} = \frac{dZ}{du}\frac{df}{f\,dv} + \frac{dZ}{dv}\frac{dg}{g\,du}.$$

La forme même de cette équation fait ressortir qu'on ne changera pas le réseau si l'on ajoute au Z de la surface le Z d'une autre surface répondant à la question, et cette observation n'est pas oiseuse, car le plan constitue toujours une solution : on pourra donc retrancher ou ajouter le Z d'un plan à celui de la surface donnée; on sait que dans tous les cas la projection du réseau cherché ne varie pas.

Mettons ceci à profit pour les surfaces du second ordre. Leur équation peut s'écrire

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-(\mathrm{A}x+\mathrm{B}y-\mathrm{C}z)^2=0,$$

en mettant en évidence le cylindre circonscrit dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

et le plan de contact

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y-\mathrm{C}z=0.$$

On voit que l'on peut écrire

$$\mathrm{C}z=\mathrm{A}x+\mathrm{B}y\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1};$$

mais puisqu'on est en droit de retrancher l'ordonnée d'un plan, le réseau ne sera pas altéré (en projection) si l'on résout l'équation dans le cas où

$$\mathrm{C}z=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1},$$

c'est-à-dire en supposant que le plan est un des plans principaux de l'ellipsoïde. Rien n'est plus simple que d'achever par l'analyse, mais notre théorie se suffit à elle-même; en effet, nous sommes encore libre de donner à C telle valeur que nous voulons; supposons-la infiniment petite; l'extrémité des segments décrit alors une surface infiniment voisine du plan, et sur laquelle on est en droit de regarder le réseau conjugué qui se projette suivant (u, v) comme le réseau des lignes de courbure. Si l'on passe à la limite, le réseau cherché coïncide avec les lignes de courbure de la surface du second degré infiniment aplatie

$$0=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1},$$

c'est-à-dire avec les coniques homofocales à la trace du cylindre circonscrit.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si de tous les points d'une surface du second degré comme centres, on décrit des sphères tangentes à un plan, les lignes de courbure de la seconde nappe de l'enveloppe de ces sphères ont pour correspondantes sur le plan les coniques homofocales au contour apparent de la surface du second degré.

108. *Faisceaux dont les traces principales sont conjuguées sur une surface du second ordre. Théorèmes sur les surfaces du second ordre homofocales.* — Dans ce qui précède nous avons déterminé des faisceaux (R) dont les traces principales sont conjuguées, en introduisant leurs surfaces trajectoires, mais il est quelquefois plus avantageux de les considérer isolément : c'est ce que nous avons fait dans une étude consacrée aux surfaces du second degré (*Comptes rendus*, t. LXXIV, p. 1489 et 1570) et qu'on peut résumer ainsi :

Les traces principales d'un faisceau (R) *sur une surface du second degré ne peuvent être conjuguées à la première rencontre sans l'être également à la seconde.*

Les traces principales ne peuvent être conjuguées sur deux surfaces homofocales sans l'être sur toutes les autres surfaces homofocales; dans ce cas, les droites sont normales à des surfaces.

Réciproquement, *si les normales d'une surface donnent lieu, sur une surface du second ordre, à des traces principales conjuguées, il en est de même sur toutes les surfaces homofocales.*

Dans ce cas, *les développables suivant lesquelles on peut ranger les droites du faisceau sont toutes individuellement circonscrites à des surfaces du second degré homofocales aux précédentes.*

Ces résultats très généraux trouvent une application intéressante aux surfaces anallagmatiques du quatrième ordre.

Nous aurons l'occasion de les étendre encore dans un travail que nous produirons ultérieurement.

CHAPITRE XII.

VARIATION DES COURBURES $\frac{1}{R_1 R_2}$ ET $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ QUAND ON PASSE D'UNE SURFACE A UNE SURFACE INFINIMENT VOISINE.

109. *Mise en équation du problème.* — Quand on veut étudier une famille de surfaces définies par certaines conditions géométriques ou analytiques, on commence toujours par chercher à déduire d'une surface de la famille la surface infiniment voisine; c'est ainsi que nous avons procédé pour établir la théorie des systèmes triplement orthogonaux. Il est nécessaire, bien souvent, d'exprimer que certaines conditions relatives à la courbure persistent sur les surfaces de la famille; c'est pourquoi nous allons établir la variation des courbures dans le système de transformation le plus général.

Soit tracé sur la surface de référence un réseau orthogonal (u, v) quelconque; faisons correspondre aux points de (O) les points d'une surface (S), les coordonnées du point S étant

$$\xi = \alpha\, d\rho, \qquad \eta = \beta\, d\rho, \qquad \zeta = \gamma\, d\rho,$$

où $d\rho$ désigne l'accroissement du paramètre individuel de (O) lorsqu'on passe à (S).

Les équations de la normale à (S) sont (aux infiniment petits du second ordre près)

$$\frac{X-\alpha\, d\rho}{-g\left(\frac{d\gamma}{du}-P\alpha+fD\beta\right)} = \frac{Y-\beta\, d\rho}{-f\left(\frac{d\gamma}{dv}-Q\beta+gD\alpha\right)}$$
$$= \frac{Z-\gamma\, d\rho}{fg+\left[f\left(\frac{d\beta}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\alpha+Q\zeta\right)+g\left(\frac{d\alpha}{du}+\frac{df}{g\,dv}\beta+P\zeta\right)\right]d\rho}.$$

Posons

$$g\left(\frac{d\gamma}{du} - P\alpha + f D\beta\right) = \pi, \qquad f\left(\frac{d\gamma}{dv} - Q\beta + g D\alpha\right) = \pi',$$

$$f\left(\frac{d\beta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\alpha + Q\zeta\right) + g\left(\frac{d\alpha}{du} + \frac{df}{g\,dv}\beta + P\zeta\right) = k,$$

de telle sorte que les équations de la normale s'écriront

$$\frac{X - \alpha\,d\rho}{\pi\,d\rho} = \frac{Y - \beta\,d\rho}{\pi'\,d\rho} = \frac{-Z + \gamma\,d\rho}{fg + k\,d\rho}.$$

Il s'agit de former l'équation des rayons de courbure principaux au point S. Afin d'avoir des calculs bien ordonnés, nous emploierons une méthode particulière susceptible d'applications fréquentes, d'ailleurs.

110. *Artifice propre à la résolution de questions similaires.* — Considérons une surface parallèle à (S) et distante de celle-ci de l; l'aire de cette surface, correspondant à une aire infiniment petite de (S) ou de (O), est infiniment petite du troisième ordre, *si l est égal à l'un des rayons de courbure principaux de* (S); mais l'aire de la surface parallèle est proportionnelle à sa projection sur le plan des XOY : on calculera donc cette projection et l'on exprimera qu'elle est nulle; l'équation résultante sera du second degré en l, c'est-à-dire qu'elle donnera les rayons de courbure principaux de (S).

Nous suivrons, par exemple, deux directions arbitraires du, dv, du', dv' sur (O); l'aire résultante sur la surface parallèle sera proportionnelle à la quantité

$$(\Delta Y\,\Delta X' - \Delta X\,\Delta Y'),$$

que l'on peut former immédiatement. Ajoutons que rien n'empêche de prendre les (u) et (v) pour les chemins à suivre, ce qui simplifie considérablement les calculs. Par cet artifice, on est dispensé d'écrire que, suivant certaines directions du, dv, les normales se rencontrent et, par conséquent, on n'a pas à éliminer du et dv pour former l'équation des rayons de courbure principaux. Il est clair que la remarque qui précède s'applique à tous les problèmes de Géométrie autour des surfaces où il s'agit de trouver les foyers d'un faisceau de droites.

111. *Calcul des équations.* — Les coordonnées instantanées d'un point de la surface parallèle à (S) sont

$$\xi = \alpha\, d\rho - \frac{l\pi\, d\rho}{fg + k\, d\rho},$$
$$\eta = \beta\, d\rho - \frac{l\pi'\, d\rho}{fg + k\, d\rho},$$
$$\zeta = \gamma\, d\rho + l,$$

car les longueurs comptées suivant la normale ne diffèrent que par des quantités du second ordre de leurs projections sur l'axe des Z. Il suffit d'appliquer nos formules (F) pour trouver

$$\frac{\Delta X}{du}(fg + 2k\, d\rho)$$
$$= fg(f + Pl) + d\rho \left\{ 2k(f + Pl) + fg M - l\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\, dv}\pi'\right]\right\}.$$

$$\frac{\Delta Y}{du}(fg + 2k\, d\rho)$$
$$= -f^2 g\, \mathrm{D} l + d\rho \left\{ -2kf\, \mathrm{D} l + fg\, \mathrm{N} - l\left[\frac{d\pi'}{du} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{du} - \frac{df}{g\, dv}\pi\right]\right\}.$$

$$\frac{\Delta X'}{dv}(fg + 2k\, d\rho)$$
$$= -g^2 f\, \mathrm{D} l + d\rho \left\{ -2kg\, \mathrm{D} l + fg\, \mathrm{N}' - l\left[\frac{d\pi}{dv} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{dv} - \frac{dg}{f\, du}\pi'\right]\right\}.$$

$$\frac{\Delta Y'}{dv}(fg + 2k\, d\rho)$$
$$= fg(g + Ql) + d\rho \left\{ 2k(g + Ql) + fg\, \mathrm{M}' - l\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\, du}\pi\right]\right\}.$$

où nous avons posé

$$\mathrm{M} = \frac{d\alpha}{du} + \beta\frac{df}{g\, dv} + \mathrm{P}\gamma, \qquad \mathrm{M}' = \frac{d\beta}{dv} + \alpha\frac{dg}{f\, du} + \mathrm{Q}\gamma,$$
$$\mathrm{N} = \frac{d\beta}{du} - \frac{df}{g\, dv}\alpha - f\mathrm{D}\gamma, \qquad \mathrm{N}' = \frac{d\alpha}{dv} - \frac{dg}{f\, du}\beta - g\mathrm{D}\gamma.$$
$$f\mathrm{M}' + g\mathrm{M} = k.$$

Écrivant que

$$\Delta Y\, \Delta X' - \Delta X\, \Delta Y' = 0,$$

nous aurons immédiatement l'équation des rayons de courbure cherchés. Si l'on néglige, comme on l'a fait jusqu'à présent, toutes les puissances de $d\rho$ supérieures à la première, il vient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l^2}(fg + 5k\,d\rho)fg \\
&\quad + \frac{1}{l}\Bigg(fg(fQ + gP) + d\rho \\
&\qquad \times \Big\{4k(fQ + gP) + fg(PM' + QM) + fgD(fN' + gN) \\
&\qquad\qquad - f\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\pi\right] \\
&\qquad\qquad - g\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\,dv}\pi'\right]\Big\}\Bigg) \\
&\quad + fg(PQ - fgD^2) - d\rho \\
&\qquad \times \Big\{-4k(PQ - fgD^2) + P\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\pi\right] \\
&\qquad\qquad + fD\left[\frac{d\pi}{dv} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\pi'\right] \\
&\qquad\qquad + Q\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\,dv}\pi'\right] \\
&\qquad\qquad + gD\left[\frac{d\pi'}{du} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{du} - \frac{df}{g\,dv}\pi\right]\Big\}.
\end{aligned}$$

Le dernier terme de cette expression peut être simplifié au moyen des équations de Codazzi; on vérifie en effet que

$$\begin{aligned}
&P\left[\frac{d\pi'}{dv} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\pi\right] + fD\left[\frac{d\pi}{dv} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{dv} - \frac{dg}{f\,du}\pi'\right] \\
&+ Q\left[\frac{d\pi}{du} - \frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du} + \frac{df}{g\,dv}\pi'\right] + gD\left[\frac{d\pi'}{du} - \frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{du} - \frac{df}{g\,dv}\pi\right]
\end{aligned}$$

peut s'écrire

$$fg\left[\frac{d}{du}\left(\frac{Q\pi + gD\pi'}{fg}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{P\pi' + fD\pi}{fg}\right)\right].$$

Il convient naturellement de considérer les deux quantités $\frac{1}{l_1 l_2}$ et $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}$; mais si on les remplace par celles-ci

$$\frac{1}{R_1 R_2} + \frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)d\rho, \qquad \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)d\rho,$$

qui mettent en évidence la variation de la courbure de Gauss et de la courbure moyenne, il vient, en tenant compte de ce qui précède et passant à la limite,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} -fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1R_2}\right) &= \frac{k}{R_1R_2}+\frac{d}{du}\left(\frac{Q\pi+gD\pi'}{fg}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{P\pi'+fD\pi}{fg}\right)\\ -fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) &= k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+PM'+QM+D(fN'+gN)\\ &\qquad -\frac{1}{g}\left(\frac{d\pi'}{dv}-\frac{\pi'}{fg}\frac{d(fg)}{dv}+\frac{dg}{f\,du}\pi\right)\\ &\qquad -\frac{1}{f}\left(\frac{d\pi}{du}-\frac{\pi}{fg}\frac{d(fg)}{du}+\frac{df}{g\,dv}\pi'\right). \end{aligned}\right.$$

Ces deux formules ont une grande importance, car leur généralité permet de les appliquer dans toutes les questions où interviennent directement soit la courbure de Gauss, soit la courbure moyenne.

La dernière formule peut encore être mise sous la forme

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} &-fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\\ &\quad = k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)+PM'+QM+D(fN'+gN)-\frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{f}\right)-\frac{d}{dv}\left(\frac{\pi'}{g}\right). \end{aligned}\right.$$

On voit que la fonction k est mise en évidence d'une façon toute spéciale.

112. *Ce que signifie la fonction k.* — On trouve facilement la signification géométrique de cette quantité. Sur (S), on a

$$\begin{aligned} \Delta X &= (f+M\,d\rho)\,du, & \Delta Y &= N\,d\rho\,du,\\ \Delta X' &= N'\,d\rho\,dv, & \Delta Y' &= (g+M'\,d\rho)\,dv; \end{aligned}$$

d'où résulte, au troisième ordre près,

$$\Delta X\,\Delta Y'-\Delta Y\,\Delta X' = du\,dv\,[fg+(fM'+gM)\,d\rho].$$

Si donc nous désignons par $d(O)$ et $d(S)$ les éléments correspondants de (O) et de (S), on a

$$\frac{d(S)-d(O)}{d(O)\,d\rho}=\frac{(fM'+gM)}{fg}=\frac{k}{fg}.$$

Ainsi, *lorsque la fonction k est nulle, les aires correspondantes des deux surfaces sont égales.*

On peut écrire la valeur de k sous la forme

$$k=\frac{d}{du}(g\alpha)+\frac{d}{dv}(f\beta)+\gamma(Pg+Qf),$$

et de ceci nous allons déduire une propriété des surfaces dont nous nous sommes occupé au n° **95**.

Supposons que la surface (O) soit rapportée à ses lignes de courbure et que (S) soit une surface telle qu'en S le plan tangent soit toujours parallèle au plan tangent en O à (O), alors

$$\alpha=\frac{d\gamma}{P\,du},\qquad \beta=\frac{d\gamma}{Q\,dv};$$

il vient pour k

$$k=\frac{d}{du}\left(\frac{g}{P}\,\frac{d\gamma}{du}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{f}{Q}\,\frac{d\gamma}{dv}\right)+\gamma(Pg+Qf).$$

Dans ce cas, nos formules se réduisent considérablement; elles donnent

$$-fg\,\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)=\frac{k}{R_1R_2},$$

$$\begin{aligned}-fg\,\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=k\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)&+P\left[\frac{d}{dv}\left(\frac{d\gamma}{Q\,dv}\right)+\frac{dg}{f\,du}\,\frac{d\gamma}{P\,du}+Q\gamma\right]\\&+Q\left[\frac{d}{du}\left(\frac{d\gamma}{P\,du}\right)+\frac{df}{g\,dv}\,\frac{d\gamma}{Q\,dv}+P\gamma\right].\end{aligned}$$

115. *Conséquence au sujet des surfaces étudiées au Chapitre X.* — Si l'on suppose que k soit nul et que γ vérifie l'équation (16), on retombe sur les surfaces du n° **95**. Ainsi, *lorsque deux surfaces se correspondent avec parallélisme de leurs plans tangents et correspondance des lignes isotropes, elles font chacune partie d'une famille de surfaces ayant même image sphérique de leurs lignes de courbure et dont les aires correspondantes sont égales.*

Les surfaces de ces familles ne sont pas identiques entre elles, car la variation $\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ n'est pas nulle, en général. A chaque surface de l'une des familles correspond une surface de l'autre famille, mais sans correspondance des lignes isotropes.

Dans le cas qui nous est connu, celui de la sphère et des surfaces à étendue minima, la surface infiniment voisine de la sphère est aussi une sphère.

114. *Surfaces infiniment voisines de la surface de référence et applicables sur elle. Remarque sur une conséquence analytique du théorème de Gauss.* — Le dS^2 de la surface (S), si l'on se borne aux termes du troisième ordre, peut s'écrire

$$dS^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2 + 2d\rho\,[fM\,du^2 + gM'\,dv^2 + (fN' + gN)\,du\,dv].$$

Ainsi donc on obtiendra une surface infiniment voisine de (O) et applicable sur celle-ci en posant

$$M = M' = 0,$$
$$fN' + gN = 0.$$

On trouve alors

$$-fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1R_2}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{Q\pi + gD\pi'}{fg}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{P\pi' + fD\pi}{fg}\right),$$

et, d'après le théorème de Gauss, ceci doit être nul identiquement. Nous aurons l'occasion de faire cette vérification dans l'étude des couples de surfaces applicables et même d'en déduire la réduction du problème à sa forme canonique. Pour le moment, remarquons seulement que dans l'hypothèse où (S) est applicable sur (O)

$$+fg\frac{\Delta}{d\rho}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{f}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{\pi'}{g}\right).$$

En égalant à zéro cette variation, on sera conduit à chercher des surfaces que l'on peut déformer sans que pourtant les rayons de courbure principaux varient (ce problème a été complètement résolu par M. O. Bonnet).

115. *Recherche des surfaces ayant même aire et même aire sphérique qu'une surface donnée.* — Il résulte du théorème de Gauss que, si l'on déforme une surface, l'aire sphérique d'une portion de cette surface reste constante. Mais on peut trouver des surfaces dérivées d'une surface donnée (O) et telles que leurs aires soient égales à celle de (O) en même temps que leurs aires sphériques restent égales à celle de (O). Pourtant ces surfaces ne sont pas applicables l'une sur l'autre. La formule (33) va nous permettre de résoudre le problème dans un certain nombre de cas.

On peut évidemment ranger les surfaces en question à côté les unes des autres de façon qu'elles forment une famille continue. Soient (O) et (S) deux surfaces successives. La quantité $\Delta\left(\frac{1}{R_1R_2}\right)$ doit être nulle en même temps que k; on a donc

$$\frac{d}{du}(g\alpha)+\frac{d}{dv}(f\beta)+\gamma(Pg+Qf)=0$$

avec

$$\frac{d}{du}\left(\frac{Q\pi+gD\pi'}{fg}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{P\pi'+fD\pi}{fg}\right)=0.$$

Supposons qu'on ait pris pour (u, v) le réseau des lignes de courbure, on pourra poser

$$Q\pi=fg\frac{d\varphi}{dv},\qquad P\pi'=-fg\frac{d\varphi}{du},$$

d'où résulte

$$\alpha=\frac{d\gamma}{P\,du}-\frac{f}{PQ}\frac{d\varphi}{dv},\qquad \beta=\frac{d\gamma}{Q\,dv}+\frac{g}{PQ}\frac{d\varphi}{du},$$

et tout le problème dépend de l'équation obtenue en substituant ces valeurs dans la première des conditions, à savoir

$$\frac{d}{du}\left(\frac{g}{P}\frac{d\gamma}{du}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{f}{Q}\frac{d\gamma}{dv}\right)$$
$$+\gamma(Pg+Qf)-\frac{d}{du}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{du}+\frac{d}{dv}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{dv}=0.$$

Ainsi, φ pourra être prise arbitrairement et le problème dépendra d'une seule équation linéaire du second ordre en γ. Remarquons même que, si l'on connaît une solution, l'équation sera ramenée à la forme (31).

Il est une série de valeurs de φ pour lesquelles cette réduction s'effectue d'elle-même. Posons en effet

$$\frac{d}{du}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{du} = \frac{d}{dv}\left(\frac{fg}{PQ}\right)\frac{d\varphi}{dv};$$

le problème reste alors régi simplement par l'équation (31). Mais la condition précédente signifie que φ est fonction de $\frac{fg}{PQ}$, c'est-à-dire du produit des rayons de courbure principaux au point O. La surface (S) est dans ce cas fort intéressante, car si on lui mène des plans tangents parallèles à ceux de (O), on obtient une correspondance entre S et O qui conduit à des aires égales pour (S) et (O). Ainsi, sur ces deux surfaces, on peut faire correspondre les points d'une infinité de manières, en conservant des aires égales, en même temps que les aires sphériques ont même valeur.

116. *Cette étude devra être développée ultérieurement.* — Nous n'avons fait qu'effleurer les questions que soulèvent les formules (33) et (34), parce que notre but est principalement de faire envisager tout le parti qu'on peut tirer de la Géométrie autour des surfaces, telle que nous la pratiquons. Il conviendra sans doute, ultérieurement, de donner beaucoup de développement au Chapitre actuel et de former les familles de surfaces dont nous avons seulement démontré l'existence, mais toutes ces conséquences ne peuvent être poursuivies dans un aperçu aussi rapide que celui-ci [1].

---

[1] En particulier, si l'on cherche à construire une surface infiniment voisine d'une surface donnée et applicable sur celle-ci (supposée rapportée à ses lignes de courbure), on trouve, en posant $\frac{N'}{g} = -\frac{N}{f} = Z$, l'équation (31) dans laquelle p est remplacé par Z.

Mais, si l'on admet que la surface (O) est à la limite de déformation possible, comme on a, d'après les calculs du n° **114**,

$$fg\frac{\Delta}{d\varphi}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{f}\right)+\frac{d}{dv}\left(\frac{\pi'}{g}\right),$$

CHAPITRE XIII.

Recherche des trajectoires orthogonales planes des surfaces.

117. *Mise en équation du problème. Variation du plan tangent à une surface élémentaire.* — Nous avons établi au n° **78** que, si des droites situées dans les plans tangents de la surface de référence étaient normales à des surfaces, elles restaient normales à d'autres surfaces, quelle que fût la forme de (O). Cette propriété nous amène à chercher une généralisation qui fait l'objet de ce Chapitre.

Considérons une courbe (C) tracée dans le plan tangent en O à la surface de référence; que l'on en construise autant dans tous les plans tangents, suivant une loi continue, on constituera un faisceau de courbes planes. Nous allons chercher dans quel cas ce faisceau admet une famille de surfaces trajectoires.

Soit

$$p = f(\varphi, u, v)$$

l'équation de la courbe située dans le plan XOY; p désigne la distance du point O à une tangente, φ l'angle que la perpendiculaire à cette tangente fait avec l'axe des x, u et v sont les paramètres définissant le point O sur (O). Les coordonnées du point de contact M de la tangente sont

$$\xi = p\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi, \qquad \eta = p\sin\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi.$$

Que l'on donne aux paramètres les accroissements du, dv, on obtien-

---

la fonction Z définissant une surface infiniment voisine de (O) et applicable sur elle doit satisfaire à l'équation

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\pi}{f}\right) + \frac{d}{dv}\left(\frac{\pi'}{g}\right) = 0.$$

Or, celle-ci développée devient l'équation (16). Donc, lorsqu'une surface est à sa limite de forme, elle appartient à la classe de celles étudiées aux n^{os} 94 et 95 et, par conséquent, ses lignes de courbure sont isothermes.

(Paris, 23 mars 1890).

dra une seconde courbe (C′); soit M′ le point de celle-ci situé dans le plan normal à M, et m sa projection sur le plan tangent en O, on a, comme au n° 75,

$$\tang\theta = \frac{M'm}{Mm} = \frac{\Delta Z}{\Delta X \cos\varphi + \Delta Y \sin\varphi},$$

où θ désigne l'angle du plan mené par M′ et la tangente en M, avec le plan XOY. On trouve

$$\tang\theta = \frac{(-P\,du + Dg\,dv)\left(p\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi\right) + (fD\,du - Q\,dv)\left(p\sin\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi\right)}{\left(f\cos\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\frac{df}{g\,dv} + \frac{dp}{du}\right)du + \left(g\sin\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\frac{dg}{f\,du} + \frac{dp}{dv}\right)dv},$$

posons

$$A = p\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\sin\varphi, \qquad B = p\sin\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\cos\varphi,$$

$$G = f\cos\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\frac{df}{g\,dv} + \frac{dp}{du}, \qquad H = g\sin\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\frac{dg}{f\,du} + \frac{dp}{dv};$$

il en résulte

$$(35) \qquad \tang\theta = \frac{(-P\,du + Dg\,dv)A + (fD\,du - Q\,dv)B}{G\,du + H\,dv}.$$

On observera que A, B, G, H sont des fonctions indépendantes de la forme de la surface (O).

118. *Du pinceau des tangentes aux courbes issues du plan normal de l'une d'elles. Équation différentielle des surfaces trajectoires.* — Établissons, parallèlement, l'équation de la variation du plan tangent en un point de la tangente en M considérée comme faisant partie du pinceau des tangentes infiniment voisines aux courbes (C′) et dont les points de contact sont tous situés dans le plan normal en M à (C).

Les équations de la tangente en M sont

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p = 0, \qquad Z = 0;$$

on trouvera, comme d'habitude, à l'aide des équations (F′), les équations de la tangente en M′; éliminant Z, on obtient, pour l'équation de la projection sur le plan des XY,

$$\begin{aligned}&\left[-f du + X + Y\left(-\frac{df}{g dv} du + \frac{dg}{f du} dv\right)\right]\cos\varphi\\ &+\left[-g dv + Y + X\left(-\frac{dg}{f du} dv + \frac{df}{g dv} du\right)\right]\sin\varphi\\ &- p + (-X\sin\varphi + Y\cos\varphi)\, d\varphi - \Delta p = 0,\end{aligned}$$

dans laquelle $d\varphi$ est encore indéterminée; on exprimera sa valeur en fonction de du et dv en écrivant que le point M′ est dans le plan normal en M à (C), c'est-à-dire que

$$-\Delta X\sin\varphi + \Delta Y\cos\varphi = 0.$$

Substituant ΔX et ΔY, il vient

$$\begin{aligned}&- f du\sin\varphi + g\, dv\cos\varphi\\ &+ p\left(\frac{dg}{f du} dv - \frac{df}{g dv} du\right) + \frac{d^2p}{d\varphi du} du + \frac{d^2p}{d\varphi dv} dv + \left(p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\right) d\varphi = 0.\end{aligned}$$

Remarquons d'ailleurs que

$$\begin{aligned}G' &= \frac{dG}{d\varphi} = -f\sin\varphi + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\,\frac{df}{g dv} + \frac{d^2p}{d\varphi du},\\ H' &= \frac{dH}{d\varphi} = g\cos\varphi - \frac{d^2p}{d\varphi^2}\,\frac{dg}{f du} + \frac{d^2p}{d\varphi dv},\end{aligned}$$

par conséquent, on peut écrire, pour définir $d\varphi$,

$$\begin{aligned}&du\left[G' - \left(p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)\frac{df}{g dv}\right]\\ &+ dv\left[H' + \left(p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\right)\frac{dg}{f du}\right] + \left(p + \frac{d^2p}{d\varphi^2}\right) d\varphi = 0.\end{aligned}$$

Mais, si R désigne le rayon de courbure en M de la courbe (C)

$$R = p + \frac{d^2p}{d\varphi^2},$$

on en déduit définitivement

$$d\varphi = du\left(\frac{df}{g dv} - \frac{G'}{R}\right) - dv\left(\frac{dg}{f du} + \frac{H'}{R}\right),$$

et, par conséquent, pour l'équation de la tangente projetée

$$\begin{aligned}
&X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p \\
&+\left[-f\,du + Y\left(-\frac{df}{g\,dv}du + \frac{dg}{f\,du}dv\right)\right]\cos\varphi - \frac{dp}{du}du - \frac{dp}{dv}dv \\
&+\left[-g\,dv + X\left(-\frac{dg}{f\,du}dv + \frac{df}{g\,dv}du\right)\right]\sin\varphi \\
&+\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\right)\left[\left(\frac{df}{g\,dv}du - \frac{dg}{f\,du}dv\right) - \frac{G'du + H'dv}{R}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Prenons un point P sur la tangente en M et menons par ce point un plan normal à la tangente; il coupe la seconde tangente et sa projection aux points P′ et p. Il est clair que l'angle du plan tangent en P à la surface élémentaire du pinceau, avec XOY, est défini par la relation

$$\tan\theta = \frac{P'p}{Pp}.$$

$P'p$ ne diffère pas du ΔX du point P; quant à Pp, c'est la distance du point P à la projection de la tangente en M′; c'est aussi la valeur que prend le second membre de l'équation de cette projection, quand on y substitue aux coordonnées courantes les coordonnées X et Y du point P: celles-ci ne sont d'ailleurs assujetties qu'à vérifier l'équation

$$X\cos\varphi + Y\sin\varphi - p = 0;$$

il vient

$$\begin{aligned}
-Pp = {}& f\cos\varphi\,du + g\sin\varphi\,dv \\
&+ \frac{G'du + H'dv}{R}\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\right) \\
&+ \frac{dp}{d\varphi}\left(\frac{df}{g\,dv}du - \frac{dg}{f\,du}dv\right) + \frac{dp}{du}du + \frac{dp}{dv}dv,
\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'équation du pinceau

$$\tan\theta = \frac{(-P\,du + D\,g\,dv)X + (D\,f\,du - Q\,dv)Y}{\left\{\begin{aligned}&du\left(f\cos\varphi + \frac{dp}{d\varphi}\frac{df}{g\,dv} + \frac{dp}{du}\right)\\ &+ dv\left(g\sin\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\frac{dg}{f\,du} + \frac{dp}{dv}\right) + \frac{G'du + H'dv}{R}\left(-X\sin\varphi + Y\cos\varphi - \frac{dp}{d\varphi}\right)\end{aligned}\right\}};$$

mais, puisque P est sur la tangente en M, on peut toujours poser

$$X = A - l\sin\varphi, \qquad Y = B + l\cos\varphi,$$

où A et B ont les valeurs données plus haut, et l désigne la distance PM. Tenant compte des valeurs de G et H, on a

$$\tan g\theta = \frac{(-P\,du + Dg\,dv)(A - l\sin\varphi) + (fD\,du - Q\,dv)(B + l\cos\varphi)}{G\,du + H\,dv + \dfrac{G'\,du + H'\,dv}{R}\,l}.$$

119. ***Équation des foyers, des directions principales. Condition d'orthogonalité. Elle est indépendante de la forme de la surface de référence.*** — Aux foyers du pinceau, les plans tangents des surfaces élémentaires sont invariables, quels que soient du et dv; on a donc

$$\tan g\theta = \frac{-P(A - l\sin\varphi) + fD(B + l\cos\varphi)}{G + \dfrac{G'}{R}\,l} = \frac{Dg(A - l\sin\varphi) - Q(B + l\cos\varphi)}{H + \dfrac{H'}{R}\,l},$$

d'où l'on tire, en introduisant les rayons de courbure principaux de (O),

$$-\frac{\tan g\theta}{\dfrac{fg}{R_1R_2}} = \frac{B + l\cos\varphi}{GDg + PH + \dfrac{(DgG' + PH')}{R}\,l} = \frac{A - l\sin\varphi}{GQ + fDH + \dfrac{(G'Q + fDH')}{R}\,l}.$$

Si l'on remarque enfin que

$$A\cos\varphi + B\sin\varphi = p,$$
$$A' = -R\sin\varphi, \qquad B' = R\cos\varphi,$$

on trouve, pour l'équation des plans principaux,

$$\begin{aligned}\tan g^2\theta\,(HG' - GH')&\\ + \tan g\theta[Q(BG' - GB') + fD(BH' - HB')&\\ - P(AH' - HA' - gD(AG' - GA')] - \frac{pR.fg}{R_1R_2} &= 0.\end{aligned}$$

Le produit des deux valeurs de $\tang\theta$ est indépendant de la forme de (O). En particulier, si l'on veut que les plans principaux soient rectangulaires, on écrira

$$\text{(36)} \qquad \mathrm{HG}' - \mathrm{GH}' = \frac{p\mathrm{R}fg}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2};$$

mais il résulte d'un théorème de M. Bertrand que si les plans principaux du pinceau sont rectangulaires, la surface trajectoire des courbes (C) passant par M existe. Si donc l'équation précédente a lieu pour tous les points de (C), c'est que les courbes telles que (C) sont les trajectoires d'une famille de surfaces.

La généralisation que nous avions soupçonnée se trouve ainsi réalisée : *si des courbes* (C) *tracées dans les plans tangents d'une surface* (O) *sont les trajectoires d'une famille de surfaces, on peut déformer* (O) *comme on veut, chaque plan tangent entraînant la courbe qu'il contient, et le faisceau des courbes* (C) *jouit toujours de la même propriété.*

120. *Établissement direct de la condition d'orthogonalité.* — Il nous est facile d'établir cette importante proposition sans faire aucun emprunt géométrique. Supposons, en effet, qu'il passe en M une surface trajectoire des courbes (C), son équation différentielle n'est autre que la condition trouvée plus haut

$$d\varphi = du\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\right) - dv\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\right),$$

qui définit la différentielle totale de φ; cette quantité existera donc si

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\right) + \frac{d}{du}\left(\frac{dg}{f\,du} + \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\right) = 0;$$

développant, en tenant compte des équations de Codazzi,

$$\begin{aligned} 0 = &-\frac{fgp}{\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2} + \frac{df}{dv}\sin\varphi + \frac{dg}{du}\cos\varphi \\ &+ \frac{\mathrm{G}'}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{dv} - \frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{R}}\frac{d\mathrm{R}}{du} - \frac{d\mathrm{G}'}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dv} + \frac{d\mathrm{H}'}{d\varphi}\frac{d\varphi}{du} - \frac{d^2p}{d\varphi^2dv}\frac{df}{g\,dv} + \frac{d^2p}{d\varphi^2du}\frac{dg}{f\,du}, \end{aligned}$$

mais on a les relations

$$\frac{d\varphi}{dv} = -\frac{dg}{f\,du} - \frac{H'}{R}, \quad \frac{d\varphi}{du} = \frac{df}{g\,dv} - \frac{G'}{R},$$

$$\frac{dG'}{d\varphi} = -f\cos\varphi + \frac{d^3p}{d\varphi^3}\frac{df}{g\,dv} + \frac{d^3p}{d\varphi^2 du},$$

$$\frac{dH'}{d\varphi} = -g\sin\varphi - \frac{d^3p}{d\varphi^3}\frac{dg}{f\,du} + \frac{d^3p}{d\varphi^2 dv},$$

$$\frac{dR}{dv} = \frac{dp}{dv} + \frac{d^3p}{d\varphi^2 dv} + \left(\frac{dp}{d\varphi} + \frac{d^3p}{d\varphi^3}\right)\left(-\frac{dg}{f\,du} - \frac{H'}{R}\right),$$

$$\frac{dR}{du} = \frac{dp}{du} + \frac{d^3p}{d\varphi^2 du} + \left(\frac{dp}{d\varphi} + \frac{d^3p}{d\varphi^3}\right)\left(\frac{df}{g\,dv} - \frac{G'}{R}\right).$$

Effectuant toutes les substitutions et les réductions, il vient (36).

121. *Troisième méthode pour l'établir.* — Nous avons déjà bien insisté sur cette équation d'orthogonalité, mais nous ne pouvons ne pas signaler comment on y parvient (peut-être de la façon la plus simple) en partant d'un théorème de Joachimsthal.

Deux courbes (C) et (C′) successives forment une bande de surface, si l'on exprime que les tangentes en M et M′ se rencontrent; comme M′M est normale à (C), cela veut dire que, sur cette bande infiniment étroite, MM′ est la direction d'une ligne de courbure : par conséquent (C) est tangente à l'autre ligne de courbure. Donc, si l'on mène deux plans tangents consécutifs le long de (C) à la bande en question, ils devront se couper suivant MM′; mais comme cet élément est dans un plan normal à (C), cela n'aura lieu qu'autant que l'angle θ ne variera pas le long de (C). Au fond, cette observation coïncide avec celle faite par Joachimsthal, d'où il a déduit que le plan d'une ligne de courbure plane coupe la surface suivant un angle constant.

Ainsi, exprimons que, le long de (C), $\tang\theta$ ne varie pas, et nous aurons l'équation en du et dv des plans principaux du pinceau considéré au § **118**. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}&[(-P\,du + Dg\,dv)A' + (fD\,du - Q\,dv)B'](G\,du + H\,dv)\\ &\quad - (G'du + H'dv)[(-P\,du + Dg\,dv)A + (fD\,du - Q\,dv)B] = 0.\end{aligned}$$

Substituant à $\frac{dv}{du}$ sa valeur en fonction de $\tang\theta$, on retrouverait l'équation établie plus haut.

122. *Équation des images principales relatives à une trajectoire.* — L'équation qui détermine les images principales du pinceau des tangentes aux courbes (C) est développée :

$$\begin{aligned} du^2[-P(AG'-GA')+fD(BG'-GB')] \\ +du\,dv[-P(AH'-HA')+gD(AG'-GA') \\ +fD(BH'-HB')-Q(BG'-GB')] \\ +dv^2[-Q(BH'-HB')+gD(AH'-HA')=0. \end{aligned}$$

Si l'on exprime que ces deux directions sont conjuguées, on trouve

$$f(BH'-HB')+g(AG'-GA')=0.$$

qui est indépendante de la forme de la surface.

123. *Recherche des faisceaux de courbes identiques entre elles, normales à des surfaces. La surface enveloppe des plans est applicable sur la sphère. Équation différentielle des courbes.* — Comme première application, cherchons s'il est possible de trouver des courbes identiques qui soient normales à des surfaces.

Soit (C) l'une de ces courbes et P un point de son plan qui lui soit invariablement lié; on peut toujours supposer que le réseau (u, v) a été choisi parallèle à deux droites liées invariablement à C; soient à chaque instant a et b les coordonnées du point P. Il est clair que, si l'on exprime p en fonction de la distance p_1 de P aux tangentes de (C), on aura séparé, d'une part, les quantités fonctions de (u, v), et, d'autre part, celles qui ne tiennent qu'à la courbe elle-même. On a

$$p = a\cos\varphi + b\sin\varphi + p_1,$$

où p_1 est une fonction de φ seulement. Substituant dans l'équation de condition, il vient

$$\begin{aligned}
&\left[\left(\frac{da}{dv} - b\frac{dg}{f du}\right)\left(\frac{db}{du} - a\frac{df}{g dv}\right)\right.\\
&\quad \left. - \left(g + a\frac{dg}{f du} + \frac{db}{dv}\right)\left(f + b\frac{df}{g dv} + \frac{da}{du}\right)\right]\\
&\quad + \left[\left(f + \frac{da}{du}\right)\frac{dg}{f du} + \frac{da}{dv}\frac{df}{g dv}\right]\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\cos\varphi\right)\\
&\quad + \left[\left(g + \frac{db}{dv}\right)\frac{df}{g dv} + \frac{db}{du}\frac{dg}{f du}\right]\left(-\frac{dp_1}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\sin\varphi\right)\\
&\quad = \frac{R(p_1 + a\cos\varphi + b\sin\varphi) fg}{R_1R_2}.
\end{aligned}$$

Telle est l'équation différentielle de la courbe cherchée. Elle doit manifestement, d'après l'hypothèse, être indépendante de u et v, ce qui ne peut avoir lieu que si chacun des termes fonction de u, v divisé par $\frac{R_1R_2}{fg}$ est constant.

Mais il résulte de ceci, tout d'abord, que a et b sont constants. L'équation se réduit immédiatement et devient

$$\begin{aligned}
-R_1R_2 &+ R_1R_2\frac{dg}{fg\,du}\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\cos\varphi - a\right)\\
&+ R_1R_2\frac{df}{fg\,dv}\left(-\frac{dp_1}{d\varphi}\cos\varphi + \frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\sin\varphi - b\right)\\
&= R(p_1 + a\cos\varphi + b\sin\varphi).
\end{aligned}$$

On voit aussi que le produit des rayons de courbure principaux de (O) doit être constant. La surface (O) est donc applicable sur la sphère ou sur la surface de révolution qui admet pour méridienne la tractrice.

On remarquera que les quantités $\frac{dg}{fg\,du}$, $\frac{df}{fg\,dv}$ doivent être aussi constantes, mais ce sont les courbures géodésiques des (u) et (v).

D'après un théorème dû à M. Liouville, toute ligne faisant un angle constant avec (u) ou (v) aura aussi sa courbure géodésique constante; on pourra donc prendre tels axes que l'on voudra autour de (O), et l'équation conservera toujours la forme ci-dessus; mais il est un système d'axes qui s'impose naturellement : je veux parler de celui pour lequel les lignes (v) seront géodésiques. On obtient ainsi le réseau des méridiens et des parallèles de la surface de révolution sur laquelle (O) est applicable.

On doit avoir, d'après ce qui précède,

$$f=1, \qquad \frac{dg}{g\,du}=\frac{1}{K},$$

et, d'après une des formules de Codazzi,

$$\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{g}\frac{d^2g}{du^2}=0;$$

on en déduit sans difficulté

$$\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{K^2}=0;$$

mais notre équation devient

$$K^2-K\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi+\frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\cos\varphi-a\right)$$
$$=\left(p_1+\frac{d^2p_1}{d\varphi^2}\right)(p_1+a\cos\varphi+b\sin\varphi);$$

il convient de poser

$$b=0, \qquad a=-K,$$

ce qui conduit à l'équation définitive

$$Rp_1+K\left(\frac{dp_1}{d\varphi}\sin\varphi-p_1\cos\varphi\right)=0.$$

L'origine est maintenant le centre de courbure géodésique du parallèle; c'est, si l'on veut, le point situé sur l'axe de révolution, lorsque la surface est sous la forme de révolution. Si l'on considère deux axes rectangulaires, dirigés, l'un suivant OX, l'autre perpendiculairement et à partir de la nouvelle origine, l'équation différentielle de la courbe peut s'écrire

$$pR = Kx.$$

Nous résumerons tout ce qui précède comme il suit :

On peut déplacer une courbe plane dans l'espace de telle façon que le faisceau de toutes ses positions constitue le faisceau des trajectoires d'une famille de surfaces. Si l'on fait abstraction du cas des droites, la surface enveloppe du plan des courbes est applicable sur la sphère (réelle ou imaginaire). La courbe est telle que le produit de son rayon de courbure par la distance d'une certaine origine à la tangente est proportionnel à l'abscisse.

124. *Sur deux cas particuliers auxquels ne s'appliquent pas les calculs précédents.* — Il y a deux cas particuliers qui ne rentrent pas dans la règle que nous venons d'énoncer, ce sont ceux qui infirment les calculs exécutés. On remarquera en effet que, dans le courant des opérations qui ont servi à établir la formule générale ou celle dont nous venons de faire l'examen, on a multiplié par R et par $R_1 R_2$, admettant implicitement qu'aucune de ces quantités n'était nulle ni infinie. Il conviendra de les examiner à part.

125. *Système cyclique où tous les cercles sont identiques.* — Revenons à l'étude particulière des trajectoires planes identiques. Bien que l'équation des courbes en question soit extrêmement simple en apparence, nous n'avons pu en trouver l'intégrale générale ; il est seulement une solution particulière mise en évidence qui correspond à

$$R = K, \qquad p = x.$$

Les courbes sont alors des cercles ayant leurs centres aux points de contact des plans tangents et dont le rayon est égal à la racine carrée du produit des rayons de courbure principaux changé de signe.

On peut construire un système cyclique dans lequel tous les cercles trajectoires sont identiques ; la surface enveloppe de leurs plans coïncide avec le lieu de leurs centres, elle est applicable sur la surface de révolution qui a pour méridienne la tractrice.

Lorsque les courbes ont toute leur généralité, leurs surfaces trajectoires ne font pas partie d'un système triplement orthogonal, car l'équation en du, dv des images principales contient encore p et R. Pour le système cyclique, au contraire, le système existe.

126. *Recherche générale des systèmes cycliques.* — Appliquons encore les formules trouvées plus haut au cas déjà élucidé différemment où les courbes (C) sont des cercles; on sait d'avance que la solution a une grande généralité.

Soient a et b les coordonnées du centre du cercle (C), R le rayon de celui-ci; on a

$$p = a\cos\varphi + b\sin\varphi + R,$$

où a, b et R sont simplement fonctions de u et v.

$$A = a + R\cos\varphi, \qquad B = b + R\sin\varphi,$$

$$G = \frac{dR}{du} + \cos\varphi\left(f + b\frac{df}{g\,dv} + \frac{da}{du}\right) - \sin\varphi\left(a\frac{df}{g\,dv} - \frac{db}{du}\right),$$

$$G' = -\sin\varphi\left(f + b\frac{df}{g\,dv} + \frac{da}{du}\right) - \cos\varphi\left(a\frac{df}{g\,dv} - \frac{db}{du}\right),$$

$$H = \frac{dR}{dv} + \sin\varphi\left(g + a\frac{dg}{f\,du} + \frac{db}{dv}\right) - \cos\varphi\left(b\frac{dg}{f\,du} - \frac{da}{dv}\right),$$

$$H' = \cos\varphi\left(g + a\frac{dg}{f\,du} + \frac{db}{dv}\right) + \sin\varphi\left(b\frac{dg}{f\,du} - \frac{da}{dv}\right).$$

En les écrivant sous la forme

$$G = \frac{dR}{du} + M\cos\varphi - N\sin\varphi, \qquad G' = -M\sin\varphi - N\cos\varphi,$$

$$H = \frac{dR}{dv} + M'\sin\varphi - N'\cos\varphi, \qquad H' = M'\cos\varphi + N'\sin\varphi,$$

l'équation d'orthogonalité devient

$$\begin{aligned} &NN' - MM' - \frac{R^2 fg}{R_1 R_2} \\ &\quad = \sin\varphi\left(M\frac{dR}{dv} + N'\frac{dR}{du} + \frac{bRfg}{R_1 R_2}\right) + \cos\varphi\left(N\frac{dR}{dv} + M'\frac{dR}{du} + \frac{afgR}{R_1 R_2}\right), \end{aligned}$$

et il faut que cette relation ait lieu quel que soit l'angle φ.

On pourrait transformer cette équation en mettant en évidence $\tang\frac{\varphi}{2}$; on obtiendrait une équation du second degré par rapport à cette quantité, d'où l'on déduirait le théorème du n° **100**, à savoir que, si des cercles sont normaux à trois surfaces, ils le sont à une infinité. Mais on voit immédiatement que l'équation trouvée plus haut ne peut être indépendante de φ que si l'on a à la fois

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned} &NN' - MM' - \frac{R^2 fg}{R_1 R_1} = 0,\\ &M\frac{dR}{dv} + N'\frac{dR}{du} + \frac{bRfg}{R_1 R_2} = 0,\\ &N\frac{dR}{dv} + M'\frac{dR}{du} + \frac{afgR}{R_1 R_2} = 0.\end{aligned}\right.$$

127. *Réduction du problème à un système canonique.* — Il s'agit maintenant de ramener ces équations à un système *canonique*, c'est-à-dire d'arriver à ne faire tout dépendre que d'une seule équation aux différentielles partielles, les deux autres équations étant ou résolues ou ramenées aux quadratures.

Multiplions la seconde des équations (37) par N et la troisième par M, puis retranchons en tenant compte de la première, il vient

$$R\frac{dR}{du} - aM + bN = 0;$$

on trouve de même

$$R\frac{dR}{dv} + aN' - bM' = 0,$$

et il suffira de prendre l'une des trois premières équations pour avoir un système complet, déjà réduit.

Nos deux dernières équations conduisent immédiatement à une conséquence bien remarquable; elles peuvent s'écrire, en effet,

$$R\frac{dR}{du} - a\frac{da}{du} - b\frac{db}{du} = af,$$

$$R\frac{dR}{dv} - a\frac{da}{dv} - b\frac{db}{dv} = bg.$$

Posons

$$R^2 - (a^2 + b^2) = 2Z;$$

les équations précédentes donnent

$$a = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad b = \frac{dZ}{g\,dv},$$
$$R^2 = 2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2.$$

Il est facile de donner une signification géométrique à tout ceci.

Décrivons de tous les points de (O) comme centres, des sphères telles que le carré de leur rayon soit égal à $-2Z$, leur équation sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = -2Z,$$

les équations de leur corde de contact sont

$$x = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad y = +\frac{dZ}{g\,dv}$$

(*voir* n° 55). Enfin la *puissance* du pied de leur corde de contact sur le plan tangent, puissance prise par rapport à la sphère enveloppée, est

$$+2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2,$$

c'est-à-dire précisément le carré du rayon du cercle (C).

128. *Interprétation des résultats précédents à l'aide de la Géométrie imaginaire de M. Laguerre.* — Il résulte de ceci que l'enveloppe de sphères auxiliaire à laquelle nous sommes conduit par le calcul sera imaginaire quand les cercles (C) seront réels, et inversement. En adoptant les idées de M. Laguerre, sur les transformations imaginaires, on obtient ici un exemple intéressant, conduisant toujours à une propriété réelle associée à une propriété corrélative s'appliquant à des quantités imaginaires; lorsque celles-ci deviennent réelles, le premier théorème, tout en subsistant, s'applique à son tour à des quantités imaginaires.

Nous dirons avec M. Laguerre qu'un cercle est l'image d'un point, en considérant le cercle comme la ligne double réelle du cône isotrope (sphère de rayon nul), passant par le point supposé imaginaire. Inversement, étant donné un cercle imaginaire, il sera représenté par deux points réels qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

Dans notre espèce, les cercles (C) et les points où les sphères auxiliaires touchent leurs enveloppes constituent un système d'images réciproques. En effet, les coordonnées d'un point de l'enveloppe sont

$$\xi = \frac{dZ}{f\,du}, \qquad \eta = \frac{dZ}{g\,dv}, \qquad \zeta = \sqrt{-\left[2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2\right]},$$

et la sphère de rayon nul

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2 = 0$$

est coupée par le plan des XY suivant le cercle

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \left[2Z + \left(\frac{dZ}{f\,du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{g\,dv}\right)^2\right],$$

c'est-à-dire précisément le cercle (C).

129. *La connaissance d'un système cyclique équivaut à celle d'une enveloppe de sphères telle que les points focaux des cordes de contact soient conjugués harmoniques par rapport aux points de contact, et inversement.* — Ainsi les trois quantités a, b, R sont exprimées en fonction d'une seule quantité Z, et nous venons de montrer comment elles lui sont liées géométriquement. Nous avons maintenant à chercher l'équation différentielle à laquelle satisfait Z, car on voit qu'il faut encore tenir compte de

$$NN' - MM' = \frac{R^2 fg}{R_1 R_2};$$

mais il se trouve que nous avons déjà effectué les calculs, et même qu'en rencontrant ici l'équation précédente nous pouvons immédiatement l'interpréter géométriquement. Reportons-nous, en effet, au n° **65**, et cherchons quel est le produit des distances focales relatives au faisceau des droites normales aux plans des cercles (C) et passant par leurs centres, ou, si l'on veut, du faisceau des cordes de contact de notre enveloppe de sphères auxiliaire. On a

$$-\frac{Z_1 Z_2 fg}{R_1 R_2}+\left(f+\frac{da}{du}+\frac{df}{g\,dv}b\right)\left(g+\frac{db}{dv}+\frac{dg}{f\,du}a\right)$$
$$-\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g\,dv}a\right)\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f\,du}b\right)=0,$$

mais la première des équations (37) donne

$$\frac{R^2 fg}{R_1 R_2}+\left(f+\frac{da}{du}+\frac{df}{g\,dv}b\right)\left(g+\frac{db}{dv}+a\frac{dg}{f\,du}\right)$$
$$-\left(\frac{db}{du}-\frac{df}{g\,dv}a\right)\left(\frac{da}{dv}-\frac{dg}{f\,du}b\right)=0;$$

de telle sorte que cette dernière équation équivaut à la relation géométrique

$$R^2=-Z_1 Z_2.$$

Mais si ζ désigne la distance d'un point de l'enveloppe de sphères au plan XOY, on a vu que

$$R^2=-\zeta^2;$$

on a donc définitivement

$$\zeta^2-Z_1 Z_2=0\ (^1).$$

130. *Équation différentielle du problème et définitive. Intégration dans le cas où* (O) *est développable.* — Il faut aussi former l'équation différentielle des systèmes cycliques. Prenons les coordonnées symétriques imaginaires, nous aurons immédiatement (d'après les formules du n° **66**),

$$(38)\qquad 4\zeta^2\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2\left[(1+2c)^2-4\frac{da}{dx}\frac{db}{dy}\right]=0.$$

$$\zeta^2=-(2Z+4\lambda^2 ab);$$

(1) Le Mémoire original donnait dans cette dernière équation le signe + au lieu du signe —.

a, b, c ont les significations habituelles :

$$a = \frac{dZ}{\lambda^2 dx}, \qquad b = \frac{dZ}{\lambda^2 dy},$$
$$c = \frac{d^2 Z}{\lambda^2 dx dy}.$$

On ne peut songer à intégrer (38) d'une façon générale, le problème étant du même ordre que celui de la recherche de toutes les surfaces applicables sur une surface donnée. Montrons seulement comment on intègre lorsque la surface (O) est développable. Dans ce cas, l'équation se réduit à

$$(1 + 2c)^2 - 4 \frac{da}{dx} \frac{db}{dy} = 0 \text{ (¹)};$$

on peut toujours supposer que le λ est égal à l'unité puisque la surface est applicable sur le plan ; par conséquent, il vient simplement

$$\left(1 + 2 \frac{d^2 Z}{dx dy}\right)^2 - 4 \frac{d^2 Z}{dx^2} \frac{d^2 Z}{dy^2} = 0.$$

Posons

$$Z + \frac{xy}{2} = z,$$

et l'équation se ramène à la forme bien connue

$$\left(\frac{d^2 z}{dx dy}\right)^2 - \frac{d^2 z}{dx^2} \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

dont l'intégrale s'obtiendrait en éliminant le paramètre α entre les équations

$$z = \alpha x + f(\alpha) y - F(\alpha),$$
$$0 = x + f'(\alpha) y - F'(\alpha).$$

(¹) L'intégration de cette équation a été faite par M. Tresca, ingénieur des Ponts et Chaussées, auquel nous avions communiqué l'équation générale des systèmes cycliques.

131. *Interprétation géométrique de l'intégrale précédente.* — Il est fort facile maintenant d'interpréter ces résultats. Remarquons que l'on a, en passant aux coordonnées rectangulaires u et v pour lesquelles

$$x + iy = u, \qquad x - iy = v,$$

$$z = u[\alpha - if(\alpha)] + v[\alpha + if(\alpha)] - F(\alpha),$$
$$0 = u[1 - if'(\alpha)] + v[1 + if'(\alpha)] - F'(\alpha),$$

enfin

$$Z = z - \frac{u^2 + v^2}{2};$$

u et v sont les coordonnées rectangulaires du point O, centre de la sphère de rayon $\sqrt{-2Z}$. Calculons les coordonnées d'un des points de l'enveloppe des sphères; d'après la théorie qui précède, elles sont, relativement à la nouvelle origine,

$$\xi = u + \frac{dZ}{du}, \qquad \eta = v + \frac{dZ}{dv},$$

$$\zeta = \sqrt{-\left[2Z + \left(\frac{dZ}{du}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dv}\right)^2\right]};$$

mais l'équation en z peut s'écrire

$$z = u\beta + v\varphi(\beta) - \Phi(\beta),$$
$$0 = u \quad + v\varphi'(\beta) - \Phi'(\beta);$$

on en déduit sans peine

$$\xi = \beta, \qquad \eta = \varphi(\beta),$$

$$\zeta^2 + \beta^2 + \varphi(\beta)^2 = 2\Phi(\beta). \tag{39}$$

Ainsi les coordonnées de l'enveloppe sont des fonctions d'un même paramètre; donc *chacune des nappes de cette enveloppe se réduit à une courbe gauche, si l'on suppose* (O) *aplanie*.

132. *Définition directe et sans imaginaires des systèmes cycliques dont les plans enveloppent une développable.* — Mais ceci ne suffit pas, car à chaque point de la courbe gauche correspond un cercle, et pourtant il y a une infinité de points, tels que O, qu'il faut considérer comme associés au même cercle. Quel est le lien qui existe entre les points et l'un des cercles? C'est ce qu'il s'agit d'établir. Géométriquement on voit bien que tous les points O correspondant à un point M de la courbe gauche (M) doivent être rangés sur la trace du plan normal à (M), et analytiquement on voit que l'équation du lieu de ces points O est

$$u + v\varphi'(\beta) - \Phi'(\beta) = 0;$$

mais lorsque la courbe gauche est imaginaire (ce qui est le cas intéressant, puisqu'alors seulement les cercles sont réels), comment la droite lieu des points O est-elle liée aux cercles? R^2 est égal au carré du ζ du point M changé de signe; donc, en vertu de l'équation (39), celle du cercle image du point M est

$$u^2 + v^2 - 2u\beta - 2v\varphi(\beta) = -2\Phi(\beta),$$

et si l'on cherche la corde de contact, lorsque β varie, il vient

$$u + v\varphi'(\beta) - \Phi'(\beta) = 0,$$

ce qui est précisément la droite lieu des points O associés au cercle image du point M.

En résumé, *pour obtenir le système cyclique le plus général, admettant comme enveloppe une surface développable, il faut tracer dans un plan une enveloppe de cercles arbitraire, mener toutes les cordes de contact, puis enrouler le plan comme on veut et faire correspondre à chaque point d'une corde de contact le cercle qui lui a donné naissance.*

133. *L'équation différentielle des surfaces trajectoires des courbes planes est indépendante de la forme de* (O). *Propriétés complémentaires du système cyclique à cercles identiques.* — Il n'a certainement pas échappé que l'équation donnée au n° **120**, des surfaces trajectoires d'une famille de courbes planes, est indépendante de la forme de la surface (O), de telle sorte que, si l'on a intégré les trajectoires pour une forme de (O), cette intégrale convient à toutes les formes. Dans le cas particulier que nous venons de traiter, les surfaces trajectoires des cercles se réduisent, à la limite, aux courbes trajectoires orthogonales des cercles tracés dans le plan.

Il convient aussi de signaler que, lorsqu'un système cyclique est formé de cercles identiques, les surfaces trajectoires sont toutes applicables sur une surface de révolution. Dans ce cas, on a, en effet,

$$\begin{aligned} A &= K\cos\varphi, & B &= K\sin\varphi, \\ G &= \cos\varphi, & H &= g\sin\varphi, \\ G' &= -\sin\varphi, & H' &= g\cos\varphi, \end{aligned}$$

$$f = 1, \qquad \frac{dg}{g\,du} = \frac{1}{K}.$$

L'équation qui donne les du et dv des lignes principales doit être la même pour tous les points du cercle, puisque tout système cyclique est triplement orthogonal; au demeurant, en substituant les valeurs qui précèdent dans l'équation du n° **122**, il vient

$$du^2 D + du\,dv(Pg + Q) + dv^2 g^2 D = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation des lignes de courbure de (O): mais l'on sait que, dans un système cyclique, le lieu des foyers des faisceaux formés par les normales aux surfaces trajectoires se compose de deux diamètres conjugués, tangents aux directions qu'il faut suivre pour que les cercles soient lignes de courbure sur les surfaces élémentaires correspondantes. Dans le cas présent, comme l'angle de ces diamètres est droit, puisqu'ils sont dirigés suivant les tangentes principales à (O), il est clair que le produit des rayons de courbure principaux sur chacune des surfaces trajectoires est égal au carré du rayon constant des cercles, changé de signe. Ce qui précède complète ce que nous avions à exposer au sujet de ce système cyclique si bizarre. Pour résumer ses propriétés, nous dirons : *Le système cyclique dérivé de cercles identiques admet pour trajectoires des surfaces applicables sur la surface enveloppe du plan des cercles et sur la surface de* *révolution ayant pour méridienne la tractrice. Sur toutes ces surfaces, les lignes de courbure se correspondent.*

154. *Intégration des systèmes cycliques lorsque la surface enveloppe des plans est un point. Dans ce cas ils sont toujours orthogonaux à une sphère fixe.* — L'équation des systèmes cycliques s'intègre aussi dans un cas autre que celui des surfaces développables, c'est lorsque la surface enveloppe (O) se réduit à un point. Dans ce cas la formule (38) disparait; mais il est facile de la préparer, de telle sorte qu'elle donne encore la solution du problème.

Supposons d'abord que (O) soit une sphère, on a, si K désigne le rayon,

$$4K^2\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2=0,$$

et l'équation des systèmes cycliques est

$$\begin{aligned}0=-4\left(2Z+4\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dy}\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2\\ \times\left[\left(1+2\frac{d^2Z}{\lambda^2\,dx\,dy}\right)^2-4\frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dy}\right)\right].\end{aligned}$$

Considérons la sphère de rayon unité et exprimons tout en fonction de ses éléments, images semblables à ceux de la sphère considérée, et aussi en fonction du rayon de cette sphère. Il suffit manifestement de remplacer λ par λK (où λ est relatif à la sphère image).

L'équation du problème peut donc s'écrire

$$\begin{aligned}-4\left(2ZK^2+4\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dy}\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2\\ \times\left[\left(K^2+2\frac{d^2Z}{\lambda^2\,dx\,dy}\right)^2-4\frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dy}\right)\right]=0\end{aligned}$$

avec

$$4\frac{d^2\log\lambda}{dx\,dy}+\lambda^2=0;$$

si l'on passe à la limite, K devient nul; il reste

$$\frac{dZ}{dx}\frac{dZ}{dy}+\lambda^2\left[\frac{1}{\lambda^4}\left(\frac{d^2Z}{dx\,dy}\right)^2-\frac{d}{dx}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{dZ}{\lambda^2\,dy}\right)\right]=0,$$

mais on ignore ce qu'est au juste la fonction Z. Il convient de remonter à l'origine de la question. Supposons que (O) soit une sphère dont le rayon K tende vers zéro, et prolongeons à chaque instant les normales à (O) jusqu'à la rencontre de la sphère de rayon unité qui lui est concentrique. Prenons également sur cette sphère des axes instantanés parallèles à ceux qui pivotent autour de (O). Soient a, b, R les quantités qui définissent le système cyclique; il est clair que a et b sont à la fois les coordonnées du centre du cercle par rapport aux deux systèmes d'axes. Il faut remplacer f et g par Kf, Kg et $R_1 R_2$ par K^2. Dans ces conditions, les équations du n° **127** deviennent

$$R\frac{dR}{du} - a\frac{da}{du} - b\frac{db}{du} = aKf,$$

$$R\frac{dR}{dv} - a\frac{da}{dv} - b\frac{db}{dv} = bKg,$$

et celle du n° **129** donne

$$R^2 fg + \left(Kf + \frac{da}{du} + \frac{df}{g\,dv}b\right)\left(Kg + \frac{db}{dv} + \frac{dg}{f\,du}a\right)$$
$$- \left(\frac{db}{du} - \frac{df}{g\,dv}a\right)\left(\frac{da}{dv} - \frac{dg}{f\,du}b\right) = 0.$$

Si l'on passe à la limite, il vient

$$R^2 = a^2 + b^2 - C^2, \tag{40}$$

où C désigne une quantité constante (et cette équation remplace les deux premières du système primitif), puis

$$\left\{\begin{aligned} & R^2 fg + \frac{dg}{f\,du}\left(a\frac{da}{du} + b\frac{db}{du}\right) \\ & \qquad + \frac{df}{g\,dv}\left(a\frac{da}{dv} + b\frac{db}{dv}\right) + \frac{da}{du}\frac{db}{dv} - \frac{db}{du}\frac{da}{dv} = 0. \end{aligned}\right. \tag{41}$$

L'équation (40) exprime que tous ces cercles sont normaux à la sphère de rayon C qui a pour centre celui de la sphère de rayon unité. Ce résultat découle aussi à première vue de l'intégrale géométrique, car ici les sphères auxiliaires ayant même centre doivent coïncider toutes; on doit donc avoir

$$a^2 + b^2 + \zeta^2 = C^2,$$

et puisque généralement

$$\zeta^2 = -R^2,$$

on trouve l'équation (40).

Ainsi : *Lorsqu'un système cyclique est tel que les plans de tous ses cercles passent par un point fixe, chacun des cercles est orthogonal à une sphère fixe ayant ce point fixe pour centre.*

135. *Sur l'intégration analytique du problème.* — Il faut encore intégrer l'équation (41) pour obtenir le système cyclique le plus général; mais, géométriquement, on sait que le problème est résolu, attendu qu'il suffit de se donner une des surfaces trajectoires du système, et qu'on peut la prendre arbitrairement, ainsi qu'il a été démontré au nº **106**.

On peut désirer arriver par l'équation (41) elle-même au résultat que nous venons d'énoncer.

Soient en général ξ et η les coordonnées d'un point M situé dans le plan tangent de la surface de référence et tel que le plan tangent à (M) soit perpendiculaire à celui des XY, et fasse, par exemple, l'angle φ avec l'axe des X, on doit avoir manifestement et quels que soient du et dv,

$$-\Delta X \sin\varphi + \Delta Y \cos\varphi = 0,$$

et, d'après nos formules (F), ceci revient à

$$-\sin\varphi\left(f + \frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right) + \cos\varphi\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) = 0,$$

$$-\sin\varphi\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) + \cos\varphi\left(g + \frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) = 0.$$

L'équation d'un cercle de rayon R et normal à chaque instant à (M) est

$$\begin{gathered}X^2 + Y^2 + \xi^2 + \eta^2 - 2R(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi)\\ - 2X(\xi - R\cos\varphi) - 2Y(\eta - R\sin\varphi) = 0.\end{gathered}$$

La puissance du point O, par rapport à ce cercle, est donc, en général,

$$-2Z = \xi^2 + \eta^2 - 2R(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi),$$

et les coordonnées du centre sont

$$a = \xi - R\cos\varphi, \qquad b = \eta - R\sin\varphi.$$

Conséquemment, dans le cas où (O) se réduit à un point, nous savons d'avance que l'intégrale du problème est représentée par le système suivant d'équations simultanées

$$a = \xi - R\cos\varphi, \qquad b = \eta - R\sin\varphi,$$
$$C^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2R(\xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi),$$
$$-\sin\varphi\left(\frac{d\xi}{du} + \frac{df}{g\,dv}\eta\right) + \cos\varphi\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) = 0,$$
$$-\sin\varphi\left(\frac{d\eta}{du} - \frac{df}{g\,dv}\xi\right) + \cos\varphi\left(\frac{d\eta}{dv} + \frac{dg}{f\,du}\xi\right) = 0.$$

La vérification analytique se fait sans difficulté.

136. Nous devrions encore ramener le problème à ne dépendre que d'une seule équation aux différentielles partielles du second ordre, dont l'intégrale serait, par cela même, implicitement trouvée : celle du n° **134** y répond ; on pourrait ainsi faire des rapprochements intéressants, mais nous avons déjà trop insisté sur ces questions de détail.

Le Chapitre que nous terminons devrait être bien plus développé ; il pourrait comprendre, par exemple, la recherche des courbes algébriques trajectoires orthogonales de surfaces ; mais, ainsi étendu, il devrait faire l'objet d'un travail spécial.

CONCLUSIONS.

137. Notre but, dans le Mémoire que nous venons de rédiger, a été de montrer avec quelle facilité la Géométrie autour des surfaces permet d'aborder des questions, même très complexes ; nous souhaitons que les applications choisies paraissent dignes d'intérêt et d'études spéciales, mais nous aurons surtout atteint notre but, si l'on reconnaît qu'en effectuant autour des surfaces des constructions tout intégrées on peut créer une véritable Géométrie analytique qui marque un certain progrès dans la marche continuelle des opérations mathématiques. Nous aurions voulu ajouter à ce qui précède des Chapitres sur la recherche des couples de surfaces applicables, sur le mouvement d'un corps assujetti à quatre conditions, mais le temps nous fait absolument défaut; nous comptons les adresser prochainement à l'Institut, si nos recherches mathématiques actuelles y trouvent un accueil favorable.

Draguignan, 30 mai 1876.

NOTE.

Le Mémoire qui précède a été présenté à l'Académie des Sciences pour le prix Dalmont; il a fait l'objet d'un Rapport de M. de la Gournerie (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIV, p. 811).

Paris, 23 mars 1890.