JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

PEPIN

Sur quelques formes quadratiques quaternaires

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 5-67.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__5_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur quelques formes quadratiques quaternaires;

PAR LE P. PEPIN S. J.

I.

1. Liouville a énoncé, dans la deuxième série de son Journal, un grand nombre de théorèmes relatifs à la représentation des nombres entiers par diverses sommes de quatre carrés multipliés par des coefficients constants. Quelques-uns de ces théorèmes peuvent se déduire des formules générales utiles dans la théorie des nombres, publiées par le même savant dans le troisième Volume du Journal cité, et dont j'ai donné la démonstration dans le Tome IV de la quatrième série du même Journal (1888). D'autres, au contraire, n'ont été obtenus qu'en recourant à la théorie des fonctions elliptiques. Une partie des formules dont nous ferons usage dans la suite de ce travail ont été données par Liouville lui-même dans le troisième Volume de la deuxième série de son Journal (1858). On les obtient en faisant $f(x) = \cos xt$ dans les formules (a), (D), (F), (d), que le lecteur trouvera dans le Mémoire cité de 1888 (p. 94, 103, 104). Au moyen de cette substitution, on déduit de la formule (a)

$$(1) \qquad \Sigma(\Sigma \sin at \,\Sigma \sin bt) = 2^{\lambda-1} \Sigma\, d \sin^2(2^{\lambda-1}\, dt);$$

les trois intégrations indiquées dans le premier membre se rapportent aux solutions des trois équations

$$(1') \qquad 2^\lambda m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta$$

en nombres entiers impairs et positifs, tandis que la somme qui forme le second membre s'étend aux diverses décompositions du nombre impair m en deux facteurs. (Journal cité, p. 198; 1858.)

Au moyen de la même substitution, les formules (D), (F) donnent les deux suivantes (*ibid.*, p. 205, 244) :

$$(2) \qquad 4\Sigma(\Sigma \sin at \,\Sigma \sin bt) = \zeta_1(m) - \frac{\Sigma \sin dt}{\sin t},$$

$$(3) \qquad 4\Sigma(\Sigma \sin at \,\Sigma \sin 2^i bt) = \Sigma(\cos dt - \cos \delta t)\delta,$$

où les trois intégrations du premier membre se rapportent aux solutions des trois équations

$$(2') \qquad m = m' + 2^i m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta$$

en nombres impairs et positifs, l'exposant i pouvant être pair ou impair. La somme Σ du second membre correspond aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ.

2. Dans la formule (d), on remplace d'abord $f(x, y)$ par $f(x)(-1)^{\frac{y}{2}}$, puis $f(x)$ par $\cos xt$, en ayant égard aux relations

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} = -(-1)^{\frac{a+b}{2}} = (-1)^{\frac{a-1}{2}}(-1)^{\frac{b-1}{2}};$$

on obtient ainsi la formule suivante

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &4\Sigma\Big[\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cos\alpha t\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos 2^i\beta t\Big]\\ &\quad=\Sigma\, d\cos dt-\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\cos dt,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle les trois intégrations du premier membre se rapportent aux solutions des trois équations (2′), et celles du second membre, à l'équation $m=d\delta$.

La fonction $F(x)$ qui figure dans la formule (L) étant impaire, nous ferons avec Liouville $F(x)=\sin xt$, et nous obtiendrons l'équation

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\Sigma\Big[\Sigma\sin at\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos bt)\Big]\\ &\quad=\Sigma\sin(2\,dt)+4\Sigma[\rho(m_2)\Sigma\sin 2\,d_1 t],\end{aligned}\right.$$

dans laquelle les intégrations du premier membre se rapportent aux diverses solutions des équations (1′), la première somme du second membre correspond à l'équation $m=d\delta$, et les deux sommes indiquées dans le dernier terme, aux deux équations

$$(5')\qquad m=m_1+2^i m_2,\qquad m_1=d_1\delta_1.$$

A ces formules, qui appartiennent à Liouville, je joindrai la suivante, tirée de mon Mémoire cité de 1888, p. 126,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\Sigma\Big[\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cos at\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos bt\Big]\\ &\quad=\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}(1+\cos 2\,dt)\\ &\qquad+4\Sigma\Big[\rho(m_2)\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}}\cos 2\,d_1 t\Big]\\ &\qquad+4\Sigma\Big[\rho(m_1)\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\cos 2^{i+1}\,d_2 t\Big].\end{aligned}\right.$$

Les trois intégrations du premier membre se rapportent aux trois équations (1′) : la première somme du second membre correspond à l'équation $m=d\delta$; enfin les autres sommes correspondent aux trois équations

$$m=m_1+2^i m_2,\qquad m_1=d_1\delta_1,\qquad m_2=d_2\delta_2.$$

3. Nous appliquerons les formules précédentes en faisant successivement $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12}$. Mais, pour interpréter les résultats obtenus et pour en déduire les conséquences relatives aux formes quadratiques, il convient d'introduire la fonction numérique définie par la formule

$$\varpi(m, -\mathrm{D}) = \sum \left(\frac{\mathrm{D}}{\delta}\right),$$

où l'on désigne par D un déterminant négatif, par m un nombre impair, par δ les diviseurs de m et par $\left(\frac{\mathrm{D}}{\delta}\right)$ le symbole généralisé de Jacobi, sous la condition d'en réduire la valeur à zéro, lorsque D et δ ne sont pas premiers entre eux. Lorsque $\mathrm{D} = -1$, la fonction $\varpi(m, 1)$ coïncide avec celle que Liouville a désignée par $\rho(m)$; elle exprime le nombre des décompositions du nombre $2m$ en deux carrés; son quadruple exprime le nombre des représentations de m par la forme quadratique $x^2 + y^2$. La relation de la fonction $\varpi(m, -\mathrm{D})$ avec les formes quadratiques du déterminant D est déterminée par les deux théorèmes suivants :

I. *Si l'on désigne par* (Ω) *l'ensemble des formes quadratiques choisies pour représenter toutes les classes de formes quadratiques du même ordre (proprement ou improprement) primitif du déterminant* D, *et par m un nombre impair premier avec* D, *le nombre des représentations de m par les formes* (Ω) *relatives à l'ordre proprement primitif est exprimé par*

$$2\varpi(m, -\mathrm{D})$$

ou par

$$4\varpi(m, 1),$$

suivant que D *est inférieur à* -1 *ou égal à* -1.

II. *Le nombre des représentations de* $2m$ *par les formes* Ω *qui représentent l'ordre improprement primitif du déterminant* D *est exprimé par*

$$2\varpi(m, -\mathrm{D})$$

ou par

$$6\varpi(m, 3),$$

suivant que D *est inférieur ou égal à* -3.

4. Lorsque $D = -3$, l'ordre proprement primitif est représenté par une forme unique $(1, 0, 3)$, et l'ordre improprement primitif, par la forme $(2, 1, 2)$. La formule $2\varpi(m, 3)$ exprime le nombre des représentations de m par la forme $(1, 0, 3)$, et cela subsiste dans le cas où m est divisible par 3, pourvu que l'on réduise à zéro le symbole $\left(\frac{-3}{\delta}\right)$ dans la formule

$$\varpi(m, 3) = \sum\left(\frac{-3}{\delta}\right)$$

lorsque le diviseur δ de m est multiple de 3.

Le nombre des solutions de chacune des équations

$$2^{2\lambda+2}m = x^2 + 3y^2, \qquad 2^{2\lambda+1}m = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

est exprimé par $6\varpi(m, 3)$, sous la même condition de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-3}{\delta}\right)$ quand δ n'est pas premier avec 3.

Lorsque $D = -6$, toutes les formes quadratiques du déterminant D sont distribuées en deux classes représentées par les deux formes

$$x^2 + 6y^2, \qquad 2x^2 + 3y^2.$$

Comme ces deux classes forment deux genres différents, un même nombre ne peut être représenté que par une seule de ces deux classes. Soit $n = 2^\alpha . 3^\beta m$, m désignant un nombre premier avec 6. Le nombre des représentations de n par celle des deux formes $(1, 0, 6)$, $(2, 0, 3)$ qui correspond à son genre est exprimé par $2\varpi(m, 6)$. On peut aussi l'exprimer par $2\varpi(3^\beta m, 6)$, en convenant de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-6}{\delta}\right)$, lorsque le diviseur δ de $3^\beta m$ n'est pas premier avec 6. On a, sous cette condition,

$$\varpi(n, 6) = \varpi(3^\beta m, 6) = \varpi(m, 6).$$

5. Les propositions précédentes, empruntées à la théorie des formes quadratiques, sont exposées avec plus de détails dans mon *Étude sur quelques formules d'Analyse utiles dans la théorie des nombres,* qui a paru dans les *Actes de l'Académie des nouveaux Lyncéens* (session du 19 avril 1885).

J'ajouterai ici une proposition semblable relative au déterminant -12. Toutes les formes quadratiques de ce déterminant sont renfermées dans deux classes représentées par les deux formes $(1, 0, 12)$, $(4, 0, 3)$. Les nombres impairs représentés par la première classe sont tous de la forme $4l+1$, tandis que ceux de la seconde sont tous de la forme $4l+3$. Par conséquent, le nombre des représentations d'un nombre impair m par celle des deux formes $(1, 0, 12)$, $(4, 0, 3)$ qui lui convient est exprimé par

$$2\varpi(m, 12) = 2\varpi(m, 3).$$

La représentation d'un nombre pair $2^\alpha m$ par l'une des deux formes $(1, 0, 12)$, $(4, 0, 3)$ se ramène à celle du nombre $2^{\alpha-2}m$ par la forme $(1, 0, 3)$, ce qui exige que α soit de la forme $2l+2$. Le nombre de ces représentations est égal à $2\varpi(m, 3)$ ou à $6\varpi(m, 3)$, suivant que α est égal ou supérieur à 2.

Le déterminant -12 n'admet pas d'ordre improprement primitif, mais il offre deux ordres dérivés, représentés par les deux formes $(2, 0, 6)$, $(4, 2, 4)$. Les représentations du nombre pair $2^\alpha m$ par l'une de ces deux formes se ramènent à celles du nombre $2^{\alpha-1} m$ par la forme $(1, 0, 3)$ ou par la forme $(2, 1, 2)$, suivant que $(\alpha-1)$ est pair ou impair. Par conséquent, la forme $(2, 0, 6)$ ne représente que des nombres de la forme $2^{2l+1}m$, et le nombre des représentations est égal à $2\varpi(m, 3)$ ou à $6\varpi(m, 3)$, suivant que l est nul ou positif; la forme $(4, 2, 4)$ ne représente que des nombres de la forme $2^{2l+2}m$, et le nombre des représentations est égal à $6\varpi(m, 3)$.

6. L'expression $2\varpi(m, -\mathrm{D})$ peut recevoir diverses interprétations relativement aux formes quadratiques, surtout lorsque D est divisible par un carré; car, si $\mathrm{D} = -ds^2$, on a

$$\varpi(m, -\mathrm{D}) = \varpi(m, -d).$$

Soit, par exemple, $d = -1$; le nombre des représentations d'un nombre m par l'ensemble des formes (Ω) qui représentent les classes proprement primitives du déterminant $-s^2$ est exprimé par la formule

$$2\varpi(m, s^2) = 2\varpi(m, 1) = 2\rho(m).$$

Soit $s^2 = 4$. Les formes (Ω) se réduisent à une seule, $(1, 0, 4)$. Le nombre des représentations d'un nombre impair m par cette forme est égal à $2\rho(m)$. La même expression détermine aussi le nombre des représentations de $2^{2\alpha}m$ par la même forme.

Si $s^2 = 16$, les formes Ω sont au nombre de deux, savoir $(1, 0, 16)$, $(4, 2, 5)$; mais, comme ces deux formes appartiennent à deux genres différents, un même nombre ne peut être représenté que par l'une de ces deux formes. Le nombre des représentations d'un nombre impair m par celle de ces deux formes $(1, 0, 16)$, $(4, 2, 5)$ qui lui convient est égal à $2\rho(m)$.

De même, si $d = -2$, la formule

$$2\varpi(m, 2) = 2\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right) = 2\Sigma(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}+\frac{\delta-1}{2}}$$

exprime le nombre des représentations, soit du nombre impair m, soit du produit $2^\alpha m$ par la forme $(1, 0, 2)$. Elle exprime aussi le nombre des représentations de m par celle des deux formes $(1, 0, 8)$, $(3, 2, 4)$ qui lui convient.

7. Lorsque, dans nos formules, on égale t à l'un des arcs $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}$, la somme $\Sigma \sin dt$ qui correspond aux diviseurs d de m, ainsi que les sommes semblables relatives aux diviseurs des nombres m', m'', s'exprime au moyen des fonctions numériques

$$\varpi(m, 1) = \rho(m), \quad \varpi(m, 2), \quad \varpi(m, 3) \quad \text{et} \quad \varpi(m, 6).$$

On a d'abord

$$(7) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sin\frac{d\pi}{2} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}, \\ &\sum \sin\frac{d\pi}{2} = \Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}} = \rho(m). \end{aligned}\right.$$

Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on a

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sin\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right),\\
(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right),\\
\sum\sin\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\varpi(m,2),\\
\sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\varpi(m,2).
\end{aligned}
\right.
$$

Pour $t = \frac{\pi}{3}$, on a

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\sin\frac{d\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-3}{d}\right),\\
\sin\frac{2^i d\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-3}{d}\right)(-1)^{i-1} \qquad (i>0),\\
\sum\sin\frac{d\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\varpi(m,3),\\
\sum\sin\frac{2^i d\pi}{3} &= (-1)^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\varpi(m,3).
\end{aligned}
\right.
$$

Ces dernières formules sont applicables aux valeurs de m divisibles par 3, sous la condition de réduire à zéro le symbole généralisé de Jacobi $\left(\frac{p}{q}\right)$, lorsque les deux nombres p et q ne sont pas premiers entre eux. Pour les formules où figure $\cos\frac{d\pi}{3}$, il faut distinguer les cas où le nombre m est multiple de 3. On a, en effet,

$$\cos\frac{d\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad -1,$$

suivant que d est premier, ou non, avec 3. Si le nombre m est premier avec 3, on a

$$(10)\quad \Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{3} = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\rho(m), \qquad m = d\delta.$$

Si m est divisible par 3, il faut considérer séparément les diviseurs multiples de 3. Pour cela, posons $m = 3^\beta n$ en désignant par n un nombre impair, premier avec 3. Les diviseurs de m sont d'abord les diviseurs de n que nous désignerons par d_1; puis les produits des diviseurs d_1 multipliés par $3, 3^2, \ldots, 3^\beta$, de sorte que, en indiquant par Σ_1 une somme qui correspond aux diviseurs d_1 de n, on peut exprimer la somme relative aux diviseurs de m par la formule

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{d\pi}{3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma_1(-1)^{\frac{d_1-1}{2}} - \Sigma_1(-1)^{\frac{3d_1-1}{2}} - \Sigma_1(-1)^{\frac{9d_1-1}{2}} - \ldots - \Sigma_1(-1)^{\frac{3^\beta d_1-1}{2}}.$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{3^i d_1 - 1}{2} = \frac{3^i - 1}{2} + \frac{d_1 - 1}{2}, \qquad (-1)^{\frac{3^i-1}{2}} = (-1)^i,$$
$$\Sigma_1(-1)^{\frac{3^i d_1-1}{2}} = (-1)^i \Sigma(-1)^{\frac{d_1-1}{2}} = (-1)^i \rho(n).$$

La formule précédente devient donc

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{d\pi}{3} = \rho(n)[\tfrac{1}{2} + 1 - 1 + \ldots - (-1)^\beta] = \frac{2-(-1)^\beta}{2}\rho(n).$$

D'ailleurs, pour une valeur entière et positive de i, on a toujours

$$\cos\frac{2^i d\pi}{3} = -\cos\frac{d\pi}{3};$$

on aura donc, pour un multiple de 3 de l'une des deux formes $3^\beta n$ ou $2^i.3^\beta n$, les formules suivantes :

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{d\pi}{3} = \dfrac{2-(-1)^\beta}{2}\rho(n), \\ \sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{2^i d\pi}{3} = -\dfrac{2-(-1)^\beta}{2}\rho(n) \qquad (i > 0). \end{cases}$$

8. Les formules relatives à l'arc $t = \frac{\pi}{6}$ se déduisent des précédentes au moyen des formules trigonométriques d'addition et des relations

$$\frac{d\pi}{2} - \frac{d\pi}{3} = \frac{d\pi}{6}, \qquad \cos\frac{d\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{d\pi}{2} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

On trouve ainsi

$$\sin\frac{d\pi}{6} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{3}, \qquad \cos\frac{d\pi}{6} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\sin\frac{d\pi}{3},$$

$$(12) \qquad \left\{\begin{array}{l} \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{6} = \sum\sin\frac{d\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varpi(m, 3), \\ \sum\sin\frac{d\pi}{6} = \frac{2-(-1)^{\beta}}{2}\rho(n), \qquad d\delta = m = 3^{\beta}n. \end{array}\right.$$

Pour l'arc $t = \frac{\pi}{12}$, on emploie les formules

$$\frac{d\pi}{3} - \frac{d\pi}{4} = \frac{d\pi}{12},$$

$$\sin\frac{d\pi}{4} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right),$$

$$\sin\frac{d\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{2}{d}\right)\sin\frac{d\pi}{3} - \left(\frac{-2}{d}\right)\cos\frac{d\pi}{3}\right],$$

$$d \equiv \pm 1 \pmod 3.$$

Si $d = 3d_1$, on a

$$\sin\frac{d\pi}{12} = \sin\frac{d_1\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d_1}\right).$$

En convenant de réduire à zéro le symbole de Jacobi lorsque les deux termes ne sont pas premiers entre eux, on peut réunir les deux formules en une seule, savoir

$$\sin\frac{d\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{-6}{d}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\frac{3}{d}\right)^2\left(\frac{-2}{d}\right).$$

On trouve de même

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-2}{d}\right) + \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{-6}{d}\right) \quad \text{si} \quad d = 3k \pm 1,$$

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12} = -(-1)^{\frac{d_1-1}{2}}\cos\frac{d_1\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d_1}\right) \quad \text{si} \quad d = 3d_1.$$

En intégrant par rapport aux diviseurs d de m et en posant

$$m = 3^\mu n, \qquad n \equiv \pm 1 \pmod 3,$$

on trouve

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \sum \sin\frac{d\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m, 6) + \frac{\sqrt{2}}{2}\varpi(m, 2) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\varpi(n, 2), \\ \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m, 6) + \frac{\sqrt{2}}{4}\varpi(n, 2) - \frac{\sqrt{2}}{2}\varpi\left(\frac{m}{3}, 2\right). \end{aligned}\right.$$

Dans la dernière formule, on doit réduire à zéro $\varpi\left(\frac{m}{3}, 2\right)$ lorsque $\frac{m}{3}$ n'est pas entier. On simplifie ces formules au moyen de la relation

$$\varpi(3^\mu n, 2) = \varpi(3^\mu, 2)\varpi(n, 2) = (\mu + 1)\varpi(n, 2);$$

on remplace les formules (13) par les suivantes

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \sum \sin\frac{d\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m, 6) + \frac{\sqrt{2}}{4}(2\mu - 1)\varpi(n, 2) \qquad (m = 3^\mu n), \\ \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12} &= \frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m, 6) - \frac{\sqrt{2}}{4}(2\mu - 1)\varpi(n, 2), \end{aligned}\right.$$

qui subsistent pour $\mu = 0$ et $m = n$.

9. A ces formules trigonométriques nous ajouterons la suivante

$$(15)\qquad \Theta(z)\mathrm{H}_1'(z) - \mathrm{H}_1(z)\Theta'(z) = -\mathrm{H}(z)\Theta_1(z),$$

que l'on obtient en prenant la dérivée de la fonction elliptique

$$\cos \operatorname{am} z = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{\mathrm{H}_1(z)}{\Theta(z)}.$$

Les fonctions H, Θ sont définies par les formules suivantes

$$
(\mathrm{A})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{H}\,(z) = \sum(-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin\frac{(2m+1)\pi z}{\omega},\\
&\mathrm{H}_1(z) = \sum q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos\frac{(2m+1)\pi z}{\omega},\\
&\Theta\,(z) = \sum(-1)^m q^{m^2} \cos\frac{2m\pi z}{\omega},\\
&\Theta_1(z) = \sum q^{m^2} \cos\frac{2m\pi z}{\omega},
\end{aligned}
\right.
$$

dans lesquelles le nombre m prend toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$. En substituant ces expressions dans la formule (15) et en ayant égard à la formule $\frac{\omega}{\pi} = \overline{\Theta_1(0)}^2 = \theta_1^2$, on obtient la suivante

$$
(15')\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum(-1)^n(2m+1)q^{n^2+\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos\frac{2n\pi z}{\omega} \sin\frac{(2m+1)\pi z}{\omega}\\
&\quad -\sum(-1)^m m q^{m^2+\frac{(2n+1)^2}{4}} \sin\frac{2m\pi z}{\omega} \cos\frac{(2n+1)\pi z}{\omega}\\
&\quad = \theta_1^2 \sum(-1)^m q^{n^2+\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin\frac{(2m+1)\pi z}{\omega} \cos\frac{2n\pi z}{\omega} \qquad (\theta_1^2 = \Sigma q^{x^2+y^2}),
\end{aligned}
\right.
$$

dans laquelle les nombres m, n, x, y prennent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

Soit $z = \frac{\omega}{2}$; le second terme s'annule à cause du facteur

$$\sin\frac{2m\pi z}{\omega} = \sin m\pi = 0.$$

D'ailleurs, on a

$$(-1)^n \cos n\pi = 1, \qquad \sin(2m+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^m;$$

notre formule devient donc

$$\Sigma(-1)^m(2m+1)q^{n^2+\frac{(2m+1)^2}{4}} = \Sigma q^{x^2+y^2}\Sigma(-1)^n q^{n^2+\frac{(2m+1)^2}{4}}$$

ou bien, par le changement de q en q^4,

$$\Sigma(-1)^m(2m+1)q^{(2m+1)^2+4n^2} = \Sigma(-1)^n q^{(2m+1)^2+4x^2+4y^2+4n^2}.$$

On peut réunir, dans le premier membre, les deux termes qui correspondent à une même valeur de $(2m+1)^2 = i^2$; la valeur positive de m donne $(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$ comme coefficient de q^{i^2}; la valeur négative

$$m = -\frac{i+1}{2}$$

donne

$$(-1)^m(2m+1) = -(-1)^{\frac{i+1}{2}} i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Par conséquent, la somme des deux coefficients de q^{i^2} est égale à $2(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$. Désignant donc par i un nombre impair et positif et par x, y, t des nombres entiers, pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs, on a

$$(15'') \qquad 2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i . q^{i^2+4s^2} = 2\Sigma(-1)^t q^{i^2+4x^2+4y^2+4t^2}.$$

Dans le premier membre, le coefficient de q^m est la somme

$$2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

étendue à toutes les valeurs impaires et positives de i qui vérifient l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

dans laquelle le nombre s est un entier quelconque. Nous obtenons ainsi la fonction numérique employée par Liouville dans plusieurs de ses théorèmes.

II.

10. En faisant successivement $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{3}$, dans la formule (1), on en déduit les suivantes, eu égard aux formules (7), (8) et (9),

$$(16) \qquad \Sigma\rho(m')\rho(m'') = \zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad = 0$$

suivant que l'on a $\lambda = 1$ ou $\lambda > 1$;

$$(17) \qquad \Sigma\varpi(m', 2)\varpi(m'', 2) = \zeta_1(m), \qquad 4\zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que l'on a $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ ou $\lambda > 2$;

$$(18) \qquad \Sigma\varpi(m', 3)\varpi(m'', 3) = 2^{\lambda-1}\Sigma d\left(\frac{3}{d}\right)^2 = 2^{\lambda-1}\mathrm{S}(m),$$

$\mathrm{S}(m)$ désignant la somme des diviseurs de m, en exceptant ceux qui sont divisibles par 3.

Comme la fonction $\rho(m)$ s'annule lorsque le nombre m est de la forme $4x+3$, le produit $\rho(m')\rho(m'')$ est constamment nul lorsque, dans l'équation

$$2^\lambda m = m' + m'',$$

l'exposant λ est supérieur à 1, car alors l'un des deux nombres m', m'' est de la forme $4x+1$, et l'autre de la forme $4x+3$.

Lorsque $\lambda = 1$, la formule (16) s'interprète de diverses manières. Puisque $\rho(m')$ exprime le nombre des décompositions de $2m'$ en deux carrés impairs à racines positives, le produit $\rho(m')\rho(m'')$ est égal au nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à $2m'$, et la somme des deux derniers à $4m - 2m' = 2m''$. La somme de tous les produits semblables, relatifs à toutes les solutions de l'équation

$$4m = 2m' + 2m'',$$

en nombres impairs et positifs, m', m'', est égale au nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés à racines positives, deux décompositions étant considérées comme différentes, lorsqu'elles sont formées des mêmes carrés et qu'elles ne diffèrent entre elles que par l'ordre de ces carrés. La formule (16) exprime donc le théorème suivant, de Jacobi :

I. *Le nombre des décompositions du quadruple d'un nombre impair m en quatre carrés impairs, à racines positives, est égal à la somme des diviseurs de m.*

11. La même formule peut encore s'interpréter autrement; $2\rho(m')$ et $2\rho(m'')$ expriment les nombres des représentations de m' et de m'' par la forme (1, 0, 4). Le produit $2\rho(m')\times 2\rho(m'')$ est donc égal au nombre de celles des solutions de l'équation

$$(a) \qquad 2m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

dans lesquelles la somme $x^2 + 4z^2$ est égale à m'. Le nombre total des solutions de cette équation est donc égal à

$$\Sigma 2\rho(m')\, 2\rho(m'') = 4\zeta_1(m).$$

De même, de ce que $4\rho(m')$ exprime le nombre des représentations de m' par une somme de deux carrés, on conclut que le nombre des représentations de $2m$ par une somme de quatre carrés dont les deux premiers ont pour somme un nombre impair m' est représenté par la somme $\Sigma 4\rho(m')\, 4\rho(m'')$ et qu'ainsi il est égal à $16\zeta_1(m)$. Donc :

II. *Le nombre des représentations de $2m$ par la forme*

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.

III. *Le nombre des représentations de $2m$ par la forme*

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

sous la condition $x + y \equiv 1 \pmod{2}$, *est égal à seize fois la somme des diviseurs de m.*

En écrivant la formule (16) de la manière suivante

$$\Sigma 4\rho(m')\,2\rho(m'') = 8\zeta_1(m),$$

on en déduirait d'une manière semblable que :

IV. *Le nombre des représentations du nombre* $2m$ *par la forme*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$$

est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, *sous la condition*

$$x + y \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2).$$

Ces théorèmes se ramènent l'un à l'autre par des considérations arithmétiques très simples. Ainsi l'équation

$$(a') \qquad 2m = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4t^2$$

admet le même nombre de solutions que l'équation (a). Or l'équation

$$(b) \qquad 2m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$$

admet deux fois plus de solutions que l'équation (a'), car les deux carrés qui satisfont à l'équation $x^2 + y^2 = m'$ admettent deux permutations dans l'équation (b), tandis que dans l'équation (a') le carré pair est fixé au second terme. Le nombre des solutions de l'équation (b) est donc égal à $8\zeta_1(m)$, sous la condition

$$x + y \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2).$$

12. Dans la formule (17), $2\varpi(m', 2)$ exprime le nombre des représentations de m' par la forme $(1, 0, 2)$; le produit

$$2\varpi(m', 2)\,2\varpi(m'', 2)$$

est donc égal au nombre des solutions de l'équation

$$(c) \qquad 2^\lambda m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2, \qquad xy \equiv 1\,(\text{mod. } 2),$$

dans lesquelles la somme x^2+2z^2 est égale à m'. La somme de tous les produits semblables, relatifs à toutes les valeurs impaires $1, 3, \ldots, (2^\lambda m-1)$ de m' exprime le nombre de celles des solutions de l'équation (c) dans lesquelles x et y sont impairs. Donc :

V. *Le nombre des solutions de l'équation* (c), *dans lesquelles les deux premiers carrés sont impairs, est égal à quatre fois la somme des diviseurs de* m, *si* $\lambda=1$, *et à seize fois cette somme, si* $\lambda=2$. *L'équation* (c) *est impossible lorsque* λ *est supérieur à* 2.

L'équation (17) peut encore s'interpréter autrement : $2\varpi(m, 2)$ exprime le nombre des représentations de m par la forme $(1, 0, 8)$ ou par la forme $(3, 2, 4)$, suivant que m est de la forme $8x+1$ ou de la forme $8x+3$. D'ailleurs l'équation

$$4m=m'+m''$$

exige que l'un des deux nombres m', m'' soit de la forme $4l+1$ et l'autre de la forme $4l+3$; de plus, les deux formes $8l+5$ et $8l+7$ sont exclues parce que $\varpi(m, 2)$ se réduit à zéro, quand m est de l'une de ces deux formes. Par conséquent, l'un des deux nombres m', m'' sera de la forme $8l+1$ et l'autre de la forme $8l+3$; la somme

$$\Sigma 2\varpi(m', 2)\, 2\varpi(m'', 2)$$

exprime le double du nombre des solutions de l'équation

$$(c') \qquad 4m=x^2+3y^2+4zy+4z^2+8t^2.$$

VI. *Le nombre des représentations du quadruple d'un nombre impair* m *par la forme quaternaire*

$$x^2+3y^2+4yz+4z^2+8t^2$$

est égal à huit fois la somme des diviseurs de m.

Dans l'équation $2m=m'+m''$ relativement à la même formule (17), on doit prendre m' et m'' de la forme $8l+1$, si m est de la forme $4x+1$, et de la forme $8l+3$, si m est de la forme $4x+3$. Donc :

VII. *Le nombre des représentations du double d'un nombre impair m par la forme quaternaire*

$$x^2+y^2+8z^2+8t^2$$

ou par la forme

$$3x^2+4xy+4y^2+3z^2+4zt+4t^2,$$

suivant que m est de la forme $4l+1$ ou de la forme $4l+3$, est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.

13. En multipliant par 4 l'équation (18), on obtient la formule

$$(18') \qquad \Sigma 2\varpi(m',3)\,2\varpi(m'',3) = 2^{\lambda+1}\mathrm{S}(m)$$

qui exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(\mathrm{A}) \qquad 2^\lambda m = m'+m'' = x^2+3y^2+z^2+3t^2$$

dans lesquelles la somme $x+y$ est impaire; car $2\varpi(m',3)$ est égal au nombre des représentations de m' par la forme $(1,0,3)$, de sorte que le produit $2\varpi(m',3)\,2\varpi(m'',3)$ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation (A) dans lesquelles la somme x^2+3y^2 est égale à m'. La somme de tous les produits semblables, relatifs aux valeurs impaires et positives de m', inférieures à $2^\lambda m$, est donc égale au nombre de celles des solutions de l'équation (A) dans lesquelles les deux premières indéterminées x, y forment une somme impaire. On peut omettre cette restriction lorsque λ est égal à 1, car alors elle est toujours vérifiée, puisque la forme x^2+3y^2 ne peut être un nombre pair sans être un multiple de 4.

On a donc, en désignant par n un nombre premier avec 6 et par β un exposant entier, positif ou nul,

$$\mathrm{N}(2.3^\beta n = x^2+y^2+3z^2+3t^2) = 4\zeta_1(n) = 4\mathrm{S}(3^\beta n).$$

VIII. *Le nombre des représentations du double d'un nombre impair m par la forme quaternaire*

$$(A') \qquad 2m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

est égal à quatre fois la somme de ceux des diviseurs de m qui ne sont pas divisibles par 3.

14. Les deux sommes x^2+y^2, z^2+t^2 sont paires dans l'équation (A'); car, si elles étaient impaires, elles seraient de la forme $4l+1$ et l'on en déduirait la congruence

$$2m \equiv 1 + 3 \equiv 0 \pmod{4}$$

contrairement à l'hypothèse. On peut donc poser

$$x = p+q, \qquad y = p-q, \qquad z = u+v, \qquad t = u-v,$$

de sorte que l'équation (A') se ramène à la suivante

$$(A'') \qquad m = 3^\beta n = p^2 + q^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

d'où l'on conclut

$$N(3^\beta n = p^2 + q^2 + 3u^2 + 3v^2) = 4\zeta_1(n) = 4S(m).$$

IX. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme*

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m, en exceptant ceux qui sont multiples de 3.

15. La formule (18') reçoit encore une autre interprétation, lorsque λ est > 1. Dans ce cas, l'un des deux nombres m', m'' est de la forme $4l+1$, et l'autre de la forme $4l+3$. En réduisant le second membre à sa moitié, on peut restreindre la somme Σ à celles des solutions de l'équation

$$2^\lambda m = m' + m''$$

qui vérifient la condition $m' \equiv 1 \pmod{4}$. On a sous cette restriction

$$\Sigma' 2\varpi(m', 3)\, 2\varpi(m'', 3) = 2^\lambda S(m).$$

Or $2\varpi(m', 3)$ et $2\varpi(m'', 3)$ expriment les nombres des représentations de m' et de m'' par les formes respectives $(1, 0, 12)$ et $(3, 0, 4)$. La somme Σ' est donc égale au nombre de celles des solutions de l'équation

$$\text{(B)} \qquad 2^\lambda m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$$

dans lesquelles les deux premiers carrés sont impairs. On a

$$N_1(2^\lambda m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 2^\lambda S(m) \qquad xy \equiv 1 \pmod{2}.$$

X. *Le nombre des représentations d'un multiple de* 4, $2^\lambda m$, *par la forme*

$$\text{(B)} \qquad x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

où les deux premiers carrés ne reçoivent que des valeurs impaires, est égal au produit de la somme des diviseurs de ce nombre, impairs et premiers avec 3, *multipliée par* 2^λ, *c'est-à-dire la plus haute puissance de* 2 *renfermée dans ce nombre.*

Nous donnerons plus loin la théorie complète des formes ici considérées; nous nous bornons pour le moment à déduire les conséquences immédiates de nos formules.

16. Posons $t = \frac{\pi}{6}$ dans l'équation (1), puis effectuons à l'aide des formules (12) les intégrations partielles relatives aux diviseurs des nombres m', m''; nous obtenons la formule

$$\Sigma[2 - (-1)^e]\rho(n')[2 - (-1)^f]\rho(n'') = 2^{\lambda+1}\Sigma d \sin^2\left(\frac{2^{\lambda-1} d\pi}{6}\right),$$
$$2^\lambda m = 2^\lambda 3^\beta n = 3^e n' + 3^f n''.$$

Si $\lambda = 1$, on a

$$\sin^2 \frac{d\pi}{6} = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad = 1$$

suivant que d est premier avec 3 ou divisible par 3. On a donc

$$\begin{aligned}\Sigma d \sin^2\left(\frac{d\pi}{6}\right) &= \frac{1}{4}\zeta_1(n) + 3\zeta_1\left(\frac{m}{3}\right)\\ &= \zeta_1(n)\left[\frac{1}{4} + \frac{3^\beta - 1}{2}3\right] = \frac{6.3^\beta - 5}{4}\mathrm{S}(m);\end{aligned}$$

$$(19)\quad \begin{gathered}\Sigma[2-(-1)^e]\rho(n')[2-(-1)^f]\rho(n'') = (6.3^\beta - 5)\mathrm{S}(m),\\ 3^e n' + 3^f n'' = 2m = 2.3^\beta n, \qquad nn'n'' \equiv \pm 1 \pmod{3}.\end{gathered}$$

Si λ est > 1, $\sin^2\left(\frac{2^{\lambda-1}d\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ ou o suivant que d est premier avec 3 ou divisible par 3, et l'on a

$$(19')\quad \begin{gathered}\Sigma[2-(-1)^e]\rho(n')[2-(-1)^f]\rho(n'') = 3.2^{\lambda-1}\mathrm{S}(m),\\ \lambda > 1, \qquad 2^\lambda m = 3^e n' + 3^f n'' = m' + m''.\end{gathered}$$

Pour interpréter ces deux formules, il faut partager la somme Σ en quatre sommes partielles $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ dont les termes correspondent respectivement aux quatre hypothèses suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll}1.\ e\equiv 0, & f\equiv 0,\\ 2.\ e\equiv 0, & f\equiv 1\end{array}\right\} \pmod{2},$$

$$\left.\begin{array}{ll}3.\ e\equiv 1, & f\equiv 0,\\ 4.\ e\equiv 1, & f\equiv 1\end{array}\right\} \pmod{2}.$$

Le premier membre de nos deux équations est alors

$$\begin{aligned}&\Sigma_1\rho(m')\rho(m'') + 3\Sigma_2\rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right)\\ &\quad + 3\Sigma_3\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho(m'') + 9\Sigma_4\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right);\end{aligned}$$

mais l'équation (16) nous donne

$$\Sigma_1\rho(m')\rho(m'') = \zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad = 0,$$

suivant que λ est égal ou supérieur à 1; de plus, à cause de la symétrie de l'équation $m'+m''=2^\lambda m$, on a $\Sigma_2=\Sigma_3$. Les formules (19) et (19') deviennent donc respectivement

$$6\Sigma_2\rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right)+9\Sigma_4\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right)=(6.3^\beta-5)\,S(m)-\zeta_1(m),$$

$$6\Sigma_2\rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right)+9\Sigma_4\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right)=3.2^{\lambda-1}S(m),\qquad(\lambda>1).$$

Or la somme Σ_2 est nulle dans la première équation; car, la somme $m'+m''$ étant de la forme $4l+2$, les deux nombres m', m'' sont tous deux de la forme $4l+1$ ou tous deux de la forme $4l+3$, d'où il résulte que les deux nombres m', $\frac{m''}{3}$ sont, l'un de la forme $4l+1$ et l'autre de la forme $4l+3$ et qu'ainsi le produit $\rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right)$ est toujours nul. D'ailleurs

$$\zeta_1(m)=\zeta_1(3^\beta n)=\frac{3^{\beta+1}-1}{2}\zeta_1(n)=\frac{6.3^\beta-2}{4}S(m).$$

La première équation devient donc

$$\Sigma_4\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right)=\frac{3^\beta-1}{2}S(m).$$

Ce résultat ne fait que confirmer celui que l'on pourrait déduire directement de l'équation (16). L'autre équation au contraire donne un théorème nouveau

$$\Sigma_2\rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right)=2^{\lambda-2}S(m),$$

car, la somme $m'+m''$ étant divisible par 4, les deux nombres m', m'' sont, l'un de la forme $4l+1$ et l'autre de la forme $4l+3$; il en est de même des deux nombres $\frac{m'}{3}$, $\frac{m''}{3}$, et par conséquent le produit

$$\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right)$$

est constamment nul. Le premier membre de la dernière formule multiplié par 16 exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$2^\lambda m = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2) \tag{A}$$

dans lesquelles se trouve vérifiée la condition $x + y \equiv 1 \pmod{2}$.

XI. *Le nombre des représentations du produit d'un nombre impair m multiplié par une puissance de 2 supérieure à la première, par la forme quaternaire*

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

et dans lesquelles se trouve vérifiée la condition $x + y \equiv 1 \pmod{2}$ *est égal à* $2^{\lambda+2}S(m)$, $S(m)$ *étant la somme de ceux des diviseurs de m qui sont premiers avec* 3.

17. Le théorème que nous venons d'obtenir, joint aux théorèmes VIII et IX, permet d'établir simplement la théorie de la forme (A). Désignons par $N(2^\lambda.3^\beta n)$ le nombre des solutions de l'équation (A), par $N_1(2^\lambda.3^\beta n)$ le nombre de celles qui vérifient la congruence

$$x + y \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

et par $N_2(2^\lambda.3^\beta n)$ le nombre de celles qui satisfont à la condition

$$x + y \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

On a évidemment la relation

$$N(2^\lambda.3^\beta n) = N_1(2^\lambda.3^\beta n) + N_2(2^\lambda.3^\beta n).$$

Le nombre N_1 est déterminé par le dernier théorème

$$N_1(2^\lambda.3^\beta n) = 2^{\lambda+2}\zeta_1(n).$$

Le nombre N_2 est égal à $N(2^{\lambda-1}.3^\beta n)$, tant que λ est > 0; car alors la somme $x + y$ ne peut pas être paire, sans que $z + t$ le soit égale-ment; on peut poser

$$x = x_1 + y_1, \qquad y = x_1 - y_1; \qquad z = z_1 + t_1, \qquad t = z_1 - t_1$$

et ramener ainsi les solutions de l'équation (A), qui satisfont à la condition énoncée, à celles de l'équation

$$2^{\lambda-1}.3^\beta n = x_1^2 + y_1^2 + 3(z_1^2 + t_1^2).$$

On a donc, en supposant $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned}
N(2^\lambda.3^\beta n) - N(2^{\lambda-1}.3^\beta n) &= 2^{\lambda+2}\zeta_1(n),\\
N(2^{\lambda-1}.3^\beta n) - N(2^{\lambda-2}.3^\beta n) &= 2^{\lambda+1}\zeta_1(n),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots,\\
N(4.3^\beta n) - N(2.3^\beta n) &= 2^3\zeta_1(n).
\end{aligned}$$

En ajoutant ces équations membre à membre, on trouve

$$N(2^\lambda.3^\beta n) - N(2.3^\beta n) = 2^3(2^{\lambda-1} - 1)\zeta_1(n);$$

on déduit d'ailleurs du théorème VIII

$$N(2.3^\beta n) = 4\zeta_1(n).$$

On a donc définitivement

$$N(2^\lambda.3^\beta n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2) = 4(2^{\lambda+1} - 3)\zeta_1(n),$$

et l'on reconnaît que cette formule, établie en supposant $\lambda > 1$, est encore applicable au cas $\lambda = 1$, parce qu'elle donne alors le résultat exprimé par le théorème VIII. Si l'on veut une formule applicable à une valeur nulle ou positive de λ, il faut poser

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} &N(2^\lambda.3^\beta n = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2)\\ &\qquad = 4(2^{\lambda+1} - 2 - \cos 2^\lambda\pi)\zeta_1(n).\end{aligned}\right.$$

Pour $\lambda = 0$, on obtient $N(3^\beta n) = 4\zeta_1(n)$, ce qui est conforme au théorème IX. Cette formule a été publiée par Liouville dans le cinquième Volume de la deuxième série de son Journal (p. 147).

18. En faisant $t = 0$ dans l'équation (6), on trouve

$$\Sigma\rho(m')\rho(m'') = \rho(m) + 4\Sigma\rho(m_1)\rho(m_2),$$
$$2m = m' + m'', \qquad m = m_1 + 2^i m_2.$$

Le premier membre est égal à $\zeta_1(m)$ (n° **10**). On a donc

$$(21) \qquad \rho(m) + 4\Sigma\rho(m_1)\rho(m_2) = \zeta_1(m);$$

c'est le résultat que l'on déduirait directement de l'équation (2) en y faisant $t = \frac{\pi}{2}$. Au moyen de la substitution $t = \frac{\pi}{4}$ et des relations (7) et (8), on déduit des équations (2), (3) et (4) les formules suivantes

$$(22) \qquad \varpi(m, 2) + 2\Sigma\varpi(m_1, 2)\varpi(m_2, 2) = \zeta_1(m),$$

$$(23) \qquad 4\Sigma\varpi(m_1, 2)\rho(m_2) = \Sigma d\left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - \left(\frac{2}{d}\right)\right], \qquad d\delta = m,$$

$$4\Sigma(-1)^{\frac{m'_1-1}{2}}\varpi(m_1, 2)\cos\frac{2^i\pi}{4}\rho(m_2) = \left(\frac{2}{m}\right)\Sigma d\left(\frac{2}{\delta}\right) - \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

Les sommes Σ qui figurent dans les premiers membres de ces équations se rapportent aux solutions de l'équation

$$m = m_1 + 2^i m_2$$

en nombres impairs et positifs; mais, dans l'équation (23), l'exposant i est égal à 1, tandis que dans la dernière cette valeur 1 de i est exclue par le facteur $\cos\frac{2^i\pi}{4}$.

Nous désignerons avec Liouville par $\omega_1(m)$ la fonction définie par la formule

$$\omega_1(m) = \Sigma d\left(\frac{2}{\delta}\right) = \Sigma d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}, \qquad d\delta = m.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\delta - 1}{2} \equiv \frac{m-1}{2} + \frac{d-1}{2} \pmod{2},$$

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\varpi(m, 2),$$

$$m_1 \equiv m \pmod{4}, \qquad (-1)^{\frac{m_1-1}{2}} = \left(\frac{-1}{m}\right);$$

par conséquent, la dernière formule multipliée par $\left(\frac{-1}{m}\right)$ devient

$$(24)\qquad \begin{cases} 4\Sigma_2\varpi(m_1, 2)\rho(m_2) - 4\Sigma_1\varpi(m_1, 2)\rho(m_2) \\ \quad = \left(\frac{-2}{m}\right)\omega_1(m) - \varpi(m, 2), \end{cases}$$

Σ_2 désignant la portion de la somme Σ qui correspond aux valeurs de i égales ou supérieures à 3, et Σ_1 celle qui correspond à la valeur $i = 2$.

19. L'équation (21), multipliée par 4, donne le nombre des solutions de l'équation

$$(C)\qquad m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

en nombres entiers, pairs ou impairs, positifs, négatifs ou nuls, car $4\rho(m)$ exprime le nombre de celles de ces solutions où les deux nombres z et t sont nuls, tandis que la somme $\Sigma 4\rho(m_1)4\rho(m_2)$ est égale au nombre de toutes les autres solutions. Donc :

XII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$ est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.*

L'équation (21) reçoit encore une autre interprétation quand le nombre m est de la forme $4l + 1$; comme m_1 est aussi de même forme, la différence $m - m_1 = 2^i m_2$ est toujours divisible par 4. Admettant alors que $4\rho(m_2)$ exprime le nombre des représentations de $2^{i-2}m_2$ par la forme $z^2 + t^2$, le produit $4\rho(m_1)4\rho(m_2)$ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(D)\qquad m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

dans lesquelles la somme $x^2 + y^2$ est égale à m_1. La somme de tous les produits semblables, relatifs aux valeurs 1, 5, ..., $m - 4$ de m_1, augmentée du nombre $4\rho(m)$ des solutions où m_1 est égal à m, est donc le nombre de toutes les solutions de l'équation (D). Donc :

XIII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair*

$m=4l+1$ par la forme $x^2+y^2+4z^2+4t^2$ est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.

Si $m=4n+3$, $\rho(m)=0$. Dans ce cas, $2\rho(m_1)\,2\rho(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation

$$m=x^2+4z^2+2(y^2+4t^2),$$

dans lesquelles x^2+4z^2 est égal à m_1. On a donc ce théorème :

XIV. *Le nombre des solutions de l'équation*

$$(\mathrm{D}') \qquad 4n+3=x^2+2y^2+4z^2+8t^2$$

est égal à la somme des diviseurs du nombre $4n+3$.

20. Dans la formule (22), le produit $2\varpi(m_1, 2)\,2\varpi(m_2, 2)$ est égal au nombre de toutes les combinaisons possibles d'une représentation de m_1 par la forme $(1, 0, 2)$ avec une représentation de $2^{i-1}m_2$ par la même forme; par conséquent, ce produit exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad m=x^2+2y^2+2(z^2+2t^2)$$

dans lesquelles la somme des deux premiers termes est un nombre impair $m_1<m$. La somme de tous les produits semblables, augmentée du nombre $2\varpi(m, 2)$ des solutions dans lesquelles z et t sont nuls, exprime le nombre de toutes les solutions de l'équation (E). Notre formule exprime donc ce théorème :

XV. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme*

$$(\mathrm{E}) \qquad x^2+2y^2+2z^2+4t^2$$

est égal à deux fois la somme des diviseurs de m,

$$\mathrm{N}(m=x^2+2y^2+2z^2+4t^2)=2\zeta_1(m).$$

21. L'équation (23) ne peut s'appliquer qu'aux nombres de l'une des deux formes $8l \pm 3$, car ses deux membres s'annulent quand m est de l'une des deux formes $8l \pm 1$; on le constate pour le premier membre en considérant que l'on doit supposer m_2 de la forme $4x+1$, et m_1 de l'une des deux formes $8l+1$, $8l+3$, afin que le produit

$$\varpi(m_1, 2)\rho(m_2)$$

ne soit pas nul; on a donc

$$m = m_1 + 2m_2 \equiv 1 + 2 \quad \text{ou} \quad 3+2 \qquad (\text{mod. } 8),$$

ce qui exclut les deux formes $8l \pm 1$. Pour le second membre, on a

$$\left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right) \quad \text{ou} \quad \left(\frac{2}{d}\right) = -\left(\frac{2}{\delta}\right),$$

suivant que le nombre m est de l'une des deux formes $8l \pm 1$ ou de l'une des deux formes $8l \pm 3$; car, dans le premier cas, on a

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2}{d}\right)\left(\frac{2}{\delta}\right) = 1, \qquad \left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right);$$

dans le second cas, on a

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2}{d}\right)\left(\frac{2}{\delta}\right) = -1, \qquad \left(\frac{2}{d}\right) = -\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

L'équation (23) peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$(23') \quad \Sigma 2\varpi(m_1, 2)4\rho(m_2) = 4\omega_1(m), \qquad m \equiv \pm 3 \qquad (\text{mod. } 8).$$

Cette équation peut s'interpréter de deux manières, suivant que l'on considère $4\rho(m_2)$ comme exprimant le nombre des représentations de m_2 ou de $2m_2$ par la somme de deux carrés. Dans le premier cas, le premier membre est égal au nombre des solutions de l'équation

$$(\text{F}) \quad 8k \pm 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2, \qquad z + t \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

car le produit $2\varpi(m_1, 2)4\rho(m_2)$ est égal au nombre de toutes les combinaisons possibles d'une représentation de m_1 par la forme $(1, 0, 2)$ avec une représentation de $2m_2$ par la forme $2(z^2 + t^2)$.

Dans le second cas, la somme Σ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(\mathrm{F}') \qquad 8k \pm 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

où la somme $(y + z)$ est un nombre pair.

22. L'équation (23) peut encore s'écrire

$$\Sigma 2\varpi(m_1, 2)\, 2\rho(m_2) = 2\omega_1(m).$$

Le premier membre exprime alors le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(\mathrm{F}'') \qquad 8k \pm 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

dans lesquelles la valeur de z est impaire, car le produit

$$2\varpi(m_1, 2)\, 2\rho(m_2)$$

exprime le nombre de toutes les combinaisons possibles d'une représentation de m_1 par la forme $(1, 0, 2)$ avec une représentation de $2m_2$ par la forme $(2, 0, 8)$. On a donc

$$\mathrm{N}_1(m = 8k \pm 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 2\omega_1(m),$$

en rappelant par l'indice de N_1 la restriction $z \equiv 1 \pmod{2}$. Si $m = 8n + 5$, cette restriction est toujours vérifiée, car les deux nombres y et z sont alors tous deux impairs. On a donc, sans aucune restriction,

$$\mathrm{N}(8n + 5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 2\omega_1(8n + 5).$$

Mais, quand $m = 8k + 3$, l'un des deux nombres y, z est pair et l'autre impair; en assujettissant le nombre z à être impair, on réduit de moitié le nombre des solutions de l'équation (F''). Le nombre de toutes les solutions est donc égal à $4\omega_1(m)$. Donc :

XVI. *Le nombre des représentations d'un nombre* $8n+3$ *ou* $8n+5$ *par la forme*

$$m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

est égal à quatre fois ou à deux fois l'excès de la somme des diviseurs de m, *dont les conjugués sont de l'une des deux formes* $8l \pm 1$ *sur la somme des autres diviseurs*

$$N(8n+3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 4\omega_1(m),$$
$$N(8n+5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 2\omega_1(m).$$

23. On interprète d'une manière semblable l'équation (24). Comme, dans la somme Σ_2, la différence $m - m_1$ est divisible par 8, le produit

$$2\varpi(m_1, 2)\,4\rho(m_2)$$

exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(G) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

dans lesquelles la somme $x^2 + 2y^2$ est égale à m_1, et la somme des deux derniers termes, à $2^i m_2$. La somme de tous les produits semblables, augmentée du nombre $2\varpi(m, 2)$ des représentations de m par la forme (1, 0, 2), est donc égale au nombre de toutes les solutions de l'équation (G). On a

$$2\varpi(m, 2) + \Sigma_2 2\varpi(m_1, 2)\,4\rho(m_2) = N(m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2).$$

Dans Σ_1, au contraire, la différence $m - m_1$ est de la forme $8k+4$, la somme $\Sigma_1 2\varpi(m_1, 2)\,4\rho(m_2)$ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(G') \qquad m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

dans lesquelles la somme $z+t$ est un nombre impair. On a

$$(24')\left\{\begin{array}{l} \mathrm{N}(m)=x^2+2y^2+8z^2+8t^2) \\ \qquad\qquad -\mathrm{N}_1(m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2)=2\left(\frac{-2}{m}\right)\omega_1(m), \end{array}\right.$$

en rappelant par l'indice de N_1 la restriction $z+t\equiv 1$ (mod. 2).

Or, dans la forme (G'), le nombre m est de l'une des deux formes $8l+1$, $8l+3$ si la somme $z+t$ est paire, et de l'une des deux formes $8l+5$, $8l+7$ dans le cas contraire. Si donc le nombre m est de l'une des deux formes $8l+(1, 3)$, l'équation (G') n'admet aucune solution qui vérifie la condition $z+t\equiv 1$ (mod 2), N_1 s'évanouit et l'équation se réduit à la suivante :

$$m=8l+(1, 3), \qquad \mathrm{N}(m=x^2+2y^2+8z^2+8t^2)=2\omega_1(m).$$

Dans ce cas, la forme (G') est équivalente à la forme (G); on a

$$\mathrm{N}(m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2)=2\omega_1(m).$$

Si le nombre m est de l'une des deux formes $8l+(5, 7)$, l'équation (G) est impossible, $\left(\frac{-2}{m}\right)$ est égal à -1, et, comme toutes les solutions de l'équation (G') vérifient la condition $z+t\equiv 1$ (mod 2), on a sans restriction

$$m=8l+(5, 7), \qquad \mathrm{N}(m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2)=2\omega_1(m).$$

En réunissant les deux derniers résultats, nous obtenons ce théorème :

XVII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme*

$$m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs de m, dont les conjugués sont de l'une des formes $8l\pm 1$ *sur la somme des autres diviseurs.*

24. La substitution $t = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation (5) conduit à la formule

$$\Sigma\,\varpi(m', 2)\,\varpi(m'', 2) = \rho(m) + 4\Sigma\,\rho(m_1)\,\rho(m_2),$$
$$m' + m'' = 2m, \qquad m = m_1 + 2^i m_2,$$

où sont réunis deux résultats obtenus précédemment. En faisant la même substitution dans l'équation (6) et en effectuant les intégrations partielles relatives aux diviseurs des nombres m', m'', m_2 au moyen des formules (7) et (8), on trouve

$$\Sigma(-1)^{\frac{m'-1}{2}}\varpi(m', 2)\,\varpi(m'', 2) = \rho(m) + 4\Sigma\cos 2^{i-1}\pi\,\rho(m_1)\,\rho(m_2).$$

Quand m' est de la forme $4l+1$, $2\varpi(m', 2)$ exprime le nombre des représentations de m' par la forme $(1, 0, 8)$; la même expression est égale au nombre des représentations de m' par la forme $(4, 2, 3)$, quand $m' = 4l+3$. Le premier membre de notre formule est donc égal à l'excès du nombre des solutions de l'équation

$$\text{(H)} \qquad 2m = x^2 + 8y^2 + z^2 + 2t^2, \qquad z \equiv 1 \pmod 2$$

sur le nombre des solutions de l'équation

$$\text{(H')} \qquad 2m = 4x^2 + 4xy + 3y^2 + z^2 + 2t^2, \qquad z \equiv 1 \pmod 2.$$

Pour le second membre, désignons respectivement par Σ_1, Σ_2 les deux portions de la somme Σ qui correspondent respectivement aux deux hypothèses $i = 1$, $i \geqq 2$. Nous aurons

$$4\rho(m) + 16\Sigma_2\,\rho(m_1)\,\rho(m_2) = \mathrm{N}(m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2),$$
$$16\Sigma_1\,\rho(m_1)\,\rho(m_2) = 2\mathrm{N}_1(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2),$$

en rappelant par l'indice de N_1 la restriction $z \equiv 1 \pmod 2$. L'un de ces nombres est toujours nul, car la première forme ne convient pas à un nombre de la forme $4l+3$, ni la deuxième à un nombre $4l+1$.

On a donc

$$
\begin{aligned}
&N_1(8l+2 = x^2+8y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad - N_1(8l+2 = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2)\\
&\qquad = N(4l+1 = x^2+y^2+4z^2+4t^2),\\
&N_1(8l+6 = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad - N_1(8l+6 = x^2+8y^2+z^2+2t^2)\\
&\qquad = 2N_1(4l+3 = x^2+y^2+2z^2+8t^2).
\end{aligned}
$$

D'ailleurs le nombre des solutions, tant de l'équation (H) que de l'équation (H′), est égal au nombre des représentations de $2m$ par la forme

$$x^2+y^2+2z^2+2t^2, \qquad xy \equiv 1 \pmod 2,$$

lequel est égal à $4\zeta_1(m)$ (n° **12**, th. V). On a donc

$$
\begin{aligned}
&N_1(2m = x^2+8y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad + N_1(2m = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2) = 4\zeta_1(m).
\end{aligned}
$$

On reconnaît aisément que l'un de ces deux nombres est toujours nul, car les deux équations (H), (H′), réduites en congruences relativement au module 8, deviennent respectivement

$$2m \equiv 2+2t^2, \qquad 2m \equiv 4+2t^2 \pmod 8;$$

la première ne convient qu'aux nombres $8l+2$ ou $8l+4$, et la seconde aux nombres $8l+4$, $8l+6$. On a donc

$$
\begin{aligned}
&N(8l+2 = x^2+y^2+8z^2+8t^2)\\
&\quad = N(4l+1 = x^2+y^2+4z^2+4t^2) = 4\zeta_1(4l+1),\\
&N_1(8l+6 = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad = 2N(4l+3 = x^2+y^2+2z^2+8t^2) = 4\zeta_1(4l+3).
\end{aligned}
$$

IV.

25. En ajoutant quelques considérations arithmétiques aux théorèmes précédents, on peut compléter la théorie des formes quaternaires auxquelles ils se rapportent. Les formes

$$x^2+y^2+z^2+t^2, \qquad x^2+y^2+2z^2+2t^2$$

peuvent représenter des nombres quelconques, pairs ou impairs. On passe de la seconde à la première en posant

$$(\mathrm{A}) \qquad 2z=p+q, \qquad 2t=p-q, \qquad 2z^2+2t^2=p^2+q^2;$$

mais les deux nombres p, q doivent vérifier la congruence

$$p+q\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, 2),$$

tandis que dans la première forme les deux nombres z, t ne sont soumis à aucune condition. Considérons d'abord un nombre impair m. Nous avons trouvé (n° **19**) que le nombre des représentations de m par la deuxième forme est égal à $4\zeta_1(m)$. On en déduit, par la substitution précédente (A), autant de représentations de m par la somme de quatre carrés, savoir toutes celles dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est un nombre pair. Or ce nombre est précisément la moitié du nombre des solutions de l'équation

$$m=x^2+y^2+z^2+t^2,$$

car cette équation admet autant de solutions dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est un nombre pair que de solutions dans lesquelles cette somme est un nombre impair; on passe d'un groupe de solutions à l'autre par le seul échange des deux premiers carrés avec les deux derniers. On a donc ce théorème de Jacobi :

XVIII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m* *par la somme de quatre carrés est égal à huit fois la somme des diviseurs de m.*

26. Les solutions de l'équation

$$(\mathrm{C}) \qquad 2^\lambda m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

se partagent en deux groupes, suivant qu'elles vérifient, oui ou non, la condition $xy \equiv 1 \pmod 2$. Le nombre de celles qui vérifient cette condition est déterminé par le théorème V (n° **12**); en indiquant ce nombre par N_1, on a

$$N_1(2^\lambda m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 4\zeta_1(m), \qquad 16\zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que l'on a

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda > 2.$$

Les autres solutions se déduisent de celles de l'équation

$$(c) \qquad 2^{\lambda-1} m = z^2 + t^2 + 2u^2 + 2v^2,$$

en prenant $x = 2u$, $y = 2v$. On a donc, en désignant par $N(2^\lambda m)$ le nombre de toutes les solutions de l'équation (C), et par $N_1(2^\lambda m)$ celui des solutions qui vérifient la condition $xy \equiv 1 \pmod 2$,

$$N(2^\lambda m) = N_1(2^\lambda m) + N(2^{\lambda-1} m).$$

En substituant dans cette formule les trois valeurs de $N_1(2^\lambda m)$ déterminées par le théorème cité, on a

$$\begin{aligned} N(2^\lambda m) &= N(2^{\lambda-1} m) = \ldots = N(4m), \qquad \lambda > 2, \\ N(4m) &= 16\zeta_1(m) + N(2m), \\ N(2m) &= 4\zeta_1(m) + N(m). \end{aligned}$$

D'ailleurs, d'après le théorème du n° **19**, on a

$$N(m) = 4\zeta_1(m).$$

On obtient ainsi le théorème suivant, énoncé par Liouville dans le cinquième Volume de la deuxième série de son Journal (p. 269) :

XIX. *Le nombre* N *des solutions de l'équation*

$$(C) \qquad 2^\lambda m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

est exprimé par les formules respectives

$$N = 4\zeta_1(m), \qquad N = 8\zeta_1(m), \qquad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda \geqq 2.$$

27. Liouville a déduit ce théorème de celui de Jacobi relatif au nombre des représentations d'un nombre entier par la somme de quatre carrés. Nous suivrons la marche inverse, nous déduirons le théorème de Jacobi de celui que nous venons de démontrer. Tant que l'exposant λ est > 0 dans l'équation (C), la somme des deux premiers carrés est un nombre pair, de sorte que l'on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2(p^2 + q^2)$$

et ramener les solutions de cette équation à celles de la suivante :

$$2^{\lambda-1} m = p^2 + q^2 + z^2 + t^2.$$

On a donc, pour une valeur positive ou nulle de α,

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = N(2^{\alpha+1} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2).$$

Or nous venons de trouver que le second membre est égal à $8\zeta_1(m)$ si $\alpha = 0$ et à $24\zeta_1(m)$ si $\alpha > 0$. On a donc

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 8\zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad = 24\zeta_1(m),$$

suivant que $2^\alpha m$ est impair ou pair. On obtient ainsi le théorème cité de Jacobi :

XX. *Le nombre des représentations différentes de n par une somme de quatre carrés à racines positives, nulles ou négatives, est* *égal à huit fois la somme des diviseurs de n, si n est impair, et à vingt-quatre fois la somme des diviseurs impairs de n, si n est pair.*

28. On complète de même la théorie de l'équation

$$(\mathrm{D}) \qquad 2^{\lambda} m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2.$$

Quand λ est nul, l'équation est impossible si $m = 4l + 3$, et le nombre de ses solutions est égal à $4\zeta_1(m)$ si $m = 4l + 1$ (n° **19**). Quand λ est égal à 1, les deux nombres x, y sont impairs, on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2(p^2 + q^2),$$

et l'équation (D) se ramène à la suivante

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XII (n° **19**). Le nombre des solutions de l'équation (D) est donc égal à $4\zeta_1(m)$ pour la valeur 1 de λ. Lorsque λ est égal ou supérieur à 2, les nombres x, y sont pairs, de sorte que, en posant

$$x = 2u, \qquad y = 2v,$$

on ramène l'équation (D) à la suivante,

$$2^{\lambda-2} m = u^2 + v^2 + z^2 + t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XX.

Le nombre des solutions de l'équation (D) est donc égal à $8\zeta_1(m)$ ou à $24\zeta_1(m)$, suivant que λ est égal à 2 ou > 2. En réunissant ces diverses conclusions, nous obtenons le théorème énoncé par Liouville dans le cinquième volume de la deuxième série de son *Journal* (p. 305):

XXI. *Si l'on désigne par* N *le nombre des solutions de l'équa-*

tion (D), *on a*

$$\begin{aligned} N &= 0 \quad \text{si} \quad 2^\lambda m = 4l + 3, \\ N &= 4\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad 2^\lambda m = 4l + 1, \\ N &= 4\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda = 1, \\ N &= 8\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda = 2, \\ N &= 24\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda \text{ est} > 2. \end{aligned}$$

29. Le nombre des solutions de l'équation

$$\text{(E)} \qquad 2^\lambda m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$$

est déterminé par le théorème XV (n° **20**), dans le cas où λ est nul.

Dans les autres cas, on a

$$x = 2u,$$

et l'équation se ramène à la suivante

$$2^{\lambda-1} m = y^2 + z^2 + 2u^2 + 2t^2,$$

dont le nombre des solutions est donné par le théorème XIX (n° **26**); ce nombre est égal à

$$4\zeta_1(m), \quad 8\zeta_1(m), \quad 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on suppose $\lambda - 1 = 0$, $\lambda - 1 = 1$, $\lambda - 1 \geqq 2$.

XXII. *Désignant donc par* N *le nombre des solutions de l'équation* (E), *on a*

$$N = 2\zeta_1(m), \qquad N = 4\zeta_1(m), \qquad N = 8\zeta_1(m), \qquad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on suppose $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda \geqq 3$.

Liouville a étudié l'équation (E) dans le Tome VII de son Journal; il a déterminé le nombre des solutions propres, c'est-à-dire des solutions dans lesquelles les quatre carrés n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité.

Nous la reprendrons plus loin à ce point de vue, ainsi que les équations étudiées précédemment.

30. Le nombre des solutions de l'équation

$$(e) \qquad 2^\lambda m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

se déduit aussi aisément de ce qui précède. Si l'on désigne ce nombre par N, on a évidemment $N = 0$ lorsque λ est nul et que m est de la forme $4l + 3$, ou bien que λ est égal à 1. Si $\lambda \geqq 2$, l'équation se ramène à la suivante

$$2^{\lambda-2} m = x_1^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XX; on a

$$N = 8\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda = 2, \qquad N = 24\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda \text{ est} \geqq 3.$$

Lorsque λ est nul et que $m = 4l + 1$, le nombre des solutions de l'équation (e) se déduit du théorème XIII (n° **19**). Dans l'équation (D) comme dans l'équation (e), l'un des deux premiers carrés est pair et l'autre impair; le carré pair peut occuper deux places dans l'équation (D), tandis qu'il est fixé au second terme dans l'équation

$$(e) \qquad m = x^2 + (2y)^2 + 4z^2 + 4t^2;$$

le nombre des solutions de la première équation est donc double de celui des solutions de la dernière. Donc :

XXIII. *Le nombre* N *des solutions de l'équation*

$$(e) \qquad 2^\lambda m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

est exprimé respectivement par les formules

$$\begin{array}{llll}
N = 0 & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 2 & \text{ou } 3 \pmod 4, \\
N = 2\zeta_1(m) & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 1 & \pmod 4, \\
N = 8\zeta_1(m) & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 4 & \pmod 8, \\
N = 24\zeta_1(m) & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 0 & \pmod 8.
\end{array}$$

31. Les solutions de l'équation (e), dans le cas où $2^\lambda m$ est de la forme $4n+1$, peuvent se partager en deux groupes suivant que y est pair ou impair. La somme des deux nombres de solutions est égale à deux fois la somme des diviseurs de m. D'ailleurs, lorsque y est impair, la forme x^2+4y^2 est équivalente à la forme $(5x^2+4xy+4y^2)$. On a donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(4n+1=x^2+16y^2+4z^2+4t^2)\\ &\quad+\mathrm{N}(4n+1=5x^2+4xy+4y^2+4z^2+4t^2)=2\zeta_1(4n+1). \end{aligned}$$

Pour obtenir le théorème de Liouville relativement à la forme

$$x^2+4y^2+4z^2+16t^2,$$

il faut faire intervenir les formules empruntées à la théorie des fonctions elliptiques que nous avons indiquées précédemment (n° **9**). Dans la formule (15″), si l'on égale entre eux les coefficients de q^m dans les deux membres, on a

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(m=x^2+4y^2+4z^2+16t^2)\\ &\quad-\mathrm{N}(m=5x^2+4xt+4t^2+4y^2+4z^2)=2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i, \end{aligned}$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs impaires et positives de i qui satisfont à l'équation

$$m=i^2+4s^2,$$

où l'on désigne par s un entier qui peut être indifféremment positif, nul ou négatif. Il est d'ailleurs évident que le nombre m ne peut être que de la forme $4n+1$. Nous supprimons ici le facteur 2 qui figure dans le second membre de l'équation (15″), parce que nous remplaçons le nombre impair et positif i par le nombre impair x, positif ou négatif. En combinant nos deux formules, nous trouvons

$$\mathrm{N}(4n+1=x^2+4y^2+4z^2+16t^2)=\zeta_1(4n+1)+\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.$$

32. Ce résultat nous donne immédiatement la théorie de l'équation

$$(d)\qquad 2^\lambda m=x^2+4y^2+4z^2+16t^2.$$

Le nombre des solutions de cette équation est nul si $2^\lambda m$ est de l'une des deux formes $4n+2$, $4n+3$; il est exprimé par la dernière formule quand $2^\lambda m$ est de la forme $4n+1$; quand $2^\lambda m$ est un multiple de 4, on a $x=2u$, et l'équation proposée se ramène à la suivante

$$(d') \qquad 2^{\lambda-2}m = u^2+y^2+z^2+4t^2,$$

dont le nombre des solutions se détermine aisément au moyen du théorème de Jacobi. Quand $\lambda-2$ est égal ou supérieur à 2, les trois premiers carrés sont pairs, de sorte qu'en posant

$$u=2x_1, \qquad y=2y_1, \qquad z=2z_1$$

on ramène l'équation à la suivante

$$2^{\lambda-4}m = x_1^2+y_1^2+z_1^2+u^2;$$

d'après le théorème XX, le nombre des solutions est égal à $8\zeta_1(m)$ ou à $24\zeta_1(m)$ suivant que λ est égal ou supérieur à 4.

Si $\lambda=3$, deux des trois carrés u^2, y^2, z^2 doivent être impairs, et le troisième, pair. L'équation ne diffère alors de l'équation (6) qu'en ce que, dans celle-ci, le carré pair est fixé au troisième terme, tandis que, dans l'autre, ce carré peut occuper trois places. On a donc

$$\mathrm{N}(2m=x^2+y^2+z^2+4t^2) = 3\mathrm{N}(2m=x^2+y^2+4z^2+4t^2).$$

D'après le théorème XXI, le dernier nombre est égal à $4\zeta_1(m)$. Par conséquent, lorsque $\lambda=3$, le nombre des solutions de l'équation proposée est égal à $12\zeta_1(m)$.

Si $\lambda=2$, il faut distinguer les deux formes $4n+3$ et $4n+1$. Quand $m=4n+3$, les trois nombres u, y, z sont impairs; de même, dans la représentation de $4n+3$ par une somme de quatre carrés, un seul carré est pair, et les trois autres sont impairs; mais le carré pair peut occuper quatre places, tandis qu'il est fixé au dernier terme dans l'équation (d'). Le nombre des solutions de cette équation est donc le quart du nombre des représentations de $4n+3$ par une somme de quatre carrés; il est donc égal à $2\zeta_1(4n+3)$.

Quand $m=4n+1$, un seul des trois nombres u, y, z est impair, et les deux autres, pairs. L'équation (d') ne diffère de l'équation (D) qu'en ce que, dans cette dernière équation, le carré impair ne peut occuper que deux places, tandis qu'il peut en occuper trois dans la première. On a donc

$$N(m = u^2 + y^2 + z^2 + 4t^2) = \tfrac{3}{2}N(m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2);$$

d'après le théorème XXI, le dernier nombre est égal à $4\zeta_1(m)$; le premier est donc égal à $6\zeta_1(m)$.

En réunissant ces divers résultats, nous obtenons les deux théorèmes suivants :

XXIV. *Le nombre* N *des solutions de l'équation*

$$(d') \qquad 2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$$

est exprimé par les formules respectives

1° $\alpha = 0$, $N(4n+3) = 2\zeta_1(4n+3)$, $N(4n+1) = 6\zeta_1(4n+1)$,

2° $\alpha = 1$, $N(2m) = 12\zeta_1(m)$,

3° $\alpha \geqq 2$, $N(4m) = 8\zeta_1(m)$, $N(2^{\lambda+3}m) = 24\zeta_1(m)$ $(\lambda \geqq 0)$.

Les deux premières formules peuvent se réunir en une seule

$$N(m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m).$$

XXV. *Le nombre* $N(2^\alpha m)$ *des solutions de l'équation*

$$(d) \qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

est nul quand $\alpha = 1$ *et quand,* α *étant nul, le nombre* m *est de la forme* $4n+3$. *Dans les autres cas, ce nombre est exprimé par les formules suivantes*

$$N(4n+1) = \zeta_1(4n+1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

$N[4(4n+3)] = 2\zeta_1(4n+3)$, $N[4(4n+1)] = 6\zeta_1(4n+1)$,

$N(8m) = 12\zeta_1(m)$, $N(16m) = 8\zeta_1(m)$,

$N(2^{\lambda+5}m) = 24\zeta_1(m$ $(\lambda \geqq 0)$.

La seconde et la troisième formule sont réunies en la suivante :

$$N(4m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m).$$

33. La forme quaternaire

$$(D') \qquad x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2$$

peut représenter tous les nombres entiers. Le nombre $N(2^\alpha m)$ des représentations d'un nombre pair par cette forme est déterminé par le théorème XXII (n° **29**), car ce nombre est évidemment égal à celui des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + 2x_1^2 + 2z^2 + 4t^2;$$

il est égal à $2\zeta_1(m)$, $4\zeta_1(m)$, $8\zeta_1(m)$ ou $24\zeta_1(m)$ suivant que α est égal à 1, à 2, à 3 ou qu'il est > 3. Quand α est nul et que $m = 4n + 3$, le nombre $N(4n + 3)$ est exprimé par la formule (n° **19**)

$$N(4n + 3 = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2) = \zeta_1(4n + 3).$$

Il nous reste à déterminer le nombre $N(m)$ dans le cas où m est de la forme $4n + 1$. Il est évidemment égal à celui des solutions de l'équation

$$(\delta) \qquad 4n + 1 = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

où le nombre y est pair ou impair en même temps que n. Or l'équation

$$8l + 1 = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

est équivalente à la suivante

$$(d) \qquad 8l + 1 = x^2 + 4p^2 + 4q^2 + 16t^2;$$

car la congruence relative au module 8 exige que l'on ait

$$p + q \equiv 0 \pmod{2},$$

de sorte que l'on peut poser

$$p = x + y, \qquad q = x - y, \qquad p^2 + q^2 = 2(x^2 + y^2).$$

De plus, nous avons trouvé que le nombre des solutions de la dernière équation est exprimé par la formule (n° **31**)

$$\mathrm{N}(8l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2) = \zeta_1(8l + 1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Cette formule exprime donc aussi le nombre des solutions de l'équation (δ) dans le cas où le nombre n est pair.

34. Quand n est impair, le nombre

$$x^2 + 4y^2 = m_1$$

est de la forme $8k + 5$, et le nombre de ses représentations par les deux formes $(1, 0, 4)$, $(4, 2, 5)$ est le même, il est égal à $2\rho(m_1)$. De même, la différence $m - m_1 = 2^i m_2$ étant multiple de 8, le nombre $4\rho(m_2)$ exprime indifféremment le nombre des représentations de $2^i m_2$ par la forme $(4, 0, 4)$ ou par la forme $(8, 0, 8)$. Il résulte de là que le nombre des solutions de l'équation (δ) est le même que celui des solutions de l'équation

$$8k + 5 = 4x^2 + 4xy + 5y^2 + 4z^2 + 4t^2.$$

Or on déduit des deux formules du n° **31**

$$\begin{aligned}\mathrm{N}(8k + 5 &= 4x^2 + 4xy + 5y^2 + 4z^2 + 4t^2) \\ &= \zeta_1(8k + 5) - \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.\end{aligned}$$

Le nombre cherché des solutions de l'équation (δ) est donc exprimé par cette même formule. On réunit les trois formules obtenues, dans l'équation suivante

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2) = \zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

pourvu que l'on convienne de réduire à zéro la somme Σ lorsque l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible. De plus, le nombre

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$$

étant égal à 1 ou à -1, suivant que m est de la forme $8l+1$ ou de la forme $8l+5$, on retrouve les formules démontrées directement pour ces deux cas.

Les résultats obtenus dans ce numéro et dans le précédent nous donnent le théorème énoncé par Liouville dans son Journal (2[e] série, t. VII, p. 409) :

XXVI. *Soit* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$(\mathrm{D}') \qquad n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2.$$

Pour les valeurs paires de n, on a

$$\mathrm{N} = 2\zeta_1(m), \qquad \mathrm{N} = 4\zeta_1(m), \qquad \mathrm{N} = 8\zeta_1(m), \qquad \mathrm{N} = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a

$$n = 2m, \qquad n = 4m, \qquad n = 8m, \qquad \text{ou} \qquad n = 2^\alpha m, \qquad 2^\alpha > 8.$$

Pour les valeurs impaires $n = m$, il faut ajouter la fonction

$$\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

où le signe Σ indique une somme dont les éléments correspondent à toutes les valeurs entières et positives de i qui satisfont à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

dans laquelle s est un entier, positif, négatif ou nul. On a

$$\mathrm{N} = \zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

$$\mathrm{N} = \zeta_1(m) \qquad \text{si} \qquad m = 4l + 3.$$

35. Les théorèmes XXIV et XXVI donnent immédiatement le nombre $N(2^\alpha m)$ des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2;$$

car, ainsi que Liouville l'a indiqué lui-même (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 155), si $\alpha = 0$, on a

$$N(m) = 2N(m = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 8t^2),$$

puisque dans la dernière forme on fixe au second terme le carré pair qui, dans l'équation proposée, peut être placé au premier ou au second terme.

Lorsque α est > 0, la somme des deux premiers carrés est un nombre pair, ainsi que leur différence; on peut donc poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2(p^2 + q^2),$$

et ramener l'équation proposée à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = p^2 + q^2 + z^2 + 4t^2$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXIV.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

XXVII. *Le nombre* $N(2^\alpha m)$ *des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

est exprimé, suivant les valeurs de α, *par les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$N(m) = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right];$$
$$m = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0;$$

2° $\alpha = 1, 2$:

$$N(2m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m); \qquad N(4m) = 12\zeta_1(m);$$

3° $\alpha \geqq 3$:

$$N(8m) = 8\zeta_1(m), \qquad N(2^{\lambda+4}m) = 24\zeta_1(m), \qquad \lambda \geqq 0.$$

36. Le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

est double de celui des solutions de l'équation

$$(d) \qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

lorsque α est nul. Quand α est positif, la somme $x + y$ est paire, de sorte que l'on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2$$

et ramener l'équation à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = p^2 + q^2 + 2z^2 + 8t^2,$$

dont nous venons de déterminer le nombre des solutions. On déduit donc des deux théorèmes XXV et XXVII le suivant :

XXVIII. *Si l'on désigne par* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

on a, suivant les valeurs de α, *les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$N = 0 \quad \text{si} \quad m = 4n + 3, \qquad N = 2\zeta_1(m) + 2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

$$m = 4n + 1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0;$$

2° $\alpha = 1$:

$$N = 2\zeta_1(m) + 2(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i;$$

3° $\alpha = 2, 3$:

$$N(4m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m), \qquad N(8m) = 12\zeta_1(m);$$

4° $\alpha \geqq 4$,

$$N(16m) = 8\zeta_1(m), \qquad N(2^{\lambda+5}m) = 24\zeta_1(m), \qquad \lambda \geqq \beta.$$

37. Les deux formes quaternaires

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2, \qquad x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

dont Liouville s'est occupé dans le septième Volume de son Journal (p. 109 et p. 113) ne peuvent représenter que des nombres pairs ou des nombres impairs de la forme $4l + 1$. Un nombre $2^\alpha m$ multiple de 4 est représenté par chacune de ces deux formes un nombre de fois égal à celui des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-2}m = x_1^2 + y_1^2 + 2z^2 + 2t^2;$$

ce nombre (XIX, n° **26**) est égal à $4\zeta_1(m)$, $8\zeta_1(m)$, $24\zeta_1(m)$ suivant que α est égal à 2, 3 ou qu'il est > 3.

Si $\alpha = 1$, le nombre $2m$ ne peut pas être représenté par la deuxième forme; il est représenté par la première un nombre de fois égal à celui des solutions de l'équation

$$m = p^2 + q^2 + 4z^2 + 4t^2;$$

ce nombre est égal à 0 ou à $4\zeta_1(m)$ suivant que m est de la forme $4n + 3$ ou de la forme $4n + 1$.

Quand $2^\alpha m = 4n + 1$, le nombre des représentations par la première forme est double de celui des représentations par la deuxième, car dans celle-ci le terme impair est le premier, tandis que dans la première il peut être pris indifféremment pour premier ou pour second terme. Il nous suffit donc de déterminer le nombre des solutions de l'équation

$$(\delta) \qquad 4n + 1 = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2.$$

D'après les résultats obtenus plus haut (nos **33**, **34**), le nombre est exprimé par la formule

$$N = \zeta_1(4n+1) + (-1)^n \Sigma (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$4n+1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0.$$

XXIX. *Si nous désignons respectivement par* $N(2^\alpha m)$ *et par* $\mathfrak{N}(2^\alpha m)$ *les nombres des solutions des deux équations*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2, \qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

ces nombres sont déterminés par les formules suivantes :

1° $\alpha = 0$:

$$N(4n+3) = \mathfrak{N}(4n+3) = 0,$$
$$N(4n+1) = 2\mathfrak{N}(4n+1) = 2\left[\zeta_1(4n+1) + (-1)^n \Sigma (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right];$$

2° $\alpha = 1$:

$$\mathfrak{N}(2m) = 0, \qquad N(8n+6) = 0, \qquad N(8n+2) = 4\zeta_1(4n+1);$$

3° $\alpha \geqq 2$:

$$N(4m) = \mathfrak{N}(4m) = 4\zeta_1(m), \qquad N(8m) = \mathfrak{N}(8m) = 8\zeta_1(m),$$
$$N(2^{\lambda+4} m) = \mathfrak{N}(2^{\lambda+4} m) = 24\zeta_1(m), \qquad (\lambda \geqq 0).$$

38. La forme $x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$ peut représenter tous les nombres, excepté ceux qui sont renfermés dans la formule $8t + 7$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$$

se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 4t^2,$$

quand α est égal ou supérieur à 2; le nombre de ses solutions est alors déterminé par le théorème XXIV (n° **32**). Quand $\alpha = 1$, un seul des trois nombres x, y, z est pair et les deux autres, impairs; on réduit à son tiers le nombre des solutions en fixant au troisième terme celui des trois carrés qui est pair; on a

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2) = 3N(2m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2).$$

Le dernier nombre est déterminé par le théorème XXVIII, de sorte que, en désignant par $N(2^\alpha m)$ le nombre des solutions de l'équation proposée, on a

$$N(2m) = 6\zeta_1(m) + 6(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$m = i^2 + 4s^2, \qquad (i > 0).$$

Quand $\alpha = 0$ et que $m = 8l + 3$, les trois nombres x, y, z sont impairs; on a (n° **32**)

$$N(8l+3) = N(8l+3 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2) = 2\zeta_1(8l+3),$$

car la dernière forme donne la congruence

$$3 \equiv 3 + 4t^2 \qquad (\text{mod. } 8),$$

d'où l'on conclut que t est pair et que l'équation ne diffère pas de la proposée.

Si l'on a $\alpha = 0$ et $m = 4l + 1$, un seul des trois nombres x, y, z est impair et les deux autres, pairs; en fixant au premier terme le carré impair, on réduit le nombre des solutions à son tiers; on a

$$N(4l+1) = 3N(4l+1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2).$$

Le dernier nombre a été exprimé (n° **32**) par la formule

$$\zeta_1(4n+1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \qquad 4n+1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0.$$

En réunissant ces diverses conclusions, on obtient le théorème énoncé par Liouville dans le septième Volume de la deuxième série de son Journal (38) :

XXX. *Le nombre des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$$

est égal à

$$3\zeta_1(m) + 3\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \quad \text{à} \quad 2\zeta_1(m) \quad \text{ou à} \quad 0,$$

quand $2^\alpha m$ *est de la forme* $4n+1$, $8n+3$ *ou* $8n+7$. *Pour les valeurs paires de* $2^\alpha m$, *on a*

$$N(2m) = 6\zeta_1(m) + 6(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

$$N(4m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m), \qquad N(8m) = 12\zeta_1(m),$$

$$N(16m) = 8\zeta_1(m), \qquad N(2^{\lambda+5} m) = 24\zeta_1(m), \qquad \lambda \geqq 0.$$

39. Posons, pour abréger,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = (a, b, c, d).$$

Parmi les formes de ce genre étudiées par Liouville, il en reste six

$$(1, 1, 16, 16), \quad (1, 4, 16, 16), \quad (1, 16, 16, 16),$$
$$(1, 2, 2, 16), \quad (1, 8, 8, 16), \quad (1, 2, 8, 16)$$

dont la théorie n'exige que les deux fonctions numériques

$$\zeta_1(m), \quad \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \qquad m = i^2 + 4s^2, \qquad (i > 0).$$

La recherche des nombres des représentations d'un nombre pair par ces formes se ramène aisément aux théorèmes démontrés ci-dessus; c'est pourquoi nous considérons d'abord les nombres impairs qu'elles peuvent représenter. Les quatre formes (1, 1, 16, 16), (1, 4, 16, 16) et (1, 8, 8, 16) ne peuvent représenter aucun nombre de la forme $4n+3$. Les deux formes (1, 16, 16, 16) et (1, 8, 8, 16) ne peuvent représenter aucun nombre de l'une des formes $4n+3$, $8n+5$; enfin les deux formes $(1, 2, 2, 16)$, $(1, 2, 8, 16)$ ne peuvent représenter aucun nombre de la forme $8l+7$.

Le nombre des représentations d'un nombre $m = 8l+1$ par chacune des deux formes $(1, 4, 16, 16)$, $(1, 16, 16, 16)$ est le même, car dans la première forme la deuxième indéterminée est nécessairement paire. Ce nombre est la moitié de celui des représentations de m par la forme $(1, 1, 16, 16)$. Si donc nous désignons par $N(m)$ et par $\mathfrak{N}(m)$ les nombres des solutions des deux équations

$$(\alpha) \qquad m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

$$(\beta) \qquad m = x^2 + 16y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

on a

$$N(8n+1) = 2\mathfrak{N}(8n+1); \qquad N(4n+3) = \mathfrak{N}(4n+3) = 0.$$

Désignons encore par $N_1(m)$ le nombre de celles des représentations de m par la forme $(1, 8, 8, 16)$ dans lesquelles la somme du deuxième et du troisième carré est un nombre impair. Le nombre de celles où la même somme est paire est égal à $\mathfrak{N}(m)$, et, conséquemment, on a

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2) = \mathfrak{N}(m) + N_1(m);$$

car, dans l'équation

$$(\gamma) \qquad m = 8l+1 = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

la somme des deux carrés $y^2 + z^2$ est nécessairement paire ou impaire, et, lorsqu'elle est paire, la substitution

$$y + z = 2p, \qquad y - z = 2q, \qquad y^2 + z^2 = 2p^2 + 2q^2$$

ramène l'équation (γ) à l'équation (β).

40. Nous remarquerons d'abord que l'équation (γ) ne diffère de l'équation

$$(\delta) \qquad m = 8l+1 = x^2 + 4u^2 + 8y^2 + 8z^2$$

qu'en ce que l'on y pose $u = 2t$, ce qui est bien permis, puisque dans la dernière équation le nombre u est nécessairement pair. On a donc (n° **37**)

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2) = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

$$\mathfrak{N}(m) + N_1(m) = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$m = 8l + 1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0.$$

Nous avons ainsi une première relation entre les deux nombres $\mathfrak{N}(m)$, $N_1(m)$. Pour en obtenir une seconde, nous aurons recours à la forme $(1, 4, 4, 4)$ dont nous nous sommes occupés plus haut (n° **30**). Les solutions de l'équation

$$(c) \qquad m = 8l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

se partagent en deux groupes, dont l'un renferme celles où les trois nombres y, z, t sont pairs, et l'autre, celles où deux de ces trois nombres sont impairs et l'autre, pair; on déduit en effet de l'équation (c) la congruence

$$0 \equiv y^2 + z^2 + t^2 \pmod 2$$

qui exclut toute autre hypothèse. Le nombre des solutions du premier groupe est égal à $\mathfrak{N}(m)$; celui des solutions du second groupe est égal à $3N_1(m)$; d'abord il est le triple du nombre des solutions de l'équation

$$(c') \qquad m = 8l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

qui vérifient la condition $y \equiv z \equiv 1 \pmod 2$. Or la substitution

$$y + z = 2p, \qquad y - z = 2q, \qquad p + q = y \equiv 1 \pmod 2$$

ramène ces solutions à celles de l'équation (γ) dans lesquelles la somme de la deuxième et de la troisième indéterminée est un nombre impair.

D'ailleurs, nous avons trouvé (n° **30**) que le nombre des solutions de l'équation (e) est égal à $2\zeta_1(m)$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}(m)+3N_1(m)&=2\zeta_1(m),\\ \mathfrak{N}(m)+\ \ N_1(m)&=\zeta_1(m)+\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;\end{aligned}$$

on en déduit

$$\mathfrak{N}(m)=N(m=x^2+16y^2+16z^2+16t^2)=\tfrac{1}{2}\zeta_1(m)+\tfrac{3}{2}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i,$$

$$\begin{aligned}N_1(m)&=2N'(m=x^2+8y^2+16z^2+32t^2)\\ &=\tfrac{1}{2}\zeta_1(m)-\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.\end{aligned}$$

L'accent de N', dans la dernière formule, rappelle la restriction $y\equiv 1 \pmod 2$.

41. Le nombre des solutions de l'équation

$$m=8l+5=x^2+4y^2+16z^2+16t^2$$

se déduit aisément de celui des solutions de l'équation

$$m=8l+5=x^2+4y^2+4z^2+16t^2;$$

car dans la dernière équation l'un des deux nombres y, z est impair, et l'autre, pair; en fixant au troisième terme celui qui est pair, on réduit de moitié le nombre des solutions. On a donc (n° **31**)

$$\begin{aligned}&N(8l+5=x^2+4y^2+16z^2+16t^2)\\ &\quad=\tfrac{1}{2}N(8l+5=x^2+4y^2+4z^2+16t^2)\\ &\quad=\tfrac{1}{2}\zeta_1(8l+5)+\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.\end{aligned}$$

Les deux théorèmes obtenus dans ce numéro et dans le précédent relativement à la forme (1, 4, 16, 16) peuvent s'exprimer par une seule formule

$$\begin{aligned}&N(m=x^2+4y^2+16z^2+16t^2)\\ &\quad=\tfrac{1}{2}\zeta_1(m)+\tfrac{1}{2}\left[2+(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i,\\ &\qquad m=i^2+4s^2,\qquad i>0.\end{aligned}$$

42. Les nombres impairs représentés par les deux formes

$$(1, 2, 2, 16), \quad (1, 2, 8, 16)$$

peuvent être compris dans les trois formules $8l+1$, $8l+3$, $8l+5$. Quand $m = 8l+1$ les deux formes se ramènent à la suivante :

$$m = 8l+1 = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2.$$

On déduit donc de la formule donnée ci-dessus (n° **40**)

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(8l+1 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2) \\ &\quad = \mathrm{N}(8l+1 = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2) \\ &\quad = \zeta_1(8l+1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i. \end{aligned}$$

Quand $m = 8l+3$, l'un des deux nombres y, z est pair et l'autre, impair, dans la formule

$$m = 8l+3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2.$$

On réduit de moitié le nombre des solutions en fixant au troisième terme celui des deux nombres y, z qui est pair. On a donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(8l+3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2) \\ &\quad = 2\mathrm{N}(8l+3 = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2). \end{aligned}$$

Or le dernier nombre se déduit immédiatement du théorème XXVI (n° **34**) concernant la forme $(1, 2, 4, 8)$; car l'équation

$$8l+3 = x^2 + 2y^2 + 4u^2 + 8z^2$$

exige que u soit pair; posant donc $u = 2t$, on obtient la forme $(1, 2, 8, 16)$. On a, par conséquent,

$$\mathrm{N}(8l+3 = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2) = \zeta_1(8l+3).$$

43. La forme $(1, 2, 8, 16)$ ne peut représenter aucun nombre compris dans la formule $8l+5$. Quant à l'équation

$$8l+5 = x^2+2y^2+2z^2+16t^2,$$

elle exige que les deux nombres y, z soient impairs. On peut donc poser

$$x+y=2p, \qquad x-y=2q, \qquad x=p+q\equiv 1 \pmod 2,$$

ce qui ramène l'équation à la suivante

$$8l+5 = x^2+4p^2+4q^2+16t^2;$$

il est inutile d'ajouter la condition $p+q\equiv 1 \pmod 2$, parce qu'elle est nécessairement remplie. Le nombre $8l+5$ est ainsi représenté un même nombre de fois par chacune des deux formes $(1, 2, 2, 16)$, $(1, 4, 4, 16)$, et l'on déduit du théorème XXV (n° **32**) que ce nombre est exprimé par la formule suivante :

$$\mathrm{N}(8l+5 = x^2+2y^2+2z^2+16t^2) = \zeta_1(8l+5) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

44. Les résultats obtenus nous permettent de démontrer aisément les théorèmes énoncés par Liouville concernant les formes considérées.

Prenons par exemple les deux équations

$$2^\alpha m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$
$$2^\alpha m = x^2 + 16y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

Les nombres des solutions de ces équations sont déterminés dans le n° **40**, pour le cas où, α étant nul, $m = 8l+1$. Ces nombres sont nuls quand $\alpha = 1$, et aussi quand α est nul et que m est de l'une des formes $4n+3$, $8l+5$. Quand α est égal ou supérieur à 2, les équations proposées se ramènent respectivement aux deux suivantes

$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2,$$
$$2^{\alpha-2} m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

dont la théorie a été faite dans les n^{os} **29** et **30**. On obtient par là le théorème suivant, que Liouville a donné dans le septième Volume de son Journal (2^e série, p. 77).

XXXI. *Soit* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2).$$

1° $N = 0$:

$$si\ n = 4l + 3,\quad 8l + 5,\quad 4l + 2\ ou\ 4(4l + 3);$$

2° $n = 8l + 1$:

$$N = \tfrac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right],\qquad m = i^2 + 4s^2,\qquad i > 0;$$

3° $n = 4(4l + 1) = 4m$:

$$N = 2\zeta_1(m);$$

4° $\alpha \geqq 3$,

$$N = 0,\qquad N = 8\zeta_1(m),\qquad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, $\alpha \geqq 5$.

Liouville a étudié la forme (1, 8, 8, 16) dans le Volume cité (p. 13); il énonce les résultats auxquels nous sommes parvenus ci-dessus.

45. On obtient aussi aisément les nombres des solutions des deux équations

$$(\alpha)\qquad 2^\alpha m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

$$(\beta)\qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

dont Liouville s'est occupé dans le Volume cité (p. 117, 105). Si l'on désigne ces deux nombres de solutions par $N(2^\alpha m)$ et par $\mathfrak{N}(2^\alpha m)$, on a entre eux les relations suivantes (n° **39**)

$$N(4n + 1) = 2\mathfrak{N}(4n + 1),\qquad N(4n + 3) = \mathfrak{N}(4n + 3) = 0.$$

On a aussi $\mathfrak{N}(2m) = 0$ quand $\alpha = 1$; pour les valeurs de α supérieures à 1, les équations proposées se ramènent à l'équation

$$(D)\qquad 2^{\alpha-2} m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXI (n° **28**). Il reste à chercher le nombre $N(2m)$ des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

Les deux nombres x, y étant impairs, on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x = p + q \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, 2);$$

on ramène ainsi l'équation proposée à la suivante :

$$m = p^2 + q^2 + 8z^2 + 8t^2.$$

On a ainsi (n° **37**)

$$N(2m) = 0 \qquad \text{ou} \qquad N(2m) = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right],$$

suivant que l'on a $m = 4l + 3$ ou $m = 4l + 1 = i^2 + 4s^2$ $(i > 0)$.

Quant au nombre $\mathfrak{N}(4n + 1)$, il est exprimé (n° **41**) par la formule

$$\mathfrak{N}(m) = \tfrac{1}{2}\zeta_1(m) + \tfrac{1}{2}\left[2 + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right] \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$m = i^2 + 4s^2 \qquad (i > 0).$$

En réunissant ces résultats, nous obtenons les théorèmes de Liouville, énoncés dans les deux passages cités :

XXXII. *Désignons par* $\mathfrak{N}$ *le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

On a $\mathfrak{N} = 0$ *si* n *est de l'une des formes* $4l + 3$, $4l + 2$, $4(4l + 3)$.

$$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] \quad si \quad m = 8l + 1, \quad \alpha = 0,$$
$$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] \quad si \quad m = 8l + 5, \quad \alpha = 0.$$

Pour $\alpha = 2$, *on a*

$$\mathfrak{N} = 4\zeta_1(m) \qquad ou \qquad \mathfrak{N} = 0,$$

suivant que $m = 4l + 1$ *ou* $4l + 3$.

Pour $\alpha > 2$, *on a*

$$\mathfrak{N} = 4\zeta_1(m), \qquad \mathfrak{N} = 8\zeta_1(m), \qquad \mathfrak{N} = 24\zeta_1(m),$$

suivant que α *est égal à* 3, *à* 4, *ou qu'il est supérieur à* 4.

XXXIII. *Désignons par* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2$$

et par $\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$ *une somme relative aux valeurs entières et positives de i qui peuvent figurer dans l'équation*

$$m = i^2 + 4s^2.$$

Le nombre N *est déterminé par les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$\mathrm{N} = 0 \qquad ou \qquad \mathrm{N} = \zeta_1(m) + \left[2 + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

suivant que m est de la forme $4l+3$ *ou de la forme* $4l+1$.

2° $\alpha = 1$:

$$\mathrm{N} = 0 \qquad ou \qquad \mathrm{N} = 2\zeta_1(m) + 2(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

suivant que l'on a $m = 4l+3$ *ou* $m = 4l+1$.

3° $\alpha = 2$:

$$\mathrm{N} = 0 \qquad ou \qquad \mathrm{N} = 4\zeta_1(m),$$

suivant que $m = 4l+3$ *ou* $4l+1$.

4° $\alpha \geqq 3$:

$$\mathrm{N} = 4\zeta_1(m), \qquad \mathrm{N} = 8\zeta_1(m) \qquad ou \qquad \mathrm{N} = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, $\alpha \geqq 5$.

46. La forme $(1, 2, 8, 16)$ ne peut représenter que des nombres pairs et des nombres impairs de l'une des deux formes $8l+1$, $8l+3$. Nous avons trouvé (n° **43**) que le nombre des représentations d'un nombre impair m par cette forme est égal à

$$\zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \quad \text{ou à} \quad \zeta_1(m),$$

suivant que m est de la forme $8l+1$ ou de la forme $8l+3$. Pour les nombres pairs, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

exige que la valeur de x soit paire; elle se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + 2x_1^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXVI (n° **34**).

Nous obtenons ainsi le théorème énoncé par Liouville à la page 153 du Volume cité :

XXXIV. *Le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

est exprimé, suivant les cas, par l'une des formules suivantes :

1° $\alpha = 0$:

$$m = 8l+5 \quad ou \quad 8l+7, \qquad N = 0,$$
$$m = 8l+1 \quad ou \quad 8l+3, \qquad N = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \quad ou \quad \zeta_1(m);$$

2° $\alpha = 1$:

$$N = \zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \qquad ou \qquad N = \zeta_1(m),$$

suivant que $m = 4l+1$ *ou* $4l+3$;

3° $\alpha \geqq 2$:

$$N = 2\zeta_1(m), \qquad N = 4\zeta_1(m), \qquad N = 8\zeta_1(m), \qquad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ ou $\alpha > 4$.

47. La forme $(1, 2, 2, 16)$ peut représenter tous les nombres entiers, excepté les nombres impairs de la forme $8l + 7$. Pour les autres nombres impairs, nous avons trouvé (n° **43**) que le nombre de leurs représentations par la forme $(1, 2, 2, 16)$ est égal à

$$\zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \quad \text{si } m = i^2 + 4s^2 \quad (i > 0);$$

à

$$2\zeta_1(m) \quad \text{si } m = 8l + 3.$$

Pour les nombres pairs, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + z^2 + 2x_1^2 + 8t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXVII (n° **35**).

En réunissant ces résultats, nous obtenons le théorème énoncé par Liouville à la page 161 du Volume cité :

XXXV. *Soit* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2;$$

désignons par $\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$ *une somme dont les éléments correspondent aux diverses solutions de l'équation*

$$m = i^2 + 4s^2$$

en nombres entiers i, s, *le premier, positif, et le second, indifférem-*

ment positif, négatif ou nul. Le nombre N *est exprimé, suivant les cas, par les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$N = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} \quad si\ m = 4l+1,$$

$$N = 2\zeta_1(m) \quad si\ m = 8l+3, \qquad N = 0 \quad si\ m = 8l+7;$$

2° $\alpha = 1$:

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] \quad si\ m = 4l+1,$$

$$N = 2\zeta_1(m) \quad si\ m = 4l+3;$$

3° $\alpha = 2$:

$$N = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m);$$

4° $\alpha \geqq 3$:

$$N = 12\zeta_1(m), \quad 8\zeta_1(m) \quad ou \quad 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ *ou* $\alpha > 4$.

48. L'emploi de la fonction

$$\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

montre que Liouville a déduit des relations entre les séries elliptiques plusieurs de ses théorèmes relatifs à la théorie des formes quadratiques quaternaires. On peut résoudre les mêmes questions avec les formules générales données dans la première section; mais, au lieu de la somme relative aux valeurs entières et positives de i qui figurent dans les solutions de l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

on trouve une autre fonction numérique dont le calcul est plus compliqué. Pour l'obtenir, on décompose le double du nombre impair m en deux parties impaires et positives

$$(a) \qquad 2m = m' + m'';$$

puis, pour chaque décomposition, on calcule pour chacun des deux nombres m', m'' l'excès du nombre des diviseurs $16l+(1,7)$ sur le nombre des diviseurs $16l+(9,15)$, et l'on désigne ces deux nombres par $E_1(m')$, $E_1(m'')$; on calcule aussi l'excès $E_2(m')$ du nombre des diviseurs $16l+(3,5)$ de m' sur le nombre des diviseurs $16l+(11,13)$; on détermine le nombre analogue $E_2(m'')$; enfin on forme la somme

$$E_1(m')E_1(m'')+E_2(m')E_2(m''),$$

que l'on multiplie par $(-1)^{\frac{m'-1}{2}}$. La somme de tous les produits semblables qui correspondent aux diverses décompositions de $2m$ en deux parties impaires et positives peut remplacer, dans les théorèmes précédents, la fonction introduite par les formules empruntées à la théorie des fonctions elliptiques. Les deux fonctions sont reliées entre elles par la relation

$$\begin{aligned}\Sigma(-1)^{\frac{m'-1}{2}}&[E_1(m')E_1(m'')+E_2(m')E_2(m'')]\\ &=(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.\end{aligned}$$

On abrège le calcul de la première fonction en observant que

$$\begin{aligned}
E_1(m)&=0, &&\text{si } m=16l+(9,15),\\
E_2(m)&=0, &&\text{si } m=16l+(1,7),\\
E_1(m)&=E_2(m), &&\text{si } m=16l+(3,5),\\
E_1(m)&=-E_2(m), &&\text{si } m=16l+(11,13).
\end{aligned}$$

Pour plusieurs des formes quadratiques précédentes, Liouville a distingué le nombre des solutions propres, dans lesquelles le plus grand diviseur commun des quatre indéterminées est égal à 1. Il a fait la même distinction pour plusieurs des équations dont nous avons encore à nous occuper. Le mode de démonstration étant le même pour toutes ces équations, il est avantageux de les reprendre ensemble à ce point de vue.