JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

AUGUST GUTZMER

Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur

Journal de mathématiques pures et appliquées 4e série, tome 6 (1890), p. 405-422.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1890_4_6__405_0>

Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur;

PAR M. AUGUST GUTZMER, A BERLIN.

Dans son *Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre* $\Delta\Delta u = 0$ *et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide* (1), É. Mathieu a étudié l'équation

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\,\partial z^2} = 0,$$

obtenue en appliquant à l'expression

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

encore une fois l'opération indiquée par la caractéristique Δ, et ce géomètre a introduit la définition du second potentiel, fonction w de x, y, z qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta w = 0,$$

(1) *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XIV, p. 378-421; 1869. *Voir* aussi la *Théorie du potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme,* du même auteur.

si le point (x, y, z) se trouve en dehors d'une masse distribuée dans un volume ω, et à l'équation

$$\Delta\Delta w = -8\pi\varphi(x, y, z),$$

si le point (x, y, z) est situé à l'intérieur de ω et où φ désigne la densité de la masse. En particulier, Mathieu s'est occupé du cas spécial où l'équation $\Delta\Delta u = 0$ est réduite à deux coordonnées. L'étude du Mémoire cité nous a fait reconnaître qu'on peut aisément étendre, d'une manière générale, les formules et les résultats qui y sont contenus; c'est ce que nous nous proposons de faire voir dans ces remarques.

1. Occupons-nous d'abord de l'expression

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

réduite à deux coordonnées. En y appliquant l'opération Δ, nous aurons

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4};$$

de même nous trouvons

$$\Delta^3 u = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}.$$

En continuant de cette manière, on obtiendra généralement

$$\Delta^n u = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + \binom{n}{1}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-2}\partial y^2} + \binom{n}{2}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-4}\partial y^4} + \ldots + \binom{n}{n-1}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^2 \partial y^{2n-2}} + \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}},$$

comme on démontre aisément par induction. C'est à de telles équations que se rapportent ces remarques.

2. On sait que l'équation

$$\Delta u = 0$$

est remplie par $u = \log\frac{1}{r}$ et donc de même par

$$u_0 = \log\frac{1}{r} + 1,$$

où

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Or, Mathieu a trouvé que la fonction

$$u_1 = r^2 \log\frac{1}{r} + r^2$$

satisfait à l'équation

$$\Delta u_1 = 4 \log\frac{1}{r} = 4 u_0 - 4,$$

et par conséquent à l'équation

$$\Delta^2 u_1 = 0.$$

Nous avons

$$u_1 = r^2 u_0;$$

cherchons donc si la fonction

$$u_2 = r^2 u_1 = r^4 u_0 = r^4 \log\frac{1}{r} + r^4$$

satisfait à l'équation

$$\Delta^3 u = 0.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \Delta\, u_2 &= 16 u_1 - 8 r^2, \\ \Delta^2 u_2 &= 64 u_0 - 96, \\ \Delta^3 u_2 &= 0. \end{aligned}$$

En considérant maintenant généralement la fonction

$$u_\lambda = r^{2\lambda}\left(\log\frac{1}{r} + 1\right),$$

on trouve aisément

$$\Delta\, u_\lambda = 2^2\lambda^2 u_{\lambda-1} \qquad\qquad - 2^2\lambda r^{2\lambda-2},$$

$$\Delta^2 u_\lambda = 2^4\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-2)!}\right]^2 u_{\lambda-2} - 2^4\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-2)!}\right]^2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}\right)r^{2\lambda-4},$$

$$\Delta^3 u_\lambda = 2^6\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-3)!}\right]^2 u_{\lambda-3} - 2^6\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-3)!}\right]^2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-2}\right)r^{2\lambda-6}, \ldots$$

et, généralement,

$$\Delta^\nu u_\lambda = 2^{2\nu}\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!}\right]^2 u_{\lambda-\nu} - 2^{2\nu}\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!}\right]^2\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{1}{\lambda-k}\,r^{2(\lambda-\nu)}.$$

On voit immédiatement qu'on aura

$$\Delta^\lambda u_\lambda = \mathrm{A}\,u_0 + \mathrm{B};$$

donc la fonction u_λ satisfera à l'équation

$$\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0.$$

Comme $u_0, u_1, \ldots, u_{\lambda-1}$ satisfont déjà à des équations d'ordre inférieur, ces fonctions rempliront identiquement la dernière équation; d'où l'on conclut que l'équation

$$\Delta^n u = 0$$

aura la solution

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \\ &= \left(\log\frac{1}{r}+1\right)\left(r^0 + r^1 + \ldots + r^{2(n-1)}\right), \end{aligned}$$

ou, plus généralement,

$$u = g_{n-1}(r^2) + \log\frac{1}{r}\,h_{n-1}(r^2),$$

où l'on a désigné par $g_{n-1}(r^2)$ et $h_{n-1}(r^2)$ deux fonctions entières de degré $(n-1)$.

3. Soient maintenant

$$\varphi_0(a, b), \qquad \varphi_1(a, b), \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-1}(a, b)$$

n fonctions des coordonnées (a, b) d'un point situé à l'intérieur d'une partie ω du plan limitée par une courbe fermée, et supposons que ces fonctions s'annulent pour tous les points à l'extérieur de ω; considérons alors les expressions

$$\begin{aligned} v_1 &= \int u_0 \varphi_0(a, b)\, d\omega, \\ v_2 &= \int u_1 \varphi_1(a, b)\, d\omega, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_n &= \int u_{n-1} \varphi_{n-1}(a, b)\, d\omega, \end{aligned}$$

où l'intégration se fait sur tous les éléments de ω. Évidemment la fonction

$$v_\lambda = \int u_{\lambda-1}\varphi_{\lambda-1}(a, b)\, d\omega = \int r^{2(\lambda-1)}\left(\log\frac{1}{r} + 1\right)\varphi_{\lambda-1}(a, b)\, d\omega$$

satisfait à l'équation

$$\Delta^\lambda v_\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

si le point (x, y) se trouve à l'extérieur de ω; donc on a, dans ce cas, en posant

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

l'équation

$$\Delta^n V = 0.$$

Si, au contraire, le point (x, y) est un point intérieur à ω, on a, comme on sait,

$$\Delta v_1 = -2\pi\varphi_0(x, y).$$

Or, en profitant des relations des u_λ (n° **2**), on a, généralement,

$$\Delta v_2 = 4 v_1^{(1)} - 4\int \varphi_1(a, b)\,d\omega,$$

où $v_1^{(1)}$ est la valeur de v_1 qu'on obtient en y substituant $\varphi_1(a, b)$ au lieu de $\varphi_0(a, b)$. A l'aide de l'équation précédente on peut donc conclure que, pour un point intérieur,

$$\Delta^2 v_2 = -8\pi\varphi_1(x, y).$$

En continuant de cette manière, on trouvera aisément que, pour un point intérieur de ω, on a

$$\Delta^\lambda v_\lambda = -2^{2\lambda-1}[(\lambda-1)!]^2\pi\varphi_{\lambda-1}(x, y),$$

équation correspondant à celle de Poisson. La somme V satisfait évidemment à l'équation

$$\Delta^n V = -\pi\sum_{\lambda=1}^{n} 2^{2\lambda-1}[(\lambda-1)!]^2\Delta^{n-\lambda}\varphi_{\lambda-1}(x, y),$$

où $\Delta^0 u$ est égal à u.

Il n'y aurait pas de difficulté à donner un sens physique à ces fonctions v_λ, comme Mathieu l'a fait pour le cas $n = 2$, et l'on appellera donc $v_1, v_2, \ldots, v_n$ le premier, le deuxième, ..., le $n^{\text{ième}}$ potentiel de n couches de matière répandues sur ω avec les densités $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ et qui agissent d'après des lois qu'on peut trouver des fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. D'ailleurs le potentiel v_1 diffère du potentiel logarithmique ordinaire d'une constante $M = \int\varphi_0(a, b)\,d\omega$, égale à la masse d'une couche de matière répandue sur ω avec la densité φ_0. Nous avons introduit cette constante pour plus d'uniformité et de généralité dans les formules.

Il se comprend de soi-même qu'il faut supposer pour ces fonctions certaines conditions de continuité remplies pour que les opérations aient un sens.

4. En considérant maintenant le cas où u est une fonction des trois variables (x, y, z), nous partirons de

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

d'où nous tirons

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2},$$

$$\Delta^3 u = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial z^6} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial z^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial y^4 \partial z^2}$$
$$+ 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial z^4} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial y^2 \partial z^4} + 6\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$$

et, en général,

$$\Delta^n u = \sum_{\substack{\lambda, \mu, \nu = 0 \\ (\lambda+\mu+\nu=n)}}^{n} \frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2\lambda} \partial y^{2\mu} \partial z^{2\nu}}.$$

Or, l'équation $\Delta u = 0$ est remplie par $u = \frac{1}{r}$ et $u = r^0 = 1$; donc nous posons

$$u_0 = \frac{1}{r} + 1,$$

où

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2,$$

cette fonction satisfera à l'équation $\Delta u = 0$. Si nous prenons maintenant, comme au cas considéré au n° **2**,

$$u_1 = r^2 u_0 = r^2\left(\frac{1}{r} + 1\right),$$

nous aurons

$$\Delta u_1 = \frac{2}{r} + 6 = 2u_0 + 4;$$

donc

$$\Delta^2 u_1 = 0.$$

En considérant généralement

$$u_\lambda = r^{2\lambda}\left(\frac{1}{r} + 1\right),$$

on aura

$$\Delta\, u_\lambda = 2\lambda(2\lambda-1)\,u_{\lambda-1} + 2.2\lambda r^{2\lambda-2},$$
$$\Delta^2 u_\lambda = 2\lambda(2\lambda-1)(2\lambda-2)(2\lambda-3)u_{\lambda-2} + 2.2.2\lambda(2\lambda-1)(2\lambda-2)r^{2\lambda-4},$$
$$\Delta^3 u_\lambda = 2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-5)u_{\lambda-3} + 2.3.2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-4)r^{2\lambda-6},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$
$$\Delta^\nu u_\lambda = \frac{(2\lambda)!}{(2\lambda-2\nu)!}\,u_{\lambda-\nu} + 2\nu\,\frac{(2\lambda)!}{(2\lambda-2\nu+1)!}\,r^{2\lambda-2\nu}.$$

On conclut de cette équation immédiatement que

$$\Delta^\lambda u_\lambda = (2\lambda)!\,u_0 + 2\lambda(2\lambda)!,$$

et, par suite, la fonction u_λ satisfait à l'équation

$$\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0.$$

Comme on a aussi identiquement $\Delta^{\lambda+k} u_\lambda = 0$ pour $k = 2, 3, \ldots$, la somme des n fonctions

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$
$$= \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \ldots + r^{2n-3} + r^{2n-2},$$

ou, plus généralement, la fonction

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r} h_{n-1}(r^2),$$

où g_{n-1} et h_{n-1} sont deux fonctions entières de degré $(n-1)$, satisfera à l'équation

$$\Delta^n u = 0.$$

5. Si nous désignons maintenant par $\varphi_0(a, b, c)$, $\varphi_1(a, b, c)$, $\ldots$, $\varphi_{n-1}(a, b, c)$, n fonctions des points (a, b, c), situés à l'intérieur d'un volume ω de l'espace, et si nous supposons que ces fonctions s'évanouissent au dehors de ω, il est aisé de démontrer que les expressions

$$\begin{aligned}
v_1 &= \int u_0 \varphi_0(a, b, c)\, d\omega, \\
v_2 &= \int u_1 \varphi_1(a, b, c)\, d\omega, \\
&\dots\dots\dots\dots, \\
v_n &= \int u_{n-1} \varphi_{n-1}(a, b, c)\, d\omega,
\end{aligned}$$

où l'on intègre sur tous les éléments de ω, remplissent respectivement les équations

$$\Delta v_1 = 0, \qquad \Delta^2 v_2 = 0, \qquad \dots, \qquad \Delta^n v_n = 0,$$

pourvu que le point (x, y, z) se trouve à l'extérieur de ω; de même la somme $V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ satisfera à l'équation $\Delta^n u = 0$ pour un point extérieur. Dans le cas contraire, on part de l'équation de Poisson

$$\Delta v_1 = -4\pi\varphi_0(x, y, z),$$

et, en profitant de l'expression de $\Delta^\nu u_\lambda$ (n° **4**), on obtient facilement

$$\Delta^2 v_2 = -8\pi\varphi_1(x, y, z),$$

et, généralement,

$$\Delta^\lambda v_\lambda = -(2\lambda - 2)!\, 4\pi\varphi_{\lambda-1}(x, y, z),$$

de sorte que V satisfait, pour un point intérieur, à l'équation

$$\Delta^n V = -4\pi \sum_{\lambda=1}^{n} (2\lambda - 2)!\, \Delta^{n-\lambda} \varphi_{\lambda-1}(x, y, z).$$

Comme au cas considéré au n° **3**, on désignera les fonctions v_1, v_2, ..., v_n sous les noms de premier, de deuxième, ..., de $n^{\text{ième}}$ potentiel. Chaque potentiel est composé de deux parties dont l'une a l'exposant de r impair et l'autre pair, de même qu'on a, dans le cas de deux coordonnées, une partie logarithmique et une autre où l'exposant de r est un nombre pair. D'ailleurs, notre définition diffère un peu de celle de Mathieu pour le cas $n = 2$, ainsi que v_1 diffère d'une constante $M = \int \varphi_0(a, b, c)\, d\omega$ du potentiel newtonien $\int \frac{\varphi_0(a, b, c)}{r}\, d\omega$.

6. Les mêmes considérations que nous venons d'employer pour les deux cas où u est fonction de deux ou de trois variables peuvent servir pour le cas général où u est une fonction de ρ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$. On sait que la fonction

$$u = \frac{1}{r^{\rho-2}}, \qquad \text{où} \qquad r^2 = \sum_{i=1}^{\rho} (x_i - a_i)^2,$$

satisfait à l'équation

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Sans entrer dans plus de détail, remarquons seulement qu'il y a *une différence essentielle* entre le cas où ρ est un *nombre impair* et celui où ρ est un *nombre pair*.

Dans le premier cas, on peut poser

$$u_0 = \frac{1}{r^{\rho-2}} + 1,$$

$$u_0 = r^2\left(\frac{1}{r^{\rho-2}} + 1\right),$$

$$u_2 = r^4\left(\frac{1}{r^{\rho-2}} + 1\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_\lambda = r^{2\lambda}\left(\frac{1}{r^{\rho-2}} + 1\right),$$

et l'on voit aisément que ces expressions remplissent respectivement les équations

$$\Delta u_0 = 0, \qquad \Delta^2 u_1 = 0, \qquad \Delta^3 u_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0,$$

de sorte que

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

ou encore plus généralement

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r^{\rho-2}} h_{n-1}(r^2),$$

où g_{n-1} et h_{n-1} sont deux fonctions entières de degré $(n-1)$, représente une solution de l'équation

$$\Delta^n u = 0.$$

Avec ces fonctions u_λ, on peut former des potentiels des différents ordres, et il est évident que chaque potentiel est composé de deux parties, dont l'une a l'exposant de r impair et l'autre pair.

Mais si ρ est un nombre pair, soit $\rho = 2\sigma$, il n'est pas possible d'avoir des puissances impaires de r, parce qu'elles se réduiraient successivement à r, $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{r^3}$, $\ldots$, $\frac{1}{r^{\rho-3}}$, $\frac{1}{r^{\rho-1}}$, $\ldots$, dont aucune ne satisfait à l'équation $\Delta u = 0$. Or on reconnaît facilement que les fonctions

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1,\\
u_1 &= r^2\left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1\right),\\
u_2 &= r^4\left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{\sigma-2} &= r^{2\sigma-4}\left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1\right)
\end{aligned}$$

satisfont respectivement aux équations

$$\Delta u_0 = 0, \qquad \Delta^2 u_1 = 0, \qquad \Delta^3 u_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{\sigma-1} u_{\sigma-2} = 0.$$

Mais si nous cherchons maintenant une fonction analogue u_λ, satisfaisant à l'équation $\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0$ où $\lambda > \sigma - 2$, *il faut introduire la fonc-*

tion $\log\frac{1}{r}$. En effet, on vérifiera sans difficulté que les fonctions

$$\begin{aligned}
u_{\sigma-1} &= \log\frac{1}{r} + r^{2\sigma-2},\\
u_{\sigma} &= r^2\left(\log\frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}\right),\\
u_{\sigma+1} &= r^4\left(\log\frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
u_{\sigma+\lambda} &= r^{2\lambda+2}\left(\log\frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}\right)
\end{aligned}$$

remplissent respectivement les équations

$$\Delta^\sigma u_{\sigma-1} = 0, \qquad \Delta^{\sigma+1} u_\sigma = 0, \qquad \Delta^{\sigma+2} u_{\sigma+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{\sigma+\lambda+1} u_{\sigma+\lambda} = 0.$$

L'équation

$$\Delta^n u = 0,$$

où nous supposons $\rho = 2\sigma$ et $n > \sigma - 1$, soit $n = \sigma - 1 + \nu$, sera donc remplie par la somme

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_{\sigma-2} + u_{\sigma-1} + u_\sigma + \ldots + u_{n-1}$$

qui contient $\nu = n + 1 - \sigma = n - \frac{\rho-2}{2}$ expressions logarithmiques. Évidemment on a aussi cette solution plus générale

$$u = \frac{1}{r^{2\sigma-2}} g_{n+\sigma-2}(r^2) + \log\frac{1}{r} h_{n-\sigma}(r^2),$$

où g et h sont deux fonctions entières dont les degrés sont indiqués par les indices. Pour $\rho = 2$ ou $\sigma = 1$, tout est d'accord avec le n° **2**. Il est clair que les potentiels d'ordre supérieur qu'on peut former avec ces fonctions u_λ offrent de grandes analogies avec ceux que nous avons considérés au n° **3**.

7. Dans le n° **6**, nous avons trouvé que l'équation

$$\Delta^n u = 0 \tag{1}$$

a l'intégrale

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r^{\rho-2}} h_{n-1}(r^2), \tag{2}$$

ou

$$u = \frac{1}{r^{2\sigma-2}} g_{n+\sigma-2}(r^2) + \log\frac{1}{r}\, h_{n-\sigma}(r^2), \tag{3}$$

suivant que ρ est un nombre impair ou un nombre pair; on voit de plus que cette intégrale contient $2n$ constantes arbitraires.

Or, il peut être démontré que ces expressions (2) et (3) sont les fonctions les plus générales de r qui satisfont à l'équation (1). C'est ce que nous voulons faire voir dans ce numéro.

En effet, si nous supposons que u n'est fonction que de r, l'équation

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

se transformera aisément dans une équation différentielle linéaire et homogène

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\rho - 1}{r} \frac{du}{dr} = 0. \tag{4}$$

En réitérant l'opération Δ, on obtient $\Delta^2 u = 0$ ou

$$\frac{d^4 u}{dr^4} + 2\frac{\rho-1}{r}\frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^3}\frac{du}{dr} = 0.$$

De même on verra que l'équation $\Delta^3 u = 0$ se transformera dans

$$\begin{aligned}\frac{d^6 u}{dr^6} &+ 3\frac{\rho-1}{r}\frac{d^5 u}{dr^5} + 3\cdot\frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^2}\frac{d^4 u}{dr^4} \\ &+ \frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-8)}{r^3}\frac{d^3 u}{dr^3} - 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-5)}{r^4}\frac{d^2 u}{dr^2} \\ &+ 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-5)}{r^5}\frac{du}{dr} = 0.\end{aligned}$$

En continuant de cette manière on reconnaîtra que l'équation $\Delta^n u = 0$ se transforme dans une équation différentielle linéaire de la forme

$$\frac{d^{2n} u}{dr^{2n}} + \frac{\mathcal{A}_1}{r} \frac{d^{2n-1} u}{dr^{2n-1}} + \frac{\mathcal{A}_2}{r^2} \frac{d^{2n-2} u}{dr^{2n-2}} + \cdots + \frac{\mathcal{A}_{2n-1}}{r^{2n-1}} \frac{du}{dr} = 0,$$

où les $\mathcal{A}$ sont des constantes qui ne dépendent que de ρ, et que cette équation a l'intégrale générale de la forme (2) ou (3), suivant que ρ est un nombre impair ou un nombre pair.

Il y a encore une autre démonstration de ce même fait, laquelle mon ami, M. P. Günther, m'a communiquée et que je reproduis ici.

On voit aisément que l'équation (4) peut être écrite de cette manière :

$$r^{1-\rho} \frac{d}{dr}\left(r^{\rho-1} \frac{du}{dr}\right) = 0,$$

de sorte que l'équation réitérée devient

$$\Delta^n u = r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr} r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr} \cdots r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr} u = 0,$$

où l'on a employé n fois l'opération

$$r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr}.$$

Or, si l'on a généralement l'équation

$$t^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m} \frac{d}{dt} t^{-\mu_1} \frac{d}{dt} t^{-\mu_2} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} t^{-\mu_m} \frac{dy}{dt} = 0,$$

elle prendra la forme

$$\frac{d^{m+1} y}{dt^{m+1}} + \frac{\mathcal{A}_1}{t} \frac{d^m y}{dt^m} + \cdots + \frac{\mathcal{A}_m}{t^m} \frac{dy}{dt} = 0,$$

comme on reconnaît de ce fait que ses intégrales linéairement indépendantes

$$y_\alpha = \int_1^t t^{\mu_m} dt \int_1^t \cdots \int_1^t t^{\mu_\alpha} dt \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

$$y_{m+1} = 1,$$

n'ont que les deux points singuliers $t = 0$ et $t = \infty$ et qu'elles n'y deviennent pas indéterminées, parce qu'elles sont des expressions du caractère $\mathfrak{J}$ (1) appartenant, pour $t = 0$, respectivement aux exposants

$$(5)\quad \begin{cases} p_\alpha \;\; = \mu_m + \mu_{m-1} + \ldots + \mu_\alpha + m - \alpha + 1 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m); \\ p_{m+1} = 0. \end{cases}$$

Ces exposants sont les racines de l'équation déterminante (d'après M. Fuchs)

$$p(p-1)\ldots(p-m) + \mathcal{A}_1 p(p-1)\ldots(p-m+1) + \ldots + \mathcal{A}_m p = 0$$

et ils peuvent servir à trouver les expressions des constantes $\mathcal{A}$, à l'aide de leurs valeurs (5).

En appliquant à l'équation $\Delta^n u = 0$ ces remarques tirées d'un Mémoire de M. P. Günther : *Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, qui sera publié prochainement, on a

$$(6)\quad \begin{cases} m \;\;\;\; = 2n - 1, \\ p_{2i} \;\;\; = 2n - 2i, \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ p_{2i+1} = 2n - \rho - 2i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ p_{2n} \;\;\; = 0. \end{cases}$$

Si ρ est un nombre impair, il ne peut jamais arriver que deux racines de l'équation déterminante soient égales : donc l'équation $\Delta^n u = 0$ a les intégrales linéairement indépendantes

$$u_\alpha = r^{p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Mais si ρ est un nombre pair, il vient, en posant $2n = \rho + 2h$,

$$p_1 = p_{2n-2h}, \qquad p_3 = p_{2n-2h+2}, \qquad \ldots, \qquad p_{2h+1} = p_{2n},$$

---

(1) *Voir* le Mémoire de M. Fuchs, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXVI, p. 155.

et il est aisé de voir qu'il n'y a pas d'autres égalités entre ces racines. De là on conclut, d'après les principes de la théorie des équations différentielles linéaires, que les intégrales

$$r^{p_{2n-2h}}, \quad r^{p_{2n-2h+2}}, \quad \ldots, \quad r^{p_{2n}},$$

doivent être remplacées par celles-ci

$$r^{p_1}\log r, \quad r^{p_3}\log r, \quad \ldots, \quad r^{p_{2h+1}}\log r.$$

En ayant égard aux expressions (6), on voit aisément que l'intégrale générale de l'équation (1) est de la forme (2) ou (3) selon que ρ est un nombre impair ou un nombre pair, ce qui démontre que ces expressions représentent en effet les fonctions les plus générales de r qui remplissent $\Delta^n u = 0$.

Le cas où ρ est un nombre pair peut donc être désigné généralement, dans le sens expliqué, comme le cas logarithmique.

8. Finissons ces remarques par un mot sur la formule de Green

$$(1) \qquad \int (U\Delta V - V\Delta U)\,d\omega = \int \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma,$$

où U et V désignent deux fonctions des coordonnées d'un espace [1] ω limité par σ et où n désigne la normale de l'élément $d\sigma$ dirigée vers l'intérieur de σ.

Si l'on remplace dans la formule (1) U par ΔU, il vient

$$\int (\Delta U\,\Delta V - V\Delta^2 U)\,d\omega = \int \left(V\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma,$$

et si l'on remplace de même dans (1) V par ΔV, on aura

$$\int (U\Delta^2 V - \Delta U\,\Delta V)\,d\omega = \int \left(\Delta V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right) d\sigma.$$

---

(1) La formule subsiste encore si ω est un espace de ρ dimensions limité par un espace σ de $\rho - 1$ dimensions. *Voir* C. Neumann, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XII; 1867, et Beltrami, *Memorie dell' Accademia di Bologna*, 2e série, t. VIII; 1868.

En ajoutant ces deux équations, on obtient

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&\int(\mathrm{U}\Delta^2\mathrm{V}-\mathrm{V}\Delta^2\mathrm{U})\,d\omega\\&\quad=\int\left(\mathrm{V}\frac{\partial\Delta\mathrm{U}}{\partial n}-\mathrm{U}\frac{\partial\Delta\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma+\int\left(\Delta\mathrm{V}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial n}-\Delta\mathrm{U}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma.\end{aligned}\right.$$

Cette formule généralisée de Green a été donnée par Mathieu, mais on peut la généraliser encore davantage. En effet, si l'on remplace dans (2) V par $\Delta\mathrm{V}$, il vient

$$\begin{aligned}&\int(\mathrm{U}\Delta^3\mathrm{V}-\Delta\mathrm{V}\Delta^2\mathrm{U})\,d\omega\\&\quad=\int\left(\Delta\mathrm{V}\frac{\partial\Delta\mathrm{U}}{\partial n}-\mathrm{U}\frac{\partial\Delta^2\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma+\int\left(\Delta^2\mathrm{V}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial n}-\Delta\mathrm{U}\frac{\partial\Delta\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma.\end{aligned}$$

et remplaçant dans (2) U par $\Delta\mathrm{U}$, on a

$$\begin{aligned}&\int(\Delta\mathrm{U}\Delta^2\mathrm{V}-\mathrm{V}\Delta^3\mathrm{U})\,d\omega\\&\quad=\int\left(\mathrm{V}\frac{\partial\Delta^2\mathrm{U}}{\partial n}-\Delta\mathrm{U}\frac{\partial\Delta\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma+\int\left(\Delta\mathrm{V}\frac{\partial\Delta\mathrm{U}}{\partial n}-\Delta^2\mathrm{U}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma.\end{aligned}$$

En ajoutant ces deux dernières équations, on obtient

$$\begin{aligned}&\int(\mathrm{U}\Delta^3\mathrm{V}-\mathrm{V}\Delta^3\mathrm{U})\,d\omega+\int(\Delta\mathrm{U}\Delta^2\mathrm{V}-\Delta\mathrm{V}\Delta^2\mathrm{U})\,d\omega\\&\quad=\int\left(\mathrm{V}\frac{\partial\Delta^2\mathrm{U}}{\partial n}-\mathrm{U}\frac{\partial\Delta^2\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma\\&\qquad+2\int\left(\Delta\mathrm{V}\frac{\partial\Delta\mathrm{U}}{\partial n}-\Delta\mathrm{U}\frac{\partial\Delta\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma+\int\left(\Delta^2\mathrm{V}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial n}-\Delta^2\mathrm{U}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma.\end{aligned}$$

Or l'équation (1) nous donne, en y remplaçant U et V par $\Delta\mathrm{U}$ et $\Delta\mathrm{V}$,

$$\int(\Delta\mathrm{U}\Delta^2\mathrm{V}-\Delta\mathrm{V}\Delta^2\mathrm{U})\,d\omega=\int\left(\Delta\mathrm{V}\frac{\partial\Delta\mathrm{U}}{\partial n}-\Delta\mathrm{U}\frac{\partial\Delta\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma;$$

la soustraction de cette équation de la précédente donnera donc

$$(3)\quad \begin{cases} \int (\mathrm{U}\Delta^3\mathrm{V} - \mathrm{V}\Delta^3\mathrm{U})\,d\omega \\ \quad = \int\left(\mathrm{V}\frac{\partial\Delta^2\mathrm{U}}{\partial n} - \mathrm{U}\frac{\partial\Delta^2\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma + \int\left(\Delta\mathrm{V}\frac{\partial\Delta\mathrm{U}}{\partial n} - \Delta\mathrm{U}\frac{\partial\Delta\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma \\ \qquad + \int\left(\Delta^2\mathrm{V}\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial n} - \Delta^2\mathrm{U}\frac{\partial\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma. \end{cases}$$

En continuant de cette manière, on arrive à démontrer cette formule

$$(\mathrm{G})\quad \begin{cases} \int (\mathrm{U}\Delta^m\mathrm{V} - \mathrm{V}\Delta^m\mathrm{U})\,d\omega \\ \quad = \sum_{\lambda=0}^{m-1}\int\left(\Delta^\lambda\mathrm{V}\frac{\partial\Delta^{m-1-\lambda}\mathrm{U}}{\partial n} - \Delta^\lambda\mathrm{U}\frac{\partial\Delta^{m-1-\lambda}\mathrm{V}}{\partial n}\right)d\sigma, \end{cases}$$

où

$$\Delta^0\mathrm{U} = \mathrm{U}.$$

L'équation (G) représente la généralisation du théorème de Green (pour $m = 1$). Elle joue dans l'étude des potentiels d'ordre supérieur un rôle analogue à celui de l'équation (1) dans la théorie du potentiel ordinaire ou à celui de l'équation (2) dans la théorie du deuxième potentiel. Nous n'entrons pas ici dans la recherche de ces applications de l'équation (G).

Les conditions de continuité qu'il faut imposer aux fonctions U et V et aux dérivées de ces fonctions sont aisées à reconnaître, c'est pourquoi nous ne les avons pas énoncées explicitement.